TERSLENEBİLİR HALKALARIN BİR GENELLEŞTİRMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU

DANIŞMAN

Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TERSLENEBİLİR HALKALARIN BİR GENELLEŞTİRMESİ

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU

DANIŞMAN
Prof. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU tarafından hazırlanan "Terslenebilir Halkaların Bir Genelleştirmesi" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 18/06/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Başkan **:** Doç. Dr. Erdoğan HALAT
Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Üye **:** Prof. Dr. Muhittin BAŞER
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18/06/2014

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

TERSLENEBİLİR HALKALARIN
BİR GENELLEŞTİRMESİ

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Muhittin BAŞER

Bu araştırma, dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar, bazı halka sınıfları ve bir halka üzerindeki polinom halkaları hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, terslenebilir halkaların temel özellikleri, polinom halkalarının ve klasik kesir halkalarının terslenebilirliklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise terslenebilir halkaların bir genelleştirmesi olan güçlü terslenebilir halkalar ve bu halka sınıfının genişlemeleri incelenmiştir.

2014, v + 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: İnmiş Halkalar, Terslenebilir Halkalar, Armendariz Halkalar, Güçlü Terslenebilir Halkalar

ABSTRACT

M.Sc Thesis

A GENERALIZATION OF REVERSIBLE RINGS

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic

Supervisor: Prof. Dr. Muhittin BAŞER

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions, ring classes and polynomial rings on a ring are recalled. In the third chapter, reversible ring, which is a generalization of reversible rings are characterized, polynomial rings and classical quotient rings and the basic properties of this ring classes are studied. In the fourth chapter, on strong reversible rings and their extensions are studied.

2014, v + 52pages

Key Words: Reduced Rings, Reversible Rings, Armendariz Rings, Strong Reversible Rings

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda danışmanlığımı yapan sayın kıymetli hocam Prof. Dr. Muhittin BAŞER'e göstermiş olduğu sabır, ilgi, destek ve yardımlarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen babam Nihat BÜYÜKÇAVUŞOĞLU, annem İsmet BÜYÜKÇAVUŞOĞLU, kardeşim Gözde BÜYÜKÇAVUŞOĞLU ve canım arkadaşım Nurten KILIÇ'a sonsuz teşekkür ederim.

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU
AFYONKARAHİSAR 2014

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
α	R halkasının bir endomorfizması
$\bar{\alpha}$	R nin bir α endomorfizmasının R nin bir genişlemesine genişletilmişi
D	R halkasının Dorroh genişlemesi
I_n	$n \times n$ tipindeki birim matris
I_R	R halkasının birim endomorfizması
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[x;x^{-1}]$	R üzerindeki Laurent polinomlar halkası
$R[x;\alpha]$	R nin skew polinom halkası
$T(R,M)$	R halkasının M modülü ile aşikar genişlemesi
$\langle x^n \rangle$	$R[x]$ halkasının x^n tarafından üretilen ideali
$R[x]/\langle x^n \rangle$	$R[x]$ halkasının $\langle x^n \rangle$ ideali ile elde edilen bölüm halkası

1. GİRİŞ

Son yıllarda, pek çok matematikçi tarafından çalışılan halka sınıflarından birisi olan terslenebilir halka sınıfları ilk defa 1990 yılında Habeb tarafından çalışılmıştır. Daha sonra, bu halka sınıfları ile ilgili bir çok ilginç sonuçlar elde eden Cohn (1999), bu halkalara terslenebilir (reversible) halka ismini vermiştir. Bundan sonra bu halka sınıfları, bu isim ile çalışılmıştır. R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için;

$$ab = 0 \Longrightarrow ba = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına terslenebilir (reversible) halka denir. Bu halka sınıfları halka teoride oldukça fazla öneme sahiptir. Yakın zamanlarda birçok araştırmacı bu halka sınıflarının çeşitli genelleştirmelerini yaparak teoriye katkıda bulunmuşlardır.

Çalışmamızın detaylarına geçmeden önce terslenebilir halkalarla ilgili bu güne kadar yapılan çalışmalar hakkında bazı bilgileri hatırlatalım. Eğer bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır (nilpotent) elemanı yoksa veya denk olarak $a \in R$ için $a^2 = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R ye inmiş (reduced) halka denir. Her tamlık bölgesinin inmiş bir halka olduğu açıktır. Ayrıca inmiş halkaların sınıfının terslenebilir halkaların sınıfını kapsadığı bilinmektedir. Diğer taraftan, her değişmeli halkanın terslenebilir olduğu da açıktır. İnmiş halkaların sınıfının diğer bir genelleştirilmesi Armendariz halkalardır. Rege and Chhawchharia (1997)' de Armendariz halka tanımını şu şekilde vermişlerdir. $R[x]$; R üzerindeki polinomların halkası olmak üzere $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,\ g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x]$ polinomları için $f(x)g(x) = 0$ iken, her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_ib_j = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası Armendariz halka olarak adlandırılmıştır. Bu özelliği sağlayan halkalara Armendariz halka denilmesinin sebebi; inmiş bir halkanın bu özelliği sağladığını 1974 de gösteren kişinin Armendariz olmasıdır. Halkaların Armendarizlik özelliği üzerine birçok makale yazılmıştır.

R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olmak üzere R halkasından katsayılı polinomların kümesi, polinomlarda bilinen toplama işlemi ve herhangi bir $a \in R$ için $xa = \alpha(a)x$ ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya endomorfizma tipinin Ore genişlemesi (yada skew polinom halkası) denir ve $R[x;\alpha]$ ile gösterilir.

Son yıllarda bir R halkasının Armendarizlik özelliği skew polinomların halkasına genişletilmiştir. Hong vd. (2006) tarafından aşağıdaki tanımlar verilmiştir. $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,\ q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x;\alpha]$ polinomları için $p(x)q(x) = 0$ iken, her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_ib_j = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası $\alpha -$skew Armendariz ($\alpha -$Armendariz) olarak adlandırılmıştır. Eğer α; R nin birim endomorfizması olarak alınırsa bu durumda, yukarıdaki iki tanım da Armendariz halka tanımı ile çakışacaktır. Ayrıca R; $\alpha -$skew Armendariz ($\alpha -$Armendariz) bir halka ve $S, \alpha(S) \subseteq S$ olacak şekilde R nin bir alt halkası ise, bu durumda S de $\alpha -$skew Armendariz ($\alpha -$Armendariz) dir. Diğer taraftan her $\alpha -$Armendariz halkanın $\alpha -$skew Armendariz halka olduğu Hong vd. (2006)' da ispatlanmıştır ve bu gerektirmenin tersinin doğru olmadığına dair örnek verilmiştir. Krempa (1996)' da $\alpha; R$ halkasının bir endomorfizması olmak üzere $a \in R$ için,

$$a\alpha(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda α'yı katı (rigid) endomorfizma olarak adlandırmıştır. Daha sonra Hong vd. (2003)' de bir R halkasının katı bir α endomorfizmasının var olması durumunda R yi $\alpha -$katı ($\alpha -$rigid) halka olarak adlandırmışlardır. Kolayca görülebilir ki; $I_R; R$ nin birim endomorfizması olmak üzere R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul R nin $I_R -$katı olmasıdır. Bir R halkasının herhangi bir katı endomorfizması bir monomorfizmadır. Hong vd. (2000)' de $\alpha -$katı halkaların inmiş halka olduğunu ispatlamışlardır. Diğer taraftan Hong vd. (2000)' de herhangi bir $\alpha -$katı halkanın $\alpha -$Armendariz olduğu ispatlanmış ve bunun tersinin doğru olmadığına dair örnek verilmiştir. Hong vd. (2003)' den bir R halkasının $\alpha -$katı olması için gerek ve yeter koşulun $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının inmiş olması gerektiğini biliyoruz.

Yukarıda ifade edilen bilgilerin ışığı altında; bu çalışmada Başer vd. (2009)' dan yararlanarak R halkasının bir α endomorfizması için $\alpha -$terslenebilir halkaların sınıfı tanımlanacak, bu halka sınıflarıyla diğer halka sınıflarının ilişkileri ve özelliklede genelleştirilmiş Armendariz halkalar ile arasındaki ilişkiler çalışılacaktır.

Çalışmamız boyunca R birimli bir halka ve aksi söylenmedikçe de $\alpha; R$ nin sıfırdan ve birimden farklı bir endomorfizması olacaktır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde, sonraki bölümde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlerle, çalışma boyunca ihtiyaç duyulacak birçok halka sınıfları ve bu halka sınıflarının bazı temel özellikleri, bazı özel matris halkaları ve polinom halkaları gibi bir halkadan elde edilen yeni halkalar verilecektir.

Üçüncü bölümde Kim and Lee (2003) kullanılarak terslenebilir halkalar, bu halka sınıflarının diğer halka sınıfları ile ilişkileri polinom halkalarının ve klasik kesir halkalarının terslenebilirlikleri karakterize edilecek ve bu halka sınıflarının bazı temel özellikleri incelenecektir.

Son bölümde Başer and Kwak (2010) temel alınarak terslenebilir halkaların bir genelleştirmesi yapılacak, bu halka sınıfının birçok kullanışlı karakterizasyonu verilecek ve halkanın hangi genişlemelerinin bu yeni özelliğe sahip olup olmadığı araştırılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramlar ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan bazı halka sınıfları hatırlatılacaktır. Bu bölümde kullandığımız temel referanslar Hungerford (1982), Anderson and Fuller (1992) ve Lam (2001)' dır.

2.1 Halkalar ve Halka Homomorfizmaları

Bu kısımda halka teorideki bazı temel kavramlar tanımlanacak ve halkaların sıkça kullanacağımız bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.1. R boştan farklı bir küme ve R üzerinde, genellikle $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma ile gösterilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer;

(i) $(R, +)$ bir değişmeli grup,

(ii) Her $a, b, c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ (çarpmanın birleşme özelliği),

(iii) Her $a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ (sol ve sağ dağılma özelliği)

oluyorsa, bu durumda R ye $(+)$ ve $(.)$ ikili işlemleri ile birlikte bir *halka* denir.

R bir halka olmak üzere eğer, her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R ye *değişmelidir* denir. Eğer her $a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa, bu durumda R ye *birimli bir halka* denir. 1_R elemanına da halkanın *birimi* denir. Bir halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına halkanın *sıfırı* denir ve 0_R veya herhangi bir karışıklığa sebep olmazsa 0 ile gösterilir.

Teorem 2.1.2. R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her $a \in R$ için $0a = a0 = 0$ dır.

(ii) Her $a, b \in R$ için $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ dir.

(iii) Her $a, b \in R$ için $(-a)(-b) = ab$ dir.

(iv) Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $a, b \in R$ için $(na)b = a(nb) = n(ab)$ dir.

(v) Her $a_i, b_j \in R$ için $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ dir.

Tanım 2.1.3. R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ $(ba = 0)$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ varsa, bu durumda a ya bir *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan bir elemana halkanın bir *sıfır böleni* denir.

Tanım 2.1.4. R birimli bir halka olmak üzere $a \in R$ olsun. Eğer $ca = 1_R$ $(ab = 1_R)$ olacak şekilde bir $c \in R$ $(b \in R)$ varsa bu durumda a ya *sol (sağ) tersinir eleman* denir. c (b) elemanına a nın bir *sol (sağ) tersi* denir. Hem sağ hem de sol tersinir bir elemana *tersinir eleman* denir.

Tanım 2.1.5. $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir R halkasının hiçbir sıfır böleni yoksa bu R halkasına bir *tamlık bölgesi* denir. $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir R halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise, bu durumda R halkasına bir *cisim* denir.

Uyarı 2.1.6.

(i) Her tamlık bölgesi 0 ve 1_R gibi en az iki elemana sahiptir.
(ii) Her cisim bir tamlık bölgesidir.
(iii) Değişmeli ve birimli bir R halkasının bir cisim olması için gerek ve yeter koşul R nin sıfırdan farklı elemanlarının kümesinin çarpma işlemine göre bir grup olmasıdır.

Örnek 2.1.7. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli bir halkadır. Bununla beraber $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi farklı ikili işlemlere göre de halka yapılabilir. Fakat bundan sonraki çalışmalarımızda $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası denildiğinde, tamsayıların bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikteki halka yapısı göz önüne alınacaktır. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir tamlık bölgesidir. $\mathbb{Q}$ (rasyonel sayılar), $\mathbb{R}$ (reel sayılar) ve $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte birer cisimdir.

Örnek 2.1.8. $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ kümesi $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ ve $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$ ikili işlemleri ile birlikte değişmeli ve birimli bir halkadır. Eğer p bir asal tamsayı ise $\mathbb{Z}_p$ bir cisimdir.

Tanım 2.1.9. R ile S iki halka ve $f: R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in R$ için

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ab) = f(a)f(b)$$

oluyorsa, bu durumda f ye bir *halka homomorfizması* denir. $f: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere eğer, f birebir ise, bu durumda f ye bir *monomorfizma*, örten ise, bu durumda f ye bir *epimorfizma* denir. Eğer bir $f: R \to S$ halka homomorfizması hem birebir hem de örten ise, bu durumda f ye bir izomorfizma ve R ile S halkalarına da *izomorf* halkalar denir. $R \cong S$ ile gösterilir. Bir $f: R \to R$ homomorfizmasına R halkasının bir *endomorfizması* denir. Bir $f: R \to R$ izomorfizmayada R halkasının bir *otomorfizması* denir.

Örnek 2.1.10. R bir halka olmak üzere $O: R \to R, O(a) = 0_R$ ve $I_R: R \to R, I_R(a) = a$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar R halkasının endomorfizmalarıdır. Bunlara sırasıyla R nin *sıfır endomorfizması* ve *birim endomorfizması* adı verilir.

Tanım 2.1.11. R bir halka olmak üzere eğer, her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir pozitif en küçük n tamsayısı varsa, bu durumda R halkası n *karekteristiğine* sahiptir denir ve $Char\, R = n$ yazılır. Eğer böyle bir n tamsayısı yoksa R nin *karekteristiği sıfırdır* denir.

Tanım 2.1.12. R ile S iki halka olmak üzere, bir $f: R \to S$ monomorfizmasına R nin S ye bir *gömülüşü* denir. Eğer böyle bir monomorfizma varsa, bu durumda R halkası S halkası içine *gömülebilir* denir.

Teorem 2.1.13. Her R halkası birimli bir S halkası içine gömülebilir. Bu S halkası bir tek değildir. Ayrıca, S halkası karekteristiği 0 veya R nin karekteristiği ile aynı olacak şekilde seçilebilir.

İspat. R bir halka olmak üzere $S = R \times \mathbb{Z} = R \oplus \mathbb{Z} = \{(r,k) |\, r \in R,\ k \in \mathbb{Z}\}$ kartezyen çarpım kümesi bileşensel toplama ve

$$(r_1, k_1)(r_2, k_2) = (r_1 r_2 + k_2 r_1 + k_1 r_2, k_1 k_2) \quad (r_i \in R; k_i \in \mathbb{Z})$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $(0,1)$ birimine sahip, karekteristiği 0 olan bir halkadır. Ayrıca $f: R \to S, f(r) = (r, 0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir monomorfizmadır.

Eğer $Char\, R = n > 0$ ise, bu durumda $S = R \oplus \mathbb{Z}_n$ kartezyen çarpım kümesi bileşensel toplama ve

$$\left(r_1, \overline{k_1}\right)\left(r_2, \overline{k_2}\right) = \left(r_1 r_2 + k_2 r_1 + k_1 r_2, \overline{k_1}\, \overline{k_2}\right)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $(0, \overline{1})$ birimine sahip bir halkadır. Ayrıca $Char\, S = n$ olup $g: R \to S, g(r) = (r, \overline{0})$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir monomorfizmadır.

Uyarı 2.1.14. $\alpha: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere $\alpha(0_R) = 0_S$ dir. Bununla beraber R ile S birimli halkalar ise $\alpha(1_R) = 1_S$ olmak zorunda değildir. Gerçekten $\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\alpha(n) = (n, 0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir halka homomorfizmasıdır. Fakat $\alpha(1) = (1,0) \neq (1,1)$ dir. Bununla beraber eğer $\alpha: R \to S$ örten bir halka homomorfizması ise, bu durumda $\alpha(1_R) = 1_S$ olur.

Örnek 2.1.15. R, S, T üç halka, $f: R \to S$, $g: S \to T$ halka homomorfizmaları olmak üzere $g \circ f: R \to T$ bileşke fonksiyonu da bir halka homomorfizmasıdır. Eğer $\alpha: R \to R$ bir homomorfizma ise, bu durumda $\alpha \circ \alpha = \alpha^2$ hatta daha genel olarak $i \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $\alpha^i = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{i\ tane}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.16. R bir halka $a \in R$ olmak üzere eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa, bu durumda a ya *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir.

Tanım 2.1.17. Bir R halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir e elemanına *eşkare (idempotent)* eleman denir. Birimli bir halkada 0_R ve 1_R eşkare elemanlardır.

Tanım 2.1.18. R bir halka olmak üzere

$$C = \{c \in R \mid \text{Her } r \in R \text{ için } cr = rc\}$$

kümesine R halkasının *merkezi* denir.

Tanım 2.1.19. Bir R halkasının bir R eşkare elemanı R halkasının merkezine ait ise, bu durumda e eşkare elemanına *merkezil eşkare (central idempotent) eleman* denir. Bir R halkasının tüm eşkare elemanları merkezil eşkare ise, bu durumda R halkası *abel* olarak adlandırılır.

2.2. Alt halkalar, İdealler ve Bölüm Halkaları

Tanım 2.2.1. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olmak üzere S kümesi R de tanımlı toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer $S; R$ deki işlemlere göre kendi başına bir halka ise, bu durumda S ye R nin bir *alt halkası* denir. $I; R$ nin bir alt halkası olmak üzere, eğer her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx \in I$ oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir *sol ideali*, $xr \in I$ oluyorsa, bu durumda da I ya R nin bir *sağ ideali* denir. Eğer I hem bir sol hem de bir sağ ideal ise, bu durumda I ya R nin bir *ideali* denir.

Her ideal bir alt halkadır. Fakat her alt halka bir ideal olmak zorunda değildir. Gerçekten bir halkanın merkezi bir alt halka olmasına rağmen bir ideal olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.2. Her bir n tamsayısı için $\langle n \rangle = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ devirli alt gurubu, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bir idealidir.

Örnek 2.2.3. R bir halka olmak üzere $\{0\}$ ve $R; R$ nin idealleridir.

R bir halka olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_n;$ R nin boştan farklı alt kümeleri olsun.

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in A_i, i = 1,2, \dots, n\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer A ve $B;$ R nin boştan farklı alt kümeleri ise bu durumda,

$$AB = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \mid a_i \in A, b_i \in B,\ \ n \in \mathbb{N}^*\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ ise, bu durumda AB yerine aB yazılır. Eğer B kümesi toplama işlemine göre kapalı ise, bu durumda $aB = \{ab \mid b \in B\}$ olur.

Örnek 2.2.4. R bir halka ve e de R de bir merkezil eşkare eleman olmak üzere $1_R - e$ de bir merkezil eşkaredir. Ayrıca eR ve $(1_R - e)R$ kümeleri R nin idealleridir.

Grup teoride normal alt grupların oynadığı rolü halka teoride idealler oynar. R bir halka I da R nin bir ideali olsun. R değişmeli toplamsal bir grup olduğundan $I; R$ nin bir toplamsal normal alt grubudur. Böylece;

$$R/_I = \{a + I \mid a \in R\}$$

kümesi,

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

şeklinde tanımlanan toplama işlemine göre değişmeli gruptur. $R/_I$ değişmeli grubu,

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya R nin I ideali yardımıyla elde edilen *bölüm halkası* denir. R değişmeli iken $R/_I$ nında değişmeli ve R birimli iken $R/_I$ nınde birimli olduğu açıktır.

Teorem 2.2.5. R bir halka ve I da onun bir ideali olmak üzere;

$$\pi: R \to R/_I \, , \pi(r) = r + I$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon I çekirdeğine sahip bir epimorfizmadır.

Tanım 2.2.6. R bir halka I da onun bir ideali olmak üzere $R/_I$ halkasına R nin bir *homomorfik görüntüsü* denir.

Tanım 2.2.7. R bir halka $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere;

$$l_R(X) = \{r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } rx = 0\}$$

$$r_R(X) = \{r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } xr = 0\}$$

kümelerine sırayla R içinde X in *sol ve sağ sıfırlayanı* denir. Eğer $X = \{x\}$ ise bu durumda $l_R(X) = l_R(\{x\}) = l_R(x)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.2.8. R bir halka $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere; $l_R(X)$; R nin bir sol ideali, $r_R(X)$ de R nin bir sağ idealidir. Ayrıca X ve Y; R nin boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere;

(i) $X \subset Y$ ise $l_R(Y) \subset l_R(X)$ ve $r_R(Y) \subset r_R(X)$ dir.

(ii) $X \subset r_R(l_R(X))$ ve $X \subset l_R(r_R(X))$ dir.

(iii) $l_R(X) = l_R(r_R(l_R(X)))$ dir.

2.3. Matris Halkaları ve Polinom Halkaları

Bu bölümde verilen bir R halkasından elde edilen bazı yeni halkaları hatırlatılacaktır.

Tanım 2.3.1. R birimli bir halka ve x bir bilinmeyen olmak üzere;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

şeklindeki bir formal toplama R den katsayılı bir polinom denir. R den katsayılı tüm polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir. Yani;

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}^*, a_i \in R\}$$

şeklindedir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \ \in R[x]$$

olmak üzere, bu iki polinomun toplamı ve çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır. n ve m tamsayılarından büyük olanını k ile gösterirsek;

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i) x^i$$

şeklinde tanımlanır.

$$c_l = \sum_{j=0}^{l} a_j b_{l-j}$$

olmak üzere,

$$f(x)g(x) = \sum_{l=0}^{m+n} c_l x^l$$

şeklinde tanımlanır. c_l katsayıları daha açık bir ifadeyle;

$$c_l = a_0 b_l + a_1 b_{l-1} + a_2 b_{l-2} + \cdots + a_{l-2} b_2 + a_{l-1} b_1 + a_l b_0$$

şeklindedir. Yukarıda tanımlanan ikili işlemlere göre $R[x]$ kümesi bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki *polinomların halkası* veya R den *katsayılı polinomların halkası* denir.

Tanım 2.3.2. R bir halka olmak üzere;

$$R[|x|] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$$

kümesi polinomlarda bilinen toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *kuvvet serilerinin halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.3. R bir halka olmak üzere;

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R \ (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir.}) \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *Laurent polinomlarının halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.4. R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olsun. $(R[x], +)$ değişmeli grubu, $r \in R$ için $xr = \alpha(r)x$ yardımı ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya endomorfizma tipinin bir *Ore genişlemesi* veya *Skew polinom halkası* denir ve $R[x; \alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.5. R bir halka olmak üzere bileşenleri R den gelen n satırlı ve n sütunlu matrislerin kümesi matrislerde bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R üzerinde $n \times n$ tipindeki *matrislerin halkası* denir ve $M_n(R)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.6. R bir halka ve $(M, +)$ bir değişmeli grup olmak üzere eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir $R \times M \to M, (r, m) \longmapsto rm$ fonksiyonu varsa, bu durumda M ye bir *sol* R *−modül* denir. Her $r, s \in R$ ve $x, y \in M$ için;

(i) $r(x + y) = rx + ry$
(ii) $(r + s)x = rx + sx$
(iii) $r(sx) = (rs)x$

R; 1_R birimine sahip birimli bir halka olmak üzere, ek olarak her $x \in M$ için $1_R x = x$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda M ye bir *birimsel sol* R *−modül* denir.

Tanım 2.3.7. R bir halka ve S değişmeli bir halka olmak üzere, eğer $(R, +)$ bir sol S −modül ve bu modül yapısındaki $S \times R \to R, (s, r) \longmapsto sr$ fonksiyonu; her $s \in S$ ve her $r_1, r_2 \in R$ için;

$$s(r_1 r_2) = (s r_1) r_2 = r_1 (s r_2)$$

özelliğine sahip ise, bu durumda R halkasına S değişmeli halkası üzerinde bir *cebir* veya *R ye S −cebir* denir.

Tanım 2.3.8. S değişmeli bir halka ve R_1 ile R_2; S −cebirler olsun. Bir $f: R_1 \to R_2$ halka homomorfizması aynı zamanda bir S −modül homomorfizması ise bu durumda f ye bir S *−cebir homomorfizması* denir.

2.4. Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda bazı özel halka sınıfları hatırlatılacak ve bu halka sınıfları arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 2.4.1. Bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için,

$$a^2 = 0 \implies a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R ye *inmiş* (*reduced*) *halka* denir.

Sıfır bölensiz her halka inmiş halkadır. Daha özel olarak $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası inmiş bir halkadır. Diğer taraftan $\bar{0} \neq \bar{2} \in \mathbb{Z}_4$ için $(\bar{2})^2 = \bar{2}\bar{2} = \bar{0}$ olduğundan $\mathbb{Z}_4$ halkası inmiş bir halka değildir. Ayrıca inmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğunu görmek çok kolaydır.

Tanım 2.4.2. $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \Longrightarrow ba = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına *terslenebilir* (*reversible*) denir.

Lemma 2.4.3. Her inmiş halka terslenebilir bir halkadır.

İspat. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = baba = b0a = 0$ ve R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur.

Tanım 2.4.4. R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \Longrightarrow aRb = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı değişmeli* (*semicommutative*) olarak adlandırılır. Bir R halkasının yarı değişmeli olması için gerek ve yeter şart koşul her bir $a \in R$ için $r_R(a)$ ($l_R(a)$) kümesinin R nin bir ideali olmasıdır.

Her terslenebilir halka yarı değişmelidir. Gerçekten R terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için, $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ ve böylece her $r \in R$ için $bar = 0$ olur. Tekrar R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ yani $aRb = 0$ elde edilir ki, bu da R nin yarı değişmeli olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.5. R bir halka olmak üzere $a \in R$ için,

$$aRa = 0 \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı asal* (*semiprime*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.6.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$$

olmak üzere,

$$f(x)g(x) = 0 \Longrightarrow a_i b_j = 0 \quad (0 \le i \le n, 0 \le j \le m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *Armendariz* olarak adlandırılır.

Yukarıdaki koşulu sağlayan halkalara Armendariz ismi verilmiştir. Çünkü Armendariz (1974)' te, inmiş bir halkanın yukarıdaki koşulu sağladığını göstermiştir. Yani her inmiş halka bir Armendariz halkadır.

Tanım 2.4.7. R bir halka ve $\alpha: R \to R$ bir endomorfizma olsun. $a \in R$ için,

$$a\alpha(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına α *−katı* (α *−rigid*) halka denir.

R bir α −katı halka olmak üzere, $\alpha(S) \subseteq S$ koşulunu sağlayan R nin her S alt halkası da α −katı bir halkadır. Diğer taraftan I_R; R nin birim endomorfizması olmak üzere; R nin α − katı olması için gerek ve yeter koşul R nin inmiş bir halka olmasıdır.

Lemma 2.4.8. R bir α −katı halka olsun. Bu durumda α bir monomorfizmadır.

İspat. $a \in R$ için $\alpha(a) = 0$ olsun. Buradan $a\alpha(a) = a0 = 0$ olup R; α −katı olduğundan $a = 0$ bulunurki bu da α nın bir monomorfizma olduğunu gösterir.

R inmiş olmayan bir halka olmak üzere R nin I_R birim endomorfizması bir monomorfizmadır. Fakat R; I_R −katı değildir. Yani yukarıdaki Lemma'nın tersi doğru değildir.

Lemma 2.4.9. R bir halka ve $\alpha: R \to R$ bir endomorfizma olsun. Eğer R; α −katı ise, bu durumda R bir inmiş halkadır.

İspat. R; α −katı bir halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $a\alpha(a)\alpha\big(a\alpha(a)\big) = a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = a\alpha(0)\alpha^2(a) = a0\alpha^2(a) = 0$ olup, R; α −katı olduğundan $a\alpha(a) = 0$ ve tekrar R; α −katı olduğundan $a = 0$ elde edilir. Yani R bir inmiş halkadır.

Lemma 2.4.10. Her inmiş halka yarı asaldır.

İspat. R inmiş bir halka ve $a \in R$ için $aRa = 0$ olsun. Bu durumda $1_R \in R$ için de $a1_Ra = a^2 = 0$ olacağından ve R inmiş olduğundan $a = 0$ elde edilir ki bu da R nin yarı asal olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.11. R bir halka ve α; R nin bir endomorfizması olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = 0 \Longrightarrow a_i \alpha^i(b_j) = 0 \quad (0 \le i \le n, 0 \le j \le m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına α *−skew Armendariz* halka denir.

Tanım 2.4.12. R bir halka ve α; R nin bir endomorfizması olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = 0 \Longrightarrow a_i b_j = 0 \quad (0 \le i \le n, 0 \le j \le m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına α *−Armendariz* halka denir.

Aşağıdaki verilen önermedeki gerektirmeler Hong vd. (2003) tarafından verilmiştir.

Önerme 2.4.13. R bir halka ve α; R nin bir endomorfizması olsun.

(i) Eğer R; α −katı ise, bu durumda R; α −Armendarizdir.
(ii) Eğer R; α −Armendariz ise, bu durumda R; α −skew Armendarizdir.
(iii) R nin α −katı olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\alpha]$ halkasının inmiş olmasıdır.

Son olarak yukarıda tanıtılan halka sınıfları için aşağıdaki gerektirmeler vardır. Bu gerektirmelerin hiçbirinin tersi doğru değildir.

$$R;\ \alpha-\text{katı} \Longrightarrow R \text{ inmiş} \Longrightarrow R \text{ terslenebilir} \Longrightarrow R \text{ yarı değişmelidir.}$$

Tanım 2.4.14. R bir halka ve $0_R \neq s \in R$ olsun. Eğer her $0_R \neq r \in R$ için $rs \neq 0_R$ ve $sr \neq 0_R$ oluyorsa, bu durumda s ye bir regüler eleman denir.

Tanım 2.4.15. R bir halka $a, b \in R$ ve b regüler eleman olduğunda $ab_1 = ba_1$ olacak şekilde $a_1, b_1 \in R$ ve b_1 regüler elemanları varsa bu durumda R halkasına *sağ Ore* halka denir.

3. TERSLENEBİLİR HALKALAR

Hatırlanacağı gibi R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için, $ab = 0 \Longrightarrow ba = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası *terslenebilir* (*reversible*) olarak adlandırılmıştı. Bu bölümde terslenebilir halkalar detaylı bir biçimde incelenecektir. Bu bölüm için temel referansımız Kim and Lee (2003) olacaktır. Yani bu bölümde verilecek tüm sonuçlar ve örnekler adı geçen çalışmada mevcuttur.

3.1. Terslenebilir Halkaların Özellikleri

Bu bölümde terslenebilir ve yarı değişmeli halkaların özelliklerinden bahsedilecek ve bu halka sınıfları ile ilgili bazı basit örnekler verilecektir.

Lemma 3.1.1. R halkasının yarı değişmeli olması için gerek ve yeter koşul aşağıda birbirine denk üç ifadeden birisinin sağlanmasıdır.

(1) R üzerindeki herhangi bir sağ sıfırlayan R nin bir idealidir.

(2) R üzerindeki herhangi bir sol sıfırlayan R nin bir idealidir.

(3) $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ dır.

İspat. (1) $\Rightarrow$) R yarı değişmeli ve $X \subset R$ olsun. $r_R(X)$ in bir sağ ideal olduğu açıktır. Şimdi $r_R(X)$ in bir sol ideal olduğunu gösterelim. $r \in R$ ve $a \in r_R(X)$ olsun. Bu durumda $Xa = 0 \Rightarrow \forall x \in X$ için $xa = 0 \Rightarrow a \in r_R(x) \lhd R \Rightarrow ra \in r_R(x) \Longrightarrow xra = 0 \Longrightarrow Xra = 0 \Rightarrow ra \in r_R(X)$ elde edilir. Sonuç olarak $r_R(X)$ R nin bir idealidir.

$\Leftarrow$) Her bir $X \subset R$ için $r_R(X) \lhd R$ olsun. Bu durumda $a \in R$ için $X = \{a\}$ alırsak kabulden $r_R(a) \lhd R$ olur ki, bu da R nin yarı değişmeli olduğunu gösterir.

(2) nin ispatı (1) dekine benzer olarak yapılır.

(3) $\Rightarrow$) R yarı değişmeli ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $b \in r_R(a) \lhd R$ olduğundan $\forall r \in R$ için $rb \in r_R(a)$ olur. Buradan $arb = 0$ dır. Yani $aRb = 0$ olur.

$\Leftarrow$) $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ olsun. $r_R(a)$ nın R nin bir sağ ideali olduğu açıktır. Şimdi $r_R(a)$ nın bir sol ideali olduğu gösterilecek.

$r \in R$ ve $y \in r_R(a)$ olsun. Bu durumda $ay = 0$ ve kabulden $aRy = 0$ böylece $ary = 0$ olur. O halde $ry \in r_R(a)$ olur ki, bu da bize R nin yarı değişmeli halka olduğunu gösterir. Kim and Lee (2003).

Önerme 3.1.2. R inmiş bir halka olsun. Bu durumda

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d \in R \right\}$$

halkası yarı değişmeli bir halkadır.

İspat. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S$ olsun. Bu matrislerin toplamı ve çarpımı

$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$

$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1a_2, a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2, a_1d_2 + d_1a_2)$

şeklinde gösterilebilir. Kabul edelimki

$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = 0$ olsun. Bu durumda

$$a_1a_2 = 0 \tag{3.1}$$

$$a_1b_2 + b_1a_2 = 0 \tag{3.2}$$

$$a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 = 0 \tag{3.3}$$

$$a_1d_2 + d_1a_2 = 0 \tag{3.4}$$

eşitlikleri elde edilir. R inmiş olduğundan yarı değişmelidir. Böylece (3.1) eşitliğinden $a_1Ra_2 = 0$ elde edilir. (3.2) eşitliği sağ taraftan a_2 ile çarpılırsa $b_1Ra_2 = 0$ elde edilir. Bu ifade (3.2) de yerine yazılırsa $a_1Rb_2 = 0$ olur. Benzer şekilde (3.4) eşitliği sağdan a_2 ile çarpılırsa $d_1Ra_2 = 0$ bulunur ve bunu (3.4) de yerine yazarsak $a_1Rd_2 = 0$ elde edilir. (3.3) eşitliğide sağdan a_2 ile çarpılırsa $c_1 R a_2 = 0$ bulunur. Buradan $a_1 c_2 + b_1 d_2 = 0$ dır. Bu eşitliği sağdan a_1 ile çarpılırsa $a_1 R c_2 = 0$ ve $b_1 R d_2 = 0$ elde edilir.

Yukarıda elde ettiğimiz sonuçları kullanarak, herhangi $r, s, t, u \in R$ için

$(a_1, b_1, c_1, d_1)(r, s, t, u)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 r a_2, a_1 r b_2 + a_1 s a_2 + b_1 r a_2, a_1 r c_2 + a_1 s d_2 + b_1 r d_2 + a_1 t a_2 + b_1 u a_2 + c_1 r a_2, a_1 r d_2 + a_1 u a_2 + d_1 r a_2) = 0$

bulunur. Sonuç olarak $\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in S$ için

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = O$$

olur ki, bu da bize S nin yarı değişmeli olduğunu gösterir. Kim and Lee (2003).

S inmiş bir halka olmak üzere $n \geq 2$ pozitif tamsayısı için

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in S \right\}$$

halkası tanımlanabilir. Önerme 3.1.2 ye dayanarak $n \geq 4$ için R_n halkasının yarı değişmeli olup olmadığı merak edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bu ihtimali ortadan kaldırır.

Örnek 3.1.3. S herhangi bir halka ve

$$R_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in S \right\}$$

olsun.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olmasına rağmen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olduğundan dolayı R_4 yarı değişmeli değildir. Benzer şekilde $n \geq 5$ için R_n in yarı değişmeli olmadığı gösterilebilir. Terslenebilir halkaların yarı değişmeli olduğunu biliyoruz. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir. Şimdi bunun için bir örnek verelim.

Örnek 3.1.4. R inmiş bir halka olsun. Bu durumda

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d \in R \right\}$$

halkası Önerme 3.1.2. den dolayı yarı değişmelidir. Fakat

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

ve

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olduğundan S terslenebilir değildir.

R bir halka ve ${}_RM_R$ bir bimodül olsun. R nin M ile aşikar genişlemesi

$T(R, M) = R \oplus M$ bilinen toplama ve

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir halkadır. $T(R, M)$ aşikar genişlemesi $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ formundaki tüm matrislerin oluşturduğu halkaya izomorftur.

Önerme 3.1.5. R inmiş bir halka olsun. Bu durumda $T(R, R)$ aşikar genişlemesi terslenebilir bir halkadır.

İspat. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R, R)$ için $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = O$ olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + bc \\ 0 & ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup buradan $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ elde edilir. R inmiş olduğundan $ca = 0$ dır. Bu yüzden $cad + cbc = 0$ dır. Yani $bc = 0$ ve $ad = 0$ olur. Sonuçta $cb = da = 0$ ve böylece

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = O$$

olur ki, bu da $T(R, R)$ nin terslenebilir olduğunu gösterir. Kim and Lee (2003).

Önerme 3.1.5 i göz önünde bulundurarak R terslenebilir olduğunda $T(R, R)$ nin terslenebilir yada yarı değişmeli olabileceğinden şüphe edebiliriz. Fakat aşağıdaki örnek bu şüpheyi ortadan kaldırır.

Örnek 3.1.6. $\mathbb{H}$ reel sayılar cismi üzerindeki Hamilton quaterniyan halkası ve R de $\mathbb{H}$ nin $\mathbb{H}$ ile aşikar genişlemesi olsun. Bu durumda Önerme 3.1.5. den dolayı R terslenebilirdir. S, R nin R ile aşikar genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = O$$

fakat

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i\\0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}j & 0\\0 & j\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & i\\0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}j & 0\\0 & j\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}j & 0\\0 & j\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\neq O$$

olduğundan Lemma 3.1.1. gereğince $S=T(R,R)$ yarı değişmeli değildir. Yarı değişmeli olmayan halkalar terslenebilir olmadığından da $S=T(R,R)$ terslenebilir değildir.

Terslenebilir halkalar için aşağıdaki temel denklikler elde edilebilir.

Lemma 3.1.7. Bir R halkası için aşağıdaki durumlar denktir.

(1) R terslenebilirdir.
(2) Her bir $S\subseteq R$ için $r_R(S)=l_R(S)$ dir.
(3) Her bir $a\in R$ için $l_R(a)=r_R(a)$ dir.
(4) Herhengi $\emptyset\neq A, \emptyset\neq B\subset R$ için $AB=0$ ise $BA=0$ dır.

İspat. (1)⇒ (2) R terslenebilir ve $a\in R$ ve $S\subseteq R$ için $a\in r_R(S)$ olsun. Bu durumda her $s\in S$ için $Sa=0$ dır. R terslenebilir olduğundan $aS=0$ dır. O halde $a\in l_R(S)$ dir. Buradan $r_R(S)\subset l_R(S)$ elde edilir. Benzer şekilde $l_R(S)\subset r_R(S)$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $r_R(S)=l_R(S)$ bulunur.

(2)⇒ (3) $S=\{a\}$ alınırsa ispat açıktır.

(3)⇒ (4) $\emptyset\neq A$, $\emptyset\neq B\subset R$ için $AB=0$ olsun. Bu durumda her $a\in A, b\in B$ için $ab\in AB$ ve $ab=0$ dır. Buradan $b\in r_R(a)=l_R(a)$ olduğundan $ba=0$ dır. Sonuçta $BA=0$ elde edilir.

(4)⇒ (1) Açıktır. Kim and Lee (2003).

Aşağıdaki lemmanın ispatı oldukça kolaydır.

Lemma 3.1.8. Terslenebilir halkaların sınıfı alt halkalar ve direk çarpımlar altında kapalıdır.

R bir halka ve $I \lhd R$ olsun. I yı birimsiz bir halka olarak aldığımızda eğer I; R nin sıfırdan farklı terslenebilir bir öz ideali ve $R/_I$ bölüm halkası terslenebilirken R nin terslenebilir bir halka olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bu ihtimali ortadan kaldırır.

Örnek 3.1.9. S bir division halka ve $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d \in S \right\}$ olsun. Bu durumda R yarı değişmeli fakat terslenebilir değildir. R halkasının sıfırdan farklı tüm öz idealleri

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & S & S \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & S & S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Tüm I_i idealleri için $R/_{I_i}$ bölüm halkaları terslenebilirdir. Güçlü bir koşul altında yukarıdaki sorumuza olumlu cevap verilebilir.

Önerme 3.1.10. Bir R halkasının bir I ideali için $R/_I$ terslenebilir halka olsun. Eğer I inmiş ise, bu durumda R terslenebilirdir.

İspat. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $(a + I)(b + I) = I$ dır. $R/_I$ terslenebilir olduğundan $(b + I)(a + I) = I$ olur. O halde $ba \in I$ dır. $ab = 0$ olduğundan $(ba)^2 = baba = 0$ olur. I inmiş olduğundan $ba = 0$ bulunur. Sonuç olarak R terslenebilir bir halkadır. Kim and Lee (2003).

Önerme 3.1.11. (1) R bir halka ve e, R nin merkezil eşkare elemanı olsun. Bu durumda eR ve $(1-e)R$ halkalarının terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R nin terslenebilir olmasıdır.

(2) R bir halka ve R deki merkezi reguler elemanlardan oluşan Δ kümesi R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda R nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\Delta^{-1}R$ halkasının terslenebilir olmasıdır.

İspat. (1)$\Rightarrow$) eR ve $(1-e)R$ terslenebilir ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $eab = 0$ ve $(1-e)ab = 0$ dır. Buradan $eeab = 0$ olur. e merkezil eşkare eleman olduğundan $eaeb = 0$ ve eR terslenebilir olduğundan $eba = 0$ bulunur. Benzer olarak $(1-e)ba = 0$ olduğu görülür. Sonuçta $ba = eba + (1-e)ba = 0$ ve R terslenebilirdir.

$\Leftarrow$) R terslenebilir, $ea, eb \in eR$ için $(ea)(eb) = 0$ olsun. $ea, eb \in R$ ve R terslenebilir olduğundan $ebea = 0$ elde edilir. Yani eR terslenebilirdir. Aynı şekilde $(1-e)R$ nin de terslenebilir olduğu gösterilebilir.

(2)$\Rightarrow$) R terslenebilir ve $\alpha, \beta \in \Delta^{-1}R$ için $\alpha\beta = 0$ olsun. Bu durumda $u, v \in \Delta$ ve $a, b \in R$ olmak üzere $\alpha = u^{-1}a,\ \beta = v^{-1}b$ şeklinde olup $0 = \alpha\beta = (u^{-1}a)(v^{-1}b) = u^{-1}v^{-1}ab = (uv)^{-1}ab$ elde edilir. Böylece $ab = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ olur. Şimdi $\beta\alpha = (v^{-1}b)(u^{-1}a) = v^{-1}u^{-1}ba = (vu)^{-1}ba = 0$ bulunur. Bu ise $\Delta^{-1}R$ nin terslenebilir olduğunu gösterir.

$\Leftarrow$)$\Delta^{-1}R$ terslenebilir ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $1^{-1}a,\ 1^{-1}b \in \Delta^{-1}R$ için

$(1^{-1}a)(1^{-1}b) = 1^{-1}ab = 0$ dır. $\Delta^{-1}R$ terslenebilir olduğundan $(1^{-1}b)(1^{-1}a) = 0 \Rightarrow 1^{-1}ba = 0 \Rightarrow ba = 0$ elde edilir. Yani R terslenebilirdir. Kim and Lee (2003).

R, değişmeli bir S halkası üzerinde bir cebir olsun. $r_i \in R, s_i \in S$ olmak üzere

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1, s_1 s_2)$$

işlemleriyle birlikte $R \times S$ ye R nin S ile *Dorroh genişlemesi (Dorroh extension)* denir.

R değişmeli halka, M R $-$modül ve σ, R nin endomorfizmi olsun. Bu durumda

$r_i \in R, m_i \in M$ olmak üzere;

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, \sigma(r_1) m_2 + r_2 m_1)$$

İşlemiyle birlikte $R \oplus M$ ye R nin M ve σ ile *Nagata genişlemesi (Nagata extension)* denir.

Önerme 3.1.12. (1) R bir simetrik halka ve I, R de bir sıfırlayan olacak şekilde R nin bir ideali olsun. Bu durumda ${R}/{I}$ terslenebilir bir halkadır.

(2) R, S değişmeli halkası üzerinde bir cebir ve D, R nin S ile Dorroh genişlemesi olsun. Eğer R terslenebilir ve S bir bölge ise, bu durumda D de terslenebilirdir.

(3) R değişmeli bir bölge ve σ, R nin birebir bir endomorfizmi olsun. Bu durumda R nin R ve σ ile Nagata genişlemesi de terslenebilirdir.

İspat. (1) $I = r_R(J)$, $J \subseteq R$ ve $\bar{r} = r + I$ alalım. $a + I$, $b + I \in {R}/{I}$ için

$(a + I)(b + I) = (0 + I)$ olsun. Bu durumda $ab + I = I = r_R(J) \Rightarrow ab \in I = r_R(J) \Rightarrow Jab = 0$ dır. R simetrik olduğundan $Jba = 0$ olur. O halde $ba \in r_R(J) = I$ dır. Buradan $ba \in I$ elde edilir. Yani $(b + I)(a + I) = (0 + I)$ dır. Sonuç olarak ${R}/{I}$ terslenebilirdir.

(2) $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in D$ için $(r_1, s_1)(r_2, s_2) = 0$ olsun. Bu durumda $0 = (r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1, s_1 s_2)$ elde edilir. Buradan $r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1 = 0$ ve $s_1 s_2 = 0$ dır. S bir bölge olduğundan $s_1 = 0$ veya $s_2 = 0$ dır. $s_1 = 0$ olsun. O halde $0 = r_1 r_2 + s_2 r_1 = r_1(r_2 + s_2)$ elde edilir. R terslenebilir olduğundan $0 = (r_2 + s_2) r_1 = r_2 r_1 + s_2 r_1$ dır. Sonuç olarak $(r_2, s_2)(r_1, s_1) = (r_2 r_1 + s_2 r_1 +$

$s_1r_2, s_2s_1) = 0$ olur ki buradan D terslenebilirdir. Eğer $s_2 = 0$ ise, bu durumda da benzer ispat yapılır.

(3) N Nagata genişlemesi ve (r_1, m_1), $(r_2, m_2) \in N$ için $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = 0$ olsun. Bu durumda $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, \sigma(r_1)m_2 + r_2m_1) = (0,0)$ dır. Bu eşitlikten $r_1r_2 = 0$ ve $\sigma(r_1)m_2 + r_2m_1 = 0$ dır. R bir bölge olduğundan $r_1 = 0$ veya $r_2 = 0$ olur. Eğer $r_1 = 0$ ise bu durumda $\sigma(r_1)m_2 + r_2m_1 = 0$ eşitliğinden r_1 yerine sıfır yazarsak $r_2m_1 = 0$ elde edilir. Buradan $r_2 = 0$ veya $m_1 = 0$ olmalıdır. Kim and Lee (2003).

Sonuçta $\sigma(r_2)m_1 = 0$ ve buradan $(r_2, m_2)(r_1, m_1) = (r_2r_1, \sigma(r_2)m_1 + r_1m_2) = (0,0)$ bulunur. $r_2 = 0$ olması durumunda da ispat benzer şekilde yapılır.

Önerme 3.1.12. nin (3) ifadesinin, değişmeli inmiş halkalar için de doğru olabileceğinden şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bunun yanlış olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.13. D karakteristiği sıfır olan bir bölge olmak üzere bileşensel toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte $R = D \oplus D$ halkasını göz önüne alalım. Bu durumda R değişmeli inmiş bir halkadır fakat bölge değildir. $\sigma: R \to R$ ve $\sigma(s,t) = (t,s)$ olarak tanımlansın. Bu durumda σ, R nin bir otomorfizmdir. Bu durumda

$$\big((0,1),(0,1)\big)\big((1,0),(0,1)\big) = \Big((0,0), \sigma\big((0,1)\big)(0,1) + (1,0)(0,1)\Big) = 0$$

fakat

$$\big((1,0),(0,1)\big)\big((0,1),(0,1)\big) = \big(0, \sigma\big((1,0)\big)(0,1) + (0,1)(0,1)\big) = \big((0,0),(0,2)\big) \neq 0$$

dır. Yani R nin R ve σ ile Nagata genişlemesi terslenebilir halka değildir.

3.2. Polinom Halkalarının ve Klasik Kesir Halkalarının Terslenebilirlikleri

Bu bölümde polinom halkalarının ve klasik kesir halkalarının terslenebilirlikleri incelenecektir.

Lemma 3.2.1. R bir halka olsun. $R[x]$ in terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x;x^{-1}]$ in terslenebilir olmasıdır.

İspat. $R[x]$; $R[x;x^{-1}]$ halkasının bir alt halkası olduğundan ispatın sadece gerek şartını ispatlamak yeterlidir. Bu ispat iki farklı şekilde yapılabilir. Birincisi şu şekildedir. $R[x]$ terslenebilir ve $\Delta = \{1, x, x^2, \ldots\}$ olsun. Bu durumda, açık olarak Δ; $R[x]$ in çarpımsal kapalı bir alt kümesidir. $R[x;x^{-1}] = \Delta^{-1}R[x]$ olduğundan Önerme 3.1.11(2) gereğince $R[x;x^{-1}]$ terslenebilirdir. Şimdi ikinci ispata bakalım. $f(x), g(x) \in R[x;x^{-1}]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f_1(x) = f(x)x^n$, $g_1(x) = g(x)x^n \in R[x]$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. Buradan $f_1(x)g_1(x) = 0$ elde edilir. $R[x]$ terslenebilir olduğundan $g_1(x)f_1(x) = 0$ olur. Yani $g(x)f(x) = x^{-2n}g_1(x)f_1(x) = 0$ olur. Buradan $R[x;x^{-1}]$ terslenebilirdir. Kim and Lee (2003).

Önerme 3.2.2. R bir halka olmak üzere $Z(R)$ sıfırdan farklı elemanları R de regüler olan bir sonsuz alt halkayı içersin. Bu durumda aşağıdaki durumlar denktir.

(1) R terslenebilirdir.
(2) $R[x]$ terslenebilirdir.
(3) $R[x;x^{-1}]$ terslenebilirdir.

İspat. Lemma 3.1.8. den ve Lemma 3.2.1. den $(2) \Rightarrow (1)$ ve $(2) \Leftrightarrow (3)$ açıktır. Sadece $(1) \Rightarrow (2)$ göstermek yeterlidir. Verilen koşullar altında $R[x]$, R nin bir alt direk çarpımı olduğundan $R[x]$ terslenebilirdir.

Başka şartlar altında da Önerme 3.2.2. deki denkliklere sahibiz.

Önerme 3.2.3. R Armendariz bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(1) R terslenebilirdir.
(2) $R[x]$ terslenebilirdir.
(3) $R[x; x^{-1}]$ terslenebilirdir.

İspat. Lemma 3.1.8 ve Önerme 3.2.2. den $(2) \Rightarrow (1)$ ve $(2) \Leftrightarrow (3)$ açıktır. Sadece $(1) \Rightarrow (2)$ göstermek yeterlidir. Bunun için $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ ve $fg = 0$ olsun. R Armendariz olduğundan her bir i, j için $a_i b_j = 0$ ve R terslenebilir olduğundan $b_j a_j = 0$ olur. Sonuç olarak $gf = 0$ olur ki, bu da $R[x]$ halkasının terslenebilir olduğunu gösterir. Kim and Lee (2003).

Teorem 3.2.4. R bir halka ve $n \in Z^+$ olsun. Eğer R inmiş bir halka ise, bu durumda (x^n), x^n tarafından üretilen ideal olmak üzere $R[x]/(x^n)$ halkası terslenebilirdir.

İspat. $S = R[x]/(x^n)$ olsun. $n = 1$ için $S \cong R$ olup ispat tamamdır. Eğer $n = 2$ ise, $R[x]/(x^2) \cong T(R, R)$ olup Önerme 3.1.5. den $T(R, R)$ terslenebilir olduğundan $R[x]/(x^2)$ de terslenebilirdir. Şimdi $n \geq 3$ olsun. $u = x + x^n$ olmak üzere $A = a_0 + a_1 u + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}$, $B = b_0 + b_1 u + \cdots + b_{n-1} u^{n-1} \in S$ için $AB = 0$ olsun. Bu durumda $i + j \geq n$ olacak şekildeki i ve j ler için $a_i b_j u^{i+j} = 0$ dır. Bu yüzden $i + j < n$ için kontrol etmek yeterlidir. $AB = 0$ dan aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$a_0 b_0 = 0 \qquad (1)$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \qquad (2)$$

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \qquad (3)$$

……………

$$a_0b_{n-2} + a_1b_{n-3} + \cdots + a_{n-3}b_1 + a_{n-2}b_0 = 0 \qquad \text{(n-1)}$$

$$a_0b_{n-1} + a_1b_{n-2} + \cdots + a_{n-2}b_1 + a_{n-1}b_0 = 0 \qquad \text{(n)}$$

$i + j$ de tümevarım uygulayarak ispatı yapacağız. R halkasının inmiş olduğunu her defasında belirtmeden kullanacağız. (2) eşitliği sağdan b_0 ile çarpılırsa

$$a_0b_1b_0 + a_1b_0b_0 = 0 \Rightarrow a_1(b_0)^2 = 0 \Rightarrow a_1b_0 = 0$$

elde edilir ve bu (2) de yerine yazarsak $a_0b_1 = 0$ bulunur. Aynı şekilde (3) eşitliğide sağdan b_0 ile çarpılırsa

$$a_0b_2b_0 + a_1b_1b_0 + a_2b_0b_0 = 0 \Rightarrow a_2(b_0)^2 = 0 \Rightarrow a_2b_0 = 0$$

elde edilir ve bu (3) de yerine yazılırsa $a_0b_2 + a_1b_1 = 0$ bulunur. Bu eşitlik sağdan b_1 ile çarpılırsa $a_0b_2b_1 + a_1b_1b_1 = 0 \Rightarrow a_1(b_1)^2 = 0 \Rightarrow a_1b_1 = 0$ bılunur (3) de yerine yazarsak $a_0b_2 = 0$ dır. Böyle devam edilirse $i + j = 0,1,2, \ldots, n - 2$ için $a_ib_j = 0$ olur. Şimdi (n) eşitliğini sağdan b_0 ile çarparsak

$$a_0b_{n-1}b_0 + a_1b_{n-2}b_0 + \cdots + a_{n-2}b_1b_0 + a_{n-1}b_0b_0 = 0$$

elde edilir. Yukarıda elde ettiğimiz eşitlikler yerine yazılırsa $a_{n-1}(b_0)^2 = 0 \Rightarrow a_{n-1}b_0 = 0 \Rightarrow a_ib_0 = 0$ olur. Sonuçta $a_0b_{n-1} = \cdots = a_{n-1}b_0 = 0$ olur. Yani $i + j = 0,1, \ldots, n - 1$ olacak şekildeki i ve j ler için $a_ib_j = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $b_ja_i = 0$ elde edilir. Sonuç olarak

$$BA = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} b_ja_iu^{i+j} = 0$$

elde edilirki bu da bize S nin terslenebilir olduğunu gösterir. Kim and Lee (2003).

Bir R halkasının bir sağ Ore halka olması için gerek ve yeter koşulun R nın klasik sağ kesir halkasının mevcut olması gerektiği iyi bilinen bir gerçektir.

Teorem 3.2.5. R bir sağ Ore halka ve Q, R nin klasik sağ kesirler halkası olsun. Bu durumda R nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul Q nun terslenebilir olmasıdır.

İspat. Gerek şartı ispatlamak yeterlidir. Bunun için $\alpha = ab^{-1}, \beta = cd^{-1} \in Q$ için $\alpha\beta = 0$ olsun. Kabulden $bc_1 = cb_1,\ b^{-1}c = c_1 b_1^{-1}$ olacak şekilde $b_1, c_1 \in R$ ve b_1 regüler elemanları vardır. Böylece

$$0 = \alpha\beta \Rightarrow ab^{-1}\,cd^{-1} = 0 \Rightarrow ac_1 b_1^{-1} d^{-1} = 0 \Rightarrow ac_1 = 0$$

olur. $ad_1 = da_1$ ve $d^{-1}a = a_1 d_1^{-1}$ olacak şekilde $a_1, d_1 \in R$ ve d_1 regüler elemanları vardır. R terslenebilir ve böylece yarı değişmeli olduğundan

$$c_1 a = 0 \Rightarrow 0 = abc_1 = acb_1 \Rightarrow ac = 0 \Rightarrow ca = 0$$

olur. O halde

$$0 = ad_1 c = da_1 c \Rightarrow a_1 c = 0 \Rightarrow ca_1 = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\beta\alpha = cd^{-1}ab^{-1} = ca_1 d_1^{-1} b^{-1} = 0$$

bulunur ki, bu da bize Q halkasının terslenebilir olduğunu gösterir. Kim and Lee (2003).

Lemma 3.2.6. Bir R yarı asal halkası için aşağıdaki durumlar denktir.

(1) R inmiş halkadır.
(2) R simetrik halkadır.
(3) R terslenebilir halkadır.
(4) R yarı değişmeli halkadır.

4. GÜÇLÜ TERSLENEBİLİR HALKALAR VE ONLARIN GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde güçlü $\alpha-$terslenebilir halkaların özelliklerinden ve genişlemelerinden bahsedilecektir. Çalışmamız boyunca R birimli bir halkayı ve aksi belirtilmedikçe α da R halkasının sıfırdan ve birimden farklı bir endomorfizmasını gösterecektir. Bu bölüm için temel referansımız Başer and Kwak (2010) olacaktır. Yani bu bölümde vereceğimiz tüm sonuçlar ve ispatlar adı geçen çalışmada vardır.

4.1. Güçlü $\alpha-$terslenebilir Halka Kavramının Çıkış Hikayesi

Bu bölüme $\alpha-$terslenebilir halka kavramını hatırlatarak başlayalım.

Tanım 4.1.1. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması $b\alpha(a) = 0$ $(\alpha(b)a = 0)$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R halkasının α endomorfizmasına *sağ* (*sol*) *terslenebilirdir* denir. Eğer bir R halkasının bir sağ (sol) terslenebilir α endomorfizması varsa, bu durumda R halkasına *sağ* (*sol*) $\alpha - terslenebilir$ denir. Eğer R halkası hem sağ hem de sol $\alpha-$ terslenebilir ise, bu durumda R ye α *−terslenebilir* halka denir.

Bir sağ $\alpha-$ terslenebilir R halka tanımının ters koşulunu göz önüne alalım. Yani

$$a, b \in R \text{ için } a\alpha(b) = 0 \Rightarrow ba = 0 \tag{4.1}$$

olsun. Şimdi vereceğimiz örnek bir sağ $\alpha-$ terslenebilir halkanın (4.1) şartını sağlamadığını gösterir.

Örnek 4.1.2. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. R halkasının,

$$\alpha: R \to R, \qquad \alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda kolayca görülebilir ki R sağ $\alpha-$ terslenebilirdir. Fakat terslenebilir değildir. Ayrıca R, (4.1) şartını sağlamaz. Gerçekten $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $A\alpha(B) = 0$ fakat $BA \neq 0$ dır.

Önerme 4.1.3. Bir R halkasının bir endomorfizması α olsun..

(1) R halkasının (4.1) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul R nin sağ α-terslenebilir halka ve α nın bir monomorfizma olmasıdır.

(2) R nin α −katı bir halka olması için gerek ve yeter koşul R nin (4.1) eşitliğini sağlayan yarı asal bir halka olmasıdır.

İspat. (1) ⇒) R halkası (4.1) koşulunu sağlasın. $a, b \in R$ için $ab = 0$ ise $\alpha(a)\alpha(b) = \alpha(ab) = 0$ dır. O halde (4.1) eşitliğinden dolayı $b\alpha(a) = 0$ dır. Sonuç olarak R halkası sağ $\alpha -$ terslenebilirdir. Eğer $\alpha(a) = \alpha(b)$ ise bu durumda $\alpha(a - b) = 0$ olup (4.1) den $a = b$ olur ve böylece α bir monomorfizmadır.

⇐) R halkası sağ $\alpha -$ terslenebilir ve α bir monomorfizma olsun. $a, b \in R$ için $a\alpha(b) = 0$ ise bu durumda $\alpha(a)\alpha(b) = 0$ olup kabulden $ab = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R, (4.1) koşulunu sağlar.

(2) ⇒)R, α −katı bir halka olsun. Bu durumda R yarı asal bir halkadır. Şimdi R nin (4.1) koşulunu sağladığını gösterelim.

Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $a\alpha(b) = 0$ olsun. Buradan $ba\alpha(ba) = ba\alpha(b)\alpha(a) = 0$ elde edilir. Böylece R, α −katı olduğundan $ba = 0$ dır. R halkası (4.1) koşulunu sağlar.

⇐) R halkası (4.1) koşulunu sağlayan yarı asal bir halka ve $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. Herhangi bir $r \in R$ için $0 = a\alpha(a)\alpha(r) = a\alpha(ar)$ olur. R, (4.1) koşulunu sağladığından $\alpha(ara) = 0$ ve böylece (1) den $aRa = 0$ olur. R yarı asal olduğundan $a = 0$ olur ki, bu yüzden R, α −katı bir halkadır. Başer and Kwak (2010).

Sonuç 4.1.4. Bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul R nin yarı asal ve terslenebilir olmasıdır.

İspat. Önerme 4.1.3(2) de α yerine birim endomorfizması alınırsa istenilen elde edilir.

Aşağıdaki örnek, Önerme 4.1.3(2) deki 'R halkası (4.1) koşulunu sağlar' ve 'R yarı asal bir halkadır' koşullarının fazladan olmadığını gösterir.

Örnek 4.1.5. (1) $\mathbb{Z}_4$ halkasını göz önüne alalım. R halkası,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_4 \right\}$$

olmak üzere, $\alpha: R \to R,\ \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun R halkasının bir otomorfizması olduğu kolayca gösterilebilir Diğer taraftan açık olarak R yarı asal değildir. Böylece R; $\alpha -$ katı değildir.

Şimdi R nin (4.1) koşulunu sağladığını gösterelim.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} \in R$$

olmak üzere $A\alpha(B) = O$ olsun. Bu durumda

$$A\alpha(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & -ab' + ba' \\ 0 & aa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup, buradan $aa' = 0$ ve $-ab' + ba' = 0$ elde edilir. $ab' = ba'$ ve $aa' = 0$ olduğundan $a = 0$ ve $a = 2$ olur. Sonuç olarak

$$BA = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a & a'b + b'a \\ 0 & a'a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2ab' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

(2) Bir F cismi üzerindeki polinomlar halkası $R = F[x]$ olsun.

$\alpha: R \to R, \alpha\big(f(x)\big) = f(0)$ olarak tanımlansın. R bir tamlık bölgesi olduğundan yarı asaldır.

Ayrıca α monomorfizma olmadığından (4.1) koşulu sağlanmaz. Ayrıca $R,\ \alpha -$ katı da değildir. Şimdi bunu gösterelim. $0 \neq f(x) = x$ için $f(x)\alpha\big(f(x)\big) = f(x)0 = 0$ elde edilir.

4.2. Güçlü α −terslenebilir Halkaların Özellikleri

Bu bölümde güçlü $\alpha -$ terslenebilir halkaların temel özelliklerinden bahsedilecektir. Önerme 4.1.3. ün ışığı altında aşağıdaki tanımı vererek başlayalım.

Tanım 4.2.1. $a, b \in R$ için $a\alpha(b) = 0\ (\alpha(a)b = 0)$ olması $ba = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R halkasının bir α endomorfizmasına *sağ güçlü (sol güçlü) terslenebilirdir* denir. Eğer bir R halkasının bir güçlü sağ (sol) terslenebilir α endomorfizması varsa, bu durumda R halkasına *güçlü sağ* $(sol)\, \alpha - terslenebilir$ denir. Eğer R halkası hem güçlü sağ hem de güçlü sol $\alpha -$ terslenebilir ise, bu durumda R ye güçlü $\alpha -$ *terslenebilir* halka denir.

Uyarı 4.2.2. (1) Bir R halkasının bir endomorfizması α olsun. Bu durumda

(i) $\alpha(S) \subseteq S$ olacak şekilde güçlü sağ(sol) $\alpha -$ terslenebilir R halkasının her S alt halkası da güçlü sağ(sol) $\alpha -$ terslenebilirdir.

(ii) Her $\alpha -$ katı halka güçlü $\alpha -$ terslenebilir ve her güçlü sağ α −terslenebilir halka sağ α −terslenebilirdir. Gerçekten $R, \alpha -$ katı bir halka ve $a, b \in R$ için $\alpha(a)b = 0$ olsun. Bu durumda $ab\alpha(ab) = ab\alpha(a)\alpha(b) = a0\alpha(b) = 0$ dır. R , $\alpha -$ katı olduğundan $ab = 0$ ve $\alpha -$ katı halkalar terslenebilir olduğundan $ba = 0$ olur. Sonuç olarak R güçlü α −terslenebilirdir.

Şimdi, R güçlü sağ α −terslenebilir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda

$$ab = 0 \Rightarrow \alpha(ab) = \alpha(0) \Rightarrow \alpha(ab) = 0 \Rightarrow \alpha(a)\alpha(b) = 0 \Rightarrow b\alpha(a) = 0$$

elde edilir. Yani R sağ α −terslenebilirdir.

(iii) $\alpha^2 = id_R$ veya R terslenebilir halka olması durumunda güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilirlik güçlü sol $\alpha -$ terslenebilirliğe denktir.

İlk olarak $\alpha^2 = I_R$ olsun. R nin güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olması durumunda güçlü sol $\alpha -$ terslenebilir olduğunu gösterelim.

Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $\alpha(a)b = 0$ olsun. Bu durumda

$$\alpha(\alpha(a)b) = \alpha(0) \Rightarrow \alpha^2(a)\alpha(b) = 0 \Rightarrow id_R(a)\alpha(b) = 0 \Rightarrow a\alpha(b) = 0 \Rightarrow ba = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde R nin güçlü sol $\alpha -$ terslenebilir olması durumunda R nin güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olduğu da gösterilebilir.

Şimdi de R nin terslenebilir ve güçlü sol $\alpha -$ terslenebilir olduğunu kabul edelim. $a, b \in R$ için $a\alpha(b) = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $\alpha(b)a = 0$ olur. R güçlü sol $\alpha -$terslenebilir olduğundan $ab = 0$ elde edilir. Buradan $ba = 0$ olup R güçlü sol $\alpha -$ terslenebilirdir. Benzer şekilde R güçlü sol $\alpha -$ terslenebilir iken R nin güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olduğu da gösterilebilir.

(iv) R nin güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in R$ için $ab = 0 \Leftrightarrow b\alpha(a) = 0$ $(ab = 0 \Leftrightarrow \alpha(b)a = 0)$ olmasıdır. Şimdi bu denkliği görelim.

$\Rightarrow$) R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir ve $a, b \in R$ için $\alpha(a)b = 0$ olsun. Bu durumda

$\alpha(ab) = \alpha(0) \Rightarrow \alpha(a)\alpha(b) = 0 \Rightarrow b\alpha(a) = 0$ elde edilir.

$\Leftarrow$) $a, b \in R$ için $b\alpha(a) = 0$ olsun. Bu durumda $ab = 0$ olur. Böylece R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilirdir.

(2) Her bir $\gamma \in \Gamma$ için R_γ bir halka ve α_γ; R_γ nın bir endomorfizması olsun. Bu durumda

$$\bar{\alpha} : \prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma \to \prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma,\ \bar{\alpha}\big((a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\big) = (\alpha_\gamma(a_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $\prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ halkasının bir endomorfizması olur.

$\prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ nın güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul her bir R_γ nın güçlü sağ (sol) $\alpha_\gamma -$ terslenebilir olmasıdır.

Önerme 4.2.3. Bir R halkasının bir α endomorfizması için aşağıdakiler birbirine denktir.

(1) R güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilirdir.
(2) R nin her bir S alt kümesi için $l_R(\alpha(S)) = r_R(S)$ $(r_R(\alpha(S)) = l_R(S))$ dir.

(3) Her bir $a \in R$ için $l_R(\alpha(a)) = r_R(a)$ $(r_R\big(\alpha(a)\big) = l_R(a))$ dir.

(4) R nin boştan farklı herhangi A ve B alt kümeleri için $A\alpha(B) = 0$ $(\alpha(A)B = 0)$ olması için gerek ve yeter koşul $BA = 0$ olmasıdır.

İspat. (1) ⇒ (2) R güçlü sağ $\alpha -$terslenebilir ve $a \in R,\ S \subseteq R$ için $a \in l_R(\alpha(S))$ olsun. Bu durumda $a\alpha(S) = 0$ dır. Yani her $s \in S$ için $a\alpha(s) = 0$ olur. R güçlü sağ $\alpha -$terslenebilir olduğundan $sa = 0$ bulunur. Yani her $s \in S$ için $Sa = 0$ olur. O halde $a \in r_R(S)$ dir. Tersine $b \in r_R(S)$ olsun. Bu durumda $Sb = 0$ yani her $s \in S$ için $sb = 0$ olur. Buradan $\alpha(sb) = \alpha(s)\alpha(b) = 0$ olup R güçlü sağ $\alpha -$terslenebilir olduğundan $b\alpha(s) = 0$ olur ve buradan $b \in l_R(\alpha(S))$ elde edilir.

(2) ⇒ (3) $S = \{a\}$ alınırsa ispat açıktır.

(3) ⇒ (4) R nin boşdan farklı A ve B alt kümeleri için $A\alpha(B) = 0$ olsun. Bu durumda $a \in A$ ve $b \in B$ için $a\alpha(b) = 0$ olur. Buradan $a \in l_R(\alpha(b)) = r_R(b)$ olup $a \in r_R(b)$ bulunur. Yani $ba = 0$ olur. Böylece $BA = 0$ elde edilir. Tersine kolay bir şekilde gösterilebilir.

(4) ⇒ (1) $a, b \in R$ için $a\alpha(b) = 0$ olsun. (4) de $A = \{a\}$ ve $B = \{b\}$ alınırsa

$A\alpha(B) = 0$ ve böylece $BA = 0$ yani $ba = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R güçlü sağ $\alpha -$terslenebilirdir. Başer and Kwak (2010).

R sıfır bölensiz bir halka olmak üzere R nin her bir α monomorfizması için R güçlü $\alpha -$ terslenebilirdir. Gerçekten $a, b \in$ R için $a\alpha(b) = 0$ olsun. R sıfır bölensiz olduğundan $a = 0$ veya $\alpha(b) = 0$ dır. α monomorfizm olduğundan $a = 0$ veya $b = 0$ olur. Böylece $ba = 0$ elde edilir. Yani R güçlü sağ $\alpha -$terslenebilirdir. Benzer şekilde R nin güçlü sol $\alpha -$terslenebilir olduğu gösterilebilir.

Örnek 4.2.4. $\mathbb{Z}_2$ kalan sınıfların halkası olmak üzere bileşensel toplama ve çarpma işlemleriyle $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını göz önüne alalım. Bu durumda R değişmeli inmiş bir halkadır. $\alpha: R \to R,\ \alpha\big((a, b)\big) = (b, a)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\alpha,\ R$ nin otomorfizmasıdır. Fakat R güçlü sağ $\alpha-$ terslenebilir değildir. Gerçekten $a=(1,0)=b\in R$ için $a\alpha(b)=0$ fakat $ba=(0,1)\neq 0$ dır.

Önerme 4.2.5. R terslenebilir bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(1) R güçlü $\alpha-$ terslenebilirdir.
(2) R güçlü sağ $\alpha-$ terslenebilirdir.
(3) $n\in\mathbb{Z}^+$ ve $a,b\in R$ için $a\alpha^n(b)=0$ veya $\alpha^n(a)b=0$ ise $ab=0$ dır. Tersine $a,b\in R$ için $ab=0$ iken m herhangi pozitif tamsayı olmak üzere $a\alpha^m(b)=0$ ve $\alpha^m(a)b=0$ dır.
(4) $a,b\in R$ olsun. Bu durumda $ab=0$ olması için gerek ve yeter koşul $a\alpha(b)=0$ olmasıdır.

İspat. $(1)\Rightarrow(2)$ R; güçlü $\alpha-$terslenebilir halka olsun. Bu durumda güçlü $\alpha-$terslenebilir halka tanımı gereğince R güçlü sağ $\alpha-$ terslenebilirdir.

$(2)\Rightarrow(3)$ R güçlü sağ $\alpha-$ terslenebilir ve $a,b\in R$ için $a\alpha^n(b)=0$ olsun. Bu durumda $0=a\alpha^n(b)=a\alpha\left(\alpha^{n-1}(b)\right)=\alpha^{n-1}(b)a$ olup R güçlü sağ $\alpha-$ terslenebilir olduğundan $\alpha^{n-1}(b)a=0$ olur. Buradan $a\alpha\alpha^{n-1}(b)=0$ olur. Tekrar R güçlü sağ $\alpha-$ terslenebilir olduğundan $\alpha^{n-2}(b)a=0$ dır. Böyle devam edersek $ab=0$ bulunur. $\alpha^n(a)b=0$ içinde aynı şekilde ilerlenirse $ab=0$ elde edilir.Tersine $ab=0$ olsun. Bu durumda $b\alpha(a)=0$ dır. Buradan $b\alpha(a)=0\Rightarrow\alpha(a)b=0\Rightarrow b\alpha^2(a)=0\ldots\Rightarrow a\alpha^n(b)=0$ bulunur.

$(3)\Rightarrow(4)$ açıktır.

$(4)\Rightarrow(1)$ $a\alpha(b)=0$ olsun. Bu durumda (4) den $ab=0$ olur. R terslenebilir olduğundan $ba=0$ olur. Böylece $\alpha(a)b=0$ dır. Sonuç olarak R güçlü sağ $\alpha-$ terslenebilir ve R güçlü sol $\alpha-$ terslenebilir olduğundan R güçlü $\alpha-$ terslenebilirdir. Başer and Kwak (2010).

Lemma 4.2.6. $R[x;\alpha]$ halkanın inmiş olması için gerek ve yeter koşul R nin $\alpha-$katı olmasıdır.

Sonuç 4.2.7. R α $-$katı ise bu durumda R α $-$skew Armendariz bir halkadır.

Bir R halkasının terslenebilir ve güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olması durumunda R nin $\alpha -$ skew Armendariz halka olup olmadığından şüphe edilebilir. Fakat örnek 4.1.5(1) bu şüpheyi ortadan kaldırır. Gerçekten, bu örnekteki halka terslenebilir ve güçlü $\alpha -$ terslenebilir bir halkadır. Fakat inmiş bir halka değildir.

$p(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \in R[x;\alpha]$ için $\left(p(x)\right)^2 = 0$ fakat $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ dır. Böylece R, $\alpha -$ skew Armendariz değildir.

Teorem 4.2.8. R $\alpha -$ skew Armendariz bir halka olsun. Bu durumda R nin terslenebilir ve güçlü $\alpha -$ terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R nin $R[x;\alpha]$ skew polinomlar halkasının terslenebilir olmasıdır.

İspat. ⇒) R terslenebilir ve güçlü $\alpha -$ terslenebilir olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

için $p(x)q(x) = 0$ olsun. R, $\alpha -$ skew Armendariz olduğundan dolayı herbir i, j için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ dır. Önerme 4.2.5. den dolayı $b_j a_i = 0$ olur. Bu yüzden $b_j\alpha^j(a_i) = 0$ elde edilir. Buradan $q(x)p(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m) = b_0a_0 + \left(b_0a_1 + b_1\alpha(a_0)\right)x + \left(b_0a_2 + b_1\alpha(a_1) + b_2\alpha^2(a_0)\right)x^2 + \cdots + b_n\alpha^n(a_m)x^{m+n} = 0$ olur ki bu da bize $R[x;\alpha]$ nın terslenebilir olduğunu gösterir.

⇐) $R[x;\alpha]$ halkasının terslenebilir olduğunu kabul edelim. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $p(x) = a,\ q(x) = b \in R[x;\alpha]$ şeçilirse $p(x)q(x) = ab = 0$ olur. $R[x;\alpha]$ terslenebilir olduğundan $q(x)p(x) = ba = 0$ bulubur. Yani R terslenebilirdir. Şimdi R nin güçlü $\alpha -$ terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $a\alpha(b) = 0$ olsun. $p(x) = ax,\ q(x) = b \in \mathrm{R}[x;\alpha]$ seçilirse $p(x)q(x) = (ax)b = a\alpha(b)x = 0x = 0$ olur. $R[x;\alpha]$ terslenebilir olduğundan $0 = q(x)p(x) = b(ax) = ba$ olur. Böylece R güçlü $\alpha -$ terslenebilirdir. Başer and Kwak (2010).

Sonuç 4.2.9. R Armendariz bir halka olsun. Bu durumda R nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ ın terslenebilir olmasıdır.

4.3. Güçlü α −terslenebilir Halkaların Genişlemeleri

Bu bölümde bir halkanın güçlü α −terslenebilir özelliğinin hangi genişlemelerine taşınıp taşınmadığı araştırılacaktır.

Lemma 4.3.1. Bir R halkasının bir α endomorfizmi için eğer R güçlü sağ (sol) $\alpha-$ terslenebilir ise, bu durumda $\alpha(1) = 1$ dir. Bu durumda herhangi $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ dir.

İspat. R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olsun. Bu durumda

$(1-\alpha(1))\alpha(1) = \alpha(1) - \alpha(1)\alpha(1) = \alpha(1) - \alpha(1) = 0$ olup R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $1\big(1-\alpha(1)\big) = 0$ olur. Böylece $\alpha(1) = 1$ dir.

Şimdi $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $(1-e)e = 0$ ve $e(1-e) = 0$ olur. Böylece $\alpha\big((1-e)e\big) = \alpha(1-e)\alpha(e) = \alpha(0) = 0,\ \alpha\big(e(1-e)\big) = \alpha(e)\alpha(1-e) = \alpha(0) = 0$ olur. R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $(1-e)\alpha(e) = 0$ ve $e\alpha(1-e) = 0$ elde edilir. $\alpha(1) = 1$ olduğundan $\alpha(e) = e\alpha(e)$ ve $e = e\alpha(e)$ bulunur. Sonuç olarak $\alpha(e) = e$ elde edilir. Başer and Kwak (2010).

R değişmeli bir S halkası üzerinde bir cebir olsun. Bu durumda

$$D = R \times S = \{(r,s) \mid r \in R, s \in S\}$$

kartezyen çarpım kümesi;

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1,\ s_1 s_2)$$

ikili işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya R nin S ile $Dorroh\ genişlemesi$ olduğunu hatırlatalım. R nin bir α endomorfizması için, $\bar{\alpha} : D \to D, \bar{\alpha}(r,s) = (\alpha(r),s)$ şeklinde tanımlanan bağıntı bir S −Cebir homomorfizmasıdır.

R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir monomorfizması olsun. $R \leq A$ olacak şekilde bir halka A olsun. Eğer α, A dan $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \alpha^{-k}(R)$ ya bir otomorfizmaya genişletilebilirse, bu durumda A ya R nin bir *Jordan genişlemesi* denir. Herhangi bir (R,α) çifti için böyle bir genişlemenin mevcut olduğu gösterilmiştir.

Önerme 4.3.2. Bir R halkasının bir endomorfizması α olsun.

(1) S bir halka ve $\sigma: R \to S$ bir halka izomorfizması olsun. Bu durumda R nin güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilir halka olması için gerek ve yeter koşul S nin güçlü sağ (sol) $\sigma\alpha\sigma^{-1} -$ terslenebilir halka olmasıdır.

(2) R halkasının merkezi bir eşkare elemanı e olsun. Bu durumda eR ve $(1-e)R$ halkalarının güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R nin güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilir olmasıdır.

(3) A, R nin Jordan genişlemesi olsun. Bu durumda R nin güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilir halka olması için gerek ve yeter koşul A nın güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilir halka olmasıdır.

(4) S sıfır bölensiz bir halka olsun. Bu durumda R nin güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilir halka olması için gerek ve yeter koşul R den S ye D Dorroh genişlemesinin güçlü sağ (sol) $\bar{\alpha} -$ terslenebilir olmasıdır.

İspat. (1) ⇒) R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir bir halka olsun. $s_1, s_2 \in S$ için

$s_1\sigma\alpha\sigma^{-1}(s_2) = 0$ olsun. σ bir izomorfizma olduğundan $\sigma(r_1) = s_1,\ \sigma(r_2) = s_2$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R$ vardır. Bu durumda $0 = s_1\sigma\alpha\sigma^{-1}(s_2) = \sigma(r_1)\sigma\alpha\sigma^{-1}(\sigma(r_2)) = \sigma(r_1)\sigma\alpha(r_2) = \sigma(r_1\alpha(r_2)) = r_1\alpha(r_2)$ elde edilir. R güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $r_2r_1 = 0$ bulunur. O halde $\sigma(r_2r_1) = 0$ dır. σ homomorfizma olduğundan

$\sigma(r_2)\sigma(r_1) = 0$ dır. Sonuçta $s_2 s_1 = 0$ bulunur. Yani S güçlü sağ $\sigma\alpha\sigma^{-1} -$ terslenebilir halkadır.

$\Leftarrow$) S güçlü sağ $\sigma\alpha\sigma^{-1} -$ terslenebilir halka ve $r_1, r_2 \in R$ için $r_1\alpha(r_2) = 0$ olsun. Bu durumda $\sigma\big(r_1\alpha(r_2)\big) = \sigma(0) = 0 \Rightarrow \sigma(r_1)\sigma\alpha(r_2) = 0 \Rightarrow \sigma(r_1)\sigma\alpha\left(\sigma^{-1}\big(\sigma(r_2)\big)\right) = 0$

$\Rightarrow \sigma(r_1)(\sigma\alpha\sigma^{-1})\big(\sigma(r_2)\big) = 0 \Rightarrow \sigma(r_2)\sigma(r_1) = 0 \Rightarrow \sigma(r_2 r_1) = 0 \Rightarrow \sigma(r_2 r_1) = 0$

$\Rightarrow r_2 r_1 = 0$ bulunur.

Sonuçta R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilirdir.

(2) $\Rightarrow$) eR ve $(1-e)R$ nin güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olsun. $a, b \in R$ için $a\alpha(b) = 0$ olsun. Bu durumda $a\alpha(b) = 0 \Rightarrow eea\alpha(b) = 0 \Rightarrow eae\alpha(b) = 0 \Rightarrow ea\alpha(e)\alpha(b) = 0 \Rightarrow ea\alpha(eb) = 0$ olup eR güçlü sağ $\alpha-$ terslenebilir olduğundan $ebea = 0$ ve böylece $eba = 0$ elde edilir. Diğer taraftan $a\alpha(b) = 0 \quad \Rightarrow (1-e)a\alpha\big((1-e)b\big) = 0$ olup, $(1 - eR)$ güçlü sağ $\alpha -$terslenebilir olduğundan $(1-e)b(1-e)a = 0$ olur. Böylece $(1-e)ba = 0 \quad \Rightarrow ba - eba = 0 \Rightarrow ba = eba$ elde edilir. $eba = 0$ olduğundan $ba = 0$ bulunur. Sonuç olarak R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir halkadır.

$\Leftarrow$) R nin güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir halka olduğunu kabul edelim. $ea, eb \in eR$ için $ea\alpha(eb) = 0$ olsun. R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $ebea = 0$ olur. Böylece eR güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olur. Aynı durum $(1-e)R$ içinde geçerlidir.

(3) $\Rightarrow$) R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir ve $a, b \in A$ için $a\alpha(b) = 0$ olsun. Bu durumda A nın tanımından dolayı $\alpha^k(a), \alpha^k(b) \in R$ olacak şekilde $k \geq 0$ vardır. Böylece

$$\alpha^k(a)\alpha\left(\alpha^k(b)\right) = \alpha^k(a)\alpha^k\big(\alpha(b)\big) = \alpha^k\big(a\alpha(b)\big) = \alpha^k(0) = 0$$

olur. R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $\alpha^k(a)\alpha^k(b) = 0$ elde edilir. Buradan $\alpha^k(ab) = 0$ elde edilir. α bir monomorfizma olduğundan $ba = 0$ dır. Sonuç olarak A güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir bir halkadır.

$\Leftarrow$) A güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir olsun. $\alpha -$ terslenebilir alt halkaların alt halkasıda $\alpha -$ terslenebilir olduğundan R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilirdir.

(4) R güçlü sağ (sol) $\alpha -$ terslenebilir halka iken R den S ye D Dorroh genişlemesinin güçlü sağ (sol) $\bar{\alpha} -$ terslenebilir olduğunu göstermek yeterlidir. R güçlü sağ $\alpha -$ terslenebilir ve $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in D$ için $(r_1, s_1)\bar{\alpha}(r_2, s_2) = 0$ olsun. Bu durumda $(r_1, s_1)\bar{\alpha}(r_2, s_2) = 0 \Rightarrow (r_1, s_1)(\alpha(r_2), s_2) = 0 \Rightarrow r_1\alpha(r_2) + s_1\alpha(r_2) + s_2 r_1 = 0$ ve $s_1 s_2 = 0$ olur. S bir tamlık bölgesi olduğundan $s_1 = 0$ veya $s_2 = 0$ olur. Eğer $s_1 = 0$ ise, bu durumda $r_1\alpha(r_2) + s_2 r_1 = 0$ olup, buradan $s_2 r_1 = s_2(r_1 1_R) = r_1(s_2 1_R)$ olduğu kullanılarak $r_1(\alpha(r_2) + s_2) = 0$ elde edilir. α bir $S -$cebir homomorfizması olduğundan $r_1\alpha(r_2 + s_2 1_R) = 0 \Rightarrow (r_2 + s_2 1_R)r_1 = 0 \Rightarrow r_2 r_1 + s_2 1_R r_1 = 0 \Rightarrow (r_2, s_2)(r_1, s_1) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $s_2 = 0$ içinde $(r_2, s_2)(r_1, s_1) = 0$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak D Dorroh genişlemesi güçlü sağ $\bar{\alpha} -$ terslenebilirdir. Başer and Kwak (2010).

R bir halka ve M bir $(R, R) -$bimodül olmak üzere

$$R \oplus M = R \times M = \{(r, m) | r \in R, m \in M\}$$

kümesi,

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2,\ m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2,\ r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

ikili işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya R nin M ile *aşikar genişlemesi (trival extension)* denir ve $T(R, M)$ ile gösterilir. Bir R halkasının $M; (R, R) -$bimodülü ile aşikar genişlemesi

$$\left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R, m \in M\right\}$$

halkasına izomorftur.

R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olmak üzere R nin $T(R, R)$ aşikar genişlemesi üzerinde

$$\bar{\alpha}: T(R,R) \to T(R,R), \bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ 0 & \alpha(a) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $T(R,R)$ halkasının bir endomorfizmasıdır. $T(R,0)$; R ye izomorf olduğundan $\bar{\alpha}$ ın $T(R,0)$ a kısıtlamasını α ile özdeş kılarız.

Önerme 4.3.3. R inmiş bir halka ve R nin bir endomorfizması α olsun. Bu durumda R nin güçlü $\alpha-$terslenebilir bir halka olması için gerek ve yeter koşul $T(R,R)$ nin güçlü $\bar{\alpha}-$terslenebilir bir halka olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$) R güçlü sağ $\alpha-$terslenebilir bir halka ve $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için $A\bar{\alpha}(B) = O$ olsun. Bu durumda

$$A\bar{\alpha}(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(c) & \alpha(d) \\ 0 & \alpha(c) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\alpha(c) & a\alpha(d) + b\alpha(c) \\ 0 & a\alpha(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup buradan $a\alpha(c) = 0$ ve $a\alpha(d) + b\alpha(c) = 0$ elde edilir. R güçlü sağ $\alpha-$terslenebilir olduğundan $ca = 0$ olur. R inmiş bir halka olduğundan terslenebilirdir. Böylece $ac = 0$ dır. Bu durumda $0 = c(a\alpha(d) + b\alpha(c)) = cb\alpha(c) = ccb = c^2b$ elde edilir ki, buradan $0 = cbcb = (cb)^2$ bulunur. R inmiş olduğundan $cb = 0$ olur. O halde $b\alpha(c) = 0$ dır. Ayrıca $b\alpha(c) = 0$ ve $a\alpha(d) + b\alpha(c) = 0$ olduğundan $a\alpha(d) = 0$ olur. Buradan $da = 0$ bulunur.Sonuç olarak,

$$BA = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb + da \\ 0 & ca \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0+0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

bulunur ki, buda bize $T(R,R)$ nin güçlü $\bar{\alpha}-$terslenebilir olduğunu gösterir.

$\Leftarrow$)$T(R,R)$ güçlü sağ $\bar{\alpha}-$terslenebilir bir halka olsun. $R \cong T(R,0)$ ve $T(R,0)$, $T(R,R)$ in $\bar{\alpha}(T(R,0)) \subseteq T(R,0)$ olacak şekilde alt halkası olduğundan R güçlü sağ $\alpha-$terslenebilir halkadır. Başer and Kwak (2010).

Sonuç 4.3.4. Eğer R inmiş bir halka ise, bu durumda $T(R,R)$ terslenebilir bir halkadır.

Yukarıdaki önermedeki 'R bir reduced halkadır.' Şartı kaldırılamaz. Bunu aşağıdaki örnekte görelim.

Örnek 4.3.5. $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a,b \in \mathbb{Z}_4\right\}$ ve $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ olmak üzere R nin güçlü sağ $\alpha -$terslenebilir olduğunu biliyoruz.

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T(R,R)$$

için $A\bar{\alpha}(B) = O$ fakat $BA \neq O$ olduğundan $T(R,R)$ güçlü sağ $\bar{\alpha}-$ terslenebilir değildir. Ayrıca R nin inmiş olmadığı da açıktır.

R bir halka ve $n \geq 3$ için

$$S_n(R) = \left\{\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in R\right\}$$

olsun. R nin α endomorfizmi $\bar{\alpha}\left((a_{ij})\right) = \left(\alpha(a_{ij})\right)$ şeklinde tanımlanan $S_n(R)$ nin $\bar{\alpha}$ endomorfizmine genişletilebilir. R inmiş olduğunda $n \geq 3$ için $S_n(R)$ halkasının güçlü $\bar{\alpha}$ $-$terslenebilir olup olmadığını sormak doğaldır. Fakat aşağıdaki örnek bu sorunun cevabının olumsuz olduğunu gösterir.

Örnek 4.3.6. R bir $\alpha -$katı halka olsun. Bu durumda $\alpha(1) = 1$ olduğunu biliyoruz. $n \geq 3$ için E_{ij} ler matris birimsellerini göstersin. Bu durumda

$$A = E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_n(R) \text{ için}$$

$A\bar{\alpha}(B) = O$ fakat $BA \neq O$ dır. Dolayısıyla $S_n(R)$ güçlü $\bar{\alpha} -$ terslenebilir değildir.

R bir halka ve α; R nin bir endomorfizması olmak üzere

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \mapsto \alpha(a_0) + \alpha(a_1)x + \cdots + \alpha(a_m)x^m$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonda $R[x]$ polinom halkasının bir endomorfizmasıdır. $R[x]$ polinom halkasının yukarıdaki şekilde tanımlanan endomorfizmasınıda α ile göstereceğiz.

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=-s}^{n} a_i x^i : s \geq 0, n \geq 0, a_i \in R \right\}$$

şeklinde tanımlanan küme polinomlarda ki toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya $Laurent\ polinomlarının\ halkası$ denir.

$\alpha; R$ nin bir endomorfizması olmak üzere α yardımıyla $R[x]$ polinom halkası üzerinde tanımladığımız endomorfizmanın benzeri $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinomlarının halkası üzerindede tanımlanır. Aşağıdaki önerme Kim and Lee (2003)' deki Önerme 2.4 ün daha genel halidir.

Önerme 4.3.7. Bir R halkasının bir α endomorfiması için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $R[x]$ güçlü sağ (sol) α −terslenebilirdir

(2) $R[x; x^{-1}]$ güçlü sağ (sol) α −terslenebilirdir.

Eğer R Armendariz bir halka ise; bu durumda (1) ve (2) nin her ikiside (3) e denktir.

(3) R güçlü sağ (sol) α −terslenebilir.

İspat. (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3) açıktır. Çünkü $R < R[x]$ ve $R[x] < R[x; x^{-1}]$ dir.

(1) $\Rightarrow$ (2) $R[x]$ güçlü sağ α −terslenebilir olsun. $f, g \in R[x; x^{-1}]$ için $f\alpha(g) = 0$ olsun. Bu durumda $f_1 = fx^n, g_1 = gx^n \in R[x]$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayı vardır. Buradan $f_1\alpha(g_1) = fx^n\alpha(gx^n) = fx^n\alpha(g)\alpha(x^n) = fx^n\alpha(g)x^n = f\alpha(g)x^{2n} = 0$ elde edilir. $f_1\alpha(g_1) = 0$ ve $R[x]$ güçlü sağ α −terslenebilir olduğundan $g_1f_1 = 0$ dır. Böylece $gf = x^{-2n}g_1f_1 = 0$ olur ki, bu da bize $R[x; x^{-1}]$ in güçlü sağ α −terslenebilir olduğunu gösterir.

(3) ⇒ (1) Armendariz R halkası güçlü sağ α −terslenebilir olsun. $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ için $f\alpha(g) = 0$ olsun. Bu durumda R Armendariz olduğundan her i, j için $a_i\alpha(b_j) = 0$ olur. R güçlü sağ α −terslenebilir olduğundan $b_j a_i = 0$ olur. Böylece $fg = 0$ elde edilir. Sonuçta $R[x]$ güçlü sağ α −terslenebilirdir. Başer and Kwak (2010).

Sonuç 4.3.8. R Armendariz bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

(1) R terslenebilir.
(2) $R[x]$ terslenebilir.
(3) $R[x; x^{-1}]$ terslenebilir.

Terslenebilir halkaların homomorfik görüntülerinin terslenebilir olmak zorunda olmadıklarını biliyoruz. $I \lhd R$ olmak üzere, eğer $\alpha(I) \subset I$ ise, bu durumda $\bar{\alpha}(a + I) = a + I$şeklinde tanımlanan fonksiyonda ${R}/{I}$ bölüm halkasının bir endomorfizmasıdır.

Önerme 4.3.9. Bir R halkaının bir endomorfizması α olsun.

(1) I, R nin bir ideali olmak üzere $\alpha(I) \subseteq I$ olsun. Eğer ${R}/{I}$ bölüm halkası güçlü sağ $\bar{\alpha}$ −terslenebilir ve I, α −katı ise, bu durumda R güçlü sağ α −terslenebilirdir.

(2) R inmiş bir halka ve n pozitif bir tamsayı olsun. Bu durumda R nin güçlü α −terslenebilir halka olması için gerek ve yeter koşul ${R[x]}/{\langle x^n \rangle}$ güçlü $\overline{\alpha}$ −terslenebilir olmasıdır.

İspat. (1) $a, b \in R$ için $a\alpha(b) = 0$ olsun. Bu durumda $a + I, b + I \in {R}/{I}$ olup $(a + I)\bar{\alpha}(b + I) = (a + I)(\alpha(b) + I) = a\alpha(b) + I = I$ olup, ${R}/{I}$; sağ $\bar{\alpha}$ −terslenebilir olduğundan $I = (b + I)(a + I) = ba + I$ bulunur. Böylece $ba\alpha(ba) = ba\alpha(b)\alpha(a) = 0$ ve I, α −katı olduğundan $ba = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R güçlü sağ α −terslenebilirdir.

(2) $\Leftarrow$) ${R[x]}/{\langle x^n \rangle}$ güçlü sağ $\overline{\alpha}$ −terslenebilir ve $a, b \in R$ için $a\alpha(b) = 0$ olsun. Bu durumda $a + \langle x^n \rangle,\ b + \langle x^n \rangle \in {R[x]}/{\langle x^n \rangle}$ olup $(a + \langle x^n \rangle)\bar{\alpha}(b + \langle x^n \rangle) =$ $(a + \langle x^n \rangle)(\alpha(b) + \langle x^n \rangle) = a\alpha(b) + \langle x^n \rangle = \langle x^n \rangle$ olur. Buradan ${R[x]}/{\langle x^n \rangle}$ güçlü sağ $\overline{\alpha}$ −terslenebilir olduğundan $\langle x^n \rangle = (b + \langle x^n \rangle)(a + \langle x^n \rangle) = ba + \langle x^n \rangle$ yani $ba \in \langle x^n \rangle$ ve buradan $ba = 0$ elde edilir. Sonuçta R güçlü α −terslenebilirdir.

$\Rightarrow$) Kabul edelimki R inmiş ve güçlü α −terslenebilir olsun. R inmiş olduğundan terslenebilirdir. Ayrıca R nin inmiş bir halka olması için gerek ve yeter koşul $a^2b = 0 \Rightarrow ab = 0$ olmasıdır. Bu gerçeği aşağıda sıkça kullanacağız. $S = {R[x]}/{\langle x^n \rangle}$ diyelim.

Eğer $n = 1$ ise bu durumda $S \cong R$ olup S güçlü $\overline{\alpha}$ −terslenebilirdir. Eğer $n = 2$ ise, bu durumda $S \cong T(R, R)$ olup Önerme 4.2.3. den dolayı $T(R, R)$ ve dolayısıyla S halkası da güçlü $\overline{\alpha}$ −terslenebilirdir. Şimdi $n \geq 3$ kabul edelim. $\bar{x} = x + \langle x^n \rangle$ olmak üzere

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \bar{x}^i,\ g = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \bar{x}^j \in S$$

için $f\bar{\alpha}(g) = 0$ olsun. Tüm i ve j ler için $b_j a_i = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $i + j \geq n$ ise, bu durumda $f\bar{\alpha}(g) = 0$ dan dolayı $a_i\alpha(b_j)\bar{x}^{i+j} = 0$ dır. Böylece $i + j \leq n - 1$ üzerine tümevarım uygulayacağız. $f\bar{\alpha}(g) = 0$ dan $a_0\alpha(b_0) = 0$ ve böylece $b_0 a_0 = 0$ olur. Bu ise $i + j = 0$ için iddianın doğru olduğunu gösterir. Şimdi $i + j \leq k - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. $i + j = k \leq n - 1$ için (x^k) lı terimin katsayısı

$$a_0\alpha(b_k) + a_1\alpha(b_{k-1}) + \cdots + a_{k-1}\alpha(b_1) + a_k\alpha(b_0) = 0 \qquad (4.2)$$

dır. (4.2) eşitliği soldan b_0 ile çarpılırsa

$b_0a_0\alpha(b_k) + b_0a_1\alpha(b_{k-1}) + \cdots + b_0a_{k-1}\alpha(b_1) + b_0a_k\alpha(b_0) = 0$ olup (4.2) hipotezinden $b_0a_k\alpha(b_0) = 0$ bulunur. R güçlü α −terslenebilir olduğundan ${b_0}^2 a_k = 0$

olur. Böylece $b_0a_k = 0$ ve $a_k\alpha(b_0) = 0$ olur. $a_k\alpha(b_0) = 0$ ifadesi (4.2) de yerine yazılırsa

$$a_0\alpha(b_k) + a_1\alpha(b_{k-1}) + \cdots + a_{k-1}\alpha(b_1) = 0 \tag{4.3}$$

eşitliği elde edilir. (4.3) eşitliği soldan b_1 ile çarpılırsa

$b_1a_0\alpha(b_k) + b_1a_1\alpha(b_{k-1}) + \cdots + b_1a_{k-1}\alpha(b_1) = 0$ bulunur. Buradan $b_1a_{k-1}\alpha(b_1) = 0$ dır. R güçlü α −terslenebilir olduğundan ${b_1}^2a_{k-1} = 0$ dır. O halde $b_1a_{k-1} = 0$ ve $a_{k-1}\alpha(b_1) = 0$ dır. Sonuçta $b_ja_i = 0\,(i + j = k)$ ve $gf = 0$ dır. S güçlü sağ $\bar{\alpha}$ −terslenebilirdir. Başer and Kwak (2010).

Sonuç 4.3.10. (1) R nin uygun bir I ideali için $R\ /\ I$ terslenebilir olsun. Eğer I inmiş ise bu durumda R terslenebilirdir.

(2) Eğer R inmiş ise, bu durumda n pozitif bir tamsayı olmak üzere $R[x]/\langle x^n\rangle$ terslenebilirdir.

Aşağıdaki örnek yukarıdaki önermedeki I nın α −katı olma şartının kaldırılamayacağını göstermektedir.

Örnek 4.3.11. F bir cisim olmak üzere

$$R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F\right\}$$

halkasını ve bu halkanın

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

için

$$A\alpha(B)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\alpha\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$$

fakat $BA=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq O$ dır. Yani R güçlü sağ α −terslenebilir değildir.

R halkasının $I=\begin{pmatrix}0&F\\0&0\end{pmatrix}$ ideali için $R\ /\ I$ güçlü sağ α −terslenebilirdir.

$R/I=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+I\mid a,c\in F\right\}$ olmak üzere

$\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+I\right)^2=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&c^2\end{pmatrix}+I=I$ ve $\begin{pmatrix}a^2&0\\0&c^2\end{pmatrix}\in I$ dır. F inmiş olduğundan $\begin{pmatrix}a&0\\0&c\end{pmatrix}+I=I$ elde edilir. Yani $R\ /\ I$ inmişdir. $\bar{\alpha}, R/I$ da birim dönüşümdür. I α −katı halka değildir.

KAYNAKLAR

Anderson, D.D. and Camillo, V. (1998). Armendariz rings and Gaussian rings, Comm. *Algebra,* **26:** (7) 2265-2272.

Anderson, D.D. and Camillo, V. (1999). Semigroups and rings whose zero products commute, Comm. *Algebra*, **27:** (6) 2847-2852.

Armendariz, E.P. (1974). A note on extensions of Baer and p.p.-rings. *J. Austral. Math. Soc*., **18:** 470-473.

Başer, M., Hong, C.Y. and Kwak, T.K. (2009). On Extended Reversible Rings. *Algebra Colloq*., **16 :** 1 37-48.

Başer, M. and Kwak, T.K. (2010). On Strong Reversible Rings and Their Extensions. *Korcan J. Math.*, **18**: 1-13.

Cohn, P.M. (1999). Reversible rings, Bull. *London Math. Soc*., **31:** 641-648.

Goodearl, K.R. (1979). Von Neumann Regular Rings. *Pitman, London*.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2000). Ore extensions of Baer and p.p.-rings. *J. Pure and Appl. Algebra,* **151** (3)**:** 215-226.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2003). On Skew Armendariz Rings. *Comm. Algebra,* **31** (1)**:** 103-122.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak, T.K. (2005). Extensions of generalized reduced ring, *Algebra Colloq.* **12** (2)**:** 229-240.

Huh, C., Lee, Y. and Smoktunowicz, A. (2002). Armendariz rings and semicommutative rings. *Comm. Algebra,* **30** (2)**:** 751-761.

Jordan, D.A. (1982). Bijective extensions of injective rings endomorphism. *J. London Math. Soc.,* **25:** 435-448.

Kim, N.K. and Lee, Y. (2000). Armendariz rings and reduced rings. *J. Algebra*, **223:** 477-488.

Kim, N.K. and Lee, Y. (2003). Extensions of reversible rings. *J. Pure and Appl. Algebra*, **185:** 207-223.

Krempa, J. (1996). Some examples of reduced rings. *Algebra Colloq*., **3** (4)**:** 289-300.

Krempa, J. and Nierwieczerzal, D. (1997). Rings in which annihilators are ideals and their application to semigroup rings, Bull. *Acad. Polon. Sci. Ser. Sci, Math. Astronom, Phys*, **25:** 851-856.

Lambek, J. (1971). On the representation of modules by sheaves of factor modules. *C Canad. Math. Bull*, **14** (3)**:** 359-368.

Lee, Y. and Zhou, Y.Q. (2004). Armendariz and reduced rings. *Comm. Algebra*, **32:** 2287-2299.

McConnell, J.C. and Robson, J.C. (1987). Noncommutative Noetherian Rings. *Wiley, New York*.

Nagata, M. (1962). Local Rings. *Interscience, New York*.

Rege, M.B. and Chhawchharia, S. (1997). Armendariz rings. *Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci.*, **73:** 14-17.

Shin, G. (1973). Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring. *Trans. Amer Math. Soc*., **184:** 43-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar 23/05/1990
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: 0537 233 38 00/ hande-533@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi 2008
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü 2008

Çalıştığı Kurum ve Yıl	: Final Dergisi Dershaneleri 2010-2013