BAZI ÇOKGENLERİN APOLLONIUS NOKTALARI YARDIMIYLAMÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seyit Ömer KİRİŞCİ

Danışman
Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2017

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ÇOKGENLERİN APOLLONIUS NOKTALARI YARDIMIYLA MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Seyit Ömer KİRİŞCİ

Danışman
Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2017

TEZ ONAY SAYFASI

Seyit Ömer KİRİŞCİ tarafından hazırlanan "Bazı Çokgenlerin Apollonius Noktaları Yardımıyla Möbius Dönüşümlerinin Karakterizasyonu" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 24/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL

		İmza
Başkan	: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN Kırıkkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.	…………
Üye	: Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.	…………
Üye	: Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.	…………

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
………/……../…….. tarih ve
……………… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

24/05/2017

Seyit Ömer KİRİŞCİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI ÇOKGENLERİN APOLLONIUS NOKTALARI YARDIMIYLA MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Seyit Ömer KİRİŞCİ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL

Bu çalışma sekiz bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, üçgenlerin Apollonius noktaları yardımıyla Möbius dönüşümlerin özellikleri incelenmiştir. Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümde sırasıyla Apollonius dörtgenleri, Apollonius beşgenleri, Apollonius altıgenleri yardımıyla Möbius dönüşümlerinin birer karakterizasyonu verilmiştir. Yedinci bölümde, Möbius dönüşümlerinin karakterizasyonu üzerine bir not verilmiştir. Sekizinci bölümde ise (2n-1)-kenarlı çokgenlerin Apollonius noktalarını kullanarak Möbius dönüşümlerinin yeni bir karakterizasyonu verilmiştir.

2017, v + 41 sayfa

Anahtar Kelimeler: Möbius Dönüşümü, Apollonius Noktalar, Schwarzian Türevi.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CHARACTERİZATİONS OF MÖBIUS TRANSFORMATIONS BY USE OF APOLLONIUS POINTS OF SOME POLYGONS

Seyit Ömer KİRİŞCİ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic

Supervisor: Assoc. Prof. Oğuzhan DEMİREL

This theis consists of eight chapters. The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions recalled. In the third chapter, Möbius Transformations by Use of Apollonius Points of triangles were studied. In the chapters of fourth, fifth and sixth the characterizations of Möbius transformation are presented by use of Apollonius quadrilaterals, Apollonius pentagons and Apollonius hexagons, recpectively. In the seventh chapter, A Note on the Characteristics of Mobius Transformations are studied. In the final chapter, A New Characterization of Möbius Transformations by the Use of Apollonius Points of $(2n - 1)$-gons were examined.

2017, v + 41 pages

Key Words: Möbius Tranformation, Apollonius Point, Schwarzian Derivative.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Oğuzhan DEMİREL'e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma, arkadaşlarıma ve aileme teşekkür ederim.

Seyit Ömer KİRİŞCİ
AFYONKARAHİSAR, 2017

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\hat{\mathbb{C}}$	Genişletilmiş Kompleks Düzlem
$\overline{\mathbf{AB}}$	AB Uzunluğu
$\Delta\mathbf{ABC}$	ABC Üçgeni
$\boldsymbol{f'}$	$\boldsymbol{f}$ Fonksiyonunun 1. Türevi
$\boldsymbol{f'''}$	$\boldsymbol{f}$ Fonksiyonunun 3. Türevi
$\boldsymbol{S(f)}$	Schwarzian Türevi
$\overline{\mathbf{A}}$	Kapalı Küme

1 . Giriş

Zamanında çok bilinmeyen, fakat 1600 yıllarında değeri anlaşılan Yunan matematikçilerinden biri Pergeli Apollonius'tur. MÖ 267 veya 262 yıllarında, Pamfiye denilen Teke sancağının Perge kentinde dünyaya gelmiştir. Mısır'ın İskenderiye kentine giderek, Öklid'ten sonra gelen matematikçilerden dersler alarak kendini yetiştirmiştir. Daha sonra Bergama'ya giderek orada kalmış, burada matematikçi Ödemus ve eski Bergama hükümdarı Atal ile ilmi ilişkilerde bulunmuştur. Matematikçi Pappus, Apollonius'un, bencil, üne düşkün, kibirli ve gururlu birisi olduğunu yazmaktadır. Apollonius'un yaptığı çalışmalar ve buluşları onun bu zayıf taraflarını örtecek kadar kuvvetlidir. Tümü geometriye ait olan sekiz kitabı vardır. Koniklere ait buluşları onu şöhretin zirvesine çıkarmıştır. Birçok eserinin kaybolmasına karşın, bazı yapıtları Pappus tarafından yeniden ortaya çıkarılmıştır. Öklid geometrisini benimseyerek onu daha ileri düzeylere götürmüştür. Teorik ve sentetik geometrici olarak, 19. yüzyıldaki Steiner'e kadar Apollonius'un bir eşine daha rastlanamaz. Konikler adı altında bugün bildiğimiz elips, çember, hiperbol ve parabol kesişimlerine ait problemlerin birçoğu Apollonius tarafından bulunmuştur. Konikler her ne kadar Apollonius'tan 150 yıl kadar önce üzerinde çalışılmışsa da, Apollonius kendisinden önceki çalışmaları ve kendi öz buluşlarını sekiz kitapta toplamıştır. Bunların çoğu onun çalışmaları ile ilerlemiştir. Yedi tane de bazıları Arapça' dan çevirme olan araştırma çalışması vardır. Bu araştırmaların yine, analitik geometri özelliklerinin bir çoğunu Apollonius'a borçluyuz (İnt. Kyn. 1).

Dairesel tabanlı ve tepesinin her iki tarafından sonsuza kadar uzatılmış bir koni bir düzlemle kesilirse, düzlemle koni yüzeyinin kesişimi olan eğri, doğru, çember, hiperbol, elips veya parabol olacağını ilk kez Apollonius göstermiştir. Ayrıca, astronomide önemli buluşları vardır (İnt. Kyn. 1).

Elips, hiperbol ve parabol, Eflatun tarafından mekanik eğriler olarak adlandırılmıştır. Bu eğriler, yalnız cetvel ve pergel yardımıyla çizilemezler. Buna karşın, pergel ve cetvel yardımıyla, bu eğrilerin istenilen sayıda noktalarını elde edebiliriz. Apollonius ve konikler üzerine çalışma yapanların diğer bir hizmeti de, Kepler ve Kopernik'in güneş ve gezegenlerin yörüngelerini hesaplamasında kullanmasıdır. Eğer bu geometriciler olmasaydı, Newton çekim kanununu belki de hiç bulamayacaktı. Yani, Kepler'in gezegenlerin yörüngeleri hakkındaki ince ve ustalıklı kullandığı hesaplamaları, Newton'un çekim kanununa ortam hazırlamıştır. Pergel ve cetvel yardımıyla üç çembere teğet çizme, Apollonius problemi olarak bilinir. Yine, sabit iki noktaya olan uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yeri, bu sabit noktaları birleştiren doğru parçasını, verilen orana göre içten ve dıştan bölen noktalar arasındaki uzaklığı çap kabul eden bir çemberdir (İnt. Kyn. 1).

2 . Temel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramları hatırlatacağız. Bu bölüm için temel referanslarımız; Başkan (1996), Haruki and Rassians (1996, 1998, 2000), Özgür ve Bulut (2004), Niamsup (2000) olacaktır

Tanım 2.1 $D_{\varepsilon}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 ın bir ε **komşuluğu** denir.

Tanım 2.2 Eğer bir A kümesinin her bir noktası bir iç nokta ise A ya **açık küme** adı verilir. Eğer A kümesi tüm sınır noktalarını içeriyorsa A ya **kapalı küme** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.3 Bir A kümesinin herhangi iki noktası tamamen A da bulunan bir eğri ile birleştirilebiliyorsa A ya **bağlantılı (irtibatlı) küme** denir.

Tanım 2.4 $\mathbb{C}$ nin basit bağlantılı açık alt kümelerine $\mathbb{C}$ de bir **bölge** denir.

Tanım 2.5 Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 da **analitiktir** denir.

Tanım 2.6 Bir B bölgesinde birebir ve analitik f fonksiyonuna, bu bölgede **ünivelanttır** denir.

Tanım 2.7 Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $D(z_0\,, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 da analitik değilse f, z_0 da bir **ayrık aykırı (singüler) noktaya sahiptir** denir.

Tanım 2.8 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçiminde tanımlanmış fonksiyona, **kesirli doğrusal dönüşüm** ya da **Möbius dönüşümü** denir.

Tanım 2.9 Bir $\triangle ABC$ üçgenin yükseklik ayaklarını köşe kabul eden A_1, B_1, C_1 noktalarıyla oluşturulan üçgene **Pedal üçgen** denir. P noktasına pedal nokta denir.

Tanım 2.10 Eğer bir üçgenin açılarını üç eşit parçaya ayıran doğruların kesişiminin bir eşkenar üçgen oluşturursa bu oluşan üçgene **Morley üçgeni** denir.

Tanım 2.11 $\mathbb{C}$ nin açık bir alt kümesindeki her noktada karmaşık anlamda türevli ve aldığı değerle yine $\mathbb{C}$ nin içinde olan fonksiyona **holomorf fonksiyon** denir.

Özellik 2.1 Kompleks düzlemde $w = f(x)$ fonksiyonu çemberleri çemberlere dönüştürür.

Tanım 2.12 Kompleks düzlemde açık bir D kümesi üzerinde fonksiyonun kutup noktalarından oluşan belli bir korunmalı noktalar kümesi haricinde D nin geriye kalan diğer noktaların tümünde holomorf olan fonksiyona **meromorf fonksiyon** denir.

Teorem 2.1 (Özdeşlik Teoremi)
B, $\mathbb{C}$ de bir bölge f ve g ise B de analitik iki fonksiyon olsunlar. S, B'nin öyle bir alt kümesi olsun ki B'de bir yığılma noktası bulunsun ve $\forall z \in S$ için $f(z) = g(z)$ gerçekleşsin. Bu durumda B'nin tümünde $f = g$ dir.

Tanım 2.13 Kompleks düzlemde $\triangle ABC$ keyfi bir üçgen ve L herhangi bir nokta olmak üzere

$$a = \overline{BC},\ b = \overline{CA},\ c = \overline{AB},\ x = \overline{AL},\ y = \overline{BL},\ z = \overline{CL}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer

$$ax = by = cz$$

şartını sağlıyorsa L noktasına $\triangle ABC$ üçgenin **Apollonius noktası** denir.

Tanım 2.14 Kompleks düzlemde $ABCD$ keyfi bir dörtgen olsun. Eğer

$$\overline{AB}.\overline{CD} = \overline{BC}.\overline{DA}$$

eşitliğini sağlıyorsa $ABCD$ dörtgenine **Apollonius dörtgeni** denir.

Tanım 2.15 Kompleks düzlemde $\triangle ABC$ keyfi bir üçgen ve L herhangi bir nokta olsun

$$a = \overline{BC},\ b = \overline{CA},\ c = \overline{AB},\ x = \overline{AL},\ y = \overline{BL},\ z = \overline{CL}$$

şeklinde tanımlansın. $k, l > 0$ olmak üzere

$$ax = k(by) = l(cz)$$

şartını sağlarsa L noktasına $\triangle ABC$ üçgenin $\boldsymbol{(k,l)}-$Apollonius noktası denir.

Tanım 2.16 Kompleks düzlemde keyfi bir $ABCDEF$ altıgeni için

$$\overline{AB}.\overline{CD}.\overline{EF} = \overline{BC}.\overline{DE}.\overline{FA}$$

eşitliği sağlanıyorsa bu altıgene **Apollonius altıgeni** denir.

Tanım 2.17 $f(z)$ fonksiyonu analitik ve univelant olmak üzere bu fonksiyonun Schwarz türevi

$$S(f) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f'''(z)}{f'(z)}\right]^2$$

biçimde ifade edilir.

Teorem 2.1 $f : \Delta \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve birebir ise Δ 'nin her z noktası için $f^{'}(z) \neq 0$ dır.

Teorem 2.2 (Maksimum Kuralı)

f fonksiyonu bir B bölgesinde analitik olsun. Eğer $|f|$, B de maksimum değeri alıyorsa f sabittir.

Teorem 2.3 Bir f dönüşümünün Möbius dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul f nin Schwarz türevi sıfıra eşittir.

Teorem 2.4 Bir fonksiyon Schwarz türevinin sıfıra eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşul f bir Möbius dönüşümünün kısıtlanması olmasıdır.

3 . ÜÇGENLERİN APOLLONIUS NOKTALARI YARDIMIYLA MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

Lemma 3.1 (Apollonius Teoremi) A ve B düzlemde keyfi iki nokta olsun. P noktası da keyfi hareketli bir nokta olsun ve A ve B noktalarının P ye olan uzaklığının oranı sabit bir k sayısı olsun. Bu durumda $k \neq 1$ ise P noktalarının geometrik yeri birini içten diğerini dıştan kesen bir çemberdir. $k = 1$ ise P noktalarının geometrik yeri A ve B ye eşit uzaklıktaki doğrudur (Haruki and Rassias 1996).

Lemma 3.1 de adı geçen çembere **Apollonius çemberi** denir.

Teorem 3.2 Kompleks düzlemde $\triangle ABC$ keyfi bir üçgen olsun. $\triangle ABC$ üçgenin en fazla iki tane Apollonius noktası vardır (Haruki and Rassias 1996).

Örnek 3.1 Kompleks düzlemde $\triangle ABC$ keyfi eşkenar bir üçgen olsun. Bu durumda üçgenin bir tek Apollonius noktası vardır ve bu nokta $\triangle ABC$ eşkenar üçgenin merkezidir.

$$a = \overline{BC} = \overline{CA} = \overline{AB},\ x = \overline{AL},\ y = \overline{BL},\ z = \overline{CL}$$

olsun.

Yukarıdaki $\triangle ABC$ üçgenin Apollonius noktası tanımından

$$ax = ay = az$$

elde edilir. Buradan

$$x = y = z$$

bulunur. O halde L noktası $\triangle ABC$ üçgenin merkezidir.

Örnek 3.2 İki açısı 30^{o} olan bir $\triangle ABC$ ikizkenar üçgenin iki tane Apollonius noktası vardır. Biri $\overline{BC}$ kenarın orta noktası L_1, diğeri $\overline{L_1 A}$ doğrusunun üzerinde L_2 noktasıdır.

Burada

$$a = \overline{BC},\ b = \overline{CA},\ c = \overline{AB}$$

olmak üzere

$$a.\overline{AL_1} = b.\overline{BL_1} = c.\overline{CL_1}$$

ve

$$a.\overline{AL_2} = b.\overline{BL_2} = c.\overline{CL_2}$$

olduğu açıktır.

Uyarı 3.1 Apollonius noktaları üçgenin köşe noktası olamaz. Yani Apollonius noktası üçgenin ya içinde, ya dışında yada üzerindedir (Haruki and Rassias 1996).

Teorem 3.3 Kompleks düzlemde bir $\triangle ABC$ üçgeni ve bir L noktası verilsin. L, $\triangle ABC$ üçgenin Apollonius noktasıdır $\Leftrightarrow$ L yardımıyla tanımlı $\triangle ABC$ üçgenin $\triangle A_1B_1C_1$ pedal üçgeni bir eşkenar üçgendir (Haruki and Rassias 1996).

Teorem 3.4 $w = f(z)$ dönüşümü Özellik 2.1 i sağlaması için gerek ve yeter koşul $w = f(z)$ bir Möbius dönüşüm olmasıdır (Haruki and Rassias 1996).

Lemma 3.5 Eğer $w = f(z)$ Özellik 2.1 i sağlıyorsa, $w = f(z)$ ünivelanttir (Haruki and Rassias 1996).

Lemma 3.6 Kompleks düzlemde boştan farklı bir R bölgesinde $w = f(z)$ fonksiyonu analitik ve ünivelant olsun. R bölgesinde keyfi bir $ABCD$ Apollonius dörtgeni verilsin. $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$ olmak üzere Özellik 3.1 sağlanırsa, $A'B'C'D'$ de bir Apollonius dörtgeni olur (Haruki and Rassias 1996).

Lemma 3.7 Eğer boş olmayan bir R bölgesinde $w = f(z)$ analitik ve ünivelant ise R de $f'(z) \neq 0$ dır (Haruki and Rassias, 1996).

Özellik 3.1 Kabul edilsin ki kompleks düzlemde boştan farklı bir R bölgesinde $w = f(z)$ fonksiyonu analitik ve ünivelant olsun. R bölgesinde keyfi bir $\triangle ABC$ üçgeni ve L de bu üçgenin Apollonius noktası olsun. Eğer $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $L' = f(L)$ ise A', B', C' doğrudaş olmayan farklı üç nokta ve $\triangle A'B'C'$ üçgeninin Apollonius noktası L' olur.

Sonuç 3.1 Özellik 2.1 sağlanıyorsa 3.1 özelliğini de sağlar (Haruki and Rassias 1996).

Teorem 3.8 $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 3.1 sağlaması için gerek ve yeter koşul $w = f(z)$ nin bir Möbius dönüşümü olmasıdır (Haruki and Rassias 1996).

İspat.

$\Leftarrow$) $w = f(z)$ bir Möbius dönüşümü olsun. Bu durumda Teorem 3.4 den dolayı $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 2.1 sağlar. Böylece Özellik 3.1 sağlanır.

$\Rightarrow$) $w = f(z)$fonksiyonu Özellik 3.1 sağlasın. $w = f(z)$ fonksiyonu bir R bölgesinde analitik ve ünivelant olduğundan dolayı Lemma 3.7 den $f^{'}(z) \neq 0$ dır. x, R de keyfi bir nokta olsun. Böylece $f^{'}(x) \neq 0$ dır. x noktası L ile gösterilsin. $L \in R$ olduğundan L nin r yarıçaplı kapalı bir V komşuluğu vardır ve bu komşuluk R nin içinde kalır.

Merkezi L olan keyfi bir $\triangle ABC$ üçgeni seçilsin. x, $y \in \mathbb{C}$, $|y| \leq r$ olmak üzere $A = x + y$, $B = x + \omega y$, $C = x + \omega^2 y$ olsun. $w = f(z)$ fonksiyonu R de ünivelant olduğundan $f(A) = A^{'}$, $f(B) = B^{'}$, $f(C) = C^{'}$ noktaları birbirinden farklıdır. Analitik fonksiyonların özelliğinden ve Lemma 3.7 den dolayı A, B, C doğrusal olmadığından $s \leq r$ olacak biçimde bir s sayısı vardır öyleki $0 < |y| \leq s$ olacak biçimde her y için $A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$ noktaları doğrudaş değildir. Yani üçgen disk içinde kaldığı sürece görüntüsüde bir üçgendir. Örnek 3.1 den dolayı L noktası $\triangle ABC$ üçgenin tek Apollonius noktası olduğundan $A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$ noktaları doğrusal olmadığından, hipotezden dolayı $f(L) = L^{'}$ noktası $\triangle A^{'}B^{'}C^{'}$ üçgeninin bir Apollonius noktasıdır.

Böylece

$$\overline{B'C'}\ \overline{A'L'} = \overline{C'A'}\ \overline{B'L'} \tag{3.1}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} A^{'} &= f(A) = f(x+y) \\ B^{'} &= f(B) = f(x+\omega y) \\ C^{'} &= f(C) = f(x+\omega^2 y) \\ L^{'} &= f(L) = f(x) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{B'C'} &= \mid f(x+\omega y) - f(x+\omega^2 y) \mid \\
\overline{A'L'} &= \mid f(x+y) - f(x) \mid \\
\overline{C'A'} &= \mid f(x+\omega^2 y) - f(x+y) \mid \\
\overline{B'L'} &= \mid f(x+\omega y) - f(x) \mid
\end{aligned}$$

(3.1) eşitliğinde yazılırsa

$$\left| \frac{(f(x+\omega y) - f(x+\omega^2 y)).(f(x+y) - f(x))}{(f(x+\omega^2 y) - f(x+y)).(f(x+\omega y) - f(x))} \right| = 1$$

elde edilir. Burada

$$\frac{(f(x+\omega y) - f(x+\omega^2 y))(f(x+y) - f(x))}{(f(x+\omega^2 y) - f(x+y))(f(x+\omega y) - f(x)\ )} = g(y)$$

biçimde gösterilsin. $g(y)$ nin payı ve paydası da $0 < |y| \leq s$ için analitik olduğundan ve $w = f(z)$, R de ünivelant olduğundan $g(y)$ nin paydası $0 < |y| \leq s$ için sıfır olamaz ve $0 < |y| \leq s$ için $g(y)$ de analitiktir. $g(y)$ nin 0 noktasında analitik olduğu gösterilmelidir. $y \to 0$ iken L'Hopital kuralından $g(y) \to \omega^2.\frac{1}{\omega} = \omega$ dir. $g(0) = \omega$ alınırsa g fonksiyonu $y = 0$ noktasında kaldırılabilir aykırılığa sahip olur. Riemann teoremi gereğince g fonksiyonu $y = 0$ noktasında analitiktir.

Yani $g(y)$ fonksiyonu $|y| \leq s$ için analitik olduğunda ve $|y| \leq s$ için $|g(y)| = 1$ olduğundan maksimum kuralı prensibi gereğince $g(y) = K$ olacak biçimde bir K kompleks sabiti vardır ve $|K| = 1$ dir. $g(0) = \omega$ ve $g(y) = K$ olduğundan $\omega = K$ dır.

$$(f(x+\omega y) - f(x+\omega^2 y)).(f(x+y) - f(x)) - w(f(x+\omega^2 y) - f(x+y)).(f(x+\omega y) - f(x)) = 0$$

Her iki tarafın ardışık türevleri alınırsa $y = 0$ için

$$f^{'''}(x).f^{'}(x)-\frac{3}{2}\left[f^{''}(x)\right]^{2}=0$$

elde edilir. x, R bölgesinde keyfi bir sabit olduğu için x yerine z alınırsa son eşitlikten

$$f^{'''}(z).f^{'}(z)-\frac{3}{2}\left[f^{''}(z)\right]^{2}=0$$

olup buradan

$$\frac{f^{'''}(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left[\frac{f^{''}(z)}{f'(z)}\right]^{2}=0$$

elde edilir. Bu durum $f^{'}(z)\neq 0$ olacak biçimdeki her $z\in\mathbb{C}$ için özdeşlik teoremi gereğince sağlanır. Böylece f fonksiyonunun Schwarz türevi sıfıra eşit olduğundan f bir Möbius dönüşümüdür.

4 . DÖRTGENLERİN APOLLONIUS NOKTALARI YARDIMIYLA MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

Teorem 4.1 $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 2.1'i sağlaması için gerek ve yeter koşul $w = f(z)$ fonksiyonunun bir Möbius dönüşüm olmasıdır (Haruki and Rassias 1998).

Özellik 4.1 $w = f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemde boştan farklı bir R bölgesinde analitik ve ünivelant olsun. R bölgesinde keyfi bir $ABCD$ Apollonius dörtgeni için $A^{'} = f(A)$, $B^{'} = f(B)$, $C^{'} = f(C)$ ve $D^{'} = f(D)$ olmak üzere $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ dörtgenide $w-$düzlemde bir Apollonius dörtgenidir.

Sonuç 4.1 Özellik 2.1 sağlanıyorsa Özellik 4.1 sağlanır (Haruki and Rassias 1998).

Lemma 4.1 Eğer $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 2.1'i sağlarsa $w = f(z)$ fonksiyonu $|z| < \infty$ de ünivelanttir (Haruki and Rassias 1998).

Teorem 4.2 $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 4.1 yi sağlar $\Leftrightarrow$ $w = f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümdür (Haruki and Rassias 1998).

İspat.
$\Rightarrow) w = f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümü olsun. O zaman Teorem 4.1 den Özellik 4.1 sağlanır. Özellik 4.1'den $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 2.1 i sağlar.

$\Leftarrow) w = f(z)$ fonksiyonu R bölgesinde analitik ve ünivelant olduğu için Lemma 4.1'den

$$f^{'}(z) \neq 0 \tag{4.2}$$

dir.
Eğer x noktası R bölgesinin keyfi bir şekilde sabit bir noktası ise (4.2) den

$$f^{'}(x) \neq 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. Burada x noktasını E ile gösterilsin. $E \in R$ olduğundan E nin $r \in \mathbb{R}$ yarıçaplı kapalı bir V komşuluğu vardır ve bu komşuluk R nin içinde kalır. $ABCD$

dörtgeni V nin içinde keyfi bir Apollonius dörtgeni olsun ve merkezi E noktası kabul edilir. Burada $ABCD$ nin yönü saat yönünün tersindedir. $ABCD$, V nin içinde bir dörtgen olduğu için

$$\begin{aligned} A &= x+y \\ B &= x+iy \\ C &= x-y \\ D &= x-iy \end{aligned}$$

yazılsın. $w=f(z)$ fonksiyonu R de ünivelant olduğundan

$$\begin{aligned} f(A) &= A^{'} \\ f(B) &= B^{'} \\ f(C) &= C^{'} \\ f(D) &= D^{'} \end{aligned}$$

noktaları birbirinden farklıdır. $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ bir Apollonius dörtgen olduğundan dolayı

$$\overline{A'B'}.\overline{C'D'} = \overline{B'C'}.\overline{D'A'} \tag{4.4}$$

yazılır. Buradan

$$A^{'} = f(x+y),\ B^{'} = f(x+iy),\ C^{'} = f(x-y),\ D^{'} = f(x-iy)$$

olduğundan dolayı

$$\overline{A'B'} = |f(x+y) - f(x+iy)| \tag{4.5}$$

$$\overline{B'C'} = |f(x+iy) - f(x-y)| \tag{4.6}$$

$$\overline{C'D'} = |f(x-y) - f(x-iy)| \tag{4.7}$$

$$\overline{D'A'} = |f(x-iy) - f(x+y)| \tag{4.8}$$

yazılır. Buradan (4.4) eşitliğine (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) eşitliklerini yazılırsa

$$|(f(x+y) - f(x+iy))(f(x-y) - f(x-iy))|$$

$$= |(f(x+iy) - f(x-y))(f(x-iy) - f(x+y))|$$

elde edilir ve böylece

$$\frac{|(f(x+y)-f(x+iy))(f(x-y)-f(x-iy))\ |}{|(f(x+iy)-f(x-y))(f(x-iy)-f(x+y))\ |}=1 \tag{4.9}$$

bulunur. $g(y)$ fonksiyonunu

$$g(y)=\frac{(f(x+y)-f(x+iy))(f(x-y)-f(x-iy))}{(f(x+iy)-f(x-y))(f(x-iy)-f(x+y))} \tag{4.10}$$

olarak kabul edilirse

$$|g(y)|=1 \tag{4.11}$$

elde edilir.

(4.10) daki $g(y)$ nin payı ve paydası da $0<|y|\leq r$ için analitik ve $w=f(z)$, R de ünivelant olduğundan $g(y)$ nin paydası $0<|y|\leq r$ için sıfır olamaz ve $0<|y|\leq r$ için $g(y)$ de analitiktir. $g(y)$ nin $y=0$ noktasında analitik olduğu gösterilsin. $y\to 0$ iken L'Hospital kuralından ve (4.3) eşitliğinden

$$\frac{f(x+y)-f(x+iy)}{f(x+iy)-f(x-y)}\to\frac{f'(x)-if'(x)}{if'(x)+f'(x)}=\frac{1-i}{1+i} \tag{4.12}$$

ve

$$\frac{f(x-y)-f(x-iy)}{f(x-iy)-f(x+y)}\to\frac{-f'(x)+if'(x)}{-if'(x)-f'(x)}=\frac{1-i}{1+i} \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.10), (4.12), (4.13) den $y\to 0$ iken

$$g(y)\to\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=-1 \tag{4.14}$$

$$g(0)=-1 \tag{4.15}$$

için (4.14) ten ve Riemann teoreminden $g(y)$, fonksiyon $y=0$ da analitiktir. Üstelik (4.15) den dolayı (4.11) daki eşitlik $y=0$ içinde sağlanır. Böylece $g(y)$ fonksiyonu $|y|\leq r$ de analitiktir ve $|y|\leq r$ de $|g(y)|=1$ sağlanır. Böylece analitik fonksiyonlar için Maksimum Modül Prensibinden ve $|y|\leq r$ de K kompleks sabiti olmak üzere

$$g(y) = K \tag{4.16}$$

yazılır. (4.16) eşitliğinde $y = 0$ alınsın ve (4.15) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$K = -1 \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.10), (4.16) ve (4.17) den

$$(f(x+y)-f(x+iy))(f(x-y)-f(x-iy))+(f(x+iy)-f(x-y))(f(x-iy)-f(x+y)) = 0$$

yazılır ve $|y| \leq r$ bütün y ler için sağlar.

Ardışık türevler alınırsa

$$f^{'''}(x).f^{'}(x) - \frac{3}{2}f^{'''}(x)^2 = 0 \tag{4.19}$$

$x \in R$ bölgesinde sabit keyfi bir nokta olduğundan, değişken bir z tarafından x yerine yazılır ve R de (4.19) dan

$$f^{'''}(z).f^{'}(z) - \frac{3}{2}f^{'''}(z)^2 = 0$$

bulunur. Buradan

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f'''(z)}{f'(z)}\right)^2 = 0$$

olup tüm z noktaları için $f^{'}(z) \neq 0$ dır. Böylece $f(z)$ bir Möbius dönüşümüdür.

5 . BEŞGENLERİN APOLLONIUS NOKTALARI YARDIMIYLA MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

Özellik 5.1 $z-$düzleminin boştan farklı bir R bölgesinde $w = f(z)$ fonksiyonu analitik ve ünivelant olsun. R bölgesinde $Z = Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ keyfi bir beşgen ve (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4)$-$Apollonius noktası da L olsun. Eğer $1 \leq i \leq 5$ aralılığında $L^{'} = f(L)$ için $Z_i^{'} = f(Z)$ alınırsa ve bir beşgenden $Z_i^{'}(1 \leq i \leq 5)$ beş farklı nokta ise o zaman $L^{'}$ noktası aynı zamanda $Z^{'} = Z_1^{'}Z_2^{'}Z_3^{'}Z_4^{'}Z_5^{'}$ in $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)-$Apollonius noktası olur.

Teorem 5.1 $w = f(x)$ fonksiyonu özellik 5.1 i sağlar $\Leftrightarrow$ $w = f(x)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümdür (Bulut ve Özgür 2004).

Tanım 5.1 $\mathbb{C}$ de L bir nokta ve $Z = Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ keyfi bir beşgen olsun. $2 \leq k \leq 5$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^+$ için

$$|L - Z_1| . |Z_2 - Z_3| . |Z_4 - Z_5| = \lambda_{k-1} |L - Z_k| . |Z_{k+1} - Z_{k+2}| . |Z_{k+3} - Z_{k+4}|$$

ise o zaman L noktasına Z nin bir $(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4)-$Apollonius noktası denir (Bulut ve Özgür 2004).

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında eğer k ye bağlı değerler 5 den farklı ise o zaman bu değerler mod(5) de düşünülür.

Uyarı 5.3 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ için bu tanım keyfi bir beşgenin Apollonius noktasının tanımını verir (Bulut ve Özgür 2004).

Teorem 5.2 Kompleks düzlemde $Z = Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ keyfi bir beşgen olsun ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sabit pozitif reel sayısı olsun. O zaman Z nin (λ_1,λ_2,λ_3,λ_4)-Apollonius noktasının sayısı en çok 2 dir (Bulut ve Özgür 2004).

Örnek 5.1 $Z = Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ keyfi bir düzgün beşgen olsun. Z nin çevrel çemberin Apollonius noktası sadece çevrel çemberin merkezidir.

Tanım 5.2 Kompleks düzlemde $ABCDEF$ bir altıgen olsun. $\lambda > 0$ için

$$\overline{AB}.\overline{CD}.\overline{EF} = \lambda\overline{BC}.\overline{DE}.\overline{FA}$$

şartını sağlar ise bu altıgene $\boldsymbol{\lambda}-$Apollonius altıgeni denir (Bulut ve Özgür 2004).

Özellik 5.2 Kompleks düzlemde boş olmayan bir Δ açık bölgesinde f fonksiyonu analitik ve ünivelant olsun. $ABCDEF$ altıgeni Δ da bir $\lambda-$Apollonius altıgeni olsun. Eğer $Z = ABCDEF$ için $Z' = f(Z)$ ise, o zaman $A'B'C'D'E'F'$ de bir $\lambda-$Apollonius altıgeni olur.

Teorem 5.3 $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 5.3 sağlar $\Leftrightarrow$ $w = f(z)$ bir Möbius dönüşümdür (Bulut ve Özgür 2004).

Teorem 5.4 Özellik 2.1 sağlanırsa Özellik 5.1 de sağlanır (Bulut ve Özgür 2004).

İspat.

$w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 2.1 i sağlasın. Kabul edilsin ki $w = f(z)$ fonksiyonu z-düzleminde boştan farklı R bölgesinde analitik olsun. Böylece Teorem 5.2 den $w = f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşüm olur ve böylece R bölgesinde ünivelanttır. $Z = Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ beşgeni R bölgesinde keyfi bir beşgeni içersin ve $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$-Apollonius noktası $L \in R$ olsun. Eğer $1 \leq i \leq 5$ için $Z_i' = f(Z_i)$ yazılırsa, $w = f(z)$ fonksiyonu ünivelant olmasından dolayı $Z_i'(1 \leq i \leq 5)$ noktaları farklıdır. $Z_i'(1 \leq i \leq 5)$ in herhangi üçlüsü doğrudaş değilse $L' = f(L)$ de aynı zamanda $Z' = Z_1'Z_2'Z_3'Z_4'Z_5'$ nin bir $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$-Apollonius noktası olur. L noktası Z nin bir $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$-Apollonius noktası olduğu için, Tanım 5.2 den $k = 5$ için

$$|L - Z_1| . |Z_2 - Z_3| . |Z_4 - Z_5| = \lambda_4 |L - Z_5| . |Z_1 - Z_2| . |Z_3 - Z_4|$$

yazılır.

Tanım 5.2 den $LZ_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ bir λ_4-Apollonius altıgenidir. Teorem 5.5 den $L'Z_1'Z_2'Z_3'Z_4'Z_5'$ bir λ_4-Apollonius altıgenidir. Böylece

$$\left|L^{'}-Z_1^{'}\right|.\left|Z_2^{'}-Z_3^{'}\right|.\left|Z_4^{'}-Z_5^{'}\right|=\lambda_4\left|L^{'}-Z_5^{'}\right|.\left|Z_1^{'}-Z_2^{'}\right|.\left|Z_3^{'}-Z_4^{'}\right| \tag{5.1}$$

yazılır. Benzer olarak

$$\lambda_4\left|L^{'}-Z_5^{'}\right|.\left|Z_1^{'}-Z_2^{'}\right|.\left|Z_3^{'}-Z_4^{'}\right|=\lambda_3\left|L^{'}-Z_4^{'}\right|.\left|Z_5^{'}-Z_1^{'}\right|.\left|Z_2^{'}-Z_3^{'}\right| \tag{5.2}$$

$$\lambda_3\left|L^{'}-Z_4^{'}\right|.\left|Z_5^{'}-Z_1^{'}\right|.\left|Z_2^{'}-Z_3^{'}\right|=\lambda_2\left|L^{'}-Z_3^{'}\right|.\left|Z_4^{'}-Z_5^{'}\right|.\left|Z_1^{'}-Z_2^{'}\right| \tag{5.3}$$

$$\lambda_2\left|L^{'}-Z_3^{'}\right|.\left|Z_4^{'}-Z_5^{'}\right|.\left|Z_1^{'}-Z_2^{'}\right|=\lambda_1\left|L^{'}-Z_2^{'}\right|.\left|Z_3^{'}-Z_4^{'}\right|.\left|Z_5^{'}-Z_1^{'}\right| \tag{5.4}$$

yazılır. (5.1) ve (5.4) den her $1\leq i\leq 5$ için

$$\left|L^{'}-Z_1^{'}\right|.\left|Z_2^{'}-Z_3^{'}\right|.\left|Z_4^{'}-Z_5^{'}\right|=\lambda_{k-1}\left|L^{'}-Z_k^{'}\right|.\left|Z_{k+1}^{'}-Z_{k+2}^{'}\right|.\left|Z_{k+3}^{'}-Z_{k+4}^{'}\right|$$

elde edilir.

Tanım 5.1 den dolayı $L^{'}=f(L)$ noktası (λ_1,λ_2,λ_3,λ_4)-Apollonius noktasıdır.

Sonuç olarak $w=f(z)$ fonsiyonu Özellik 5.1 i sağlar.

Teorem 5.5 $w=f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümdür $\Leftrightarrow$ $w=f(z)$ fonksiyonu analitik ve ünivelanttır (Bulut ve Özgür 2004).

İspat.

Kabul edilsin ki $w=f(z)$ bir Möbius dönüşümü olsun. Teorem 5.1 den $w=f(z)$ fonksiyonu Özellik 2.1 i sağlar. Böylece Teorem 5.4 den $w=f(z)$ fonksiyonu Özellik 5.1 yi sağlar.

Kabul edilsin ki $w=f(z)$ fonksiyonu analitik ve ünivelant olsun. $w=f(z)$ fonksiyonu R bölgesinde analitik ve ünivelant olduğu için

$$f^{'}(z)\neq 0 \tag{5.5}$$

R bölgesinde de sağlar. Eğer x, R nin keyfi bir sabit noktası ise (5.5) den

$$f^{'}(x) \neq 0 \tag{5.6}$$

yazılır.

Kabul edilsin ki L noktası x tarafından temsil edilen nokta olsun. $L \in R$ olduğu için öyle pozitif bir r reel sayı vardır ki L nin r kapalı komşuluğu R nin içinde içerir. Bu komşuluk V ile gösterilsin. $Z = Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5$; L merkezli bir beşgen olup V de kapsansın. Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 ve Z_5 noktaların yönleri saat yönünün tersi olsun.

$Z = Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5$, V de içeren keyfi bir beşgen olduğu için $0 < |y| \leq r$ ve $w_{k+1} = e^{\frac{i2\pi k}{5}}$, $0 \leq k \leq 4$ olmak üzere

$$x + w_{k+1} y$$

biçimde temsil edilir.

$w = f(z)$ fonksiyonu R de ünivelant olduğu için $Z_1^{'} = f(Z_1)$, $Z_2^{'} = f(Z_2)$, $Z_3^{'} = f(Z_3)$, $Z_4^{'} = f(Z_4)$ ve $Z_5^{'} = f(Z_5)$ farklı noktalardır. Analitik fonksiyonun özelliğinden

$$s \leq r$$

sağlayan yeterince küçük pozitif s reel sayısı vardır öyle ki $Z_1^{'}$, $Z_2^{'}$, $Z_3^{'}$, $Z_4^{'}$ ve $Z_5^{'}$ in herhangi üçü $0 < |y| \leq s$ sağlayan tüm y ler için $w-$düzleminde doğrudaş değildir.

L noktası Z düzgün beşgenin $(0 < |y| \leq s)$ nin Apollonius noktası ve $Z_1^{'}$, $Z_2^{'}$, $Z_3^{'}$, $Z_4^{'}$ ve $Z_5^{'}$ in herhangi üçü doğrudaş olmadığı için, hipotezden $L^{'} = f(L)$ de $Z^{'} = Z_1^{'} Z_2^{'} Z_3^{'} Z_4^{'} Z_5^{'}$ nin bir Apollonius noktası olur. Böylece

$$\left|L^{'} - Z_1^{'}\right| . \left|Z_2^{'} - Z_3^{'}\right| . \left|Z_4^{'} - Z_5^{'}\right| \tag{5.7}$$

$$= \left|L^{'} - Z_2^{'}\right| . \left|Z_3^{'} - Z_4^{'}\right| . \left|Z_5^{'} - Z_1^{'}\right| \tag{5.8}$$

$$= \left|L^{'} - Z_3^{'}\right| . \left|Z_4^{'} - Z_5^{'}\right| . \left|Z_1^{'} - Z_2^{'}\right| \tag{5.9}$$

$$= \left|L^{'} - Z_4^{'}\right| . \left|Z_5^{'} - Z_1^{'}\right| . \left|Z_2^{'} - Z_3^{'}\right| \tag{5.10}$$

$$= \left|L' - Z_5'\right| . \left|Z_1' - Z_2'\right| . \left|Z_3' - Z_4'\right| \tag{5.11}$$

elde edilir. Burada (5.7) ve (5.9) dan

$$\left|L' - Z_1'\right| . \left|Z_2' - Z_3'\right| . \left|Z_4' - Z_5'\right| = \left|L' - Z_3'\right| . \left|Z_4' - Z_5'\right| . \left|Z_1' - Z_2'\right|$$

yazılır. Böylece

$$\left|L' - Z_1'\right| . \left|Z_2' - Z_3'\right| = \left|L' - Z_3'\right| . \left|Z_1' - Z_2'\right|$$

elde edilir.

Z_1', Z_2', Z_3', Z_4', Z_5' ve L' noktaları $0 \leq k \leq 4$ de

$$f(x + w_{k+1}y), \quad f(x)$$

tarafından temsil edildiği için son eşitlikte

$$|f(x) - f(x+y)| . |f(x + w_2y) - f(x + w_3y)|$$
$$= |f(x) - f(x + w_3y)| . |f(x+y) - f(x + w_2y)|$$

yazılır ve böylece

$$\left|\frac{[f(x) - f(x+y)] . [f(x + w_2y) - f(x + w_3y)]}{[f(x) - f(x + w_3y)] . [f(x+y) - f(x + w_2y)]}\right| = 1$$

elde edilir. Önceki bölümlerde benzer olarak $f'(z) \neq 0$ ı sağlayan bütün z ler için

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f'''(z)}{f'(z)}\right)^2 = 0$$

sağlanır. Böylece f in Schwarz türevi $f'(z) \neq 0$ sağlayan bütün z ler için bu durumu sağlayacağından f bir Möbius dönüşümdür.

6 . ALTIGENLERİN APOLLONIUS NOKTALARI YARDIMIYLA MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

Örnek 6.1 Eğer $ABCDEF$ altıgeni aşağıdaki şartlardan birini sağlıyorsa $ABCDEF$ altıgeni bir Apollonius altıgendir.

(i) $\overline{AB} = \overline{AF}$, $\overline{CB} = \overline{CD}$ ve $\overline{ED} = \overline{EF}$

(ii) $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ ve $\overline{CD} = \overline{FA}$

(iii) $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{FA}$

(iv) $ABCDEF$ bir düzgün altıgendir

Örnek 6.2 Düzlemde bir C çemberi $ABCDEF$ altıgenin çevrel çemberi olarak verilsin. Bu durumda $ABCDEF$ nin bir Apollonius altıgeni olması için gerek ve yeter koşul $ABCDEF$ altıgenin köşegen uzunlukları tek bir noktada kesişmesidir.

Örnek 6.3 Düzlemde açıları sırasıyla $3\alpha, 3\beta$ ve 3γ olan bir ΔABC üçgeni verilsin. P, Q, R noktaları ΔABC üçgeni içinde $\angle BAR = \alpha$, $\angle ABR = \beta$, $\angle CBP = \beta$, $\angle BCP = \gamma$, $\angle ACQ = \gamma$, $\angle CAQ = \alpha$, $\angle RBP = \beta$, $\angle PCQ = \gamma$ ve $\angle QAR = \alpha$ olacak biçimde üç nokta olsun. Bu durumda ΔPQR üçgeni bir eşkenar üçgendir. $ARBPCQ$ altıgeni ise bir Apollonius altıgenidir. Sinüs teoreminden

$$\frac{\overline{AR}}{\sin\beta} = \frac{\overline{BR}}{\sin\alpha}, \; \frac{\overline{BP}}{\sin\gamma} = \frac{\overline{CP}}{\sin\beta}, \; \frac{\overline{CQ}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AQ}}{\sin\gamma}$$

dir. Buradan

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \; \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \; \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = 1$$

$$\overline{AR}.\overline{BP}.\overline{CQ} = \overline{BR}.\overline{CP}.\overline{AQ}$$

olup bu eşitlikler Apollonius altıgeni olma koşulunu sağlar. ΔPQR üçgeni bir Morley üçgenidir.

Özellik 6.1 f, kompleks düzlemde boş olmayan bir Δ açık bölgesinde analitik ve ünivelant fonksiyon olsun. $ABCDEF$ ise da bir Apollonius altıgeni olsun. $Z = ABCDEF$ için $f(Z) = Z'$ olmak üzere $A'B'C'D'E'F'$ altıgeni de bir Apollonius altıgenidir.

Teorem 6.1 $w = f(z)$ fonksiyonunun Özellik 6.1 sağlaması için gerek yeter koşul $w = f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşüm olmasıdır (Haruki and Rassias 2000).

İspat.

$\Rightarrow$) $z_1z_2z_3z_4z_5z_6$ bir Apollonius altıgeni olsun. O halde

$$\frac{|z_1 - z_2| \, . \, |z_3 - z_4| \, . \, |z_5 - z_6|}{|z_2 - z_3| \, . \, |z_4 - z_5| \, . \, |z_6 - z_1|} = 1$$

şartını sağlanır.

$$f(z) = z' = \frac{az + b}{cz + d} \tag{6.1}$$

ve

$$f(w) = w' = \frac{aw + b}{cw + d}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(w)| &= \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \right| \\
&= \left| \frac{acwz + bcw + azd + bd - acwz - bcz - awd - bd}{(cz + d)(cw + d)} \right| \\
&= \left| \frac{bcw + adz - bcz - awd}{(cz + d)(cw + d)} \right| \\
&= \left| \frac{(ad - bc)(z - w)}{(cz + d)(cw + d)} \right|
\end{aligned}$$

dir.

$$
\begin{aligned}
\frac{\left|z_1^{'}-z_2^{'}\right|.\left|z_3^{'}-z_4^{'}\right|.\left|z_5^{'}-z_6^{'}\right|}{\left|z_2^{'}-z_3^{'}\right|.\left|z_4^{'}-z_5^{'}\right|.\left|z_6^{'}-z_1^{'}\right|} &= \frac{\left|\frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz+d)(cw+d)}\right|.\left|\frac{(ad-bc)(z_3-z_4)}{(cz+d)(cw+d)}\right|.\left|\frac{(ad-bc)(z_5-z_6)}{(cz+d)(cw+d)}\right|}{\left|\frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz+d)(cw+d)}\right|.\left|\frac{(ad-bc)(z_4-z_5)}{(cz+d)(cw+d)}\right|.\left|\frac{(ad-bc)(z_6-z_1)}{(cz+d)(cw+d)}\right|} \\
&= \frac{\left|z_1-z_2\right|.\left|z_3-z_4\right|.\left|z_5-z_6\right|}{\left|z_2-z_3\right|.\left|z_4-z_5\right|.\left|z_6-z_1\right|} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde $z_1^{'}z_2^{'}z_3^{'}z_4^{'}z_5^{'}z_6^{'}$ bir Apollonius altıgendir.

$\Leftarrow$) Hipotezden f, D açık bölgesinde analitik ve ünivelanttır. Bu durumda

$$
f^{'}(z) \neq 0 \tag{6.2}
$$

Δ bir açık bölge olduğu için her z noktasının bir U kapalı komşuluğu $f^{'}(z) \neq 0$ olacak biçimde vardır.

Teorem 6.2 $f : \Delta \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve birebir ise Δ 'nin her z noktası için $f^{'}(z) \neq 0$ dır (Haruki and Rassias 2000).

İspat.

Özel olarak Δ bölgesinden bir x noktası ve x 'in r yarıçaplı U kapalı komşuluğu $f^{'}(z) \neq 0$ olacak biçimde seçilsin. U kapalı yuvarı içerisinde merkezi x olan keyfi bir düzgün $ABCDEF$ altıgenini incelensin. A, B, C, D, E, F nin sıralanması saat yönünün tersine göre olsun. Bu durumda A, B, C, D, E, F noktalarını $0 < |y| \leq r$ ve $w = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ olmak üzere sırasıyla

$$
x+y,\ x-w^2y,\ x+wy,\ x-y,\ x+w^2y,\ x-wy
$$

kompleks sayıları ile gösterilsin. $ABCDEF$ altıgenin çevrel çemberi K ile gösterilsin. $f(A) = A^{'}$, $f(B) = B^{'}$, $f(D) = D^{'}$, $f(E) = E^{'}$ olmak üzere $A^{'}B^{'}D^{'}E^{'}$ dörtgeni bir Apollonius dörtgeni olup

$$\begin{aligned} & |f(x+y)-f(x+wy)|\left|f(x+y)-f(x+w^2y)\right| \\ = & \ |f(x+wy)-f(x-y)|\left|f(x+w^2y)-f(x+y)\right| \end{aligned} \tag{6.3}$$

dir. AB çember yayı üzerinde A ve B noktalarından farklı B_1 noktasını, AF çember yayı üzerinde A ve F noktalarından farklı F_1 noktası

$$\overline{AB_1} = \overline{AF_1} \tag{6.4}$$

olacak biçimde seçilsin. $\overline{AB} = \overline{AF}$ olduğundan

$$\overline{B_1C} = \overline{F_1E} \tag{6.5}$$

olduğu açıktır. $ABCDEF$ bir düzgün altıgen olduğundan

$$\overline{CD} = \overline{DE} \tag{6.6}$$

dır. (6.4), (6.5) ve (6.6) dan

$$\overline{AB_1}.\overline{CD}.\overline{EF_1} = \overline{B_1C}.\overline{DE}.\overline{F_1A}$$

bulunur. Bu durumda AB_1CDEF_1 bir Apollonius altıgenidir. $f(B_1) = B_1^{'}$ ve $f(F_1) = F_1^{'}$ olsun. Hipotezden dolayı $w = f(z)$ Özellik 2.1'i sağladığından

$$\overline{A'B_1'}.\overline{C'D'}.\overline{E'F_1'} = \overline{B_1'C'}.\overline{D'E'}.\overline{F_1'A'} \tag{6.7}$$

sağlanır. (6.4) ten dolayı $0 < \theta < \frac{\Pi}{3}$ olmak üzere B_1 ve F_1 noktalarını sırasıyla $x + e^{i\theta}y$, $x + e^{-i\theta}y$ biçimde temsil edilsin. Böylece

$$\begin{aligned} \overline{A'B_1'} &= \left|f(x+y)-f(x+e^{i\theta}y)\right| \\ \overline{C'D'} &= |f(x+wy)-f(x-y)| \\ \overline{E'F_1'} &= \left|f(x+w^2y)-f(x+e^{-i\theta}y)\right| \\ \overline{B_1'C'} &= \left|f(x+e^{i\theta}y)-f(x+wy)\right| \\ \overline{D'E'} &= \left|f(x-y)-f(x+w^2y)\right| \\ \overline{F_1'A'} &= \left|f(x+e^{-i\theta}y)-f(x+y)\right| \end{aligned}$$

olup (6.7) den

$$\left|f(x+y)-f(x+e^{i\theta}y)\right|.\left|f(x+wy)-f(x-y)\right|$$
$$.\left|f(x+w^2y)-f(x+e^{-i\theta}y)\right|$$

$$= \left|f(x+e^{i\theta}y)-f(x+wy)\right|.\left|f(x-y)-f(x+w^2y)\right|$$
$$.\left|f(x+e^{-i\theta}y)-f(x+y)\right| \quad (6.8)$$

sağlanır. $x+e^{-i\theta}y$ ve $x+y$ farklı noktalar olup U ya aittir. U ise Δ nın da bir alt kümesi olduğundan hipotezden dolayı

$$f(x+e^{-i\theta}y)\neq f(x+y) \quad (6.9)$$

dır. (6.8) ve (6.9) dan

$$\left|\frac{f(x+y)-f(x+e^{i\theta}y)}{f(x+e^{-i\theta}y)-f(x+y)}(f(x+wy)-f(x-y))(f(x+w^2y)-f(x+e^{-i\theta}y))\right|$$
$$=\left|\ (f(x+e^{i\theta}y)-f(x+wy))(f(x-y)-f(x+w^2y))\ \right|$$

elde edilir.

$\theta\rightarrow+0$ iken
$$\frac{f(x+y)-f(x+e^{i\theta}y)}{f(x+e^{-i\theta}y)-f(x+y)}$$

belirsizdir. Üstelik $x+y\in U$ olduğu için

$$f^{'}(x+y)\neq 0 \quad (6.11)$$

dır. (6.11) den

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\rightarrow+0}\frac{f(x+y)-f(x+e^{i\theta}y)}{f(x+e^{-i\theta}y)-f(x+y)} &= \lim_{\theta\rightarrow+0}\frac{-ie^{i\theta}yf^{'}(x+e^{i\theta}y)}{-ie^{-i\theta}yf^{'}(x+e^{-i\theta}y)}\\ &= \frac{f^{'}(x+y)}{f^{'}(x+y)}\\ &= 1 \quad (6.12)\end{aligned}$$

(6.10) da $\theta\rightarrow+0$ iken (6.12) nin kullanılması ile

$$\left|(f(x+wy)-f(x-y))(f(x+w^2y)-f(x+y))\right|$$
$$=\left|(f(x+y)-f(x+wy))(f(x-y)-f(x+w^2y))\right|$$

elde edilir. Böylece $A^{'}C^{'}D^{'}E^{'}$ bir Apollonius dörtgenidir. Şimdi f 'nin Möbius dönüşümü olduğu gösterilsin. (6.13) den

$$\left|\frac{(f(x+wy)-f(x-y))(f(x+w^2y)-f(x+y))}{(f(x+y)-f(x+wy))(f(x-y)-f(x+w^2y))}\right|=1 \tag{6.14}$$

elde edilir.

$$g(y)=\frac{(f(x+wy)-f(x-y))(f(x+w^2y)-f(x+y))}{(f(x+y)-f(x+wy))(f(x-y)-f(x+w^2y))} \tag{6.15}$$

olsun. (6.14) den dolayı

$$\mid g(y)\mid=1 \tag{6.16}$$

dır. (6.15) de $g(y)$ nin payı ve paydası $0<|y|\leq r$ için analitik olup $w=f(z)$ Δ da ünivelant olduğundan $g(y)$ nin paydası $0<|y|\leq r$ için payda sıfır olmaz. $g(y)$ nin $y=0$'da da analitik olduğu gösterilsin.

$y\rightarrow 0$ için

$$\frac{f(x+wy)-f(x-y)}{f(x+y)-f(x+wy)}\rightarrow\frac{w^2f'(x)+f'(x)}{f'(x)-wf'(x)}=\frac{1+w}{1-w} \tag{6.17}$$

ve

$$\frac{f(x+w^2y)-f(x+y)}{f(x-y)-f(x+w^2y)}\rightarrow\frac{w^2f'(x)-f'(x)}{-f'(x)-w^2f'(x)}=\frac{1-w^2}{1+w^2} \tag{6.18}$$

elde edilir.(6.15), (6.17) ve (6.18) den $y\rightarrow 0$ iken

$$g(y)\rightarrow\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\left(\frac{1-w^2}{1+w^2}\right)=-1 \tag{6.19}$$

elde edilir.

$$g(0)=-1 \tag{6.20}$$

için (6.19) dan ve Riemann teoreminden $g(y)$, fonksiyon $y=0$ da analitiktir. Üstelik (6.20) den dolayı (6.16) daki eşitlik $y=0$ için de sağlanır. g fonksiyonu analitik ve

$|g|$ fonksiyonu 0 ın r yarıçaplı kapalı bir yuvasında 1 e eşittir. Analitik fonksiyonlar için Maksimum kuralına göre g fonksiyonu komşuluğu için de

$$g(y) = L \tag{6.21}$$

biçimde sabittir. ($L \notin \mathbb{C}$) (6.20) den dolayı

$$L \neq -1 \tag{6.22}$$

dir. (6.15), (6.21) ve (6.22) den $|y| \leq r$ olacak biçimde tüm y ler için

$$\begin{aligned}(f(x+wy) - f(x-y))(f(x+w^2y) - f(x+y))\\ + (f(x+y) - f(x+wy))(f(x-y) - f(x+w^2y) = 0\end{aligned}$$

sağlanır. (6.23) ün ardışık türevleri alınırsa $y = 0$ için

$$f^{'''}(x).f^{'}(x) - \frac{3}{2}f^{'''}(x)^2 = 0 \tag{6.24}$$

elde edilir. x, Δ de keyfi bir sabit olduğundan (6.24) eşitliğinden Δ da

$$f^{'''}(x).f^{'}(x) - \frac{3}{2}f^{'''}(x)^2 = 0$$

dır. Yukarıdaki eşitlik $|z| < +\infty$ için sağlanır. Böylece

$$\frac{f^{'''}(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f^{'''}(z)}{f'(z)}\right)^2 = 0$$

eşitliği $f^{'}(z) \neq 0$ olacak biçimde tüm z'ler için sağlanır. Bu durum $f^{'}(z) \neq 0$ olacak biçimde her $z \in \mathbb{C}$ için özdeşlik teoremi gereğince sağlanır. Böylece f fonksiyonunun Schwarz türevi sıfıra eşit olduğundan f bir Möbius dönüşümdür.

7. MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİNİN KARAKTERİZASYONU ÜZERİNE BİR NOT

Özellik 7.1 $w = f(z)$ fonksiyonu $z-$düzleminde boştan farklı basit bağlantılı bir R bölgesinde analitik ve ünivelant olsun. R bölgesinde $ABCD$ dörtgeni keyfi bir dörtgen olsun. Eğer $A^{'} = f(A)$, $B^{'} = f(B)$, $C^{'} = f(C)$, $D^{'} = f(D)$ ve $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ birbirini kesmeyen $w-$ düzleminde bir dörtgen ise o zaman

$$\angle A + \angle C = \angle A^{'} + \angle C^{'}$$

ve

$$\angle B + \angle D = \angle B^{'} + \angle D^{'}$$

olur.

Teorem 7.1 $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 7.1 i sağlar $\Leftrightarrow$ $w = f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümdür (Niamsup 2000).

İspat.

Kabul edilsin ki $w = f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşüm ve R bölgesinde $ABCD$ keyfi bir dörtgen olsun. Tanımdan

$$\angle A = \arg\left(\frac{A-D}{A-B}\right)$$

ve

$$\angle C = \arg\left(\frac{C-B}{C-D}\right)$$

yazılır ve buradan

$$\angle A + \angle C = \arg\left(\frac{A-D}{A-B}\right) + \arg\left(\frac{C-B}{C-D}\right) = \arg\left(\frac{A-D}{A-B}\cdot\frac{C-B}{C-D}\right)$$

yazılır. Çapraz oran tanımından ve Möbius dönüşümleri altında çapraz oran korunduğundan

$$\frac{f(A)-f(D)}{f(A)-f(B)}\cdot\frac{f(C)-f(B)}{f(C)-f(D)}=\frac{A-D}{A-B}\cdot\frac{C-B}{C-D}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\angle A' + \angle C' &= \arg\left(\frac{f(A)-f(D)}{f(A)-f(B)}\cdot\frac{f(C)-f(B)}{f(C)-f(D)}\right)\\
&= \arg\left(\frac{A-D}{A-B}\cdot\frac{C-B}{C-D}\right)\\
&= \angle A + \angle C
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 7.1 i sağlar.

İspatın diğer kısmı yine çapraz oran yardımıyla elde edilir.

Tanım 7.1 R bölgesinde $ABCD$ dörtgeni keyfi bir dörtgen olsun. Eğer $\overline{AB}.\overline{CD} = k(\overline{BC}.\overline{DA})$ şeklinde tanımlanırsa, $ABCD$ dörtgenine $k-$ Apollonius dörtgeni denir (Niamsup 2000).

Uyarı 7.1 Eğer L noktası ΔABC üçgeninin $(k,l)-$ Apollonius noktası ise o zaman $BCAL$ dörtgenine bir $l-$ Apollonius dörtgeni denir. Buradaki noktaların yönü saat yönünün tersidir (Niamsup 2000).

Özellik 7.2 Kabul edilsin ki $w = f(z)$ fonksiyonu $z-$ düzleminde boştan farklı bir R bölgesinde analitik ve ünivelant olsun. $\alpha = 0$ veya $\alpha = \pi$ olsun. R bölgesinde a, b, c ve d dört farklı nokta

$$\arg\left(\frac{a-b}{a-d}\cdot\frac{c-d}{c-b}+\frac{a-d}{a-b}\cdot\frac{c-b}{c-d}\right)=\alpha$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$\arg\left(\frac{f(a)-f(b)}{f(a)-f(d)}\cdot\frac{f(c)-f(d)}{f(c)-f(b)}+\frac{f(a)-f(d)}{f(a)-f(b)}\cdot\frac{f(c)-f(b)}{f(c)-f(d)}\right)=\alpha$$

yazılır.

Özellik 7.3 Kabul edilsin ki $w = f(z)$ fonksiyonu $z-$ düzleminde boştan farklı bir R bölgesinde analitik ve ünivelant olsun. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ veya $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ olsun. R bölgesinde a, b, c ve d dört farklı nokta

$$\arg\left(\frac{a-b}{a-d}\cdot\frac{c-d}{c-b}+\frac{a-d}{a-b}\cdot\frac{c-b}{c-d}\right)=\alpha$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$\arg\left(\frac{f(a)-f(b)}{f(a)-f(d)}\cdot\frac{f(c)-f(d)}{f(c)-f(b)}+\frac{f(a)-f(d)}{f(a)-f(b)}\cdot\frac{f(c)-f(b)}{f(c)-f(d)}\right)=\alpha$$

yazılır.

Lemma 7.1 Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları boştan farklı bir R bölgesinde ünivelant ve R bölgesinde $f(z)g(z)\neq 0$ ayrıca $arg(f(z)) = arg(g(z))$ ise $f(z) = Kg(z)$ biçimde R bölgesinde pozitif reel K sabiti vardır (Niamsup 2000).

Lemma 7.2 $\mathbb{C}$ de $w = f(z)$ fonksiyonu meromorf olsun. $w = f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümdür$\Leftrightarrow$ $f(z)$ fonksiyonun Schwarzian türevi olarak adlandırılan $S_f(z) = (f''(z)/f'(z))' - (1/2)\left(f''(z)/f'(z)\right)^2$ nin bütün $z\in\mathbb{C}-\left\{z : f'(z) = 0\right\}$ için $S_f(z) = 0$ dır (Niamsup 2000).

Teorem 7.2 Kabul edilsin ki $w = f(z)$ fonksiyonu $z-$ düzleminde boştan farklı bir R bölgesinde analitik ve ünivelant olsun. O halde $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 7.2 veya Özellik 7.3 ü sağlaması için gerek ve yeter koşul $w = f(z)$ fonksiyonunun bir Möbius dönüşüm olmasıdır (Niamsup 2000).

İspat.

$w = f(z)$ fonksiyonu R bölgesinde analitik ve ünivelant olduğu için, R bölgesinde $f'(z)\neq 0$ yazılır. Eğer x noktası R bölgesinde keyfi sabit bir nokta ise, o zaman $f'(x)\neq 0$ elde edilir. Kabul edilsin ki E noktası x tarafından temsil edilen nokta olsun. $E\in R$ olduğu için pozitif r reel sayısı vardır öyle ki E nin r komşuluğunda R bölgesini içerir.

$ABCD$ dörtgeni R bölgesinde keyfi bir eşkenar dörtgen ve E noktası $ABCD$ dörtgenin merkezi olsun. $ABCD$' nin yönü saat yönünün tersi olsun. $ABCD$ dörtgeni R bölgesinde eşkenar dörtgen olduğu için bu noktaları uygun bir $k > 1+\sqrt{2}$ için

$$x+y,\ x+iky,\ x-y,\ x-iky$$

biçimde kompleks sayılar tarafından temsil edilebilir. R bölgesi $z-$ düzleminde boştan farklı bir bölge olduğu için, sıfırdan farklı bir s reel sayısı vardır öyle ki $s<r$ dir. Eğer $0<|y|<s$ ise $ABCD$ dörtgeni R bölgesinde kalır. $w=f(z)$ fonksiyonu R bölgesinde ünivelant olduğu için

$$\begin{aligned} f(A) &= f(x+y),\ f(B)=f(x+iky), \\ f(C) &= f(x-y),\ f(D)=f(x-iky), \end{aligned}$$

farklı noktaları belirtir.

$0<|y|<s$ aralığında bütün y ler için

$$\begin{aligned} \arg\left(\begin{array}{c} \frac{f(x+y)-f(x+iky)}{f(x+y)-f(x-iky)}\cdot\frac{f(x-y)-f(x-iky)}{f(x-y)-f(x+iky)} \\ +\frac{f(x+y)-f(x-iky)}{f(x+y)-f(x+iky)}\cdot\frac{f(x-y)-f(x+iky)}{f(x-y)-f(x-iky)} \end{array}\right) &= 0 \\ &= \arg(1) \end{aligned} \tag{7.1}$$

yazılır. $x\in R$ keyfi sabit nokta olduğu için

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{f(x+y)-f(x+iky)}{f(x+y)-f(x-iky)}\cdot\frac{f(x-y)-f(x-iky)}{f(x-y)-f(x+iky)} \\ &\quad +\frac{f(x+y)-f(x-iky)}{f(x+y)-f(x+iky)}\cdot\frac{f(x-y)-f(x+iky)}{f(x-y)-f(x-iky)} \end{aligned} \tag{7.2}$$

yazılır. (7.1) ve (7.2) den

$$\arg(h(y))=\arg(1) \tag{7.3}$$

elde edilir.

$h(y)$ fonksiyonu $y=0$ da analitik olduğundan (7.3) de $y=0$ sağlanır. $y\to 0$ iken L'Hospital kuralından

$$h(y)\to\left(\frac{1+ik}{1-ik}\right)^2+\left(\frac{-1+ik}{1+ik}\right)^2=\frac{2\left(1-6k^2+k^4\right)}{\left(1+k^2\right)^2}$$

elde edilir. Riemann teoremi ve (7.4) den

$$h(0) = \frac{2\left(1-6k^2+k^4\right)}{\left(1+k^2\right)^2} \tag{7.5}$$

yazılırsa $h(y)$ fonksiyonu $y = 0$ da analitik olur. $h(y)$ fonksiyonu $|y| < s$ de analitiktir. (7.2) den ve $w = f(z)$ fonksiyonu R bölgesinde ünivelant olduğu için $|y| < s$ de $h(y) \neq 0$ olur. Lemma 7.1 den K pozitif reel sayısı için $|y| < s$ de

$$h(y) = K \tag{7.6}$$

yazılır. (7.6) ve (7.5) de $y = 0$ için

$$\frac{2\left(1-6k^2+k^4\right)}{\left(1+k^2\right)^2} = K \tag{7.7}$$

yazılır. (7.7) ve (7.8) için $|y| < s$ de

$$h(y) = \frac{2\left(1-6k^2+k^4\right)}{\left(1+k^2\right)^2} \tag{7.8}$$

yazılır.

(7.2) ve (7.6) dan

$$\begin{aligned}
&\left(f(x+y)-f(x+iky)\right)^2\left(f(x-y)-f(x-iky)\right)^2 \\
&\qquad + \left(f(x+y)-f(x-iky)\right)^2\left(f(x-y)-f(x-iky)\right)^2 \\
&= \frac{2\left(1-6k^2+k^4\right)}{\left(1+k^2\right)^2}\left(f(x+y)-f(x+iky)\right) \\
&\qquad \times\left(f(x-y)-f(x-iky)\right)\left(f(x+y)-f(x-iky)\right) \\
&\qquad \times\left(f(x-y)-f(x+iky)\right)
\end{aligned} \tag{7.9}$$

elde edilir.

Ardışık türev alındığında ve $y = 0$ için

$$-1920k^2\left(-1+k^2\right)\left(f^{'}(x)\right)^2\left(-3f^{''}(x)^2+2f^{'}(x)f^{'''}(x)\right) = 0 \tag{7.10}$$

elde edilir.

k pozitif reel sayısı $1+\sqrt{2}$ den daha büyük olduğu için $k^2(-1+k^2) \neq 0$ yazılır. (7.8) den $f^{'''}(x).f^{'}(x) - \frac{3}{2}f^{'''}(x)^2 = 0$ elde edilir. $x \in R$ keyfi sabit olduğu için x yerine z yazılır. Böylece R bölgesinde $f^{'''}(z).f^{'}(z) - \frac{3}{2}f^{'''}(z)^2 = 0$ biçiminde yazılır. Buradan $f^{'}(z) \neq 0$ olacak biçimde tüm z ler için

$$\frac{f^{'''}(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f^{'''}(z)}{f'(z)}\right)^2 = 0$$

olup f bir Möbius dönüşümdür.

8 . $(2n-1)$ KENARLI ÇOKGENLERİN APOLLONIUS NOLTALARINI KULLANARAK MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİNİN YENİ BİR KARAKTERİZASYONU

Tanım 8.1 Kabul edilsin ki $Z = Z_1 Z_2 \cdots Z_{2n-1}$ keyfi bir $(2n-1)$ kenarlı çokgen ve L noktası kompleks düzlemde bir nokta olsun. Eğer aşağıdaki eşitlik sağlanırsa, L noktasına Z nin bir Apollonius noktası denir (Bulut ve Özgür 2005).

$$1 \leq k \leq 2n-1 \text{ için } |L - Z_k| \prod_{i=1}^{n-1} |Z_{2i+k-1} - Z_{2i+k}|$$

Teorem 8.1 $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 2.1 i sağlar$\Leftrightarrow$ $w = f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümüdür (Bulut ve Özgür 2005).

Özellik 8.1 Kabul edilsin ki $w = f(z)$ fonksiyonu $z-$düzleminde boştan farklı bir R bölgesinde analitik ve ünivelant olsun. R bölgesinde $Z = Z_1 Z_2 \cdots Z_{2n-1}$ $(2n-1)$ kenarlı çokgen ve L ise Apollonius noktası olsun. Eğer $1 \leq i \leq 2n-1$, $L^{'} = f(L)$ için $Z_i^{'} = f(Z_i)$ ise ve $2n-1$ farklı noktalar $Z_i^{'}$ $(1 \leq i \leq 2n-1)$ bir $(2n-1)$ kenarlı çokgeni oluşturuyorsa o zaman $L^{'}$ noktası aynı zamanda $Z^{'} = Z_1^{'} Z_2^{'} \cdots Z_{2n-1}^{'}$ in bir Apollonius noktasıdır.

Teorem 8.2 Kompleks düzlemde $Z = Z_1 Z_2 \cdots Z_{2n-1}$ keyfi bir $(2n-1)$ kenarlı çokgen olsun. Z nin Apollonius noktaları en fazla iki tanedir (Bulut ve Özgür 2005).

İspat.

Kabul edilsin ki $Z = Z_1 Z_2 \cdots Z_{2n-1}$ keyfi bir $(2n-1)$ kenarlı çokgen olsun. Tanım 8.1 den

$$1 \leq k \leq 2n-1 \text{ için } |L - Z_k| \prod_{i=1}^{n-1} |Z_{2i+k-1} - Z_{2i+k}|$$

yazılır.

Burada $k = 1$ ve 3 için

$$|L - Z_1| \prod_{i=1}^{n-1} |Z_{2i} - Z_{2i+1}| = |L - Z_3| \prod_{i=1}^{n-1} |Z_{2i+2} - Z_{2i+3}|$$

ve

$$|L - Z_1| |Z_2 - Z_3| |Z_4 - Z_5| \cdots |Z_{2n-2} - Z_{2n-1}|$$
$$= |L - Z_3| |Z_4 - Z_5| |Z_4 - Z_5| \cdots |Z_{2n-2} - Z_{2n-1}| |Z_1 - Z_2|$$

bulunur. Buradan

$$|L - Z_1| |Z_2 - Z_3| = |L - Z_3| |Z_1 - Z_2|$$

ve böylece

$$\frac{|L - Z_1|}{|L - Z_3|} = \frac{|Z_1 - Z_2|}{|Z_2 - Z_3|}$$

elde edilir.

Örnek 8.1 Kabul edilsin ki $Z = Z_1 Z_2 \cdots Z_{2n-1}$ keyfi bir $(2n-1)$ kenarlı çokgen olsun. O halde bu çokgenin tek Apollonius noktası çemberin merkezidir (Bulut ve Özgür 2005).

İspat.

Kabul edilsin ki Z nin Apollonius noktası L noktası olsun. $a = |Z_1 - Z_2| = |Z_2 - Z_3| = |Z_3 - Z_4| = \cdots = |Z_{2n-1} - Z_1|$ ve $1 \leq i \leq 2n-1$ için $x_i = |L - Z_i|$ olsun. Tanım 8.1 den

$$x_1 a^{n-1} = x_2 a^{n-1} = \cdots = x_{2n-2} a^{n-1} = x_{2n-1} a^{n-1}$$

ve buradan

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n-2} = x_{2n-1}$$

bulunur. Böylece L noktası bu $(2n-1)$ kenarlı çokgenin çevrel çemberin merkezidir.

Tanım 8.2 Kompleks düzlemde sıralı köşeler $z_1, z_2, \cdots, z_{2n} \in \mathbb{C}$ için

$$A(z_1, z_2, \cdots, z_{2n}) = \frac{|(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) \cdots (z_{2n-1} - z_{2n})|}{|(z_2 - z_3)(z_4 - z_5) \cdots (z_{2n-2} - z_{2n-1})(z_{2n} - z_1)|}$$

ve

$$A\left(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{2n}\right)=1$$

şartını sağlarsa kompleks düzlemde bir $2n$ kenarlı çokgenin Apolloniusu olarak adlandırır (Bulut ve Özgür 2005).

Teorem 8.3 Eğer f fonksiyonu açık bir Δ bölgesinde analitik ünivelant ise o zaman aşağıdaki önermeler denktir.

(i) f fonksiyonu bir Möbius dönüşümdür.

(ii) $A\left(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{2n}\right)=c$ ile her $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{2n}\in\Delta$ için $A\left(f\left(z_1\right),\ f\left(z_2\right),\ \cdots,\ f\left(z_{2n}\right)\right)=c$ öyle $c>0$ vardır (Bulut ve Özgür 2005).

Teorem 8.4 Özellik 2.1, Özellik 8.1 yi sağlar (Bulut ve Özgür 2005).

İspat.

Kabul edilsin ki $w=f(z)$ fonksiyonu Özellik 2.1 i sağlasın. $w=f(z)$ fonksiyonu z-düzleminde boştan farklı bir R bölgesinde analitik olsun. Teorem 8.1 den $w=f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümdür ve böylece R bölgesinde univelanttir. Kabul edilsin ki $Z=Z_1Z_2\cdots Z_{2n-1}$, R bölgesinde keyfi bir $(2n-1)$ kenarlı çokgenin ve Apollonius L noktası R bölgesinin bir noktası olsun.

Eğer $1\leq i\leq 2n-1$ için $Z_i^{'}=f(Z_i)$ yazılırsa o zaman $w=f(z)$ fonksiyonun ünivelant olduğundan dolayı $1\leq i\leq 2n-1$ için $Z_i^{'}$ noktaları farklıdır.

L noktası Z nin bir Apollonius noktası olduğu için Tanım 8.1 den

$$|L-Z_1|\prod_{i=1}^{n-1}|Z_{2i}-Z_{2i+1}|=|L-Z_{2n-1}|\prod_{i=1}^{n-1}|Z_{2i+2n-2}-Z_{2i+2n-1}|$$

ve

$$|L-Z_1|\,|Z_2-Z_3|\cdots|Z_{2n-2}-Z_{2n-1}|=|L-Z_{2n-1}|\,|Z_1-Z_2|\cdots|Z_{2n-3}-Z_{2n-2}|$$

elde edilir. Tanım 8.2 den $LZ_1Z_2\cdots Z_{2n-1}$ $2n$ kenarlı bir Apollonius çokgendir. Teorem 8.3 den $L^{'}Z_1^{'}Z_2^{'}\cdots Z_{2n-1}^{'}$ $2n$ kenarlı bir Apollonius çokgen

$$\left|L^{'}-Z_1^{'}\right|\prod_{i=1}^{n-1}\left|Z_{2i}^{'}-Z_{2i+1}^{'}\right|=\left|L^{'}-Z_{2n-1}^{'}\right|\prod_{i=1}^{n-1}\left|Z_{2i+2n-2}^{'}-Z_{2i+2n-1}^{'}\right| \tag{8.1}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\left|L' - Z'_{2n-1}\right| \prod_{i=1}^{n-1} \left|Z'_{2i+2n-2} - Z'_{2i+2n-1}\right| \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left|L' - Z'_{2n-2}\right| \prod_{i=1}^{n-1} \left|Z'_{2i+2n-3} - Z'_{2i+2n-2}\right| && (8.3)\\
&= \cdots \\
&= \left|L' - Z'_{3}\right| \prod_{i=1}^{n-1} \left|Z'_{2i+2} - Z'_{2i+3}\right| \\
&= \left|L' - Z'_{2}\right| \prod_{i=1}^{n-1} \left|Z'_{2i+1} - Z'_{2i+2}\right| && (8.4)
\end{aligned}$$

bulunur. (8.1) ve (8.2) den her $1 \leq k \leq 2n-1$ için

$$\left|L' - Z'_{k}\right| \prod_{i=1}^{n-1} \left|Z'_{2i+k-1} - Z'_{2i+k}\right|$$

bulunur. $L' = f(L)$ aynı zamanda Z' nin bir Apollonius noktasıdır. Sonuç olarak $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 8.1 i sağlar.

Teorem 8.5 $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 8.1 yi sağlar $\Leftrightarrow$ $w = f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümdür (Bulut ve Özgür 2005).

İspat.

$\Rightarrow$) $w = f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşüm olsun. Teorem 8.1 den $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 2.1 i sağlar. Böylece Teorem 8.4 den Özellik 8.1 i sağlar.

$\Leftarrow$) $w = f(z)$ fonksiyonu Özellik 8.1 sağlasın. $w = f(z)$ fonksiyonu R bölgesinde analitik ve ünivelant olduğu için R' de

$$f^{'}(z) \neq 0 \tag{8.5}$$

dir. Eğer x noktası R bölgesinin keyfi bir sabit noktası ise (8.5) den

$$f^{'}(x) \neq 0 \tag{8.6}$$

elde edilir. Kabul edilsin ki L noktası x tarafından temsil edilsin. $L \in R$ olduğu için pozitif bir r reel sayısı vardır öyle ki L nin r kapalı komşuluğunda R bölgesinde kalır. Bu kapalı komşuluk V olsun.

Kabul edilsin ki $Z = Z_1 Z_2 \cdots Z_{2n-1}$ için V de sınırlı keyfi bir düzgün $(2n-1)$ kenarlı çokgen ve merkezi L noktası olsun. $Z_1,\ Z_2,\ \cdots,\ Z_{2n-1}$ yönü saat yönünün tersi şeklinde olsun. $Z = Z_1 Z_2 \cdots Z_{2n-1}$, V bölgesinde düzgün bir $(2n-1)$ kenarlı çokgen olduğu için $0 < |y| < r$ ve $w_{k+1} = e^{\frac{i2\pi k}{2n-1}}$, $0 \leq k \leq 2n-2$ için $Z_1,\ Z_2,\ \cdots,$ Z_{2n-1} verilen sıra ile $x + w_{k+1} y$ kompleks sayıları tarafından temsil edilsin.

$w = f(z)$ fonksiyonu R bölgesinde ünivelant olduğu için $1 \leq i \leq 2n-1$ için $Z_i^{'} = f(Z_i)$ tüm noktaları farklıdır. Analitik fonksiyonların özelliği tarafından $s \leq r$ sağlayan bazı küçük s reel sayısı vardır ki $1 \leq i \leq 2n-1$ için $Z_i^{'}$ nin herhangi üçü $w-$düzlemde $0 < |y| < s$ sağlayan tüm y ler için doğrudaş değildir.

L noktası düzgün $(2n-1)$ kenarlı çokgenin Apollonius noktası ve $Z_i^{'}(1 \leq i \leq 2n-1)$ herhangi üçü doğrudaş olmadığı için hipotez tarafından $L^{'} = f(L)$ noktası $Z^{'} = Z_1^{'} Z_2^{'} \cdots Z_{2n-1}^{'}$ nin bir Apollonius noktasıdır. Tanım 8.1 den her $1 \leq k \leq 2n-1$ için

$$\left|L^{'} - Z_k^{'}\right| \prod_{i=1}^{n-1} \left|Z_{2i+k-1}^{'} - Z_{2i+k}^{'}\right| \tag{8.7}$$

dir. (8.7) de $k = 1$ ve 3 için

$$\left|L^{'} - Z_1^{'}\right| \prod_{i=1}^{n-1} \left|Z_{2i}^{'} - Z_{2i+1}^{'}\right| = \left|L^{'} - Z_3^{'}\right| \prod_{i=1}^{n-1} \left|Z_{2i+2}^{'} - Z_{2i+3}^{'}\right|$$

elde edilir. Böylece

$$\left|L' - Z_1'\right| \left|Z_2' - Z_3'\right| \left|Z_4' - Z_5'\right| \cdots \left|Z_{2n-2}' - Z_{2n-1}'\right|$$
$$= \left|L' - Z_3'\right| \left|Z_4' - Z_5'\right| \cdots \left|Z_{2n-2}' - Z_{2n-1}'\right| \left|Z_1' - Z_2'\right|$$

ve

$$\left|L' - Z_1'\right| \left|Z_2' - Z_3'\right| = \left|L' - Z_3'\right| \left|Z_1' - Z_2'\right|$$

elde edilir. Z_1', Z_2', $\cdots$, Z_{2n-1}' , L' noktaları $0 \leq k \leq 2n-2$ aralığında $f(x + w_{k+1y})$ tarafından temsil edildiği için

$$|f(x) - f(x+y)| \,.\, |f(x + w_2 y) - f(x + w_3 y)|$$
$$= |f(x) - f(x + w_3 y)| \,.\, |f(x+y) - f(x + w_2 y)|$$

yazılır ve böylece

$$\left| \frac{[f(x) - f(x+y)] \,.\, [f(x + w_2 y) - f(x + w_3 y)]}{[f(x) - f(x + w_3 y)] \,.\, [f(x+y) - f(x + w_2 y)]} \right| = 1 \tag{8.8}$$

elde edilir. Eğer (8.8) de

$$g(y) = \left| \frac{[f(x) - f(x+y)] \,.\, [f(x + w_2 y) - f(x + w_3 y)]}{[f(x) - f(x + w_3 y)] \,.\, [f(x+y) - f(x + w_2 y)]} \right| \tag{8.9}$$

biçimde yazılırsa, $0 < |y| \leq s$ için

$$|g(y)| = 1 \tag{8.10}$$

bulunur. (8.9) da $g(y)$ nin pay ve paydası $0 < |y| \leq s$ sağlayan tüm y ler için analitik fonksiyondur. $w = f(z)$ fonksiyonu R bölgesinde analitik olduğu için (8.9) nun paydası asla sıfıra eşit olmaz ve $g(y)$ fonksiyonu $0 < |y| \leq s$ de analitiktir. $g(y)$ fonksiyonu aynı zamanda $y = 0$ da analitiktir.

$y \to 0$ için L'Hospital kuralı ve (8.6) dan

$$\frac{f(x) - f(x+y)}{f(x) - f(x + w_3 y)} \to \frac{-\,f'(x)}{-\,w_3 f'(x)} = \frac{1}{w_3} \tag{8.11}$$

ve

$$\frac{f(x + w_2 y) - f(x + w_3 y)}{f(x+y) - f(x + w_2 y)} \to \frac{w_2 f'(x) - w_3 f'(x)}{f'(x) - w_2 f'(x)} = \frac{w_2 - w_3}{1 - w_2} \tag{8.12}$$

elde edilir. $y \to 0$ için (8.9), (8.11) ve (8.12) den

$$g(y) \to \frac{1}{w_3}\frac{w_2 - w_3}{1 - w_2} \tag{8.13}$$

elde edilir. Buradan

$$g(0) = \frac{1}{w_3}\frac{w_2 - w_3}{1 - w_2} \tag{8.14}$$

biçimde tanımlanırsa (8.13) den ve Rieman kaldırabilir tekillik teoreminden $g(y)$ fonksiyonu $y = 0$ da analitiktir. Böylece $g(y)$ fonksiyonu $0 < |y| \leq s$ de analitik ve $|y| \leq s$ için $|g(y)| = 1$ dir. Ayrıca analitik fonksiyonlar için maksimum modül prensibinden $|y| \leq s$ de

$$g(y) = K \tag{8.15}$$

olacak biçimde bir kompleks K sabiti vardır. (8.15) de $y = 0$ alınsın ve (8.14) de yerine yazılırsa

$$K = \frac{1}{w_3}\frac{w_2 - w_3}{1 - w_2} \tag{8.16}$$

elde edilir. (8.9), (8.15) ve (8.16) dan $|y| \leq s$ sağlayan tüm y ler için

$$\begin{aligned} w_3(1 - w_2)\ [\, f(x) - f(x+y)\,] . [\, f(x + w_2 y) - f(x + w_3 y)\,] \\ - (w_2 - w_3)[\, f(x) - f(x + w_3 y)\,] . [\, f(x+y) - f(x + w_2 y)\,] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. (8.17) nin her iki tarafının ardışık türev alınırsa

$$f^{'''}(x).f^{'}(x) - \frac{3}{2}f^{'''}(x)^2 = 0 \tag{8.18}$$

elde edilir. $x \in R$ keyfi bir sabit olduğu için (8.18) de x yerine z alınsın. Buradan $f^{'''}(z).f^{'}(z) - \frac{3}{2}f^{'''}(z)^2 = 0$ elde edilir. $\frac{f^{'''}(z)}{f^{'}(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f^{'''}(z)}{f^{'}(z)}\right)^2 = 0$ için $f^{'}(z) \neq 0$ sağlayan bütün z ler sağlanır. Böylece $f(z)$ fonksiyonu bir Möbius dönüşümdür.

9. KAYNAKLAR

Başkan, T. (1996). Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Uludağ Üniversitesi, 2. Baskı, Bursa.

Haruki, H. and Rassias, T.M. (1996). A new characteristic of Möbius transformations by use of Apollonius points of triangles. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **197:** 14-22.

Haruki, H. and Rassias, T.M. (1998). A new characteristic of Möbius transformations by use of Apollonius Quadrilaterals. *Proceedings of the American Mathematical Society,* **10:** 2857-2861.

Özgür, N.Y. ve Bulut, S. (2004). A new characteristic of Möbius transformations by use of Apollonius points of pentagons. *Turkish Journals. Math*., **28:** 299-305.

Haruki, H. and Rassias, T.M (2000). A new characterization of Möbius transformations by use of Apollonius hexagons. *Proceedings of the American Mathematical Society,* **128:** 2105-2109.

Niamsup, P. (2000). A note on the characteristic properties of Möbius Transformations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **248:** 203-215.

Özgür, N.Y. ve Bulut, S. (2005). A New Characterization of Möbius Transformations by the Use of Apollonius Points of (2n-1)-gons *Acta Mathematica Sinica, English Series,* **3:** 667-672.

İnternet Kaynakları

1) https://tr.wikipedia.org/wiki/Pergeli_Apollonius, 04.05.2016

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Seyit Ömer KİRİŞCİ

Doğum Yeri ve Tarihi : Konya 14.11.1991

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Telefon/e-posta) : omer_kirisci@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Lale Lisesi, (2005-2009)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, (2009-2013)