Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **19** (2019) **011303** (87-91) AKU J. Sci. Eng. **19** (2019) **011303** (87-91)

Doi: 10.35414/akufemubid.478536

Araştırma Makalesi / Research Article

Wijsman Quasi-Hemen Hemen İstatistiksel Cauchy Dizi

Esra Gülle

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar.

e-posta: egulle@aku.edu.tr

Geliş Tarihi: 05.11.2018; Kabul Tarihi: 06.02.2018

Anahtar kelimeler
Wijsman yakınsaklık; Küme değerli dizi; quasi-hemen hemen yakınsaklık; İstatistiksel yakınsaklık; Cauchy Dizi.

Öz

Bu araştırma makalesinde, küme değerli diziler için Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizi kavramı tanıtıldı. Ayrıca, tanıtılan bu yeni kavram ile daha önceden küme değerli diziler için verilen Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaklık ve Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiler incelendi.

Wijsman Quasi-Almost Statistical Cauchy Sequence

Keywords
Wijsman convergence; Set valued sequences; Quasi-almost convergence; Statistical convergence; Cauchy sequence.

Abstract

In this research article, the concept of Wijsman quasi-almost statistical Cauchy sequence for set valued sequences is introduced. Also, the relationships among this new concept introduced and the concepts of Wijsman quasi-almost convergence and Wijsman quasi-almost statistically convergence given previously for set valued sequences is examined.

1. Giriş

Hemen hemen yakınsaklık kavramı ilk olarak Banach limitleri yardımıyla Lorentz (1948) tarafından verilmiştir. Daha sonra bu kavram başta Maddox (1978) olmak üzere pek çok araştırmacı tarafından günümüze kadar geliştirilmiştir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ise ilk olarak Fast (1951) tarafından tanıtılmış; bu kavramın uygulamaları ve istatistiksel Cauchy dizi vb. gibi birkaç genelleştirmesi ile ilgili çalışmalar başta Salat (1980) ve Fridy (1985) olmak üzere pek çok araştırmacı tarafından günümüze kadar yapılmıştır.

Küme değerli diziler için verilen yakınsaklık kavramlarından biri olan "Wijsman yakınsaklık" kavramı da ilk olarak Wijsman (1964) tarafından yapılan bir çalışmada verilmiş ve bu kavram da başta Beer (1985, 1994) olmak üzere özellikle son zamanlarda pek çok araştırmacının çalışmalarına konu olmuştur. Wijsman yakınsaklık kavramı üzerine son zamanlarda Dündar vd. (2016, 2017), Gülle ve Ulusu (2018), Nuray vd. (2014a, 2014b, 2016), Sever vd. (2014), Ulusu ve Nuray (2012, 2013a, 2013b, 2015), Ulusu ve Dündar (2014), Ulusu ve Kişi (2017) ve Ulusu vd. (2018) tarafından yapılan çalışmalar bu kavramı tekrar göz önüne çıkartmış ve küme dizileri üzerine yeni bir çalışma alanı oluşturmuştur.

Hajduković (2002) normlu bir uzayda Banach limitleri yardımıyla quasi-hemen hemen yakınsaklık kavramını tanımlamış ve bu kavram ile bazı toplanabilme metotları arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Son zamanlarda, küme değerli diziler için Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaklık ve Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramları da Gülle ve Ulusu (2017) tarafından yapılan bir çalışmada verilmiştir.

2. Temel Kavramlar

Bu bölümde araştırma için gerekli olan bazı temel tanım ve notasyonlar verilmiştir. Bu kavramlar ve benzerleri Baronti ve Papini (1986), Beer (1985, 1994), Gülle ve Ulusu (2017), Fridy (1985), Lorentz (1948), Nuray ve Rhoades (2012) ve Wijsman (1964, 1966) tarafından yapılan çalışmalarda bulunabilir.

(x_k) reel dizisi için, $i = 1,2,\ldots$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k+i} = L$$

olacak biçimde bir L reel sayısı varsa, (x_k) reel dizisi L ye hemen hemen yakınsaktır denir.

(x_k) reel dizisi için, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak biçimde bir L reel sayısı varsa, (x_k) reel dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir. Yukarıda limiti alınan ifadedeki dikey çizgiler, içerisindeki kümenin eleman sayısını göstermektedir.

(x_k) reel dizisi için, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani, hemen hemen her k için

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir N sayısı varsa (x_k) reel dizisine istatistiksel Cauchy dizi denir.

X boştan farklı bir küme olsun. Bu durumda

$$g: \mathbb{N} \to P(X)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon $\forall k \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$$g(k) = E_k \in P(X)$$

kümesi belirler. Bu g fonksiyonu tarafından belirlenen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ kümeleri tarafından oluşturulan diziye küme dizisi denir.

Herhangi bir (X, ρ) metrik uzayında; $x \in X$ noktası ve boştan farklı $E \subset X$ kümesi için, $d(x, E)$ uzaklığı

$$d(x, E) = \inf\{\, \rho(x, a):\ a \in E\,\}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu araştırma makalesinde, bu noktadan itibaren aksi belirtilmedikçe (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olarak kabul edilecektir.

Her bir $x \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} d(x, A_k) = d(x, A)$$

olacak şekilde bir A kümesi varsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman yakınsaktır denir.

Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir A kümesi varsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır denir.

Her bir $x \in X$ için, $n = 1, 2, \ldots$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \left| \frac{1}{p} \sum_{k=np}^{np+p-1} d_x(A_k) - d_x(A) \right| = 0$$

olacak şekilde bir A kümesi varsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaktır denir ve

$$A_k \xrightarrow{WQF} A \quad \text{veya} \quad WQF - lim A_k = A$$

biçiminde gösterilir.

Burada $d_x(A_k) = d(x, A_k)$ ve $d_x(A) = d(x, A)$ olarak kullanılmıştır.

Her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left|\{k \leq p: \left|d_x\left(A_{k+np}\right) - d_x(A)\right| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir A kümesi varsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$A_k \xrightarrow{WQS} A \text{ veya } WQS - lim A_k = A$$

biçiminde gösterilir.

3. Wijsman Quasi-Hemen Hemen İstatistiksel Cauchy Dizi

Bu bölümde, küme değerli diziler için Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizi kavramı tanıtıldı. Ayrıca, tanıtılan bu yeni kavram ile daha önceden küme değerli diziler için verilen Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaklık ve Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiler incelendi.

Tanım 3.1 Her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left|\left\{k \leq p: \left|d_x(A_{k+np}) - d_x(A_N)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0,$$

yani, her n ve hemen hemen her k için

$$\left|d_x(A_{k+np}) - d_x(A_N)\right| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı varsa, $\{A_k\}$ dizisine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizi denir.

Teorem 3.1 Herhangi bir metrik uzayda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i. $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

ii. $\{A_k\}$ dizisi Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizidir.

iii. $\{A_k\}$ öyle bir dizidir ki; hemen hemen her k için $A_k = B_k$ olacak şekilde Wijsman quasi-hemen hemen yakınsak bir $\{B_k\}$ dizisi vardır.

İspat: $(\boldsymbol{i}) \Longrightarrow (\boldsymbol{ii})$: Kabul edelim ki $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsak ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda her n ve hemen hemen her k için

$$\left|d_x(A_{k+np}) - d_x(A)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Bir $N > 0$ sayısı

$$|d_x(A_N) - d_x(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde seçilirse, her n ve hemen hemen her k için

$$\begin{aligned} \left|d_x(A_{k+np}) - d_x(A_N)\right| &\leq \left|d_x\left(A_{k+np}\right) - d_x(A)\right| \\ &\quad + |d_x(A_N) - d_x(A)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizi olduğunu gösterir.

$(\boldsymbol{ii}) \Longrightarrow (\boldsymbol{iii})$: $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizi olduğu kabul edilsin. Bir N sayısı,

$$J = [d_x(A_N) - 1, d_x(A_N) + 1]$$

aralığı her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np})$ reel sayısını içerecek biçimde seçilsin. Şimdi (ii) yi uygulayabilmek için N_2 sayısı da,

$$J' = \left[d_x\left(A_{N_2}\right) - \frac{1}{2}, d_x\left(A_{N_2}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

aralığı her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np})$ reel sayısını içerecek biçimde seçilsin. O halde

$$\begin{aligned} \left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J \cap J' \right\} &= \left\{k \leq p: d_x(A_{k+np}) \notin J\right\} \\ &\quad \cup \left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J' \right\} \end{aligned}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} &\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left|\left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J \cap J' \right\}\right| \\ &\leq \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left|\left\{k \leq p: d_x(A_{k+np}) \notin J\right\}\right| \\ &\quad + \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left|\left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J' \right\}\right| \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her n ve hemen hemen her k için

$$d_x\left(A_{k+np}\right) \in J_1 = J \cap J'$$

olacak şekilde J_1 aralığı vardır. Bu nedenle J_1; her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np})$ yi ihtiva eden ve uzunluğu 1 den küçük veya eşit olan kapalı bir aralıktır. Şimdi N_3 sayısı,

$$J'' = \left[d_x\left(A_{N_3}\right) - \frac{1}{4}, d_x\left(A_{N_3}\right) + \frac{1}{4}\right]$$

aralığı her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np})$ reel sayısını içerecek biçimde seçilsin. Benzer düşünceyle her n ve hemen hemen her k için

$$d_x\left(A_{k+np}\right) \in J_2 = J_1 \cap J''$$

olacak şekilde J_2 aralığı vardır ve J_2; uzunluğu $\frac{1}{2}$ den küçük veya eşit olan kapalı bir aralıktır. Bu şekilde devam edilerek, her bir m için J_m aralıklarının uzunlukları 2^{1-m} den büyük olmayacak, her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np}) \in J_m$ ve $J_{m+1} \subseteq J_m$ olacak biçimde kapalı aralıkların bir (J_m) dizisi oluşturulabilir. O halde, İç İçe Aralıklar Teoremi (Nested Intervals Theorem) gereğince

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} J_m = \mu$$

olacak biçimde bir μ sayısı vardır. Her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np}) \in J_m$ olduğu göz önünde bulundurularak $p > T_m$ için

$$\frac{1}{p}\left|\left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J_m \right\}\right| < \frac{1}{m} \qquad (1)$$

olacak biçimde pozitif tamsayıların artan bir $\{T_m\}$ dizisi seçilsin. Şimdi $\{A_k\}$ dizisinin bir $C = \{C_k\}$ alt dizisi; $T_m < k + np \leq T_{m+1}$ iken $d_x(A_{k+np}) \notin J_m$ ve $k + np > T_1$ şartlarını sağlayacak biçimde tanımlansın. Daha sonra

$$B_k := \begin{cases} \{\mu\} & , \quad A_k, C \text{ nin bir terimi ise} \\ A_k & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $\{B_k\}$ dizisi tanımlansın. Bu durumda

$$WQF - lim\, B_k = \{\mu\}$$

dür. Çünkü $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k + np > T_m$ ise A_k, C nin bir terimidir ki bu ya $B_k = \{\mu\}$ olması ya da $B_k = A_k \in J_m$ ve

$$|d_x(B_k) - d_x(\{\mu\})| \leq \ J_m \text{ aralığının uzunluğu} \\ \leq 2^{1-m}$$

olması demektir. Ayrıca hemen hemen her k için $B_k = A_k$ dır. Şimdi bunu ispat edelim:

$T_m < k + np \leq T_{m+1}$ iken

$$\left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \neq d_x(B_{k+np}) \right\} \subset \left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J_m \right\}$$

dir. Böylece (1) gereğince

$$\frac{1}{p}\left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \neq d_x(B_{k+np}) \right\} \leq \frac{1}{p}\left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J_m \right\} < \frac{1}{m}$$

olur. O halde $p \to \infty$ için limit alınırsa, eşitsizliğin sağ tarafındaki ifade 0 a eşit olduğundan hemen hemen her k için $A_k = B_k$ elde edilir.

$(\boldsymbol{iii}) \Longrightarrow (\boldsymbol{i})$: Kabul edelim ki (iii) sağlansın. Bu durumda hemen hemen her k için $A_k = B_k$ ve $WQF - lim\, B_k = B$ dir. Her $\varepsilon > 0$ ve her p için

$$\left\{k \leq p : \left|d_x\left(A_{k+np}\right) - d_x(B)\right| \geq \varepsilon \right\} \subseteq \left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \neq d_x(B_{k+np})\right\} \cup \left\{k \leq p : \left|d_x\left(B_{k+np}\right) - d_x(B)\right| \geq \varepsilon \right\}$$

yazılabilir. $WQF - lim\, B_k = B$ olduğundan yukarıdaki kapsamanın sağ tarafındaki ikinci küme sonlu sayıda eleman ihtiva eder. Böylece

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\left|\left\{k \leq p : \left|d_x\left(A_{k+np}\right) - d_x(B)\right| \geq \varepsilon \right\}\right| \\ \leq \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\left|\left\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \neq d_x(B_{k+np})\right\}\right| \\ + \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\left|\left\{k \leq p : \left|d_x\left(B_{k+np}\right) - d_x(B)\right| \geq \varepsilon \right\}\right| \\ \to 0 + 0 = 0$$

elde edilir. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin B kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. ■

4. Kaynaklar

Baronti, M. and Papini, P., 1986. Convergence of sequences of sets. *In: Methods of Functional Analysis in Approximation Theory (pp. 133-155)*, ISNM 76, Birkhauser-Verlag, Basel.

Beer, G., 1985. On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **31**(3)**,** 421-432.

Beer, G., 1994. Wijsman convergence: A survey. *Set-Valued Analysis*, **2**(1-2), 77-94.

Dündar, E., Ulusu, U. and Pancaroğlu, N., 2016. Strongly *I_2*-convergence and *I_2*-lacunary Cauchy double sequences of sets. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, **35**(1-2), 1-15.

Dündar, E., Ulusu, U. and Aydın, B., 2017. *I_2*-lacunary statistical convergence of double sequences of sets. *Konuralp Journal of Mathematics*, **5**(1), 1-10.

Gülle, E. and Ulusu, U., 2017. Quasi-almost convergence of sequences of sets. *Journal of Inequalities and Special Functions*, **8**(5), 59-65.

Gülle, E. and Ulusu, U., 2018. Quasi-almost lacunary statistical convergence of sequences of sets. *International Journal of Analysis and Applications*, **16**(2), 222-231.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2**(3-4), 241-244.

Fridy, J. A., 1985. On statistical convergence. *Analysis*, **5**(4), 301-314.

Hajdukovic, D., 2002. Quasi-almost convergence in a normed space. *Univerzitet u Beogradu-Publikacije Elektrotehničkog fakulteta-Serija Matematika*, **13,** 36-41.

Lorentz, G. G., 1948. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Mathematica,* **80**(1), 167-190.

Maddox, I. J., 1978. A new type of convergence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **83**(1), 61-64.

Nuray, F. and Rhoades, B. E., 2012. Statistical convergence of sequences of sets. *Fasciculi Mathematici*, **49**, 87-99.

Nuray, F., Ulusu, U. and Dündar, E., 2014a. Cesaro summability of double sequences of sets. *General Mathematics Notes*, **25**(1), 8-18.

Nuray, F., Dündar, E. and Ulusu, U., 2014b. Wijsman *I_2*-convergence of double sequences of closed sets. *Pure Appl. Math. Lett.*, **2**, 35-39.

Nuray, F., Ulusu, U. and Dündar, E., 2016. Lacunary statistical convergence of double sequences of sets. Soft Computing, **20**, 2883-2888.

Salat, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*, **30**(2), 139-150.

Sever, Y., Ulusu, U. and Dündar, E., 2014. On strongly *I* and *I**-lacunary convergence of sequences of sets. *AIP Conference Proceedings*, **1611**(1), 357-362.

Ulusu, U. and Nuray, F., 2012. Lacunary statistical convergence of sequences of sets. *Progress in Applied Mathematics*, **4**(2), 99-109.

Ulusu, U. and Nuray, F., 2013a. On strongly lacunary summability of sequences of sets. *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics*, **3**(3), 75-88.

Ulusu, U. and Nuray, F., 2013b. Statistical lacunary summability of sequences of sets. *Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering*, **13**, 9-14.

Ulusu, U. and Dündar, E., 2014. *I*-lacunary statistical convergence of sequences of sets. *Filomat*, **28**(8), 1567-1574.

Ulusu, U. and Nuray, F., 2015. Lacunary statistical summability of sequences of sets. *Konuralp Journal of Mathematics*, **3**(2), 176-184.

Ulusu, U. and Kişi, Ö., 2017. *I*-Cesaro summability of sequences of sets. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **5**(1), 278-286.

Ulusu, U., Dündar, E. and Nuray, F., 2018. Lacunary *I_2*-invariant convergence and some properties. *International Journal of Analysis and Applications*, **16**(3), 317-327.

Wijsman, R. A., 1964. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **70**(1), 186-188.

Wijsman, R. A., 1966. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II, *Transactions of the American Mathematical Society*, **123** (1), 32-45.