Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **17** (2017) 021302 (488-493) AKU J. Sci.Eng.**17** (2017) 021302 (488-493)
DOI: 10.5578/fmbd.57497

Araştırma Makalesi / Research Article

$A^{q_1,q_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ Uzayı ve Bazı Özellikleri

İsmail Aydın

Sinop Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sinop, TÜRKİYE.

e-posta: iaydin@sinop.edu.tr

Geliş Tarihi: 04.10.2016 ; Kabul Tarihi: 07.08.2017

Anahtar kelimeler
Vektör-Değerli Amalgam Uzayları, Tensör Çarpım,Banach Modül.

Özet

Bu makalede, ilk önceklasik vektör-değerli amalgam $(L^p(G,A),l^q)$ uzaylarının tanımı yeniden hatırlatıldı ve bu uzaylarhakkında bazı bilgiler verildi. İkinci olarak, $A^{q_1,q_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ uzayı tanımlandı ve bu uzayın bazı temel özellikleri incelendi. Son olarak, bu uzayın bazı koşullar altında kapsama özellikleri tartışıldı.

The Space $A^{q_1,q_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ and Some Properties

Keywords
Vector-Valued AmalgamSpaces; TensorProduct, BanchModule.

Abstract

Inthispaper, firstly, werecallthedefinition of vector-valuedclassical amalgam spaces$(L^p(G,A),l^q)$, and givesomeinformationaboutthesespaces. Secondly, we define thespace$A^{q_1,q_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ and investigate some basic properties. Finally, we discussinclusions of thesespacesundersomeconditions.

1. Giriş

Yerel olarak L^p uzayına, evrensel olarak l^q uzayına ait ölçülebilir ve reel değerli fonksiyonların uzayına amalgam uzayı denir ve bu (L^p,l^q)ile gösterilir. Bu uzayların ilk ortaya çıkışı (Wiener1926) çalışmasına dayanır. Gyerel kompakt Abel grubu olmak üzere, bu uzayların G üzerindeki genelleştirilmesi (Feichtinger 1980) tarafından yapılmıştır.Amalgam uzaylarının Fourier ve Gabor analizi gibi birçok alanda uygulamaları vardır. İlk olarak vektör-değerli klasik amalgam $(L^p(\mathbb{R},A),l^q)$ uzaylarının tanımlanması (Lakshmi ve Ray 2009) çalışmasında yapılmış ve bu uzayların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Buçalışmada vektör-değerli klasik amalgam uzayları üzerinde girişim işlemi tanımlanmış ve Young teoremiispatlanmıştır. Ayrıca (Avcı ve Gürkanlı 2007) makalesinde,$L(p,q)$ Lorentz uzayları kullanılarak $A^{p_1,q_2}_{p_1,q_1}(G)$ uzayını tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.Bu çalışmada, Gbir yerel kompakt Abel grubuve Adeğişmeli bir Banach cebiri olmak üzere,vektör-değerli klasik amalgam $(L^p(G,A),l^q)$ uzaylarıkullanılarak$A^{q_1,q_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ uzayı tanımlandı. Ayrıca, bu uzayın Banach uzayı, ötelemeler altında değişmez (invaryant) ve öteleme dönüşümünün G den $A^{q_1,q_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ uzayına sürekli olduğu ispatlandı. Yine p ve q üslerine göre, bu uzayın kapsamaları ve gömülmeleri incelendi. Böylece klasik amalgam uzaylarında daha önce bulunan sonuçların bazı genellemeleri elde edilmiştir.

2. Vektör-Değerli $(L^p(G,A),l^q)$ Uzayları

Bu makalede, G bir yerel kompakt Abel grubu ve Ada değişmeli bir Banachcebiri olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.$1\le p<\infty$ olsun. Bu takdirde, vektör-değerli Lebesgue uzayı

$$L^p(G,A)=\{f:G\to A\,\big|\,\|f(x)\|_A^p\in L^1(G)\}$$

şeklinde tanımlanır. Yine $f\in L^p(G,A)$ olmak üzere,

$$\|f\|_{p,A}=\left\{\int_G \|f(x)\|_A^p dx\right\}^{1/p}$$

ile tanımlı $\|.\|_{p,A}$fonksiyonu$L^p(G,A)$ üzerinde bir normdur. Eğer $A=\mathbb{C}$ alınırsa, $L^p(G,A)=L^p(G)$ elde edilir. Böylece, vektör-değerli $L^p(G,A)$ Lebesgue uzayı klasik $L^p(G)$ uzayının bir genellemesidir.

Tanım 2.2.$1\le p,q<\infty$ olsun.G_1biryerel kompakt Abel grup ve H, G_1 in bir kompakt açık alt grubu,a bir negatif olmayan bir tamsayı ve T, H ın G_1 içindeki kesiti, yani $G_1=\bigcup_{t\in T}(t+H)$olsun.Bu takdirde,yapı teoremi (StructureTheorem) kullanılırsa,$G=\mathbb{R}^a\times G_1$şeklinde yazılır (G ile $\mathbb{R}^a\times G_1$ kümeleri topolojik olarak izomorftur),(Hewitt veRoss1979). Yine $J=\mathbb{Z}^a\times T$,$\alpha=(n_1,n_2,\dots,n_a,t)\in J, n_i\in\mathbb{Z}$, $t\in T$için,$I=[0,1)^a\times H$ ve$I_\alpha=\alpha+I$kümeleri alınırsa, $G=\bigcup_\alpha I_\alpha$ ayrık birleşim kümesi şeklinde elde edilir (Fournier ve Stewart 1985).

G nin herhangi bir *K* kompakt alt kümesi üzerinde $L^p(G,A)$ ye ait olan fonksiyonların uzayı $L_{loc}^p(G,A)$ ile gösterilir.

G üzerinde tanımlı ve A-değerli vektör-değerli amalgam uzayı $(L^p(G,A),l^q)$ ile gösterilir ve

$$\|f\|_{(p,q)}=\left[\sum_{\alpha\in J}\|f\|_{L^p(I_\alpha,A)}^q\right]^{1/q},\qquad 1\le p,q<\infty$$

olmak üzere,

$$(L^p(G,A),l^q)=\{f\in L_{loc}^p(G,A):\|f\|_{(p,q)}<\infty\}$$

ile tanımlanır.$(L^p(G,A),l^q)$uzayı$\|.\|_{(p,q)}$normuna göre bir Banach uzayıdır. Eğer $G=\mathbb{R}$ ve $A=\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ alınırsa,$I_\alpha=[\alpha,\alpha+1)$ve $(L^p(G,A),l^q)=(L^p,l^q)$ olur (Lakshmi ve Ray 2009).

Teorem 2.3. (Young Eşitsizliği)

$1\le p_1,q_1,p_2,q_2<\infty$için$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\ge 1$, $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\ge 1$, $\frac{1}{r_1}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1$ ve $\frac{1}{r_2}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}-1$ koşulları sağlansın. Bu takdirde $f\in(L^{p_1}(G,A),l^{q_1})$ ve $g\in(L^{p_2}(G,A),l^{q_2})$ için

$$\|f*g\|_{(r_1,r_2)}\le C\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)}$$

olacak şekilde bir $C>0$ sayısı vardır (Lakshmi ve Ray 2010).

Eğer Teorem 2.3 kullanılırsa, $(L^p(G,A),l^q)$uzayınıngirişim işlemine göre $L^1(G,A)$ üzerinde bir Banach modül olduğu görülür.

3. $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ Uzayı

Tanım 3.1.X ve Y, K ($K=\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde iki normlu uzay,X' ve Y' de sırasıyla X ve Y nin topolojik dualleri olsunlar. $X'\times Y'$uzayından$K$ cismine giden tüm sınırlı, bilineer fonksiyonların uzayını $BL(X',Y',K)$ ile gösterilsin. Herhangi bir $x\in X$ ve $y\in Y$elemanları için,$BL(X',Y',K)$ uzayına ait$x\otimes y$ifadesi$f\in X'$ ve $g\in Y'$ olmak üzere

$$x\otimes y=f(x)g(y)$$

şeklinde tanımlanır. Yine

$$\{x\otimes y: x\in X, y\in Y\}$$

kümesinin ürettiği vektör uzayına X ve Y nin cebirsel tensör çarpımı denir ve bu $X\otimes Y$ ile gösterilir (Bonsall ve Duncan 1973).

Tanım 3.2.X ve Y herhangi iki normlu uzay olsunlar. $X\otimes Y$üzerindeρ projektif tensör normu, $u\in X\otimes Y$ olmak üzere

$$\rho(u)=inf\left\{\sum_{i=1}^n\|x_i\|\|x_i\|: u=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\right\}$$

ile tanımlanır.$X\otimes Y$uzayınınρ normuna göre tamlamasına (completion) X ve Y uzaylarının projektif tensör çarpımı denir ve bu $X\otimes_\rho Y$ veya $X\widehat{\otimes}Y$ ile gösterilir. $X\otimes_\rho Y$uzayının her u elemanı $\sum_{i=1}^\infty\|x_i\|\|y_i\|<\infty$ olmak üzere $u=\sum_{i=1}^\infty x_i\otimes y_i$ şeklindedir (Bonsall Duncan 1973).

Tanım 3.3. Teorem 2.3. kullanılarak$\tilde{f}(x)=f(-x)$ve $\|\tilde{f}\|_{(p_1,q_1)}=\|f\|_{(p_1,q_1)}$olmak üzere

$$(L^{p_1}(G,A),l^{q_1})\times(L^{p_2}(G,A),l^{q_2})$$

uzayından$(L^{r_1}(G,A),l^{r_2})$ uzayına bir $b$doğrusal dönüşümünü $f\in(L^{p_1}(G,A),l^{q_1})$ ve $g\in(L^{p_2}(G,A),l^{q_2})$ için $b(f,g)=\tilde{f}*g$şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca Young eşitsizliğinden b nin operatör normu $\|b\|\le C$ olur. Yine (Bonsall

Duncan 1973) kitabının altıncı bölümündeki Teorem 6 dan dolayı, b doğrusal sınırlı dönüşümüne $B(f\otimes g)=b(f,g)=\tilde{f}*g$ ve $\|B\|\leq C$ olacak şekilde

$$(L^{p_1}(G,A),l^{q_1})\otimes_\rho(L^{p_2}(G,A),l^{q_2})$$

uzayından $(L^{r_1}(G,A),l^{r_2})$ uzayına giden bir tek B doğrusal dönüşümü karşılık gelir.

Tanım 3.4. B doğrusal dönüşümünün görüntü kümesi $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ ile gösterilsin. Bu takdirde $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ uzayı $f_i\in(L^{p_1}(G,A),l^{q_1})$, $g_i\in(L^{p_2}(G,A),l^{q_2})$ ve $B\left(\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f_i}\otimes g_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f_i}*g_i$ olmak üzere

$$A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)=\left\{\begin{array}{c} h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f_i}*g_i: \\ \sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{(p_1,q_1)}\|g_i\|_{(p_2,q_2)}<\infty\end{array}\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Her $h\in A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ için

$$|||h|||=inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{(p_1,q_1)}\|g_i\|_{(p_2,q_2)}:h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f_i}*g_i\right\}$$

ile tanımlı $|||.|||$ fonksiyonu $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ üzerinde bir normdur. Ayrıca $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ uzayı $(L^{r_1}(G,A),l^{r_2})$ uzayının bir doğrusal alt manifoldudur (Rieffel 1969).

Teorem 3.5. $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ uzayı $|||.|||$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat: (Gaudry 1966) makalesindeki Teorem 2.4 ün ispat teknikleri kullanılırsa bu teoremin ispatı benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.6. $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ uzayı ötelemeler altında değişmezdir.

İspat: Herhangi bir $h\in A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ elemanı alınsın. $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ uzayının tanımından $f_i\in(L^{p_1}(G,A),l^{q_1})$ ve $g_i\in(L^{p_2}(G,A),l^{q_2})$ olmak üzere $h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f_i}*g_i$ ve

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{(p_1,q_1)}\|g_i\|_{(p_2,q_2)}<\infty$$

yazılır. Her $s,y\in G$ için $L_sf(y)=f(y-s)$ sol öteleme olmak üzere

$$|||L_sh|||=\left|\left|\left|L_s\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f_i}*g_i\right|\right|\right|=\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty}L_s\left(\tilde{f_i}*g_i\right)\right|\right|\right|$$

yazılır. Ayrıca $L_s\left(\tilde{f_i}*g_i\right)=L_s\tilde{f_i}*g_i$ olduğu gösterilebilir. Yine $s,y\in G$ için $R_sf(y)=f(s+y)$ sağ öteleme olmak üzere $L_s\tilde{f_i}=(R_sf_i)^{\sim}$ eşitliği vardır. Böylece $|||.|||$ normunun tanımından ve $(L^{p_1}(G,A),l^{q_1})$ uzayının ötelemeler altında değişmez olması kullanılırsa (Lakshmi ve Ray 2009), (Feichtinger 1980), (Squire 1985),

$$|||L_sh|||=\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty}(R_sf_i)^{\sim}*g_i\right|\right|\right|$$

$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}\|R_sf_i\|_{(p_1,q_1)}\|g_i\|_{(p_2,q_2)}$$

$$\leq C\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{(p_1,q_1)}\|g_i\|_{(p_2,q_2)}<\infty \quad (1)$$

olacak şekilde bir $C>0$ sayısı vardır. Böylece $L_sh\in A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ olup, $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ uzayı ötelemeler altında değişmezdir.

Sunuç3.7. Her $s\in G$ ve $h\in A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ için $|||L_sh|||\leq C|||h|||$ eşitsizliği vardır.

İspat: Herhangi bir $h\in A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ ve $s\in G$ için (1) eşitsizliği ve $|||.|||$ normunun tanımından $|||L_sh|||\leq C|||h|||$ olur.

G üzerinde tanımlı ve A-değerli basit fonksiyonların kümesini S ile gösterelim. S kümesinin $(L^p(G,A),l^q)$ uzayında her yerde yoğun olduğu biliniyor (Teorem III.2, Lakshmi ve Ray 2009). Tanım 3.3 deki B doğrusal dönüşümü alınırsa, $B(S\otimes_\rho S)$ kümesi

$$B(S\otimes_\rho S)=\left\{\begin{array}{c} t=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{s}_i*k_i:s_i,k_i\in S, \\ \sum_{i=1}^{\infty}\|s_i\|_{(p_1,q_1)}\|k_i\|_{(p_2,q_2)}<\infty\end{array}\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.8. $B(S\otimes_\rho S)$ kümesi $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ uzayında $|||.|||$ normuna göre her yerde yuğundur.

İspat: Herhangi bir $h\in A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ elemanı alınsın. $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ uzayının tanımı kullanılırsa, $f_i\in(L^{p_1}(G,A),l^{q_1})$ ve $g_i\in(L^{p_2}(G,A),l^{q_2})$ için $h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f_i}*g_i$ ve

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{(p_1,q_1)}\|g_i\|_{(p_2,q_2)}<\infty$$

yazılır. $\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i*g_i$ serisi $A^{q_1,q_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ uzayında yakınsak olduğundan bu serinin n inci kısmi toplamlar dizisi $h_n=\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i*g_i$ olmak üzere, verilen herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n\geq n_0$ olduğunda

$$|||h-h_n|||<\frac{\varepsilon}{3}\quad(2)$$

olacak şekilde $n_0\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Şimdi bir k_0 sayısı $k_0\geq n_0$ olacak şekilde seçilerek sabitleştirilsin. Şimdi

$$C_1=max_{1\leq i\leq k_0}\left\{\|g_i\|_{(p_2,q_2)}\right\}\quad(3)$$

sayısını tanımlayalım. Yine (Lakshmi ve Ray 2009) çalışmasındaki Teorem III.2 kullanılırsa,

$$\|f_i-s_i\|_{(p_1,q_1)}<\frac{\varepsilon}{3k_0C_1}\quad(4)$$

olacak şekilde $s_i\in S$ elde edilir. Ayrıca

$$C_2=max_{1\leq i\leq k_0}\left\{\|s_i\|_{(p_1,q_1)}\right\}\quad(5)$$

için

$$\|g_i-k_i\|_{(p_1,q_1)}<\frac{\varepsilon}{3k_0C_2}\quad(6)$$

olacak şekilde $k_i\in S$ vardır. Yine $B(S\otimes_\rho S)$ uzayının tanımından $\sum_{i=1}^{k_0}\tilde{s}_i*k_i\in B(S\otimes_\rho S)$ olup, (2), (3), (4), (5) ve (6) ifadeleri kullanılırsa

$$\left|\left|\left|h-\sum_{i=1}^{k_0}\tilde{s}_i*k_i\right|\right|\right|=\left|\left|\left|h-h_{k_0}+h_{k_0}-\sum_{i=1}^{k_0}\tilde{s}_i*g_i+\sum_{i=1}^{k_0}\tilde{s}_i*g_i-\sum_{i=1}^{k_0}\tilde{s}_i*k_i\right|\right|\right|<\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

$(L^p(G,A),l^q)$ uzayının ötelemeler altında değişmezliği, $s,s_0\in G$ ve $f\in\left(L^p(G,A),l^q\right)$ için

$$\left\|L_sf-L_{s_0}f\right\|_{(p,q)}=\left\|L_s\left(L_{s_0-s}f-f\right)\right\|_{(p,q)}$$
$$\leq C\left\|L_{s_0-s}f-f\right\|_{(p,q)}$$

olması kullanılırsa, aşağıdaki teoremde $s\to L_sf$ öteleme dönüşümünün sürekliliğininispatı $0\in G$ noktasında yapılması yeterli olur.

Teorem 3.9. Her $f\in(L^p(G,A),l^q)$ için G grubundan $(L^p(G,A),l^q)$ uzayına giden $s\to L_sf$ öteleme dönüşümü süreklidir.

İspat: Herhangi bir $f\in(L^p(G,A),l^q)$ fonksiyonu alınsın. (Lakshmi ve Ray 2009) çalışmasındaki Teorem III.2 den dolayı $C_C(G,A)$ (A-değerli sürekli ve kompakt destekli fonksiyonlar) kümesinin $(L^p(G,A),l^q)$ uzayında her yerde yoğun olduğu biliniyor. Böylece her $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\|f-g\|_{(p,q)}<\frac{\varepsilon}{3}\quad(7)$$

olacak şekilde $g\in C_C(G,A)$ fonksiyonu vardır. Eğer $C_C(G,A)$ uzayının ve $\|.\|_{(p,q)}$ normununtanımları kullanılırsa,

$$\|L_sg-g\|_{(p,q)}\leq k\|L_sg-g\|_\infty\quad(8)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k>0$ sayısı bulunur. Yine $g\in C_C(G,A)$ için

$$\|L_sg-g\|_\infty\to 0\quad(9)$$

olduğu biliniyor (Rudin 1962). Böylece (8) ve (9) ifadeleri kullanılırsa,

$$\|L_sg-g\|_{(p,q)}<\frac{\varepsilon}{3}\quad(10)$$

elde edilir. Eğer $(L^p(G,A),l^q)$ uzayının ötelemeler altında değişmez olması, (7) ve (10) ifadeleri kullanırsa

$$\|L_sf-f\|_{(p,q)}<\varepsilon$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.10. Her $h\in B(S\otimes_\rho S)$ için G grubundan $A^{q_1,q_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ uzayına giden $s\to L_sh$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: Herhangi bir $h\in B(S\otimes_\rho S)$ fonksiyonu alınsın. $B(S\otimes_\rho S)$ kümesinin tanımından $h=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i*g_i$ ve

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{(p_1,q_1)}\|g_i\|_{(p_2,q_2)}<\infty$$

olacak şekilde $f_i,g_i\in S$ fonksiyonları vardır. Yine Teorem 3.6nın ispatın da olduğu gibi

$$|||L_s h - h||| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|R_s f_i - f_i\|_{(p_1,q_1)} \|g_i\|_{(p_2,q_2)}$$

yazılır. Ayrıca Teorem 3.9 ve $\left\|L_s\tilde{f}_i - \tilde{f}_i\right\|_{(p_1,q_1)} = \|R_s f_i - f_i\|_{(p_1,q_1)}$ olması kullanılırsa

$$\|R_s f_i - f_i\|_{(p_1,q_1)} \to 0 \qquad (11)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|R_s f_i - f_i\|_{(p_1,q_1)} \|g_i\|_{(p_2,q_2)}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\|R_s f_i\|_{(p_1,q_1)} + \|f_i\|_{(p_1,q_1)}\right) \|g_i\|_{(p_2,q_2)}$$

$$\leq (C+1) \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{(p_1,q_1)} \|g_i\|_{(p_2,q_2)} < \infty$$

olup, Lebesgue Baskın Yakınsama Teoreminden

$$|||L_s h - h||| \to 0$$

elde edilir.

Teorem 3.11. Her $h \in A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ için G grubundan $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ uzayına giden $s \to L_s h$fonksiyonu süreklidir.

İspat: Herhangi bir $h \in A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$elemanı alınsın. Teorem 3.8. den $B(S \otimes_\rho S)$ kümesinin $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ uzayın da her yerde yoğun olduğu biliniyor. Böylece her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$|||h - k||| < \varepsilon \quad (12)$$

olacak şekilde $k \in B(S \otimes_\rho S)$ fonksiyonu vardır. Ayrıca Sonuç 3.7 kullanılırsa

$$|||L_s h - h||| = |||L_s h - L_s k + L_s k - k + k - h|||$$

$$\leq (C+1)|||h - k||| + |||L_s k - k|||$$

$$< (C+1)\varepsilon + |||L_s k - k|||(13)$$

yazılır. Yine Teorem 3.10 dolayı $s \to 0$ için

$$|||L_s k - k||| < \varepsilon \qquad (14)$$

olup, (12), (13) ve (14) eşitsizlikleri kullanılırsa ispat biter.

4. $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ Uzayının Kapsama Özellikleri

Teorem 4.1.Eğer $1 \leq q_1 \leq k_1 \leq \infty$, $1 \leq q_2 \leq k_2 \leq \infty$ ve $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ ise bu takdirde$A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A) \subset A_{p_1,p_2}^{k_1,k_2}(G,A)$ kapsaması vardır.

İspat: Herhangi bir $h \in A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ fonksiyonu alınsın. Buradan $h = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i * g_i$ ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{(p_1,q_1)} \|g_i\|_{(p_2,q_2)} < \infty$$

olacak şekilde $f_i \in (L^{p_1}(G,A), l^{q_1})$ ve $g_i \in (L^{p_2}(G,A), l^{q_2})$ fonksiyonları vardır. Ayrıca $q_1 \leq k_1$ ve $q_2 \leq k_2$ olduğundan sırasıyla $(L^{p_1}(G,A), l^{q_1}) \subset \left(L^{p_1}(G,A), l^{k_1}\right)$,
$\|.\|_{(p_1,k_1)} \leq \|.\|_{(p_1,q_1)}ve(L^{p_1}(G,A), l^{q_2}) \subset \left(L^{p_1}(G,A), l^{k_2}\right)$, $\|.\|_{(p_1,k_2)} \leq \|.\|_{(p_1,q_2)}$elde edilir (Fournier ve Stewart 1985), (Lakshmi ve Ray 2009) ve (Aydın Gürkanlı 2012). Böylece

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{(p_1,k_1)} \|g_i\|_{(p_2,k_2)}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{(p_1,q_1)} \|g_i\|_{(p_2,q_2)} < \infty$$

olup, $h \in A_{p_1,p_2}^{k_1,k_2}(G,A)$ ve $A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A) \subset A_{p_1,p_2}^{k_1,k_2}(G,A)$ elde edilir.

Teorem 4.2.Eğer $1 \leq p_1 \leq n_1 \leq \infty$, $1 \leq p_2 \leq n_2 \leq \infty$ ve $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ ise bu takdirde$A_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(G,A) \subset A_{p_1,p_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ kapsaması sağlanır.

İspat: Herhangi bir $h \in A_{n_1,n_2}^{q_1,q_2}(G,A)$ fonksiyonu alınsın. Buradan $h = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i * g_i$ ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{(n_1,q_1)} \|g_i\|_{(n_2,q_2)} < \infty$$

olacak şekilde $f_i \in (L^{n_1}(G,A), l^{q_1})$ ve $g_i \in (L^{n_2}(G,A), l^{q_2})$ fonksiyonları vardır. Ayrıca $p_1 \leq n_1$ ve $p_2 \leq n_2$ olduğundan sırasıyla $(L^{n_1}(G,A), l^{q_1}) \subset (L^{p_1}(G,A), l^{q_1})$,
$\|.\|_{(p_1,k_1)} \leq \|.\|_{(n_1,q_1)}ve(L^{n_2}(G,A), l^{q_2}) \subset (L^{p_2}(G,A), l^{q_2})$, $\|.\|_{(p_1,k_2)} \leq \|.\|_{(p_1,q_2)}$elde edilir (Fournier ve Stewart 1985), (Lakshmi ve Ray 2009) ve (Aydın ve Gürkanlı 2012). Böylece

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{(p_1,q_1)} \|g_i\|_{(p_2,q_2)}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{(n_1,q_1)} \|g_i\|_{(n_2,q_2)} < \infty$$

olup, $h \in A^{q_1,q_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ ve $A^{q_1,q_2}_{n_1,n_2}(G,A) \subset A^{q_1,q_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ elde edilir.

Sonuç 4.3.Eğer $1 \leq p_1 \leq n_1 \leq \infty$, $1 \leq p_2 \leq n_2 \leq \infty$, $1 \leq q_1 \leq k_1 \leq \infty$ ve $1 \leq q_2 \leq k_2 \leq \infty$ ise $A^{q_1,q_2}_{n_1,n_2}(G,A) \subset A^{k_1,k_2}_{p_1,p_2}(G,A)$ kapsaması elde edilir.

Kaynaklar

Avcı, H.,Gürkanli, A.T., 2007.Multipliersandtensorproducts of $L(p,q)$Lorentzspaces.*Acta Math Scie.*, 27B(1), 107-116.

Aydın, I, Gürkanlı, A.T., 2012.Weightedvariableexponent amalgam spaces$W\left(L^{p(x)}, L^q_w\right)$, *Glas Mat*, Vol. 47(67),165-174.

Bonsall, F.F.,Duncan, J., 1973. Complete normedalgebras, Springer-Verlag, Belin, Heidelberg, New-York.

Feichtinger, H.G., 1980.Banachconvolutionalgebras of Wienertype, *In: Functions, Series, Operators, Proc. Conf. Budapest 38, Colloq. Math. Soc. JanosBolyai*, 509-524.

Fournier, J.J.,Stewart, J., 1985.Amalgams of L^pandl^q, *Bull Amer Math Soc*, 13, 1-21.

Gaudry, G. I., 1965.Quasimeasuresandoperatorscommutingwithconvolution, *Pac J Math*., 13(3), 461-476.

Hewitt, E.,Ross, K.A., 1970,1979. AbstractHarmonic Analysis, Vol I-II, Berlin-Heidelberg-New York, Sipringer-Verlag.

Lakshmi, D.V., Ray, S.K., 2009.Vector-valued amalgam spaces, *Int J CompCog*, Vol. 7(4), 33-36.

Lakshmi, D. V., Ray, S.K., 2010.Convolutionproduct on vector-valued amalgam spaces, *Int J CompCog* , Vol. 8(3), 67-73.

Rieffel, M.A., 1969.Multipliersandtensorproducts of L^p spaces of locally compact geroups, *Stud Math*, 33, 71-82.

Rudin, W., 1962. Fourier Analysis on Groups, New York, Interscience.

Squire, M.L.T. 1984.Amalgams of L^pandl^q, Ph.D. Thesis, McMasterUniversity.

Wiener, N. 1926. On therepresentation of functionsbytrigonometricintegrals, *Math. Z.,* 24, 575-616.