YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN GLOBAL DAVRANIŞLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

F. Hilal GÜMÜŞ

Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2015

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN GLOBAL DAVRANIŞLARI ÜZERİNE

F. Hilal GÜMÜŞ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2015

TEZ ONAY SAYFASI

Fatma Hilal GÜMÜŞ tarafından hazırlanan "Yüksek Mertebeden Fark Denklemlerinin Global Davranışları Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 16/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Başkan **:** Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Özkan ÖCALAN
Afyon Kocatepe Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Başak KARPUZ
Dokuz Eylül Üni., Fen Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

16.06.2015

F. Hilal GÜMÜŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN GLOBAL DAVRANIŞLARI ÜZERİNE

F. Hilal GÜMÜŞ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Yüksek mertebeden lineer olmayan fark denklemleri, biyoloji, genetik, ekonomi, psikoloji, sosyoloji ve daha bir çok bilim dalının içindeki matematiksel modellemelerin uygulamasında çok önemli bir yere sahiptir. Bu nedenden dolayıdır ki, son zamanlarda fark denklemlerinin çalışmasına çok büyük bir ilgi mevcuttur. Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklemleri hakkında genel bilgiler verilmiş ve lineer olmayan fark denklemleri ile ilgili yapılan çalışmaların literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde $x_{n+1} = x_n x_{n-1} - 1$ denkleminin, dördüncü bölümde ise $x_{n+1} = x_{n-1} x_{n-2} - 1$ fark denkleminin, beşinci bölümde $x_{n+1} = x_n x_{n-2} - 1$ fark denkleminin, son bölümde ise $x_n = x_{n-l} x_{n-k} - 1$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışları ele alınmıştır.

2015, vi+74 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sınırlılık, sınırsız çözüm, çekicilik, fark denklem.

ABSTRACT

M. Sc Thesis

ON THE GLOBAL BEHAVIOR OF THE HIGHER ORDER DIFFERENCE EQUATIONS

F. Hilal GÜMÜŞ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Associate Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

Nonlinear difference equations of higher order are of paramount importance the applications of several mathematical models in biology, economics, genetics, sociology, psychology, and so forth. In the first section, general informations were given about the difference equations and a summary of literature on nonlinear difference equations was given. In the second section, general definitions and theorems about difference equations were given. In the third section, of the $x_{n+1} = x_n x_{n-1} - 1$ difference equation, in the forth section of the $x_{n+1} = x_{n-1} x_{n-2} - 1$ difference equation, in the fifth section of the $x_{n+1} = x_n x_{n-2} - 1$ difference equation and in the last section of $x_n = x_{n-l} x_{n-k} - 1$ difference equation are studied the behaviour of positive solutions of difference equations.

2015, vi+74 pages

Key Words: Boundedness, unbounded solution, attractivity, difference equation.

TEŞEKKÜR

Tüm eğitim ve öğretim hayatım boyunca desteklerini hep yanımda hissettiğim ve bana çalışmalarımda hep pozitif enerji katan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Bana bu çalışması zevkli ve ilginç konuyu tez çalışması olarak veren, benim için çok değerli ve üzerimde çok emeği olan danışman hocam Doç. Dr. Özkan ÖCALAN'a tüm yardımlarından, öğretilerinden, bilimsel çalışmalarıma başlamamda öncü olmasından dolayı ne kadar teşekkür etsem azdır. Ayrıca hayatımın her alanında olduğu gibi matematik çalışmalarımda da beni hiç yalnız bırakmayan, desteğini hep ilerleyici bir kuvvet olarak bana hissettiren canım eşim Araş. Gör. Mehmet GÜMÜŞ'e (Bülent Ecevit Üniversitesi) teşekkürlerimi sunarım.

F. Hilal GÜMÜŞ
AFYONKARAHİSAR, 2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\mathbb{R}^{+}$	$(0,\infty)$ aralığı
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\subset$	Kapsar
$=$	Eşittir
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değidir
$\sum$	Toplam Sembolü
log	Logaritma Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Fark denklemler teorisi yaklaşık sekiz asırlık çalışmalar sonucunda sistematik bir hale gelmiştir. Fark denklemleri Fibonacci tarafından çalışma konusu olarak dikkate alınmıştır ve onun çok başarılı çalışmaları sonucunda bir çok matematikçi sonraki zamanlarda bu ilginç alana yönlenmiştir. Laplace sabit katsayılı homojen doğrusal fark denklemleri, Guichard aynı denklemin homojen olmayan hallerini, Gelgrum bu denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışını inceleme konusu olarak seçmiştir. Fark denklemler teorisi matematiğin sistematik olarak gelişmesiyle birlikte ortaya çıkan ilk teorilerden birisidir. Bu teori zamana bağlı ayrık olayların matematiksel ifadesinde kullanılmıştır. Fark denklemler bir çok doğa olayını ifade etmekte kullanılır. Bununla birlikte fark denklemler, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin incelenmesinde de kullanılır. Yani, verilen bir diferansiyel denklemin, ayrık benzeri olan fark denklem ifade edilir ve bu fark denklem, diferansiyel denklemin çözümünün yapısını araştırmak için incelenir.

Fark denklemleri sadece diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde değil, aynı zamanda biyoloji, mühendislik, ekonomi, savunma, genetik ve benzeri alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellemelerde ya doğrudan yada dolaylı olarak yer alırlar. Bu denklemlerde bağımsız değişken tamsayılar üzerinde tanımlıdır. Dolayısıyla fark denklemlerinde türev terimleri yerine bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunur. Bu bakımdan fark denklemleri daha ziyade sürekli olmayan problemleri karakterize eder. Örneğin, genetik alanındaki kuşaklar arasındaki genetik başkalaşım ile ekonomi alanındaki fiyat değişim problemleri sürekli olmayan problemlerden bazılarıdır. Zira, bağımsız değişkenler birinde kuşak; diğerinde duruma göre gün, hafta, ay veya yıldır ve ikisi de doğal olarak ayrık kümeler üzerinde tanımlıdır.

Fark denklemler genellikle zamanın gidişatı üzerindeki olağanüstü oluşumu tanımlar. Örneğin belli bir popülasyon ayrık jenerasyona sahip ise, $(n+1)$'inci jenerasyon olan $x(n+1)$'in büyüklüğü, n'inci jenerasyon olan $x(n)$'in bir fonksiyonudur.

Bu ilişki kendini

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{1.1}$$

denkleminde açıklar. Bu probleme diğer bir açıdan da bakabiliriz. Bir x_0 noktasından başlayarak,

$$x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ f(f(f(x_0))),... \tag{1.2}$$

dizisi olarak genelleyebiliriz. Kolaylık için şu notasyonu da benimseyebiliriz;

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)),\ f^3(x_0) = f(f(f(x_0))),... \text{ vs.}$$

Eğer

$$x(n) = f^n(x_0) \tag{1.3}$$

denilirse,

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x(n)) \tag{1.4}$$

elde edilir.

$f(x_0)$, f'nin herhangi bir x_0 noktasındaki birinci iterasyonunu, $f^2(x_0)$ ise f'nin x_0 noktasındaki ikinci iterasyonunu ve daha genellemek gerekirse, $f^n(x_0)$, f'nin x_0 noktasındaki n'inci iterasyonunu gösterir. $f^0(x_0)$=x_0 olmak üzere $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ tüm pozitif iterasyonların kümesine x_0'ın pozitif yörüngesi denir. Bu iterasyon prosedürü ayrık dinamik sistemin bir örneğidir.

Bu tartışmalardan sonra tam olarak fark denklemleri ve ayrık dinamik sistemler aynı paranın farklı iki yüzünü gösterdiği sonucuna varılabilir. Mesela araştırmacılar fark denklemler hakkında konuştuklarında genellikle konunun analitik kısmına değinirken, ayrık dinamik sistemler hakkında konuştuklarında genellikle konunun geometrik ve topolojik yönüne gönderme yaparlar.

Şayet (1.1)'de tanımlanan f fonksiyonu $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olarak tanımlanan g fonksiyonu ile yer değiştirilirse, o zaman

$$x(n+1) = g(n, x(n)) \tag{1.5}$$

elde edilir. (1.5) denklemine otonom olmayan veya zaman değişkenli denir iken, (1.1) denklemine otonom veya zaman değişkensiz denir. (1.5)'nin çalışılması çok daha karışıktır ve birinci mertebeden denklemlerin ayrık dinamik sistem teorisine uygun düşmez.

Bu tezde yüksek mertebeden lineer olmayan fark denklemleri ve bu fark denklemlerinin pozitif çözümlerinin davranışları ele alınmıştır.

Bu tip denklemlerin çalışması oldukça zorlayıcıdır, ancak uğraşmaya değerdir ve bu denklemlerle ilgili çalışmalar hala emekleme evresindedir.

Lineer olmayan fark denklemleri sahip olduğu özelliklerle çok önemli bir yapıya sahiptir. Buna ilaveten bu gibi denklemler hakkındaki sonuçlar, lineer olmayan fark denklemlerinin global davranışlarının temel teorisindeki gelişmeler için orijinal çalışmalar sunabilmektedir.

$k, l \in \mathbb{N}$ ve başlangıç koşulları $x_{-\max\{k,l\}}, ..., x_0$ keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = x_{n-l}x_{n-k} - 1 \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.6}$$

fark denkleminin çözümlerinin araştırması bir çok makale ve konferans bildirilerinde yapılmış ve bu tipteki denklemler için yapılması gereken bir çok çalışma mevcuttur. Bu genel hali verilen (1.6) denklemin litaretür özeti aşağıda ele alınmıştır.

1.1 Fark Denklemlerinin Sınırlılığı, Kararlılığı ve Periyodikliği ile İlgili Yapılmış Çalışmalar

Bu kısımda (1.6) denkleminin özel halleri için litaretür özeti verilmiştir.

Amleh vd. (1999), çalışmalarında α pozitif bir reel sayı ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.7}$$

fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını ve pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Feuer (2003), çalışmasında (1.7) fark denkleminde özellikle $0 < \alpha < 1$ durumuna yoğunlaşmış ve bu durum için pozitif çözümlerin denge noktası civarındaki davranışlarını incelemiştir. Ayrıca α'nın diğer durumları içinde alternatif ispatlar vermiştir.

Devault vd. (2003), çalışmalarında α pozitif reel sayı, $k \in \{2, 3, ...\}$ ve başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0$ keyfi pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.8}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir. k'nın tek olma durumunda sınırlılık karakteri, global kararlılığı ve periyodikliği için α'nin durumlarına göre gerek ve yeter şartlar verilmiştir. $k = 2$ durumu için de ayrıntılı bir yarı döngü analizi verilmiş ve çözümlerin sınırlılığının ne zaman olacağını açık problem olarak bırakılmıştır.

Stevic (2003a), çalışmasında α_n negatif olmayan ve α pozitif sayısına yakınsayan bir dizi, başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.9}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global kararlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Steviç (2003b), bir diğer çalışmasında α_n negatif olmayan iki periyodik bir dizi, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere, (1.9) fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini, salınımlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Owaidy vd. (2004), çalışmalarında (1.8) denkleminin pozitif çözümlerinin bazı özel koşullar altında periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını araştırmışlardır.

Steviç (2004), çalışmasında başlangıç koşulları keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}x_n}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.10}$$

fark denkleminin çözümlerinin yapısını ortaya koymuştur.

Kent vd. (2010), çalışmalarında başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = x_n x_{n-1} - 1, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.11}$$

fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, periyodikliğini ve sınırsız çözümlerinin varlığını incelemişlerdir.

Kent vd. (2010), çalışmalarında başlangıç koşulları x_{-2}, x_{-1}, x_0 keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = x_{n-1} x_{n-2} - 1, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.12}$$

denkleminin çözümlerinin asimptotik kararlılığını, periyodikliğini ve sınırsız çözümlerinin varlığını araştırmışlardır.

Kent vd. (2011), çalışmalarında başlangıç koşulları x_{-2}, x_{-1}, x_0 keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = x_n x_{n-2} - 1, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.13}$$

üçüncü mertebeden fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini, denge noktalarının kararlılığını, asimptotik kararlılığını ve başlangıç koşullarına göre çözümlerin yapısını tam olarak ortaya koymuşlardır.

Kent vd. (2011), çalışmalarında başlangıç koşulları x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = x_n x_{n-3} - 1, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.14}$$

fark denkleminin çözümlerinin asimptotik periyodikliğini araştırıp, sınırsız çözümlerinin varlığını çalışmışlardır.

Papaschinopoulos vd. (2011), yılında yaptıkları çalışmalarında A_n pozitif sınırlı bir dizi, p, q ve başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A_n + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^q}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.15}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışlarını ve periyodikliğini incelemişlerdir

Steviç and Iricanin (2011), çalışmalarında $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$, $ebob(k,l) = 1$ ve başlangıç koşulları $x_{-l}, ..., x_{-1}, x_0$ keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = x_{n-l}x_{n-k} - 1, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.16}$$

fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini ve sınırsız çözümlerinin varlığını araştırmışlardır.

Gümüş ve Öcalan (2014), yılında yaptıkları çalışmalarında α_n negatif olmayan iki periyodik bir dizi ve başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + \alpha_n}{x_n + x_{n-1}}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{1.17}$$

otonom olmayan fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global kararlılığını ve periyodikliğini araştırmışlardır.

2. FARK DENKLEMLERİYLE İLGİLİ GENEL TANIMLAR

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1 (Fark Denklemi): $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere $F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0$ eşitliğine bir fark denklemi denir (Kulenovic and Ladas 2001).

Teorem 2.2: I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \times I \to I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her x_{-1}, $x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \qquad n = 0, 1, ..., \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir (Kulenovic and Ladas 2001).

Tanım 2.3 (Denge Noktası): Eğer $\overline{x}$ noktası için (2.1) denkleminde $f(\overline{x}, \overline{x}) = \overline{x}$ şartı sağlanıyor ise $\overline{x}$ noktasına (2.1) denkleminin denge noktası denir. Eğer her $n \geq 0$ için $\overline{x} = x_n$ ise, $\overline{x}$'e f'nin sabit noktası denir (Elaydi 1996).

Tanım 2.4 (Değişmez (Sabit) Aralık): Eğer her $n > 0$ için x_{-1}, $x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa, bu aralığa (2.1) denkleminin değişmez (yada sabit) aralığı denir (Kulenovic and Ladas 2001).

Teorem 2.5: $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(i) Eğer x_{-1}, $x_0 \in I$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| < \delta$ iken $\forall n \geq 0$ için $|x_n - \overline{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(ii) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve x_{-1}, $x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Eğer x_{-1}, $x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ ise, $\overline{x}$ denge noktasına global çekici denir.

(iv) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve global çekici nokta ise, $\overline{x}$ denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

(v) Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(vi) Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| < r$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $|x_N - \overline{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktasına repeller (geri itici nokta) denir (Kulenovic and Ladas 2001).

Tanım 2.6 (p-periyot): Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır denir (Kulenovic and Ladas 2001).

Tanım 2.7 (Er geç p-periyot): Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Kulenovic and Ladas 2001).

Tanım 2.8 (Lineer Denklem): (2.1) denkleminde $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu $f(u, v)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x})}{\partial u} \qquad s = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x})}{\partial v}$$

olmak üzere

$$y_{n+1} = r y_n + s y_{n-1} \tag{2.2}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme, (2.1) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası civarında lineerleştirilmiş denklemi denir.

(2.2) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0 \tag{2.3}$$

dir (Kulenovic and Ladas 2001).

Teorem 2.9 (Lineer Kararlılık Teoremi):

(i) Eğer (2.3) denkleminin her iki köküde mutlak değerce 1'den küçük ise, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer (2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

(iii) (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart

$$|r| < 1 - s < 2$$

olmasıdır. Bu durumda, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlı olur. Aynı zamanda $\overline{x}$ sink (çukur nokta) diye de adlandırılır.

(iv) (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den büyük olması için gerek ve yeter şart

$$|s| > 1 \text{ ve } |r| < |1 - s|$$

olmasıdır. Bu durumda, $\overline{x}$ denge noktası repeller (geri itici nokta)'dir.

(v) (2.3) denkleminin bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart

$$r^2 + 4s > 0 \text{ ve } |r| > |1 - s|$$

olmasıdır. Bu durumda $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır ve eyer noktası diye adlandırılır.

(vi) (2.3) denkleminin bir kökünün mutlak değerce 1'e eşit olması için gerek ve yeter şart

$$|r| = |1 - s| \text{ veya } s = -1 \text{ ve } |r| \leq 2$$

olmasıdır. Bu durumda $\overline{x}$ denge noktasına hiperbolik olmayan nokta denir. (Grove and Ladas 2005).

Benzer şekilde, mertebesi 3 olan fark denklemleri için Teorem 2.9 aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \qquad n = 0, 1, ..., \tag{2.4}$$

fark denklemini ele alalım.

(2.4) denkleminde $f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ fonksiyonunu $f(u, v, w)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x}, \overline{x})}{\partial u} \qquad s = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x}, \overline{x})}{\partial v} \qquad t = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x}, \overline{x})}{\partial w}$$

olmak üzere

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} + ty_{n-2} \tag{2.5}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme (2.4) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası civarında lineerleştirilmiş denklemi denir.

(2.5) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \tag{2.6}$$

dır. (Grove and Ladas 2005).

Teorem 2.10:

(i) Eğer (2.6) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer (2.6) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\overline{x}$ denge noktası kararsız olur.

(iii) (2.6) denkleminin bütün köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar

$$|r + t| < 1 - s, \; |r - 3t| < 3 + s \text{ ve } t^2 - s - rt < 1$$

olmasıdır. Bu durumda, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik karalıdır (Kulenovic and Ladas 2001).

Tanım 2.11 (Pozitif Yarı Döngü): $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün pozitif yarı döngüsü $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ terimlerinin art arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün elemanları $\overline{x}$'dan büyük veya eşit, $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$ öyle ki,

$$\text{ya } l = -1 \text{ veya } l > -1 \text{ ve } x_{l-1} < \overline{x}$$

ve

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} < \overline{x}$$

dır (Kocic and Ladas 1993).

Tanım 2.12 (Negatif Yarı Döngü): $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün negatif yarı döngüsü

$\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ terimlerinin art arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün elemanları $\overline{x}$'dan küçük, $l \geq -1$ ve $m \leq \infty$ öyle ki,

$$\text{ya } l = -1 \text{ veya } l > -1 \text{ ve } x_{l-1} \geq \overline{x}$$

ve

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} \geq \overline{x}$$

dır (Kocic and Ladas 1993).

Tanım 2.13 (Sıfır Civarında Salınımlılık): (2.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden ne pozitif ne de negatif ise, bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir denir (Kulenovic and Ladas 2001).

Tanım 2.14 ($\overline{x}$ Denge Noktası Civarında Salınımlılık): $\overline{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olmak üzere $\{x_n - \overline{x}\}$ dizisi salınımlı ise, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne $\overline{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde $\overline{x}$ denge noktası civarında salınımlı değildir denir (Kulenovic and Ladas 2001).

Tanım 2.15 (Sınırlı Dizi): $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde $\forall n \geq -1$ için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizine sınırlıdır denir (Kulenovic and Ladas 2001).

Teorem 2.16 (Clark Teoremi): $a, b \in \mathbb{R}$ ve $k \in \{1, 2, \ldots\}$ olsun. O zaman

$$z_{n+1} - az_n + bz_{n-k} = 0 \qquad n = 0, 1, ...,$$

fark denkleminin asimptotik karalılığı için $|a| + |b| < 1$ olması yeterli bir koşuldur. Buna ilaveten aşağıdaki iki durumdan birinin doğru olduğunu varsayalım.

(i) k tek ve $b < 0$.

(ii) k çift ve $ab < 0$.

Durumlarından birinin sağlanması $|a| + |b| < 1$ olması için gerekli bir koşuldur (Kocic and Ladas 1993).

Teorem 2.17: Varsayalım ki $b > 0$ ve k çift olsun. O zaman

$$z_{n+1} + bz_n - bz_{n-k} = 0 \qquad n = 0, 1, ...,$$

fark denkleminin asimptotik kararlılığı için gerek ve yeter şart

$$b < \frac{1}{2\cos(\frac{\pi}{k+2})}$$

olmasıdır (Kocic and Ladas 1993).

Tanım 2.18 (Hiperbolik Nokta): Eğer $\overline{x}$ noktası için (2.1) denkleminde

$$|f'(\overline{x}, \overline{x})| \neq 1$$

şartı sağlanıyor ise $\overline{x}$ denge noktasına (2.1) denkleminin hiperbolik noktası denir (Elaydi 1996).

Tanım 2.19 (Schwarzian Türevi): (1.1)'de tanımlanan bir f fonksiyonunun Schwarzian türevi şu şekilde tanımlanır:

$$sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2$$

(Elaydi 1996).

Teorem 2.20: $\overline{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olsun. (1.1)' de tanımlanan f fonksiyonu sürekli ve diferensiyellenebilir olmak üzere durumları doğrudur.

i Eğer $|f'(\overline{x})| < 1$ ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

ii Eğer $|f'(\overline{x})| > 1$ ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

(Elaydi 1996).

Teorem 2.21: $\overline{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası ve $f'(x) = 1$ için durumları doğrudur.

i Eğer $f''(\overline{x}) \neq 0$ ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktası karasızdır.

ii Eğer $f''(\overline{x}) = 0$ ve $f'''(\overline{x}) > 0$ ise, $\overline{x}$ denge noktası karasızdır.

iii Eğer $f''(\overline{x}) = 0$ ve $f'''(\overline{x}) < 0$ ise, $\overline{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Burada $f'''(\overline{x}) = 0$ olması halinde teorem başarısız olur (Elaydi 1996).

Teorem 2.22: $\overline{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası ve $f'(x) = -1$ olsun. O halde

i Eğer $sf(\overline{x}) < 0$ ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

ii Eğer $sf(\overline{x}) > 0$ ise, o zaman $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

Durumları doğrudur. Burada $sf(\overline{x}) = 0$ olması durumunda teorem başarısız olur (Elaydi 1996).

Teorem 2.23:

$$x_{n+1} = g(x_n, ..., x_{n-k}), \qquad n = 0, 1, ... \tag{2.7}$$

fark denklemini düşünelim. $g \in C[(0,\infty)^{k+1}, (0,\infty)]$ fonksiyonu her bir bileşeni için artan olsun. Başlangıç koşulları $x_{-k}, ..., x_0$ pozitif sayılar olmak üzere, (2.7) denklemi tek bir pozitif denge noktasına sahip olsun.

$$h(x) = g(x, ..., x), \; x \in (0, \infty) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanan ve

$$(h(x) - x)(x - \overline{x}) < 0, \; x \neq \overline{x} \text{ için}$$

negatif feedback (geri besleme) özelliğini sağlayan h fonksiyonunu ele alalım. O halde $\overline{x}$, (2.7) denkleminin bütün pozitif çözümlerinin bir global çekicisidir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$$

dır (Kocic and Ladas 1993).

3. $x_{n+1} = x_n x_{n-1} - 1$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMİĞİ

Bu bölümde x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = x_n x_{n-1} - 1, \qquad n = 0, 1, ... \tag{3.1}$$

ikinci mertebeden fark denkleminin çözümlerinin davranışları araştırılacaktır. Aynı zamanda, sınırsız çözümlerin varlığı, çözümlerin periyodikliği, ve sınırlılığı incelenecek ve bu davranışların başlangıç koşullarına göre nasıl farklılık gösterdiği ele alınacaktır.

Son on yılda, ikinci mertebeden rasyonel fark denklemlerinin birçoğu, çözümlerinin farklı ve ortak davranışlarına göre kapsamlı olarak çalışıldı. Rasyonel fark denklemlerin birçoğu matematiksel biyoloji içinde kullanılır. (Beverton and Holt 1993, Pielou 1974). Buna ek olarak, birçok fark denklemleri sınırsız çözümlerin varlığı, çözümlerin periyodikliği ve çözümlerin yakınsaklığı parametreleri arasındaki ilişkilerle ilgili çözümlerin bir üçlü davranışını ortaya koyar. (3.1) fark denklemi

$$x_{n+1} = x_{n-k} x_{n-k-1} - 1, \; n = 0, 1, ... \tag{3.2}$$

formundaki denklemlerin bir sınıfına aittir, $k = 0, 1, ...$ için k'nın özel bir seçimidir.

3.1 (3.1)'in Denge Noktaları ve Periyodik Çözümleri

Bu kısımda, (3.1) fark denkleminin tam olarak iki denge noktasına ve en az $3-$periyodu ile üç periyodik çözümlere sahip olduğunu göstereceğiz.

$\overline{x}^2 - \overline{x} - 1 = 0$ denklemi çözüldükten sonra, (3.1)'in $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ simgeleriyle ifade edilen biri pozitif diğeri negatif iki denge noktasına sahip olduğunu bulabiliriz, sırasıyla

$$\overline{x}_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \overline{x}_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{3.3}$$

Şunuda not edelim ki eninde sonunda sabit hiçbir çözümü yoktur. Yani, eğer $x_N = x_{N+1} = \overline{x}$ bazı $N \geq 0$ için oluyorsa, o zaman $x_{N+1} = x_N x_{N-1} - 1$ olduğundan, aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$x_{N-1} = \frac{x_{N+1}+1}{x_N} = \frac{\overline{x}+1}{\overline{x}} = \overline{x}. \tag{3.4}$$

Bu prosedür ile devam ederek, $-1 \leq n \leq N+1$ için $x_n = \overline{x}$ elde edilir. İddia edildiği gibi.

Aynı zamanda şunuda not edelim ki, en az iki periyotlu eninde sonunda periyodik hiçbir çözümüde yoktur. Yani, eğer $x_N = x_{N+2k}$ ve $x_{N+1} = x_{N+2k+1}$, $k \geq 0$ oluyorsa, o zaman

$$x_{N+3} = x_{N+2}x_{N+1} - 1 = x_N x_{N+1} - 1 = x_{N+2} = x_N \tag{3.5}$$

durumuna sahibiz, sonuç olarak $x_n = x_N$, $n \geq N$, buda bir çelişki oluşturur.

Aşağıdaki sonuç tam olarak (3.1) denkleminin en az üç periyodu ile üç periyodik çözümlere sahip olduğunu gösterir ve yukarıdakilerin her birine açıklama getirir.

Teorem 3.1: (3.1) denklemi, en az üç periyotlu, üç periyodik çözümlere sahiptir. O çözümler şu üç çift başlangıç koşulu için verilir. $x_{-1} = -1$, $x_0 = -1$; $x_{-1} = -1$, $x_0 = 0$; $x_{-1} = 0$, $x_0 = -1$.

İspat: (3.1)'in bir üç periyodik çözümünü şu şekilde yazabiliriz;

$$\begin{aligned} x_{-1} &= a, x_0 = b, x_1 = ab - 1, \\ x_2 &= b(ab-1) - 1 = a \Longleftrightarrow ab^2 - b - 1 = a \Longleftrightarrow ab^2 = a + b + 1, \\ x_3 &= a(ab-1) - 1 = b \Longleftrightarrow a^2b - a - 1 = b \Longleftrightarrow a^2b = a + b + 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dolayısıyla, eğer aşağıdaki sitem sağlanırsa bu bir üç periyotlu bir çözümdür.

$$\begin{aligned} ab^2 &= a+b+1, \\ a^2b &= a+b+1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Böylece $ab^2 = a^2b$ olduğunu görürüz. Eğer $a = 0$ ise veya $b = 0$ ise veya $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olduğunda $a = b$ ise bu doğrudur. O halde aşağıdaki üç durumu düşünmek kafidir.

Durum 1: Varsayalım ki $a = 0$ olsun. O zaman $a^2b = a + b + 1$ olduğundan, $0 = b + 1$ olur ve bu da bize $b = -1$ olduğunu verir. Sonuç olarak, $a = 0$ ve $b = -1$ için üç periyotlu çözüm mevcuttur.

Durum 2: Varsayalım ki $b = 0$ olsun. O zaman $a^2b = a + b + 1$ olduğundan, $0 = a + 1$ olur ve bu da bize $a = -1$ olduğunu verir. Sonuç olarak, $a = -1$ ve $b = 0$ için üç periyotlu çözüm mevcuttur.

Durum 3: Varsayalım ki $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olduğunda $a = b$ olsun. O zaman $a^2b = a + b + 1$ olduğundan, $a^3 = 2a + 1$ olur ve bu da bize $a = -1$ olduğunu verir. Sonuç olarak, $a = -1$ ve $b = -1$ için üç periyotlu çözüm mevcuttur. (Şunu da not edelim ki $a = (1 \pm \sqrt{5})/2$, $a^3 = 2a + 1$'in aynı zamanda çözümleridirler).

Böylelikle iddia edildiği üzere,

$$\begin{aligned} x_{-1} &= -1,\ x_0 = -1,\ x_1 = 0, ...; \\ x_{-1} &= -1, x_0 = 0, x_1 = -1, ...; \\ x_{-1} &= 0, x_0 = -1, x_1 = -1, ..., \end{aligned} \tag{3.8}$$

ile verilen, (3.1)'in en az periyot üç ile üç periyodik çözümleri vardır.

İlerideki kısımlarda (3.1)'in bu üç periyodik çözümlerinden herhangi bir tanesini

$$..., 0, -1, -1, 0, -1, -1, ... \tag{3.9}$$

formunda ifade edeceğiz.

Aşağıdaki teorem, (3.1)'in en az üç periyot ile eninde sonunda periyodik çözümlere sahip olduğunu gösterir.

Teorem 3.2: En az periyot üç ile eninde sonunda bütün periyodik çözümler, $N \geq -1$, $x_{N+1} = a \in \mathbb{R}/\{0\}$, $x_N = 1/a$ ve $N \neq -1$ ise $0 \leq n \leq N$ için $x_{n-1} =$

$(x_{n+1}+1)/x_n$ olduğu durumlarda şu formdadır;

$$x_{-1}, x_0, ..., x_N, x_{N+1}, 0, -1, -1, 0, -1, -1, 0, -1, -1, ... \qquad (3.10)$$

İspat: Eğer $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ en az periyot üç ile eninde sonunda periyodik bir çözüm ise, o zaman Teorem 3.1 ile, $x_{N+2}=0$ ve $x_{N+3}=-1$ olacak şekilde bir $N \geq -1$ vardır. Dolayısyla $0 = x_{N+2} = x_{N+1}x_N - 1$ ve sonuç olarak $x_N \neq 0 \neq x_{N+1}$ ve $x_{N+1} = 1/x_N$ olur. $x_{N+1} = a$ $(x_N = 1/a)$ olsun. (3.1)'den, eğer $N \neq -1$ ise, arzu ettiğimiz üzere $0 \leq n \leq N$ için $x_{n-1} = (x_{n+1}+1)/x_n$ elde ederiz.

Uyarı 3.3: Eğer, Teorem 3.2 içerisinde $a=-1$ ise, o zaman, Teorem 3.1 içindeki çözümleri elde edilir.

Aşağıdaki teorem, (3.1)'in periyodik olmayan veya eninde sonunda periyodik olmayan çözümlerinin en az üç periyotlu bir çözüme yakınsadığını gösterir.

Teorem 3.4: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1)'in en az üç periyodu ile ne periyodik ne de eninde sonunda periyodik bir çözümü olsun. O zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, en az üç periyotlu

$$..., 0, -1, -1, 0, -1, -1, ... \qquad (3.11)$$

bir çözüme yakınsamaz.

İspat: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1)'in en az üç periyodu ile ne periyodik ne de eninde sonunda periyodik bir çözümü olsun. Çelişkiye düşme adına, varsayalım ki $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, en az üç periyodik

$$..., 0, -1, -1, 0, -1, -1, ... \qquad (3.12)$$

çözümüne yakınsasın. O zaman $N \geq 0$ seçebiliriz öyle ki;

$$\begin{aligned} x_{N-2} &= -1+\varepsilon_0,\ x_{N-1} = \delta_1,\ x_N = -1+\varepsilon_1, \\ x_{N+1} &= -1+\varepsilon_2,\ x_{N+2} = \delta_2,\ x_{N+3} = -1+\varepsilon_3 \\ x_{N+4} &= -1+\varepsilon_4,\ x_{N+5} = \delta_3,\ x_{N+6} = -1+\varepsilon_5..., \end{aligned} \qquad (3.13)$$

yani, $n = 0, 1, ...$ için

$$x_{N+(3n-2)} = -1+\varepsilon_{2n},\ x_{N+(3n-1)} = \delta_{n+1},\ x_{N+3n} = -1+\varepsilon_{2n+1} \qquad (3.14)$$

ile

$$-\frac{1}{2} < \delta_1, \delta_2, \delta_3 < \frac{1}{2},\ -1 < \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 < 1 \qquad (3.15)$$

vardır.

Şimdi, ilk olarak

$$
\begin{aligned}
x_{N-2} &= -1+\varepsilon_0,\\
x_{N-1} &= \delta_1, \qquad (3.16)\\
x_N = -1+\varepsilon_1 &= -1+\delta_1(-1+\varepsilon_0)
\end{aligned}
$$

olduğunu gözlemleyin. İddia edelim ki $\delta_1 \neq 0$ olsun. Aksi takdirde, $x_{N-1} = \delta_1 = 0$'dır. O zaman (3.1) ile $x_N = x_{N+1} = -1$ olur ki bu da bize en az üç periyotlu eninde sonunda periyodik bir çözüm verir. Bu bir çelişkidir. O halde geriye $\delta_1 > 0$ ve $\delta_1 < 0$ durumları kalır. Eğer $\delta_1 > 0$ ise, o zaman (3.15)'den $x_{N-2} = -1+\varepsilon_0 < 0$ olduğu için, $x_N < -1$ ve bu yüzden $\varepsilon_1 < 0$ durumları mevcuttur. Eğer $\delta_1 < 0$ ise, o zaman (3.15)'den $x_{N-2} = -1+\varepsilon_0 < 0$ ve $x_N = -1+\varepsilon_1 < 0$ olduğu için, $x_N \in (-1,0)$ ve bu yüzden $\varepsilon_1 > 0$ durumları mevcuttur. Sonuç olarak, sadece aşağıdaki iki durumu düşünmemiz yeterlidir.

Durum 1: Eğer $\delta_1 > 0$, $\varepsilon_1 < 0$ ise, o zaman (3.13) ve (3.15) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
x_{N-1} &= \delta_1 > 0,\\
x_N &= -1+\varepsilon_1 < -1,\\
x_{N+1} &= -1+\varepsilon_2 = -1+\delta_1(-1+\varepsilon_1) < -1, \qquad (3.17)\\
x_{N+2} &= \delta_2 = (-1+\varepsilon_1)[-1+\delta_1(-1+\varepsilon_1)] - 1 > 0,\\
x_{N+3} &= -1+\varepsilon_3 = \delta_2[-1+\delta_1(-1+\varepsilon_1)] - 1 < -1.
\end{aligned}
$$

Şimdi $x_{N+2} = \delta_2 = (-1+\varepsilon_1)[-1+\delta_1(-1+\varepsilon_1)] - 1 > \delta_1$ olduğunu iddia edelim:

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad (-1+\varepsilon_1)[-1+\delta_1(-1+\varepsilon_1)] > \delta_1+1 \qquad (3.18)\\
&\Longleftrightarrow \quad 1+\delta_1-\delta_1\varepsilon_1-\varepsilon_1-\delta_1\varepsilon_1+\delta_1\varepsilon_1^2 > \delta_1+1\\
&\Longleftrightarrow \quad -2\delta_1\varepsilon_1-\varepsilon_1+\delta_1\varepsilon_1^2 > 0\\
&\Longleftrightarrow \quad \delta_1\varepsilon_1^2 > \varepsilon_1(2\delta_1+1)\\
&\Longleftrightarrow \quad \delta_1\varepsilon_1 < 2\delta_1+1.
\end{aligned}
$$

$\delta_1\varepsilon_1 < 0$ ve $2\delta_1 + 1 > 0$ olduğundan $\delta_1\varepsilon_1 < 2\delta_1 + 1$'dir. Dolayısıyla, $\delta_2 > \delta_1 > 0$ ve $\varepsilon_3 < 0$ dır. Sonuç olarak, bu durum δ_2, ε_3'e uygulanır ve tümevarımla ve (3.13) ve (3.15) ile,

$$0 < \delta_1 < \delta_2 < .... < \delta_n < ... \tag{3.19}$$

elde edilir. Böylece, bu durumda δ_n, $n \to \infty$ için 0'a yakınsamaz.

Durum 2: Eğer $\delta_1 < 0$, $\varepsilon_1 > 0$ ise, o zaman

$$x_{N-1} = \delta_1 \in (-1, 0),$$

$$x_N = -1 + \varepsilon_1 \in (-1, 0),$$

$$x_{N+1} = -1 + \varepsilon_2 = -1 + \delta_1(-1 + \varepsilon_1) \in (-1, 0),$$

$$x_{N+2} = \delta_2 = (-1 + \varepsilon_1)[-1 + \delta_1(-1 + \varepsilon_1)] - 1 \in (-1, 0),$$

$$x_{N+3} = -1 + \varepsilon_3 = \delta_2[-1 + \delta_1(-1 + \varepsilon_1)] - 1 \in (-1, 0).$$

Şimdi $x_{N+2} = \delta_2 = (-1 + \varepsilon_1)[-1 + \delta_1(-1 + \varepsilon_1)] - 1 < \delta_1$ olduğunu iddia edelim:

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad (-1 + \varepsilon_1)[-1 + \delta_1(-1 + \varepsilon_1)] < \delta_1 + 1 \qquad (3.20)\\
&\Longleftrightarrow \quad 1 + \delta_1 - \delta_1\varepsilon_1 - \varepsilon_1 - \delta_1\varepsilon_1 + \delta_1\varepsilon_1^2 < \delta_1 + 1\\
&\Longleftrightarrow \quad -2\delta_1\varepsilon_1 - \varepsilon_1 + \delta_1\varepsilon_1^2 < 0\\
&\Longleftrightarrow \quad \delta_1\varepsilon_1^2 < \varepsilon_1(2\delta_1 + 1)\\
&\Longleftrightarrow \quad \delta_1\varepsilon_1 < 2\delta_1 + 1,
\end{aligned}$$

(3.13) ve (3.15) ile bu doğrudur. Dolayısıyla, $\delta_2 < \delta_1 < 0$ ve $\varepsilon_3 > 0$ dır. Sonuç olarak, bu durum δ_2, ε_3'e uygulanır ve tümevarımla ve (3.13) ve (3.14) ile,

$$0 > \delta_1 > \delta_2 > .... > \delta_n > ... \tag{3.21}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, bu durumda δ_n, $n \to \infty$ için 0'a yakınsamaz ve çelişki ile ispat tamamlanır.

Son olarak $(-1, 0)$ aralığının değişmez (sabit) aralık olduğunu gösterelim.

Teorem 3.5: Eğer $-1 < x_{-1}, x_0 < 0$ ise, o zaman bütün $n \geq -1$'ler için $-1 < x_n < 0$ olur.

İspat: Eğer $-1 < x_{-1}, x_0 < 0$ ise, o zaman $-1 < x_1 = x_0x_{-1} - 1 < 0$. (3.1)'den ve tümevarımla, o zaman bütün $n \geq -1$'ler için $-1 < x_n < 0$ elde ederiz.

Sonuç 3.6: Fark ediniz ki, eğer çözüm, en az üç periyodu ile ne periyodik ne de eninde sonunda periyodik ise, o zaman Teorem 3.5' den gördüğümüz gibi ve Teorem $3.8 - 3.13$'den gördüğümüz gibi, çözüm $(-1, 0)$ değişmez aralığında ya sınırlıdır veya çözüm sınırsız olur.

3.2 (3.1)'in Çözümlerinin Kararlılığı ve Yakınsaklığı

Bu kısımda, (3.1)'in iki denge noktasının kararlılık yapısına değinilecek ve negatif denge noktasına çözümlerin olası yakınsaklık durumu açık problem olarak bırakılacaktır.

Önerme 3.7: (3.1)'in negatif denge noktası $\overline{x}_2$, lokal asimptotik kararlıdır. Pozitif denge noktası $\overline{x}_1$, kararsızdır.

İspat: (3.1)'in denge noktalarının karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \overline{x}_{1,2}\lambda - \overline{x}_{1,2} = 0, \tag{3.22}$$

şeklindedir, buradan kökler

$$\lambda_{\pm} = \frac{\overline{x}_{1,2} \pm \sqrt{\overline{x}_{1,2}^2 + 4\overline{x}_{1,2}}}{2} \tag{3.23}$$

şeklindedir. Dolayısıyla, $\overline{x}_2$ için kökler, $|\lambda_{\pm}| < 1$ ile komplekstir ve $\overline{x}_1$ için $|\lambda_+| > 1$ ve $|\lambda_-| < 1$ olur.

Açık Problem: Eğer $-1 < x_{-1}, x_0 < 0$ ise, (3.1)'in her $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün $\overline{x}_2$ denge noktasına yakınsak olup olmadığını gösteriniz (Teorem 3.5 ve Önerme 3.7'ye bakınız).

3.3 (3.1)'in Sınırsız Çözümleri

Bu kısımda, (3.1)'in sınırsız çözümlerinin varlığını veren başlangıç koşullarının kümesi bulunacaktır.

İlk olarak gözlemleyiniz ki başlangıç koşulları $x_{-1}, x_0 > \overline{x}_1$ veya $x_{-1}, x_0 < -1$ ise, sınırsız çözümlerin varlığı görülür. Aşağıdaki iki teorem başlangıç koşullarının kümesine ilişkin sınırsız çözümlerin varlığını gösterecektir.

Teorem 3.8: Eğer $x_{-1}, x_0 > \overline{x}_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ise, o zaman $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü kuvvetli biçimde artandır ve ∞'a ıraksar.

İspat: $x_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğundan, $\frac{1}{x_0} < \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ durumuna sahibiz. Böylece,

$$1 + \frac{1}{x_0} < 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x_{-1}. \tag{3.24}$$

Sonuç olarak, $x_{-1} > 1 + 1/x_0$ dır. Böylece $x_{-1}x_0 > x_0 + 1$. Buradan, $x_{-1}x_0 - 1 > x_0$. Dolayısıyla $x_1 > x_0$. Buradan tümevarımla, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü kuvvetli biçimde artandır.

Dizinin sonsuza ıraksadığını kanıtlamak için, aksini kabul edelim. Dizi artan olduğu için, sınırlı olmalıdır ve böylece yakısak olmak zorundadır. Ancak, denklem yalnızca iki denge noktasına sahip ve onların ikiside x_0'dan küçüktür. Buda bir çelişkidir. İspat tamamlanır.

Son zamanlarda lineer olmayan fark denklemlerin monoton çözümlerinin varlığını göstermeye oldukça yoğun bir ilgi söz konusudur. Bunun için çeşitli metodlar bulunabilir, örneğin (Amleh *et al.* 1999, Berenhaut and Stevic 2006, Berg 2002, Berg 2008, Camouzis *et al.* 2004).

Teorem 3.9: Varsayalım ki $x_{-1}, x_0 < -1$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} 0 &< x_1 < x_4 < x_7 < ...., \\ ... &< x_8 < x_6 < x_5 < x_3 < x_2 < x_0 < -1 \end{aligned} \tag{3.25}$$

ve $\{x_{3n}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{x_{3n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ alt dizileri $-\infty$'a ve $\{x_{3n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ alt diziside ∞'a ıraksar.

İspat: İlk olarak

$$x_1 = x_{-1}x_0 - 1 > 0 \tag{3.26}$$

durumuna sahibiz. O zaman açık şekilde

$$x_2 = x_1 x_0 - 1 < -1. \tag{3.27}$$

Ancak biz ispatlayacağız ki $x_2 < x_0 < -1$'dir.
$(x_0+1)^2 > 0$ olduğundan, $x_0^2+2x_0+1 > 0$'dır. Böylece, $-1 < \frac{2}{x_0}+\frac{1}{x_0^2}$ olur. $x_{-1} < -1$ olduğundan, $x_{-1} < \frac{2}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}$ durumu vardır. Böylece $x_{-1}x_0 > 2 + \frac{1}{x_0}$. Dolayısıyla, $x_{-1}x_0 - 1 > 1 + \frac{1}{x_0}$ elde ederiz. Yani $x_1 > 1 + \frac{1}{x_0}$'dır. Buradan, $x_1 x_0 - 1 < x_0$, ve sonuç olarak $x_2 < x_0$'dır.
Şimdi, x_3'ün sadece -1'den değil aynı zamanda x_2'den de küçük olduğunu göstereceğiz. Bunu sonlandırmak amacıyla, $x_2 < x_0$,ve $x_1 = x_{-1}x_0 - 1 > 0$ olduğundan, $x_1 x_2 < x_1 x_0$ durumuna sahibiz. Bu da $x_2 x_1 - 1 < x_1 x_0 - 1$ durumunu verir, ve dolayısıyla $x_3 < x_2$'dır.
$x_4 > x_1$ olduğunu göstermek için, $x_3 < -1$, $x_1 > 0$ olduğunu gözlemleyelim, ve $x_3 < x_1$'dır. Böylece, $x_3 = x_2 x_1 - 1 < x_1$ olduğu için, $x_2 + 1 < 0$ ile birlikte

$$x_1 x_2 - x_1 - 1 < 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad x_1(x_2 - 1) < 1 && (3.28)\\
&\Rightarrow \quad x_1(x_2 - 1)(x_2 + 1) > (x_2 + 1)\\
&\Rightarrow \quad x_1 x_2^2 - x_1 > x_2 + 1\\
&\Rightarrow \quad x_1 x_2^2 - x_2 - 1 > x_1\\
&\Rightarrow \quad x_2(x_2 x_1 - 1) - 1 > x_1\\
&\Rightarrow \quad x_3 x_2 - 1 > x_1\\
&\Rightarrow \quad x_4 > x_1
\end{aligned}$$

elde ederiz. Tümevarımla,

$$\begin{aligned}
0 \quad &< \quad x_1 < x_4 < x_7 < ...., && (3.29)\\
... \quad &< \quad x_8 < x_6 < x_5 < x_3 < x_2 < x_0 < -1,
\end{aligned}$$

olduğu ispatlanır. Yani, $\{x_{3n}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{x_{3n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ negatif azalan diziler ve $\{x_{3n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ bir pozitif artan alt dizidir.

Şimdi, bu alt dizilerin sınırsız olduğunu kanıtlayacağız ve böylece bizim ele aldığımız çözüm sınırsız olacaktır. Varsayalım ki $\{x_{3n}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{x_{3n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ iki azalan alt dizleri alttan sınırlı olsun. O zaman onların her biri bir sonlu limite yakınsak olmak zorundadırlar (bu sonlu limit $\overline{x}_2$'dan küçük ve aynı sayıdır). Ancak (3.1) ile, üçüncü artan alt dizi $\{x_{3n+1}\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_{3n+1} = x_{3n}x_{3n-1} - 1 = |x_{3n}|\left|x_{3(n-1)+2}\right| - 1 \tag{3.30}$$

olduğu yerde, pozitif sonlu bir limite yakınsamak zorundadır. Bu imkansızdır, çünkü en az iki periyotlu hiçbir periyodik çözüm yoktur. Bu yüzden $\{x_{3n}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{x_{3n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ sınırsızdırlar (onlar $-\infty$'a ıraksar) ve böylece $\{x_{3n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ sınırsızdır. (3.1) ile (onlar ∞'a ıraksar).

Teorem 3.10: Varsayalım ki $x_{-1} < 0$ ve $x_0 > 0$ olsun. O zaman (3.1), biri $+\infty$'a iki tanesi $-\infty$'a ıraksayan $\{x_{3n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_{3n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_{3n+2}\}_{n=1}^{\infty}$ alt dizilerine sahip bir çözüme sahiptir.

İspat: $x_1 = x_{-1}x_0 - 1 < -1$ ve $x_2 = x_0x_1 - 1 < -1$ olduğundan sonuç Teorem 3.9'dan takip edilir.

Uyarı 3.11: Şu notu vermekte ilginç olacaktır ki eğer başlangıç koşullarının sırası değiştirilirse (yani $x_{-1} > 0$ ve $x_0 < 0$ alınırsa), çözümün davranışı büyük ölçüde farklı olabilir. Örneğin, eğer $x_{-1} = -0,58$ ve $x_0 = 0,618$ alınırsa, o zaman çözüm yukarıdaki teoremi sağlar. Diğer taraftan, eğer $x_{-1} = 0,618$ ve $x_0 = -0,58$ alınırsa, o zaman çözüm $(-1,0)$ aralığına düşer, böylece çözüm sınırlı olur. Dahası, eğer başlangıç koşulları $x_{-1} > 0$ ve $x_0 < 0$ alınırsa, o zaman çözüm kesin olarak sınırlı olduğu ve diğer durumlarda sınırsız olduğu gösterilmelidir.

Buna ek olarak, eğer $0 < x_{-1}, x_0 < \overline{x}_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ise, o zaman (3.1)'in çözümleri başlangıç koşullarına ilişkin kaotik bir davranış sergiler. Başlangıç koşullarındaki ufak bir değişim çözümlerin uzun terimli davranışları içinde önemli ölçüde farklılığa neden olabilir. Örneğin, eğer $x_{-1} = 1,5$ ve $x_0 = 1,6$ alınırsa, o zaman çözüm $(-1,0)$ aralığına düşer, böylece çözüm sınırlı olur. Oysa ki eğer $x_{-1} = 1,5$ ve $x_0 = 1,61$ alınırsa, o zaman çözüm biri $+\infty$'a iki tanesi $-\infty$'a ıraksayan sınırsız üç alt diziye sahip olur.

Teorem 3.12: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (3.1)'in bir çözümü olsun. Varsayalım ki

(i) $0 < x_{-1}, x_0 < 1$;

(ii) $x_{-1}^2 x_0^2 - 2x_{-1}x_0 + 1 - x_{-1} > 0$

olsun. O zaman $\{x_{3n}\}_{n=2}^{\infty}$, pozitif artan bir alt dizi; $\{x_{3n+2}\}_{n=1}^{\infty}$, negatif azalan bir alt dizi; $\{x_{3n+1}\}_{n=2}^{\infty}$, negatif azalan bir alt dizidir. Sonuç olarak, her $n \geq N$ için $-1 < x_n < 0$ olacak şekilde $N \geq -1$ sayısı yoktur. Dahası, bu üç alt dizinin her biri sınırsızdır ve dolayısıyla çözüm sınırsızdır.

İspat: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (3.1)'in bir çözümü olsun. Varsayalım ki

(i) $0 < x_{-1}, x_0 < 1$;

(ii) $x_{-1}^2 x_0^2 - 2x_{-1}x_0 + 1 - x_{-1} > 0$

olsun. (i)'den $x_{-1}x_0 < 1$ olduğu için,

$$x_1 = x_{-1}x_0 - 1 < 0 \tag{3.31}$$

durumuna sahibiz. O zaman, $x_1 x_0 < 0$ olduğu için,

$$x_2 = x_1 x_0 - 1 < -1 \tag{3.32}$$

durumuda vardır. $x_3 = x_2 x_1 - 1$'in işaretini hesaplayalım:

$$x_3 > 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x_2 x_1 - 1 > 0 \qquad (3.33)\\
&\Leftrightarrow \quad (x_1 x_0 - 1)x_1 - 1 > 0\\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2 x_0 - x_1 - 1 > 0\\
&\Leftrightarrow \quad (x_{-1}x_0 - 1)^2 x_0 - (x_{-1}x_0 - 1) - 1 > 0\\
&\Leftrightarrow \quad x_0^3 x_{-1}^2 - 2x_0^2 x_{-1} + x_0 - x_{-1}x_0 + 1 - 1 > 0\\
&\Leftrightarrow \quad x_0^2 x_{-1}^2 - 2x_0 x_{-1} + 1 - x_{-1} > 0
\end{aligned}$$

(i) ve (ii) hipotezlerinden bu doğrudur. $x_3 > 0$, $x_2 < 0$ olduğundan

$$x_4 = x_3 x_2 - 1 < -1 \tag{3.34}$$

dir. O zaman aynı zamanda $x_3 > 0$, $x_4 < 0$ olduğundan

$$x_5 = x_4 x_3 - 1 < -1 \tag{3.35}$$

dir.

Teorem 3.9 içinde $x_{-1}, x_0 < -1$ yerine $x_4, x_5 < -1$ alınırsa,

$$0 < x_6 < x_9 < x_{12} < ...., \tag{3.36}$$

$$... < x_{13} < x_{11} < x_{10} < x_8 < x_7 < x_5 < -1$$

olur. Dolayısıyla $\{x_{3n}\}_{n=2}^{\infty}$, pozitif artan bir alt dizi; $\{x_{3n+2}\}_{n=1}^{\infty}$, negatif azalan bir alt dizi; $\{x_{3n+1}\}_{n=2}^{\infty}$, negatif azalan bir alt dizi olur ve bu yüzden her $n \geq N$ için $-1 < x_n < 0$ olacak şekilde $N \geq -1$ sayısı yoktur. Dahası Teorem 3.9 ile $\{x_{3n}\}_{n=2}^{\infty}$ $+\infty$'a ve $\{x_{3n+1}\}_{n=2}^{\infty}$ ve $\{x_{3n+2}\}_{n=1}^{\infty}$ $-\infty$'a ıraksar.

Sonuç olarak, burada biz, (3.1)'in çözümlerinin, kesin başlangıç koşulları ile birlikte ya sınırsız yada eninde sonunda $(-1, 0)$ aralığına düşerek sınırlı olduğunu gösterdik.

Teorem 3.13: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1)'in bir çözümü olsun. Varsayalım ki $1 < x_{-1}, x_0 < \overline{x}_1$ olsun. O zaman aşağıdaki durumlardan bir tanesi sağlanır.

(i). Çözüm sınırsızdır.

(ii). Her $n \geq n_0$ için $x_n \in (-1, 0)$ olacak şekilde $n_0 \geq 1$ vardır.

İspat: $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.1)'in bir çözümü olsun. Varsayalım ki

$$1 < x_{-1}, x_0 < \overline{x}_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{3.37}$$

olsun. Bu çözümün, terimleri pozitif iken azalan olduğunu göstereceğiz. $1 < x_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğu için,

$$\frac{1}{x_0} > \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{3.38}$$

durumuna sahibiz. Böylece

$$1 + \frac{1}{x_0} > 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} > x_{-1} \tag{3.39}$$

olur. $x_0 > 0$ olduğundan,

$$x_0 > x_0 x_{-1} - 1 = x_1 \tag{3.40}$$

olur. Terimler pozitif olduğu sürece, azalan bir diziye sahip olduğumuzu gözlemleyiniz. Azalan dizimiz üstten $\overline{x}_1$ ile sınırlı olduğundan ve $\overline{x}_2$, negatif olduğundan, bu dizi alttan sıfır ile sınırlı değildir ve böylece negatif değerler alır.

x_N, bu çözümün en son pozitif terimi, x_{N+1}'de ilk negatif terimi olsun. Biz şimdi

x_N ve x_{N+1} ile başlayan çözümümüzün terimlerinin değerlerinin uzunluğuna karar vereceğiz. Uygunluk için N yerine n kullanalım.

(1). x_n, x_{n+1}: gözlemleyiniz ki

$$x_n x_{n-1} - 1 > -1 \Longleftrightarrow x_n x_{n-1} > 0, \tag{3.41}$$

doğrudur. Dolayısıyla, $-1 < x_{n+1} < 0$ olur. Not edelim ki, bu $0 < x_n x_{n-1} < 1$ durumumununda sağlanması anlamına gelir. O zaman $x_n < x_{n-1}$ için en az $0 < x_n < 1$ olur.

(2). (1) durumundan x_{n+2}, $-1 < x_{n+1}x_n < 0$ ve bu yüzden $-2 < x_{n+2} < -1$ olur.

(3). $x_{n+3}, x_{n+4}....$

Durum 1: $(x_{n+3} > 0)$. (2) durumundan, $x_{n+4} = x_{n+3}x_{n+2} - 1 < -1$ ve böylece $x_{n+5} = x_{n+4}x_{n+3} - 1 < -1$ olur. Teorem 3.9 ile çözüm sınırsız olur.

Durum 2: $(x_{n+3} < 0)$. $x_{n+3} > -1$ olduğunu gösterelim:

$$x_{n+3} = x_{n+2}x_{n+1} - 1 > -1 \Longleftrightarrow x_{n+2}x_{n+1} > 0, \tag{3.42}$$

(1) ve (2) durumundan $x_{n+2}, x_{n+1} < 0$ dır.

Gösterelim ki $-1 < x_{n+4} < 0$'dır. İlk olarak eşitsizliğin sağ tarafını gösterelim.

$$x_{n+4} = x_{n+3}x_{n+2} - 1 < 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow ((x_{n+1}x_n - 1)x_{n+1} - 1)(x_{n+1}x_n - 1) - 1 < 0 \qquad (3.43)\\
&\Longleftrightarrow x_{n+1}^3 x_n^2 - 2x_{n+1}^2 x_n + x_{n+1} - x_{n+1}x_n < 0\\
&\Longleftrightarrow x_{n+1}^2 x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + 1 - x_n > 0\\
&\Longleftrightarrow x_{n+1}x_n(x_{n+1}x_n - 2) - (x_n - 1) > 0\\
&\Longleftrightarrow (x_{n+2}^2 - 1) - (x_n - 1) > 0\\
&\Longleftrightarrow x_{n+2}^2 > x_n,
\end{aligned}$$

(1) ve (2) durumlarından $x_{n+2}^2 > 1$ ve $0 < x_n < 1$ olduğundan, $x_{n+2}^2 > x_n$ elde edilir. İkinci olarak, $x_{n+4} > -1$ olduğunu gösterelim:

$$x_{n+4} = x_{n+3}x_{n+2} - 1 > -1 \Longleftrightarrow x_{n+3}x_{n+2} > 0, \tag{3.44}$$

durumu, (2) durumundan $x_{n+3} < 0$ ve $x_{n+2} < 0$ olduğu için doğrudur. $-1 < x_{n+3}$, $x_{n+4} < 0$ olduğu için, Teorem 3.5'den her $n \geq n_0$ $x_n \in (-1, 0)$ olacak biçimde $n_0 \geq 1$ sayısının var olduğu takip edilir.

4. $x_{n+1} = x_{n-1}x_{n-2} - 1$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMİĞİ

Bu bölümde x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = x_{n-1}x_{n-2} - 1,\ n = 0, 1, ... \tag{4.1}$$

üçüncü mertebeden fark denkleminin çözümlerinin uzun terimli davranışları incelenecektir. Özellikle, çözümlerin periyodik davranışları ve sınırlılığı incelenecek ve bunların başlangıç koşullarına bağlılığı bulunacaktır.
(4.1) fark denklemi, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k < l$ ve obeb$(k; l) = 1$ için

$$x_{n+1} = x_{n-k}x_{n-l} - 1,\ n = 0, 1, ... \tag{4.2}$$

formundaki denklemlerin bir sınıfına aittir.

4.1 (4.1)'in Denge Noktaları ve Periyodik Çözümleri

Bu bölümde (4.1) denkleminin denge noktaları ve periyodik çözümleri çalışılacaktır.

4.1.1 (4.1)'in Denge Noktaları

$$\overline{x}^2 - \overline{x} - 1 = 0 \tag{4.3}$$

denklemini sağlayan $\overline{x}$ noktaları, (4.1)'in denge noktalarıdır.

Dolayısıyla, (4.1) tam olarak $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ simgeleriyle ifade edilen biri pozitif diğeri negatif iki denge noktasına sahip olduğunu bulabiliriz, sırasıyla

$$\overline{x}_1 =: \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \overline{x}_2 =: \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{4.4}$$

4.1.2 (4.1)'in Periyodik Çözümleri

Burada, (4.1)'in periyodik çözümlerinin varlığını inceleyeceğiz. Vereceğimiz ilk iki sonuç basittir, ispatlarıyla birlikte sunulacaktır. İleriki kısımlarda bu sonuçlar yararlı olacaktır.

Teorem 4.1: (4.1)'in eninde sonunda sabit hiçbir çözümü yoktur.

İspat: $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$, (4.1)'in eninde sonunda sabit bir çözümü ise, o zaman $\overline{x}$, denge noktasını göstermek üzere, bazı $N \in \mathbb{N}_0$'lar için $x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \overline{x}$'dır. Bu durumda, (4.1) ile $x_{N+2} = x_N x_{N-1} - 1$ olduğundan, aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$x_{N-1} = \frac{x_{N+2}+1}{x_N} = \frac{\overline{x}+1}{\overline{x}} = \overline{x} \tag{4.5}$$

Bu prosedür ile devam ederek, $-2 \leq n \leq N+2$ için $x_n = \overline{x}$ elde edilir. Dolayısıyla eninde sonunda sabit hiçbir çözümü yoktur.

Teorem 4.2: (4.1) fark denkleminin, ne iki periyodik ne de eninde sonunda iki periyodik hiçbir çözümü yoktur.

İspat: Varsayalım ki $\forall k \in \mathbb{N}_0$, bazı $N \geq -2$ ve $x_N \neq x_{N+1}$ için $x_N = x_{N+2k}$ ve $x_{N+1} = x_{N+2k+1}$ olsun. O zaman,

$$x_{N+4} = x_{N+2}x_{N+1} - 1 = x_N x_{N+1} - 1 = x_{N+3} = x_{N+1}$$

durumuna sahibiz. Buradan ve $x_{N+4} = x_N$ olduğundan çelişki elde ederiz ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3: (4.1) fark denkleminin, ne üç periyodik ne de eninde sonunda üç periyodik hiçbir çözümü yoktur.

İspat: Eğer bazı $N \geq -2$ için

$$x_N = x_{N+3k},\ x_{N+1} = x_{N+3k+1},\ x_{N+2} = x_{N+3k+2},\ k \geq 0 \tag{4.6}$$

ise,

$$\begin{aligned} x_{N+3} &= x_{N+1}x_N - 1 = x_N, \\ x_{N+4} &= x_{N+2}x_{N+1} - 1 = x_{N+1}, \\ x_{N+5} &= x_{N+3}x_{N+2} - 1 = x_N x_{N+2} - 1 = x_{N+2} \end{aligned} \tag{4.7}$$

olur.

Eğer $x_N = 0$, $x_{N+1} = 0$, veya $x_{N+2} = 0$ ise, o zaman (4.7)'den kolaylıkla bütün bu durumlar için çelişki elde ederiz. Dolayısıyla, $x_N \neq 0$, $x_{N+1} \neq 0$, ve $x_{N+2} \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Aynı zamanda (4.7) eşitliklerinden

$$x_{N+1} = \frac{x_N + 1}{x_N},\ x_{N+2} = \frac{x_{N+1} + 1}{x_{N+1}},\ x_{N+2} = \frac{x_{N+2} + 1}{x_{N+2}} \tag{4.8}$$

durumları elde edilir. (4.8)'den

$$x_N = \frac{x_{N+2} + 1}{x_{N+2}} = \frac{2x_{N+1} + 1}{x_{N+1} + 1} = \frac{3x_N + 2}{2x_N + 1} \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir, bu da $x_N^2 - x_N - 1 = 0$, yani, $x_N = (1 \pm \sqrt{5})/2$ olduğunu verir. Buradan ve (4.8)'den, $x_{N+1} = x_{N+2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ durumu elde edilir. Dolayısıyla $n \geq N$ için $x_n = (1 \pm \sqrt{5})/2$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.4: (4.1) fark denkleminin, ne dört periyodik ne de eninde sonunda dört periyodik hiçbir çözümü yoktur.

İspat: Eğer bazı $N \geq -2$ için

$$x_N = x_{N+4k},\ x_{N+1} = x_{N+4k+1},\ x_{N+2} = x_{N+4k+2},\ x_{N+3} = x_{N+4k+3},\ k \geq 0 \tag{4.10}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} x_{N+4} &= x_{N+2}x_{N+1}-1 = x_N, \\ x_{N+5} &= x_{N+3}x_{N+2}-1 = x_{N+1}, \\ x_{N+6} &= x_{N+4}x_{N+3}-1 = x_N x_{N+3}-1 = x_{N+2} \\ x_{N+7} &= x_{N+5}x_{N+4}-1 = x_N x_{N+1}-1 = x_{N+3} \end{aligned} \tag{4.11}$$

olur.

Eğer $i \in \{0,1,2,3\}$ için $x_{N+i} = 0$ ise, o zaman (4.11)'den kolaylıkla bütün bu durumlar için çelişki elde ederiz. Örneğin, $x_N = 0$ ise, (4.11)'den $x_{N+2} = -1 = x_{N+3}$ bulunur. Bu da $x_{N+1} = x_{N+3}x_{N+2} - 1 = 0$ durumunu gerçekler. Buradan ve $x_{N+2}x_{N+1} - 1 = x_N$ olduğundan, $x_N = -1$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Diğer durumlarda benzer şekilde ispatlanabilir.

Dolayısıyla, $i \in \{0,1,2,3\}$ için $x_{N+i} \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. (4.11)'den

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{x_{N+3}+1}{x_{N+1}} \\ &= \frac{(x_{N+2}+1)/x_N+1}{(x_N+1)/x_{N+2}} \\ &= \frac{x_{N+2}(x_{N+2}+x_N+1)}{x_N(x_N+1)} \\ &= \frac{(x_N+1)(x_{N+1}+1)}{x_N x_{N+1}^2}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir, yani

$$(x_N x_{N+1})^2 = (x_N+1)(x_{N+1}+1) \tag{4.13}$$

dır. (4.11) ve (4.13)'den

$$(x_{N+3}+1)^2 = (x_N+1)(x_{N+1}+1) \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.13) içindeki ilişkiler periyodik olduğundan, aynı zamanda

$$\begin{aligned} (x_N+1)^2 &= (x_{N+1}+1)(x_{N+2}+1), \\ (x_{N+1}+1)^2 &= (x_{N+2}+1)(x_{N+3}+1), \\ (x_{N+2}+1)^2 &= (x_{N+3}+1)(x_N+1) \end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitliklerini elde ederiz.

$i \in \{0,1,2,3\}$ için $x_{N+i}+1$ ifadelerinin aynı işarete sahip olduğu (4.1.12) ve (4.1.13) eşitliklerinden görülmektedir. Varsayalım ki onların hepsinin de işareti pozitif olsun (hepsinin negatif olma durumuda benzer şekilde düşünülebileceğinden onu ihmal edebiliriz).

$$\begin{aligned}
(x_{N+3}+1)^2 &= (x_N+1)(x_{N+1}+1) \\
&= (x_N+1)\sqrt{(x_{N+3}+1)(x_{N+2}+1)} \\
&= (x_N+1)\sqrt{(x_{N+3}+1)\sqrt{(x_{N+3}+1)(x_N+1)}},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitliği sağlanmaktadır. Buradan kolaylıkla $x_{N+3} = x_N$ olduğu görülür. Bununla birlikte (4.14) ve (4.15)'de düşündüğümüzde $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ için $x_{N+i} = x_N$ olur. Böylelikle ispat tamamlanır.

Aşağıdaki sonuç (4.1) denkleminin beş periyodu ile periyodik çözümlere sahip olduğunu gösterir.

Toerem 4.5: (4.1)'in bir çözümü beş periyoda sahiptir gerekli ve yeterli koşul

(i). $x_{-2} = a$, $x_{-1} = b$, $ab \neq 1$, ve $x_0 = (1+a)/(ab-1)$, veya

(ii). $x_{-2} = x_{-1} = -1$, veya

(iii). $x_{-2} = a$, $x_{-1} = 0$, ve $x_0 = -a-1$.

İspat: Eğer başlangıç koşulları yukarıdaki gibi verilmişse, o zaman basit hesaplamalarla bu çözümlerin beş periyoda sahip olduğu kolayca görülür. Şimdi varsayalım ki, $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ beş periyodik bir çözüm olsun. Bu durumda, (4.1) ile bu çözümün terimlerini şu şekilde yazabiliriz;

$$\begin{aligned}
x_{-2} &= a, \\
x_{-1} &= b, \\
x_0 &= c, \\
x_1 &= d = ab-1, \\
x_2 &= e = bc-1, \\
x_3 &= f = cd-1 = c(ab-1)-1 = a, \\
x_4 &= g = (ab-1)(bc-1)-1 = b, \\
x_5 &= h = (bc-1)f-1 = (bc-1)a-1 = c.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Şunu hemen not edelim ki, f ve h ifadelerinin her ikiside aynı koşulu verir, yani, $abc = a+c+1$. g için koşul $ab^2c-ab-bc = b$'yi verir, öyle ki $b(abc-a-c-1) = 0$'dır.

Dolayısıyla, f ve h'dan gelen kısıtlama ile ya $b = 0$ veya $abc = a + c + 1$ olur. Eğer $b = 0$ ise, o zaman $f = a = -c-1$ olur. İkinci kısıtlama $c = (1+a)/(ab-1)$ şeklinde tekrar yazılırsa, $ab \neq 1$ durumu sağlanır. Eğer $ab = 1$ ise, o zaman $f = a = -1 = b$ olur.

Uyarı 4.6: Eğer $k \geq -1$ için $x_k = 0$ ise, o zaman x_k bir beş döngü ile başlar (özellikle yukarıdaki teorem ile, a ve c herhangi iki reel sayı olmak üzere $x_{-2} = a$, $x_{-1} = 0$, $x_0 = c$ başlangıç koşulları ise, bir beş döngüye sahip oluruz). Eğer $k = -1$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
x_{-1} &= 0, \\
x_0 &= x_0, \\
x_1 &= x_{-1}x_{-2} - 1 = -1, \\
x_2 &= x_0x_{-1} - 1 = -1, \\
x_3 &= x_1x_0 - 1 = -x_0 - 1, \\
x_4 &= x_2x_1 - 1 = 0, \\
x_5 &= x_3x_2 - 1 = -(-x_0 - 1) - 1 = x_0, \\
x_6 &= x_4x_3 - 1 = -1
\end{aligned} \tag{4.18}$$

olur. Buradan istenilen görülür.

Eğer $k \geq 0$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
x_k &= 0, \\
x_{k+1} &= x_{k-1}x_{k-2} - 1, \\
x_{k+2} &= x_kx_{k-1} - 1 = -1, \\
x_{k+3} &= x_{k+1}x_k - 1 = -1, \\
x_{k+4} &= x_{k+2}x_{k+1} - 1 = -(x_{k-1}x_{k-2} - 1) - 1 = -x_{k-1}x_{k-2}, \\
x_{k+5} &= x_{k+3}x_{k+2} - 1 = 0, \\
x_{k+6} &= x_{k+4}x_{k+3} - 1 = -(x_{k-1}x_{k-2}) - 1 = x_{k-1}x_{k-2} - 1, \\
x_{k+7} &= x_{k+5}x_{k+4} - 1 = -1
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olur. Buradan istenilen görülür.

Uyarı 4.7: (4.1)'in herhangi bir terimi sıfır olmayan beş periyotlu çözümü vardır.

$a \neq -1$ ve $b \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$ öyle ki $ab \neq 1$ durumu yeterlidir. Örneğin, $x_{-2} = 2$, $x_{-1} = 2, x_0 = 1$ seçilebilir.

Uyarı 4.8: (4.1)'in eninde sonunda beş periyotlu çözümleri vardır, örneğin, $x_{-2} = 4$, $x_{-1} = 0,5, x_0 = 1$ veya $x_{-2} = 0$, $x_{-1} = 4$, $x_0 = -0,5$ seçilebilir.

4.2 $(-1,0)$ Aralığındaki Çözümler

Burada, $(-1,0)$ aralığındaki başlangıç koşulları ile (4.1)'in çözümlerini çalışacağız. Çözümlerin üç tane alt dizisinin eninde sonunda bu aralığa düşeceğini göstereceğiz. Aşağıdaki sonuç $(-1,0)$ aralığının (4.1)'in bir sabit aralığı olduğunu gösterir.

Teorem 4.9: Eğer $-1 < x_{-2}, x_{-1}, x_0 < 0$ ise, o zaman bütün $n \geq -2$'ler için $-1 < x_n < 0$ olur.

İspat: Eğer $-1 < x_{-1}, x_0 < 0$ ise, o zaman $-1 < x_1 = x_{-1}x_{-2} - 1 < 0$. (4.1)'den ve tümevarımla, o zaman bütün $n \geq -2$'ler için $-1 < x_n < 0$ elde ederiz.

Uyarı 4.10: $(-1,0)$ aralığına eninde sonunda düşen çözümler vardır. Böyle bir çözüme örnek olarak $x_{-2} = 1,3$, $x_{-1} = 1,5$, $x_0 = 1,6$ başlangıç koşullarını alarak ulaşılabilir.

4.2.1 Beş Periyotlu Çözümlere Yakınsaklık

Gelecek teorem $(-1,0)$ aralığından alınacak başlangıç koşulları ile (4.1)'in çözümlerinin beş periyodik çözümlerine yakınsak olan çözümlerine ayırılmıştır.

Hemen şunu not edelim ki eğer $a, b \in (-1,0)$ ise, o zaman $ab \neq 1$, ve $(1+a)/(ab-1) \in (-1,0)$ olur. Aslında, $a, b \in (-1,0)$ olduğu için, açık şekilde $(1+a)/(ab-1) < 0$, ve $ab < -a$'dır. Dolayısıyla $1 + a < 1 - ab$ olur, ve buradan $(1+a)/(ab-1) > -1$ olduğu izlenir. Teorem 4.5 ve Teorem 4.9 ile bu çözümlerin $(-1,0)$ aralığına ait beş periyodu ile periyodik olduğu elde edilir.

Bu kısmın ana sonucunu formülize etmeden ve onu ispatlamadan önce, yardımcı bir sonuca ihtiyacımız vardır.

Önerme 4.11: (4.1)'in herhangi bir çözümü aşağıdaki eşitliği sağlar;

$$x_{n+5} - x_n = x_n(x_{n+4} - x_{n-1}), \ n \geq -1 \text{ için.} \tag{4.20}$$

İspat: $n \geq -1$ ise,

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_n x_{n-1} - 1, \qquad (4.21) \\ x_{n+3} &= x_{n+1} x_n - 1, \\ x_{n+4} &= x_{n+2} x_{n+1} - 1 = (x_n x_{n-1} - 1) x_{n+1} - 1 \\ &= x_{n+1} x_n x_{n-1} - x_{n+1} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+5} &= x_{n+3} x_{n+2} - 1 = (x_{n+1} x_n - 1)(x_n x_{n-1} - 1) - 1 \qquad (4.22) \\ &= x_{n+1} x_n^2 x_{n-1} - x_{n+1} x_n - x_n x_{n-1} \\ &= x_n (x_{n+1} x_n x_{n-1} - x_{n+1} - x_{n-1}). \end{aligned}$$

(4.21) ve (4.22) kullanılarak

$$\begin{aligned} x_{n+5} - x_n &= x_n (x_{n+1} x_n x_{n-1} - x_{n+1} - x_{n-1}) - x_n \\ &= x_n (x_{n+1} x_n x_{n-1} - x_{n+1} - x_{n-1} - 1) \\ &= x_n [(x_{n+1} x_n x_{n-1} - x_{n+1} - 1) - x_{n-1}] \\ &= x_n (x_{n+4} - x_{n-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Teorem 4.12: (4.1) fark denklemini başlangıç koşulları $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (-1, 0)$ olmak üzere bir çözümünü ele alalım. O zaman bu çözüm bir beş periyotlu çözüme yakınsar.

İspat: $\{x_{5n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{x_{5n+1}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{x_{5n+2}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{x_{5n+3}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{x_{5n+4}\}_{n=0}^{\infty}$ alt dizilerini ele alalım. Önerme 4.11 ile $n \geq -1$ için biliyoruz ki ele aldığımız çözüm (4.20)'i sağlar. Böylece

$$\begin{aligned} x_{n+10} - x_{n+5} &= x_{n+5} (x_{n+9} - x_{n+4}) \qquad (4.23) \\ &= x_{n+5} x_{n+4} (x_{n+8} - x_{n+3}) \\ &= x_{n+5} x_{n+4} x_{n+3} (x_{n+7} - x_{n+2}) \\ &= x_{n+5} x_{n+4} x_{n+3} x_{n+2} (x_{n+6} - x_{n+1}) \\ &= x_{n+5} x_{n+4} x_{n+3} x_{n+2} x_{n+1} (x_{n+5} - x_n) \end{aligned}$$

durumunu elde ederiz.

Dolayısıyla,

$$|x_{n+10} - x_{n+5}| = |x_{n+5}|\,|x_{n+4}|\,|x_{n+3}|\,|x_{n+2}|\,|x_{n+1}|\,|x_{n+5} - x_n| \qquad (4.24)$$

ve, dizinin değerleri $(-1,0)$ aralığında olduğu için

$$|x_{n+10} - x_{n+5}| \leq |x_{n+5} - x_n| \tag{4.25}$$

olur. Genelliği bozmaksızın, $\{x_{5n}\}_{n=0}^{\infty}$ alt dizsini düşünelim.

$$a_n = x_{5(n+1)} - x_{5n},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.26}$$

olsun. (4.25) eşitsizliğinden

$$|a_0| \geq |a_1| \geq |a_2| \geq ... \tag{4.27}$$

olur. $\{|a_n|\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi pozitif, artmayan ve alttan 0 ile sınırlı olduğundan, bu dizi bir A sayısına yakınsak olmak zorundadır. $A = 0$ olduğunu ispatlayalım. Tersine varsayalım ki $A \neq 0$ olsun. (4.24)'den

$$\left|x_{5(n+1)} - x_{5n}\right| = (\prod_{k=1}^{5n} |x_k|)\, |x_5 - x_0| \tag{4.28}$$

durumu yazılabilir. $\{|a_n|\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi sıfırdan farklı bir değere yakınsak olduğu için, $\prod_{k=1}^{\infty} |x_k|$ diziside sıfırdan farklı bir değere yakınsaktır. Dolayısıyla $\lim_{k\to\infty} |x_k| = 1$ olur. Sonuç olarak, x_k büyük k'lar için -1'e yakındır. Varsayalım ki k büyük olsun. O zaman, $x_{k+3} = x_{k+1}x_k - 1$ 0'a yakındır. Bu da $k \to \infty$ için $|x_{k+3}| \to 1$ durumu ile çelişir. Dolayısıyla istenilen gösterilmiş olur ve $A = 0$ bulunur.

Uyarı 4.13: Daha önce belirtildiği gibi, $(-1,0)$ aralığının dışından alınan başlangıç koşulları ile de bu aralığa düşen çözümler vardır. Bir önceki teoremle diyebiliriz ki böyle çözümler aynı zamanda bir beş periyotlu çözümlere yakınsaktır.

Sonuç 4.14: Varsayalım ki (4.1)'in bir çözümü $x_{-2} = 0$ ve $x_{-1}, x_0 \in (-1,0)$ başlangıç koşullarına sahip olsun. O zaman, $x_1 = -1$ ve gelecek diğer bütün terimler $(-1,0)$ aralığında olur ve böylece bu çözüm bir beş periyodik çözüme yakınsar.

İspat: Açıkca $x_1 = x_{-1}x_{-2} - 1 = -1$'dir. $0 < -x_0 < 1$ ve $0 < -x_{-1} < 1$ olduğundan, $0 < x_0x_{-1} < 1$ olur ve bu yüzden $-1 < x_2 < 0$ olur. Dahası, $x_3 = x_1x_0 - 1 = -x_0 - 1 \in (-1,0)$. Benzer şekilde, $x_4 = x_2x_1 - 1 = -x_2 - 1 \in (-1,0)$. İspatın geriye kalan kısmı, Teorem 4.9'a benzerdir ve ihmal edilebilir.

4.3 (4.1)'in Çözümlerinin Kararlılığı ve Yakınsaklığı

Bu kısımda, (4.1)'in iki denge noktasının kararlılık yapısına değinilecek ve negatif denge noktasına çözümlerin olası yakınsaklık durumu okuyuculara açık problem olarak bırakılacaktır.

Önerme 4.15: (4.1)'in pozitif denge noktası $\overline{x}_1$ kararsızdır.

İspat: (4.1)'in pozitif denge noktası $\overline{x}_1$ civarında karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - \overline{x}_1\lambda - \overline{x}_1 = 0, \tag{4.29}$$

şeklindedir. $P_1(x) = x^3 - \overline{x}_1 x - \overline{x}_1$ olsun. $P_1(1) = 1 - 2\overline{x}_1 = -\sqrt{5} < 0$ ve $\lim_{x\to\infty} P_1(x) = \infty$ olduğundan, $P_1(\lambda_0) = 0$ olacak şekilde $\lambda_0 > 1$ vardır. Buradan $\overline{x}_1$ kararsızdır. İspat tamamlanır.

(4.1)'in negatif denge noktası $\overline{x}_2$ civarında karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - \overline{x}_2\lambda - \overline{x}_2 = 0, \tag{4.30}$$

şeklindedir. $P_2(x) = x^3 - \overline{x}_2 x - \overline{x}_2$ olsun.

(i). $P_2(\overline{x}_2) = 0$,

(ii). $P_2'(x) = 3x^2 - \overline{x}_2 > 0$, her $x \in \mathbb{R}$ için,

olduğunu gözlemleyelim. Dolayısıyla, $\lambda_1 = \overline{x}_2 \in (-1, 0)$ negatif özdeğerine ve

$$\lambda_1 \left|\lambda_2\right|^2 = \overline{x}_2 \tag{4.31}$$

olacak şekilde λ_2 ve $\overline{\lambda}_2$ kompleks eşlenik özdeğerlerine sahibiz. $|\lambda_2| = \left|\overline{\lambda}_2\right|$ durumu söz konusudur, dolayısıyla $\overline{x}_2$, biri 1'e eşit diğeri 1'den küçük karakteristik denklemin köklerinin olduğu yerde hiperbolik olmayan denge noktasıdır.

Açık Problem 4.16: (4.1)'in negatif denge noktası $\overline{x}_2$'ın kararlılık yapısını belirleyiniz.

4.4 Değişmez (Sabit) Aralıklar

Bu kısımda, (4.1)'in bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün $\{x_{5n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{x_{5n+1}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{x_{5n+2}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{x_{5n+3}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{x_{5n+4}\}_{n=0}^{\infty}$ alt dizileriyle ilgili değişmez aralıklarını çalışacağız.

Teorem 4.17: Varsayalım ki (4.1)'in bir çözümü $x_{-2} = 0$ ve $x_{-1} \in (0,1)$ ve $x_0 \in (-1,0)$ başlangıç koşullarına sahip olsun. O zaman, her $n \in \mathbb{N}_0$ için $x_{5n+2}, x_{5n+6} \in (-2,-1)$, $x_{5n+3}, x_{5n+5} \in (-1,0)$ ve $x_{5n+4} \in (0,1)$ olur ve aynı zamanda $x_1 = -1$'dir.

İspat: $x_{-2} = 0$ olduğu için, $x_1 = x_{-1}x_{-2} - 1 = -1$'dir. Şimdi yukarıdaki durumu $n = 0$ için ispatlayalım. $x_{-1} \in (0,1)$ ve $x_0 \in (-1,0)$ olduğundan, $-1 < x_0x_{-1} < 0$ olur. Buradan ve $x_2 = x_0x_{-1} - 1$'den $x_2 \in (-2,-1)$ elde edilir. Dahası

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_1x_0 - 1 = -x_0 - 1 \in (-1,0), \qquad (4.32)\\
x_4 &= x_2x_1 - 1 = -x_2 - 1 \in (0,1)
\end{aligned}
$$

olur. $0 < -x_3 < 1$ ve $1 < -x_2 < 2$ olduğundan, $x_5 = x_3x_2 - 1 \in (-1,1)$ bulunur. Şimdi, x_5'in daha kısıtlanmış olan $(-1,0)$ aralığına düşeceğini gösterelim. Bunu çelişkiye düşerek kanıtlayalım. Varsayalım ki $x_5 \in [0,1)$ olsun. $0 \leq x_5 = x_3x_2 - 1 < 1$, $x_3 = x_1x_0 - 1 = -x_0 - 1$ ve $x_2 = x_0x_{-1} - 1$ olduğundan,

$$
0 \leq (-x_0 - 1)(x_0x_{-1} - 1) - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x_0(1 - x_{-1} - x_0x_{-1}) < 1 \qquad (4.33)
$$

durumu sağlanmalıdır. Bu durum

$$
0 \leq x_0(-x_2 - x_{-1}) < 1 \qquad (4.34)
$$

eşitsizliğine denktir. Diğer taraftan, $1 < -x_2 < 2$ ve $-1 < -x_{-1} < 0$ olduğundan, $0 < -x_2 - x_{-1} < 2$ olur. Ancak, $x_0 < 0$ olduğundan, $x_0(-x_2 - x_{-1}) < 0$ olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla iddia edildiği üzere $x_5 \in (-1,0)$ bulunur.

$0 < x_4 < 1$ ve $0 < -x_3 < 1$ olduğundan, $-1 < x_4x_3 < 0$ olur ve bu yüzden $-2 < x_6 < -1$ elde edilir ki bu da $n = 0$ için ispatını tamamlar.

Şimdi $0 \leq n \leq k$ için $x_{5n+2}, x_{5n+6} \in (-2,-1)$, $x_{5n+3}, x_{5n+5} \in (-1,0)$ ve $x_{5n+4} \in (0,1)$ olduğunu varsayalım.

$x_{5k+4} \in (0,1)$ ve $x_{5k+5} \in (-1,0)$ olduğundan,

$$
x_{5(k+1)+2} = x_{5k+5}x_{5k+4} - 1 \in (-2,-1) \qquad (4.35)
$$

olur. $x_{5k+6} \in (-2,-1)$ ve $x_{5k+5} \in (-1,0)$ olduğundan,

$$x_{5(k+1)+3} = x_{5k+6}x_{5k+5} - 1 \in (-1,1) \tag{4.36}$$

olur. Varsayalım ki $x_{5(k+1)+3} \in [0,1)$ olsun. O zaman

$$0 \leq x_{5(k+1)+3} = x_{5k+6}x_{5k+5} - 1 = (x_{5k+4}x_{5k+3} - 1)(x_{5k+3}x_{5k+2} - 1) - 1 < 1 \tag{4.37}$$

olur, bu da

$$0 \leq x_{5k+3}(x_{5k+4}x_{5k+3}x_{5k+2} - x_{5k+4} - x_{5k+2}) < 1 \tag{4.38}$$

durumuna denktir.

Şunu hemen not edelim ki $-1 < -x_{5k+4} < 0$ ve $1 < -x_{5k+2} < 2$ olduğundan, $x_{5k+4}x_{5k+3}x_{5k+2} > 0$ ve $-x_{5k+4} - x_{5k+2} > 0$ olur. Dolayısıyla, $x_{5k+3} < 0$ ile birlikte $x_{5k+4}x_{5k+3}x_{5k+2} - x_{5k+4} - x_{5k+2} > 0$ eşitsizliği $x_{5k+3}(x_{5k+4}x_{5k+3}x_{5k+2} - x_{5k+4} - x_{5k+2}) < 0$ durumunu gerçekler ki bu da bir çelişkidir. Bu yüzden,

$$x_{5(k+1)+3} \in (-1,0) \tag{4.39}$$

olur. $-2 < x_{5(k+1)+2}, x_{5k+6} < -1$ olduğundan,

$$x_{5(k+1)+4} = x_{5(k+1)+2}x_{5k+6} - 1 \in (0,3) \tag{4.40}$$

olur.

Varsayalım ki $x_{5(k+1)+4} \in [1,3)$ olsun. Önerme 4.11 ile

$$x_{5(k+1)+4} - x_{5k+4} = x_{5k+4}(x_{5(k+1)+3} - x_{5k+3}) \tag{4.41}$$

ve $0 < x_{5k+4} < 1 \leq x_{5(k+1)+4}$ yazılabilir. Böylelikle $x_{5(k+1)+4} - x_{5k+4} > 0$ olur. Sonuç olarak, $x_{5k+4}(x_{5(k+1)+3} - x_{5k+3}) > 0$ olur. Buradan ve $x_{5k+4} > 0$ olduğundan, $x_{5(k+1)+3} - x_{5k+3} > 0$ elde edilir. O zaman

$$x_{5(k+1)+3} - x_{5k+3} = x_{5k+3}(x_{5(k+1)+2} - x_{5k+2}) > 0 \tag{4.42}$$

olur. $x_{5k+3} < 0$ olduğundan, $x_{5(k+1)+2} - x_{5k+2} < 0$ olur. Dahası

$$x_{5(k+1)+2} - x_{5k+2} = x_{5k+2}(x_{5(k+1)+1} - x_{5k+1}) > 0 \tag{4.43}$$

olur. $x_{5k+2} < 0$ olduğundan, $x_{5(k+1)+1} - x_{5k+1} > 0$ olur.

Önerme 4.11 ile her bir $1 \leq n \leq k$ için

$$x_{5(n+1)+1} - x_{5n+1} = x_{5n+1}x_{5n}x_{5n-1}x_{5n-2}x_{5n-3}(x_{5n+1} - x_{5(n-1)+1}) \tag{4.44}$$

durumu olur. Tümevarımla, $x_{5n+1}x_{5n}x_{5n-1}x_{5n-2}x_{5n-3} > 0$ olur öyle ki farkın işareti $x_{5(k+1)+1} - x_{5k+1}$'ın işareti ile aynıdır, yani,

$$x_{5(n+1)+1} - x_{5n+1} > 0,\ 0 \leq n \leq k \tag{4.45}$$

dır.

Diğer taraftan, $x_6 - x_1 = x_6 + 1 < 0$'dır. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla,

$$x_{5(k+1)+4} \in (0, 1) \tag{4.46}$$

dır.

$-2 < x_{5(k+1)+2} < -1$ ve $x_{5(k+1)+3} \in (-1, 0)$ olduğundan,

$$x_{5(k+1)+5} = x_{5(k+1)+3}x_{5(k+1)+2} - 1 \in (-1, 1) \tag{4.47}$$

olur. Varsayalım ki $x_{5(k+1)+5} \in [0, 1)$ olsun. O zaman,

$$0 \leq (x_{5k+6}x_{5k+5} - 1)(x_{5k+5}x_{5k+4} - 1) - 1 < 1 \tag{4.48}$$

durumu olur. Bu da

$$0 \leq x_{5k+5}(x_{5k+6}x_{5k+5}x_{5k+4} - x_{5k+6} - x_{5k+4}) < 1 \tag{4.49}$$

durumuna denktir.

Diğer taraftan, $x_{5k+6}x_{5k+5}x_{5k+4} > 0$ olduğundan ve $1 < -x_{5k+6} < 2$, $-1 < -x_{5k+4} < 0$ olduğundan, $-x_{5k+6} - x_{5k+4} > 0$ elde edilir. Böylece

$$x_{5k+6}x_{5k+5}x_{5k+4} - x_{5k+6} - x_{5k+4} > 0 \tag{4.50}$$

elde edilir.

$x_{5k+5} < 0$ durumu

$$x_{5k+5}(x_{5k+6}x_{5k+5}x_{5k+4} - x_{5k+6} - x_{5k+4}) < 0 \tag{4.51}$$

olmasını gerçekler. Bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla,

$$x_{5(k+1)+5} \in (-1,0) \tag{4.52}$$

dır.

Son olarak, $0 < x_{5(k+1)+4} < 1$ ve $-1 < x_{5(k+1)+3} < 0$ olduğundan,

$$x_{5(k+1)+6} = x_{5(k+1)+4}x_{5(k+1)+3} - 1 \in (-2,-1) \tag{4.53}$$

elde edilir. (4.35) – (4.53) ve tümevarımla ispat tamamlanır.

Teorem 4.18: $x_{-2} = 0$, $x_{-1} \in (0,1)$ ve $x_0 \in (-1,0)$ başlangıç koşulları ile (4.1)'in herhangi bir çözümü beş periyodik bir çözüme yakınsar.

İspat: Teorem 4.17 ile $n \in \mathbb{N}_0$ için $x_{-2} = 0$, $x_{-1} \in (0,1)$, $x_0 \in (-1,0)$, $x_1 = -1$, $x_{5n+2}, x_{5n+6} \in (-2,-1)$, $x_{5n+3}, x_{5n+5} \in (-1,0)$ ve $x_{5n+4} \in (0,1)$ olur.

Tümevarımla $\{x_{5n+3}\}_{n=-1}^{\infty}$, $\{x_{5n+4}\}_{n=-1}^{\infty}$, $\{x_{5n+5}\}_{n=-1}^{\infty}$, $\{x_{5n+6}\}_{n=-1}^{\infty}$ ve $\{x_{5n+7}\}_{n=-1}^{\infty}$ alt dizilerinin hepsinin monoton olduğunu ispatlayacağız.

Varsayalım ki $n = -1$ olsun. O zaman, Önerme 4.11 ve Teorem içindeki koşullar ile,

$$\begin{aligned} x_3 - x_{-2} &= x_3 < 0, \\ x_4 - x_{-1} &= x_{-1}(x_3 - x_{-2}) = x_{-1}x_3 < 0, \\ x_5 - x_0 &= x_0(x_4 - x_{-1}) > 0, \\ x_6 - x_1 &= x_1(x_5 - x_0) < 0, \\ x_7 - x_2 &= x_2(x_6 - x_1) > 0 \end{aligned} \tag{4.54}$$

elde edilir.

Varsayalım ki $0 \leq n \leq k$ için

$$\begin{aligned} -1 &< x_{5n+3} < x_{5(n-1)+3} < 0 = x_{-2}, \\ 0 &< x_{5n+4} < x_{5(n-1)+4} < 1, \\ 0 &> x_{5n+5} > x_{5(n-1)+5} > -1, \\ -2 &< x_{5n+6} < x_{5(n-1)+6} < -1, \\ -1 &> x_{5n+7} > x_{5(n-1)+7} > -2 \end{aligned} \tag{4.55}$$

olsun. Her bir $k \in \mathbb{N}_0$ ve $j = 3,4,5,6,7$ için ve Teorem 4.17 ile

$$x_{5(k+1)+j} - x_{5k+j} = x_{5k+j}x_{5k+j-1}x_{5k+j-2}x_{5k+j-3}x_{5k+j-4}(x_{5k+j} - x_{5(k-1)+j}) \tag{4.56}$$

olduğundan

$$x_{5k+j}x_{5k+j-1}x_{5k+j-2}x_{5k+j-3}x_{5k+j-4} > 0 \tag{4.57}$$

elde edilir. $x_{5(k+1)+j} - x_{5k+j}$ farkı her bir $k \in \mathbb{N}_0$ ve $j = 3, 4, 5, 6, 7$ için aynı işarete sahiptir. Buradan ve Teorem 4.17 ile iddia kanıtlanır.

$\{x_{5n+3}\}_{n=-1}^{\infty}$, $\{x_{5n+4}\}_{n=-1}^{\infty}$, $\{x_{5n+5}\}_{n=-1}^{\infty}$, $\{x_{5n+6}\}_{n=-1}^{\infty}$ ve $\{x_{5n+7}\}_{n=-1}^{\infty}$ alt dizilerinin hepsi monoton ve sınırlı olduğundan, onlar yakınsaktır ve sonuç olarak $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü iddia edildiği üzere beş periyodik bir çözüme yakınsar.

4.5 (4.1)'in Sınırsız Çözümleri

Bu kısımda, (4.1)'in sınırsız çözümlerinin varlığını veren başlangıç koşullarının kümesi bulunacaktır.

İlk olarak gözlemleyiniz ki başlangıç koşulları $x_{-2}, x_{-1}, x_0 > \overline{x}_1$ veya $x_{-2}, x_{-1}, x_0 < -1$ olduğunda, sınırsız çözümlerin varlığı görülür. Özellikle, aşağıdaki iki teorem başlangıç koşullarının kümesine ilişkin sınırsız çözümlerin varlığını gösterecektir.

Teorem 4.19: Eğer $x_{-2}, x_{-1}, x_0 > \overline{x}_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ise, o zaman aşağıdaki durumlar doğrudur;

(a). $x_{-1} < x_1 < x_3 < ...$ ve $x_0 < x_2 < x_4 < ...$;

(b). Çözüm $+\infty$'a ıraksar.

İspat (a): $x_{-1} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğundan, $\frac{1}{x_{-1}} < \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olur. Böylece,

$$1 + \frac{1}{x_{-1}} < 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x_{-2}. \tag{4.58}$$

Sonuç olarak, $x_{-2} > 1+1/x_{-1}$ dır. Böylece $x_{-1}x_{-2} > x_{-1}+1$. Buradan, $x_{-1}x_{-2}-1 > x_{-1}$ olur. Dolayısıyla $x_1 > x_{-1}$ elde edilir. Benzer adımlar tekrarlanarak $x_2 > x_0$ olduğu gösterilebilir ve ispatın geriye kalan kısmı tümevarımla gösterilebilir.

(b): Tersine olarak, (a)'da verilen alt dizilerden herhangi birinin sınırlı olduğunu varsayalım. O zaman

$$x_{n-2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_{n-1}}, \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.59}$$

eşitliğinden, $\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{x_{2n-1}\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin her ikiside yakınsaktır. O zaman çözüm ya iki periyodik bir çözüme yada denge noktasına yakınsaktır. Ancak (4.1) aşikar olmayan iki periyodik çözüme sahip değildir. Böylece, o denge noktasına yakınsak olmalıdır. Ancak en büyük denge noktası x_{-1} ve x_0'dan daha küçük olduğu için bu mümkün değildir. Bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

Teoram 4.20: Varsayalım ki $a, b > 0$ ve $ab > 1$ olsun. O zaman $x_{-2} = a$, $x_{-1} = b$ ve $x_0 > (1+a)/(ab-1)$ başlangıç koşulları ile her çözüm $+\infty$'a ıraksar.

İspat: $x_1 = ab - 1 > 0$, $x_2 = x_0x_{-1} - 1 > (b+1)/(ab-1) > 0$ ve

$$x_3 = x_1x_0 - 1 > (ab-1)\frac{1+a}{ab-1} - 1 = a = x_{-2} > 0 \tag{4.60}$$

durumları vardır. Önerme 4.11 ile

$$x_n - x_{n-5} = (x_3 - x_{-2}) \prod_{j=-1}^{n-5} x_j, \ n \geq 4 \tag{4.61}$$

olur. (4.61)'i kullanarak ve $x_3 - x_{-2} > 0$ durumundan, tümevarımla kolaylıkla

$$x_{5k+j} > x_{5(k-1)+j} > 0, \ k \in \mathbb{N}_0, \ j = 3, 4, 5, 6, 7 \tag{4.62}$$

olduğu görülür, yani, $\{x_{5k+i}\}_{k=-1}^{\infty}$, $i = 3, 4, 5, 6, 7$, alt dizileri artandır.
Aynı zamanda

$$\begin{aligned} x_{5k+3} - x_{5(k-1)+3} &= (x_3 - x_{-2}) \prod_{j=1}^{k} (x_{5(j-1)+3} x_{5(j-1)+2} ... x_{5(j-1)-1}) \\ &\geq (x_3 - x_{-2})(x_3 x_2 x_1 x_0 x_{-1})^k \\ &\geq (x_3 - x_{-2})(\frac{ab(a+1)(b+1)}{ab-1})^k \end{aligned} \tag{4.63}$$

durumu vardır. Not edelim ki

$$q := \frac{ab(a+1)(b+1)}{ab-1} > 1 \tag{4.64}$$

dır. Buradan ve (4.63)'den

$$x_{5k+3} > x_{5(k-1)+3} + (x_3 - x_{-2}) q^k \Rightarrow x_{5k+3} > x_{-2} + (x_3 - x_{-2}) \sum_{j=0}^{k} q^j \tag{4.65}$$

elde edilir. Buradan $k \to \infty$ için $x_{5k+3} \to \infty$ olur.
(4.61), (4.65) ve bu beş alt dizinin monotonluğundan

$$\begin{aligned} x_{5k+3+i} - x_{5(k-1)+3+i} &= x_{5(k-1)+3+i} ... x_{5(k-1)+3+1} (x_{5k+3} - x_{5(k-1)+3}) \\ &> x_{i-2} ... x_{-1} (x_{5k+3} - x_{5(k-1)+3}) \\ &> x_{i-2} ... x_{-1} (x_3 - x_{-2}) q^k \end{aligned} \tag{4.66}$$

elde edilir. $i = 1, 2, 3, 4$ için buradan $k \to \infty$ için $x_{5k+3+i} \to \infty$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

4.6 $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (1, \overline{x}_1)$ Durumu

Bu kısımda $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (1, \overline{x}_1)$ durumu ele alınacaktır. Gelecek teorem (4.1)'in eninde sonunda azalmayan $\overline{x}_1$'a yakınsak çözümlerinin olduğunu göstecektir.

Teorem 4.21: Varsayalım ki $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (1, \overline{x}_1)$ ve $x_{-2}, x_{-1} \leq x_0 \leq x_{-2}x_{-1} - 1$ olsun. O zaman, her çözüm eninde sonunda azalmayandır ve $\overline{x}_1$'a yakınsar.

İspat: $x_{-2} \leq x_0$ eşitsizliğinin her iki tarafını da x_{-1} ile çarparak, $x_{-1}x_{-2} \leq x_{-1}x_0$ elde edilir. Buradan ve $1 < x_{-2}, x_{-1}, x_0 < \overline{x}_1$ olduğundan, $0 < x_{-1}x_{-2} - 1 \leq x_{-1}x_0 - 1 < \overline{x}_1^2 - 1 = \overline{x}_1$ elde edilir, yani, $0 < x_1 \leq x_2 < \overline{x}_1$ olur. Dolayısıyla, $1 < x_{-2}, x_{-1} \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 < \overline{x}_1$ bulunur. Şimdi bazı $n \geq 2$'ler için varsayalım ki

$$1 < x_{-2}, x_{-1} \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n < \overline{x}_1, \tag{4.67}$$

olsun. $x_{n-3} \leq x_{n-1}$ eşitsizliğinin her iki tarafınıda x_{n-2} ile çarparak ve (4.67) kullanılarak

$$x_{n-3}x_{n-2} - 1 \leq x_{n-1}x_{n-2} - 1 < \overline{x}_1^2 - 1 = \overline{x}_1 \tag{4.68}$$

bulunur, yani, $x_n \leq x_{n+1} < \overline{x}_1$ olur. Böylece, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün üstten $\overline{x}_1$ ile sınırlı ve azalmayan olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 4.22: Varsayalım ki $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (1, \overline{x}_1)$ ve $x_0 \leq \max\{x_{-2}, x_{-1}\}$, $x_{-2}x_{-1} - 1 \leq \min\{x_{-2}, x_{-1}, x_0\}$ ve $x_{-1}x_0 - 1 \leq x_0$ olsun. O zaman, her çözüm için bir $N \geq 2$ sayısı vardır, öyle ki

$$x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_N \geq 0 > x_{N+1} \tag{4.69}$$

dir.

İspat: Teorem içideki varsayımlar ile

$$0 = 1 \cdot 1 - 1 < x_1 = x_{-1}x_{-2} - 1 \leq x_{-1} < \overline{x}_1, \tag{4.70}$$

$$0 = 1 \cdot 1 - 1 < x_2 = x_0x_{-1} - 1 \leq x_0 < \overline{x}_1, \tag{4.71}$$

durumları mevcuttur. Eğer $x_0 \leq x_{-1}$ ise, o zaman eşitsizliğinin her iki tarafı x_{-1} ile çarpılırsa

$$x_2 = x_0x_{-1} - 1 \leq x_{-1}x_{-2} - 1 = x_1 \tag{4.72}$$

elde edilir. Eğer $x_0 \leq x_{-2}$ ise, o zaman $x_1 = x_{-1}x_{-2} - 1 \leq x_{-2}$ oldğundan

$$x_3 = x_1x_0 - 1 \leq x_{-1}x_{-2} - 1 = x_1 \tag{4.73}$$

elde edilir. $x_1 \leq x_{-1}$ eşitsizliğinin her iki tarafı x_0 ile çarpılırsa

$$x_3 \leq x_2 \tag{4.74}$$

elde edilir ve (4.72) ile birlikte tekrardan $x_3 \leq x_1$ gerçeklenir.

Şunu da not edelim ki x_3'ün pozitif olduğunu garanti edemiyoruz. Benzer şekilde, $x_2 \leq x_0$ eşitsizliğinden (bak (4.71))

$$x_4 \leq x_3 \tag{4.75}$$

elde edilir ve $x_3 \leq x_1$ eşitsizliğinden

$$x_5 \leq x_4 \tag{4.76}$$

elde edilir.

Şimdi varsayalım ki

$$0 < x_n \leq x_{n-1} \leq ... \leq x_3 \leq x_2 < \overline{x}_1 \tag{4.77}$$

ve $x_{n+1} > 0$ olsun. O zaman, $x_{n-1} \leq x_{n-3}$ eşitsizliğinin her iki tarafınıda x_{n-2} ile çarparak ve her iki taraftan 1 çıkarılarak, $x_{n+1} \leq x_n$ elde edilir. Dolayısıyla tümevarım ile (4.77) eşitsizliğinin ancak ve ancak x_n'nin pozitif olması halinde sağlandığı ispatlanmış olur.

Eğer her $n \geq 2$ için $x_n > 0$ ise, o zaman $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü yakınsaktır ve onun limiti negatif değildir. Ancak, (4.1)'in negatif olmayan tek denge noktası $\overline{x}_1$ olduğundan bu mümkün değildir. Buradan ispat tamamlanır.

5. $x_{n+1} = x_n x_{n-2} - 1$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMİĞİ

Bu bölümde

$$x_{n+1} = x_n x_{n-2} - 1, \ n = 0, 1, ... \tag{5.1}$$

üçüncü mertebeden fark denkleminin çözümlerinin davranışları x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere araştırılacaktır. (5.1) fark denklemi, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k < l$ ve obeb$(k; l) = 1$ için

$$x_{n+1} = x_{n-k} x_{n-l} - 1, \ n = 0, 1, ... \tag{5.2}$$

formundaki denklemlerin bir sınıfına aittir. (5.2) basit görünmesine rağmen k, l'nin seçimine bağlı olarak çözümler çok farklılık göstermektedir.
Şunu hemen not edelim ki (5.1)

$$\overline{x}_1 =: \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \ \overline{x}_2 =: \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{5.3}$$

denge noktalarına sahiptir.

5.1 (5.1)'in Periyodik Çözümleri

Bu bölümde (5.1)'in periyodik çözümleri ele alınacaktır.

Teorem 5.1: (5.1) denklemi iki periyodik çözümlere sahiptir gerekli ve yeterli koşul başlangıç koşululları $x_{-2} = 0$, $x_{-1} = -1$, $x_0 = 0$; $x_{-2} = -1$, $x_{-1} = 0$, $x_0 = -1$.

İspat: $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$, (5.1)'in iki periyodik bir çözümü olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}_0$ ve $a \neq b$ olan $a, b \in \mathbb{R}$ için $x_{2n-2} = a$ ve $x_{2n-1} = b$ olur. $x_1 = x_0x_{-2} - 1 = a^2 - 1 = b$ ve $x_2 = x_1x_{-1} - 1 = b^2 - 1 = a$ durumları vardır. Bu iki denklemden $(a^2-1)^2 - 1 = a$ veya eşdeğer olarak

$$a(a+1)(a^2 - a - 1) = 0 \tag{5.4}$$

dır. Burada dört olası durum söz konusudur.

Durum 1: $a = 0$ ise, $b = -1$ olur ve ilk iki periyodik çözüm elde edilir.

Durum 2: $a = -1$ ise, $b = 0$ olur ve ikinci iki periyodik çözüm elde edilir.

Durum 3: $a = \overline{x}_1$ ise, $b = a^2 - 1 = \overline{x}_1$ olur ki bu denge çözümüdür.

Durum 4: $a = \overline{x}_2$ ise, $b = a^2 - 1 = \overline{x}_2$ olur ve diğer denge çözümüdür.

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2: (5.1) fark denklemi üç periyodik çözümlere sahip değildir.

İspat: $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$, (5.1)'in iki periyodik bir çözümü olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}_0$ ve en az ikisi birbirinden farklı olan $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $x_{3n-2} = a$, $x_{3n-1} = b$ ve $x_{3n} = c$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0x_{-2} - 1 = ac - 1 = a, \\ x_2 &= x_1x_{-1} - 1 = ab - 1 = b, \\ x_3 &= x_2x_0 - 1 = bc - 1 = c, \end{aligned} \tag{5.5}$$

olur. (5.5)'den kolaylıkla $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ olduğu görülür öyle ki

$$c = 1 + \frac{1}{a},\ a = 1 + \frac{1}{b},\ b = 1 + \frac{1}{c} \tag{5.6}$$

dır. (5.6)'dan

$$c = 1 + \frac{b}{b+1} = \frac{2b+1}{b+1} \Rightarrow b = 1 + \frac{b+1}{2b+1} = \frac{3b+2}{2b+1} \tag{5.7}$$

yazılabilir ki buradan $b^2 - b - 1 = 0$ olur. Dolayısıyla, $b = \overline{x}_1$ veya $b = \overline{x}_2$ bulunur. Buradan ve (5.6)'dan $a = b = c = \overline{x}_1$ veya $a = b = c = \overline{x}_2$ bulunur. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 5.3: (5.1) fark denklemi dört periyodik çözümlere sahip değildir.

İspat: $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$, (5.1)'in dört periyodik bir çözümü olsun ve $x_{-2} = a$, $x_{-1} = b$, $x_0 = c$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = x_0 x_{-2} - 1 = ac - 1, \tag{5.8}$$

$$x_2 = x_1 x_{-1} - 1 = (ac-1)b - 1 = a, \tag{5.9}$$

$$x_3 = x_2 x_0 - 1 = ac - 1 = b, \tag{5.10}$$

$$x_4 = x_3 x_1 - 1 = b(ac-1) - 1 = c \tag{5.11}$$

olur. Böylece (5.9) ve (5.11)'den, $a = c$ olduğu görülür. (5.10) ile birlikte bu

$$a^2 - 1 = b \tag{5.12}$$

durumunu verir. (5.11)'den $b(a^2-1) - 1 = a$ veya eşdeğer olarak

$$(a+1)(b(a-1)-1) = 0 \tag{5.13}$$

elde edilir.

Durum 1: Varsayalım ki $a = -1$ olsun. O zaman $b = a^2 - 1 = 0$ ve $c = a = -1$ olur. Teorem 5.1 ile bu iki periyodik bir çözümdür.

Varsayalım ki $a \neq -1$ olsun. $a = 1$ ise, o zaman (5.13)'dan çelişki elde edilir. Eğer $a \neq 1$ ise, o zaman $a^2 - 1 = b = 1/(a-1)$ olur, öyle ki $a(a^2 - a - 1) = 0$ olur. Dolayısıyla, $a = 0$, $a = \overline{x}_1$ veya $a = \overline{x}_2$ olur.

Durum 2: Varsayalım ki $a = 0$ olsun. O zaman $b = a^2 - 1 = -1$ ve $c = a = 0$ olur. Teorem 5.1 ile bu iki periyodik bir çözümdür.

Durum 3: Varsayalım ki $a = \overline{x}_1$ olsun. $b = a^2 - 1 = \overline{x}_1$ ve $c = \overline{x}_1$ olur ki bu denge çözümüdür.

Durum 4: Varsayalım ki $a = \overline{x}_2$ ise, $b = a^2 - 1 = \overline{x}_2$ ve $c = \overline{x}_2$ olur ki bu da diğer denge çözümüdür.

Böylece ispat tamamlanır.

5.2 (5.1)'in Çözümlerinin Lokal Kararlılığı

Bu kısımda, (5.1)'in iki denge noktasının lokal kararlılık yapısına değinilecektir.

Teorem 5.4: (5.1)'in negatif denge noktası $\overline{x}_1$ kararsızdır. Dahası o hiperbolik denge noktasıdır.

İspat: (5.1) denkleminin negatif denge noktası olan $\overline{x}_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ civarında lineerleştirilmiş denklemi

$$x_{n+1} - \overline{x}_1 x_n - \overline{x}_1 x_{n-2} = 0 \tag{5.14}$$

şeklindedir. Onun karakteistik polinomu

$$P_{\overline{x}_1}(\lambda) = \lambda^3 - \overline{x}_1 \lambda^2 - \overline{x}_1 \tag{5.15}$$

olur. Dolayısıyla

$$P'_{\overline{x}_1}(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\overline{x}_1 \lambda = \lambda(3\lambda - 2\overline{x}_1) \tag{5.16}$$

dır.

$$P_{\overline{x}_1}(-2) = -8 - 5\overline{x}_1 < 0 \text{ ve } P_{\overline{x}_1}(-1) = -1 - 2\overline{x}_1 = \sqrt{5} - 2 > 0 \tag{5.17}$$

olduğundan $P_{\overline{x}_1}$'ın $\lambda_1 \in (-2, -1)$ kökü vardır.

Diğer taraftan $P_{\overline{x}_1}(0) = -\overline{x}_1 > 0$ ve (5.16)'dan, λ_1, $P_{\overline{x}_1}$'ın tek reel köküdür. Dolayısıyla $\lambda_{2,3}$ diğer iki kökü kompleks eşleniktirler.

$$\lambda_1 \left|\lambda_2\right|^2 = \overline{x}_1 \tag{5.18}$$

olduğundan, $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$ elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 5.5: (5.1)'in pozitif denge noktası $\overline{x}_2$ kararsızdır. Dahası o da hiperbolik denge noktasıdır.

İspat: (5.1)'in pozitif denge noktası $\overline{x}_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in (1, 2)$ civarında lineerleştirilmiş denklemi

$$x_{n+1} - \overline{x}_2 x_n - \overline{x}_2 x_{n-2} = 0 \tag{5.19}$$

şeklindedir. Onun karakteristik polinomu

$$P_{\overline{x}_2}(\lambda) = \lambda^3 - \overline{x}_2 \lambda^2 - \overline{x}_2 \tag{5.20}$$

olur. Dolayısıyla

$$P'_{\overline{x}_2}(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\overline{x}_2\lambda = \lambda(3\lambda - 2\overline{x}_2) \tag{5.21}$$

dır.

$$P_{\overline{x}_2}(2) = 8 - 5\overline{x}_2 = \frac{11 - 5\sqrt{5}}{2} < 0 \tag{5.22}$$

$$P_{\overline{x}_2}(3) = 27 - 10\overline{x}_2 = 22 - 5\sqrt{5} > 0$$

olduğundan $P_{\overline{x}_2}$'ın $\lambda_1 \in (2,3)$ kökü vardır.

Buradan ve $P_{\overline{x}_2}(0) = -\overline{x}_2 < 0$ olduğundan, λ_1, $P_{\overline{x}_2}$'ın tek reel köküdür. Dolayısıyla $\lambda_{2,3}$ diğer iki kökü kompleks eşleniktirler.

$$\lambda_1 \left|\lambda_2\right|^2 = \overline{x}_2 \tag{5.23}$$

olduğundan, $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$ elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

5.3 $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (-1,0)$ Durumu

Bu kısımda, (5.1) denkleminin $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (-1,0)$ başlangıç koşulları için çözümlerinin yapısı araştırılacaktır. Bu kısmın ana sonucunu vermeden önce bazı yardımcı sonuçlara ihtiyaç duyarız.

Önerme 5.6: Varsayalım ki $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (-1,0)$ olsun. O zaman (5.1)'in bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü $n \geq 2$ için $x_n \in (-1,0)$ olacak şekildedir.

İspat: $x_{-2}, x_0 \in (-1,0)$ olduğundan $x_1 = x_0 x_{-2} - 1 \in (-1,0)$ olur. Bazı $k \geq 2$'ler için $x_n \in (-1,0)$ olduğunu varsayalım. O zaman $x_{k+1} = x_k x_{k-2} - 1 \in (-1,0)$ olur. İspat tümevarımla sonlanır.

Benzer bir bakış açısı ile Önerme 5.6'nın bir genişlemesi aşağıda verilir.

Varsayalım ki $k_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 2m$, $s \in \max\{k_1, k_2, ..., k_{2m}\}$ için $x_{-s}, ..., x_{-1}, x_0 \in (-1,0)$ olsun. O zaman (5.1)'in bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü

$$x_{n+1} = \prod_{i=1}^{2m} x_{n-k_i} - 1, \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{5.24}$$

$n \geq -s$ için $x_n \in (-1,0)$ şeklindedir.

Şimdi (5.1) denkleminin bir çözümünün çift terimlerinide tek terimlerinide sağlayan bir denklem bulacağız. (5.1)'den

$$x_{2n+3} = x_{2n+2}x_{2n} - 1, \ x_{2n+2} = x_{2n+1}x_{2n-1} - 1, \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{5.25}$$

yazılabilir. O zaman

$$\begin{aligned} x_{2n+3} &= (x_{2n+1}x_{2n-1} - 1)(x_{2n-1}x_{2n-3} - 1) - 1 \qquad (5.26) \\ &= x_{2n-1}(x_{2n+1}x_{2n-1}x_{2n-3} - x_{2n+1} - x_{2n-3}), \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$x_{2n+4} = x_{2n}(x_{2n+2}x_{2n}x_{2n-2} - x_{2n+2} - x_{2n-2}), \ n \in \mathbb{N} \tag{5.27}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $y_n = x_{2n+1}$ ve $z_n = x_{2n+2}$ alt dizileri

$$u_{n+1} = u_{n-1}(u_n u_{n-1} u_{n-2} - u_n - u_{n-2}), \ n \in \mathbb{N} \tag{5.28}$$

fark denklemini sağlar ve $u_n \in (-1,0)$'dır.

Şimdide $v_n = -u_n$ değişken değiştirmesini yapalım. Bu durumda (5.28)

$$v_{n+1} = v_{n-1}(v_n + v_{n-2} - v_n v_{n-1} v_{n-2}),\ n \in \mathbb{N} \tag{5.29}$$

denklemine dönüşür. Aynı zamanda şunu da söyleyelim ki $v_n \in (0,1)$'dir.

(5.29)'nın aşağıdaki dört denge noktası vardır;

$$\overline{v}_0 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \overline{v}_1 = 0,\ \overline{v}_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \overline{v}_3 = 1. \tag{5.30}$$

$u, v, w \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(u,v,w) = v(u + w - uvw) \tag{5.31}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda $f_u = v - v^2 w = v(1 - vw) > 0$, $f_v = u + w - 2uvw = u(1-vw) + w(1-vu) > 0$, $f_w = v - v^2 u = v(1-vu) > 0$ durumları mevcuttur. Böylece f fonksiyonu her bir bileşenine göre kuvvetli şekilde artandır.

Önerme 5.7: (5.1)'in negatif denge noktası $\overline{x}_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$'a eşit olmayan bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünü alalım. Varsayalım ki

$$x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (-1,0) \tag{5.32}$$

olsun ve aşağıdaki koşullardan bir tanesi sağlanır.

(H_1) $x_{-2} \leq \overline{x}_1$, $x_{-1} \geq \overline{x}_1$, $x_0 \leq \overline{x}_1$,

(H_2) $x_{-2} \geq \overline{x}_1$, $x_{-1} \leq \overline{x}_1$, $x_0 \geq \overline{x}_1$.

O zaman her $n \geq -2$ için $x_n \in (-1,0)$ olur ve

(a) Eğer (H_1) sağlanırsa, o zaman bir $N \in \mathbb{N}_0$ vardır öyle ki

$$x_{2n+1} > \overline{x}_1,\ x_{2n+2} < \overline{x}_1,\ n \geq N, \tag{5.33}$$

(b) Eğer (H_2) sağlanırsa, o zaman bir $N \in \mathbb{N}_0$ vardır öyle ki

$$x_{2n+1} < \overline{x}_1,\ x_{2n+2} > \overline{x}_1,\ n \geq N. \tag{5.34}$$

İspat: Önerme 5.6 ile $n \geq -2$ için $x_n \in (-1,0)$'dır. Sadece (a)'nın ispatını yapacağız. (b)'nin ispatı benzerdir ve ihmal edilebilir. $-1 < x_0, x_{-2} \leq \overline{x}_1$ olduğundan

$$x_1 = x_0 x_{-2} - 1 \geq \overline{x}_1^2 - 1 = \overline{x}_1 \tag{5.35}$$

olur. Buradan ve $\overline{x}_1 \leq x_{-1} < 0$ olduğundan

$$x_2 = x_1 x_{-1} - 1 \leq \overline{x}_1^2 - 1 = \overline{x}_1 \tag{5.36}$$

olur.

Eğer $x_{-2} < \overline{x}_1$ veya $x_0 < \overline{x}_1$ ise, (5.34) sağlanır ve sonuç olarak (5.35)'de sağlanır. Eğer $x_{-2} = x_0 = \overline{x}_1$ ise, o zaman $x_{-1} > \overline{x}_1$ ve buradan (5.35) sağlanır. Bu durumda

$$x_3 = x_2 x_0 - 1 > \overline{x}_1^2 - 1 = \overline{x}_1 \tag{5.37}$$

olur. Dolayısıyla $N = 0$ ve $N = 1$ bariz adaydırlar.

Varsayalım ki (5.33), $N \leq n \leq k$ için sağlansın ve $N = 0$ olsun. $N = 1$ durumu benzerdir ve onun ispatı ihmal edilebilir. Bu durumda

$$x_{2k+3} = x_{2k+2} x_{2k} - 1 > \overline{x}_1^2 - 1 = \overline{x}_1 \tag{5.38}$$

olur. Buradan ve $\overline{x}_1 < x_{2k+1} < 0$ olduğundan

$$x_{2k+4} = x_{2k+3} x_{2k+1} - 1 < \overline{x}_1^2 - 1 = \overline{x}_1 \tag{5.39}$$

olur. Dolayısıyla tümevarımla ispat tamamlanır.

Teorem 5.8: (5.1)'in negatif denge çözümü $\overline{x}_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$'a eşit olmayan bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünü alalım. Varsayalım ki

$$x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (-1, 0) \tag{5.40}$$

olsun ve (H_1) vaya (H_2) koşullardan bir tanesi sağlansın. O zaman her $n \geq -2$ için $x_n \in (-1, 0)$ olur ve $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$, $\{-1, 0\}$ iki döngüsüne yakınsar.

İspat: Önerme 5.6 ile $n \geq -2$ için $x_n \in (-1, 0)$'dır. $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün $\{-1, 0\}$ iki döngüsüne yakınsak olduğunu gösterelim. Bunu göstermek adına $\{x_{2n}\}_{n=-1}^{\infty}$, $\{x_{2n+1}\}_{n=-1}^{\infty}$ alt dizilerininden bir tanesinin 0'a diğerininde -1'e yakınsak olduğunu gösterelim. Bunu göstermek, sırasıyla, aşağıdakileri göstermeye denktir:

(a) Eğer $n \geq -1$ için $v_n \in (0, 1) = (\overline{v}_1, \overline{v}_3)$ olmak üzere, bazı $N \geq -1$ ve $n \geq N$ için $v_n > \overline{v}_2$ ise, (5.3.6)'nın $\{v_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü $\overline{v}_3$'a yakınsar.

(b) Eğer $n \geq -1$ için $v_n \in (0, 1) = (\overline{v}_1, \overline{v}_3)$ olmak üzere, bazı $N \geq -1$ ve $n \geq N$ için

$v_n < \overline{v}_2$ ise, (5.3.6)'nın $\{v_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü $\overline{v}_1$'a yakınsar.

(a)'yı ispatlayalım. (b)'nin ispatı buna benzerdir ve ihmal edilebilir.

$$v_n \in (\overline{v}_2, \overline{v}_3),\ n \geq N \tag{5.41}$$

durumu vardır.

$$I = \liminf\{v_n\},\ S = \limsup\{v_n\} \tag{5.42}$$

olsun. O zaman

$$\overline{v}_2 \leq I \leq S \leq \overline{v}_3 \tag{5.43}$$

olur.

İlk olarak varsayalım ki $I = \overline{v}_2$ olsun. (5.41)'den bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki $I + \varepsilon < v_N, v_{N+1}, v_{N+2} < \overline{v}_3$ olur. f'nin monotonluğundan ve

$$f(x,x,x) > x,\ x \in (\overline{v}_2, \overline{v}_3) \text{ için} \tag{5.44}$$

olduğundan,

$$v_{N+3} = f(v_{N+2}, v_{N+1}, v_N) > f(I+\varepsilon, I+\varepsilon, I+\varepsilon) > I + \varepsilon \tag{5.45}$$

olur. Buradan ve tümevarımla $v_n > I+\varepsilon$, $n \geq N$ elde edilir. Bu da $\liminf_{n\to\infty} v_n \geq I + \varepsilon$ durumunu gerçekler. Bu bir çelişkidir.

Şimdi varsayalım ki $I \in (\overline{v}_2, \overline{v}_3)$ olsun. $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{v_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinin bir alt dizisi olsun, öyle ki $\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = I$ olsun. O zaman $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin, $\lim_{k\to\infty} v_{n_k-1}$, $\lim_{k\to\infty} v_{n_k-2}$ ve $\lim_{k\to\infty} v_{n_k-3}$ alt dizileri vardır. Sırasıyla bunlara K_{-1}, K_{-2}, K_{-3} diyelim. Buradan ve (5.44) ile

$$f(K_{-1}, K_{-2}, K_{-3}) = I < f(I,I,I) \tag{5.46}$$

olur. Dolayısıyla bir $i_0 \in \{1,2,3\}$ vardır öyle ki 0 olur. Aksi takdirde $i = 1,2,3$ için $K_{-i} \geq I$ olur ve f'nin monotonluğundan

$$f(I,I,I) \leq f(K_{-1}, K_{-2}, K_{-3}) = I < f(I,I,I) \tag{5.47}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Diğer taraftan $K_{-i_0} < I$ durumu I'nın seçimi ile çelişir. Dolayısıyla I, $(\overline{v}_2, \overline{v}_3)$ aralığında olamaz.

Yukarıdaki durumların hepsinden $\overline{v}_3 = I \leq S \leq \overline{v}_3$ bulunur. Sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \overline{v}_3$$

bulunur. İspat tamamlanır.

Teorem 5.9: Varsayalım ki (5.1)'in bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü için bir $N \geq -1$ vardır öyle ki

$$-1 < x_N < x_{N+2} < 0,\, 0 > x_{N-1} > x_{N+1} > x_{N+3} > -1 \tag{5.48}$$

olsun. O zaman çözüm $\{-1, 0\}$ iki döngüsüne yada $\overline{x}_1$ denge noktasına yakınsar.

İspat: İlk olarak Önerme 5.6 ile $n \geq N$ için $x_n \in (-1, 0)$ olduğunu not edelim. (5.1)'den

$$x_{n+4} - x_{n+2} = x_{n+1}(x_{n+3} - x_{n-1}) \tag{5.49}$$

elde edilir. $x_{N+1} \in (-1, 0)$ olduğundan ve $n = N$ için (5.3.26) kullanılarak, $0 > x_{N+4} > x_{N+2}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$x_N < x_{N+2} < x_{N+4} < 0,\, x_{N-1} > x_{N+1} > x_{N+3} > -1 \tag{5.50}$$

olur. Tümevarımla ve (5.49) fikriyle her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_N < x_{N+2} < ... < x_{N+2k} < 0,\, x_{N-1} > x_{N+1} > ... > x_{N+2k+1} > -1 \tag{5.51}$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla, $\lim_{k\to\infty} x_{N+2k}$ ve $\lim_{k\to\infty} x_{N+2k+1}$ sonlu limitleri vardır, onlara l_1 ve l_2 diyelim. $k \to \infty$ için

$$x_{N+2k+2} = x_{N+2k+1}x_{N+2k-1} - 1,\, x_{N+2k+3} = x_{N+2k+2}x_{N+2k} - 1 \tag{5.52}$$

durumlarının limiti alınırsa, $l_1 = l_2^2 - 1$ ve $l_2 = l_1^2 - 1$ elde edilir. Dolayısıyla

$$(l_1 - l_2)(l_1 + l_2 + 1) = 0 \tag{5.53}$$

bulunur. Bulunur $l_1 = l_2 = \overline{x}_1$ veya $l_1 \neq l_2$ ise, o zaman $l_1 + l_2 = -1$ olur ki bu da $l_1 = 0$ ve $l_2 = -1$ olmasıdır.

Uyarı 5.10: $a, b, c \in (-1, 0)$ olmak üzere $x_{-2} = a$, $x_{-1} = b$ ve $x_0 = c$ olsun. $N = -1$ için, (5.48)

$$\begin{aligned} x_{-2} &> x_0 \Leftrightarrow a > c, \qquad (5.54)\\ x_1 - x_{-1} &= x_0x_{-2} - 1 - x_{-1} = ac - 1 - b > 0,\\ x_2 - x_0 &= x_1x_{-1} - 1 - x_0 = x_0x_{-1}x_{-2} - x_{-1} - x_0 - 1 = abc - b - c - 1 < 0. \end{aligned}$$

olacaktır. Dolayısıyla bu koşullar altında

$$a > c,\, ac > b + 1,\, abc < b + c + 1 \tag{5.55}$$

olur. (5.48), $N = -1$ için sağlanır. $a, b, c \in (-1, 0)$ olduğunu göstermek kolaydır, öyle ki (5.55) sağlayan küme boş kümedir.

Aynı zamanda şunu da not edelim ki Teorem 5.9 ispatı içinde (5.49) ilişkisi önemli bir rol oynar.

(5.1)'in negatif denge noktası $\overline{x}_1$'a yakınsayan, aşikar olmayan çözümleri var olup olmadığı doğal bir sorudur.

Teorem 5.11: (5.1)'in negatif denge noktası $\overline{x}_1$'a yakınsayan, aşikar olmayan çözümleri vardır.

İspat: $\overline{x}_1$'a yakınsayan çözümü bulmak için, $x_n = y_n + \overline{x}_1$ değişikliğini yaparsak, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$y_{n+3} - \overline{x}_1(y_{n+2} + y_n) = y_{n+2}y_n,\, n \geq -2 \tag{5.56}$$

elde edilir ve $a_{00} = 0$ ile

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}p^{nk}q^{nl} \tag{5.57}$$

formülasyonu yaparız. Burada p ve q

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \overline{x}_1(\lambda^2 + 1) \tag{5.58}$$

karakteristik polinomunun kompleks eşlenik kökleridir. Şunu da not edelim ki $|p| = |q| = r \approx 0,74448$'dir. (5.56) içinde (5.57) yerine konulursa ve katsayılar kıyaslanarak, $d_{kl} = p^{3k}q^{3l} - \overline{x}_1(p^{2k}q^{2l} + 1)$ ile

$$d_{kl}a_{kl} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0, j+i\neq 0}^{l} a_{ij}p^{2i}q^{2j}a_{k-i,l-j}, \tag{5.59}$$

bulunur. (5.59) denklemi $k + l \leq 1$ için sağlanır. Burada a_{10} ve a_{01} keyfi sayılardır, öyle ki, $k + l > 1$ sağlayan k, l sayıları için (5.59)'u düşünmek kafidir. a_{10} ve a_{01} kompleks eşlenik olarak seçilirse, o zaman (5.59)'a göre bütün a_{kl}'ler a_{lk}'lara kompleks eşleniktirler ve sonuç olarak (5.57) serisi reeldir. $|a_{10}| = 1$, $a_{10} = \overline{a_{01}}$ ile (5.57)'nin bir çözümünü arayalım ve pozitif bir λ sabitine karar verelim, öyle ki

$$|a_{kl}| \leq \lambda^{k+l-1} \tag{5.60}$$

olsun. Bu eşitlik $k+l \leq 1$ için sağlandığından, tümevarımla, (5.59)'dan

$$|a_{kl}| \leq \lambda^{k+l-2} \frac{1}{|d_{kl}|} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0, j+i \neq 0}^{l} r^{2(i+j)} \tag{5.61}$$

elde edilir. Not edelim ki

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0, j+i \neq 0}^{l} r^{2(i+j)} < \frac{1}{(1-r^2)^2} - 1 = \frac{2r^2 - r^4}{(1-r^2)^2}$$

dır.

$$D := \sup_{k+l \geq 2} \frac{1}{|d_{kl}|} = \frac{1}{|d_{21}|} \approx 2.095 \tag{5.62}$$

olduğunu kontrol etmek zor değildir. Dolayısıyla (5.60)

$$\lambda = D \frac{2r^2 - r^4}{(1-r^2)^2} \tag{5.63}$$

olduğunda sağlanır.

Eğer $\lambda r^n < 1$ ise, (5.57) serisinin yakınsaklığı için λ seçilebilir. Bu da $n >(\ln \lambda)/ \ln(1+r)$'yi gerçekler. $\lambda \approx 8,450$'dir. Böylece $(\ln \lambda)/ \ln(1+r) \approx 7,233$ ve böylelikle $n > 7$ için serinin yakınsaklığı bulunur. Bu yolla $n > 7$ için, (5.56)'nın reel bir çözümüne yakınsayan (5.56)'nın bir çözümünü elde ederiz., yani, (5.1)'in $\overline{x}_1$'a yakınsayan bir çözümü bulunur. İspat tamamlanır.

Uyarı 5.12: $a_{10} = a_{01} = 1$ için, (5.59) içindeki ilk katsayılar

$$\begin{aligned} a_{20} &= \frac{p^2}{d_{20}}, \; a_{11} = \frac{p^2+q^2}{d_{11}}, \; a_{02} = \frac{q^2}{d_{02}}, \\ a_{30} &= \frac{p^2(p^2+1)a_{20}}{d_{30}}, \; a_{21} = \frac{(p^4+q^2)a_{20} + p^2(q^2+1)a_{11}}{d_{21}} \end{aligned} \tag{5.64}$$

olur.

Uyarı 5.13: (5.56) içinde $n+c$ ile $n'i$ yer değiştirirsek, o zaman c keyfi seçilerek ilk katsayıları keyfi elde ederiz (sadece modül 1'e göre değil).

5.4 (5.1)'in Sınırsız Çözümleri

Bu kısımda, (5.1)'in sınırsız çözümlerinin varlığını veren başlangıç koşullarının kümesini bulacağız. Aşağıdaki teorem başlangıç koşullarının kümesine ilişkin sınırsız çözümlerin varlığını gösterecektir.

Teorem 5.14: Varsayalım ki

$$\min\{|x_{-2}|, |x_{-1}|, |x_0|\} > \overline{x}_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{5.65}$$

olsun. O zaman

$$\overline{x}_2 < |x_0| < |x_1| < |x_2| < ... < |x_n| < ... \tag{5.66}$$

olur.

İspat: Hipotezden $|x_{-2}| - 1 > \overline{x}_2 - 1$ ve dolayısıyla $|x_0|(|x_{-2}| - 1) > \overline{x}_2(\overline{x}_2 - 1) = 1$ durumu mevcuttur. Böylelikle, $|x_0||x_{-2}| - |x_0| > 1$ ve bu yüzden $|x_0||x_{-2}| - 1 > |x_0|$ bulunur. Diğer taraftan,

$$|x_1| = |x_0 x_{-2} - 1| > |x_0||x_{-2}| - 1 \tag{5.67}$$

dır. Son iki eşitsizliği birleştirerek, $\overline{x}_2 < |x_0| < |x_1|$ olur. Varsayalım ki bazı $k \in \mathbb{N}$'ler için

$$\overline{x}_2 < |x_0| < |x_1| < |x_2| < ... < |x_k| \tag{5.68}$$

olsun. $|x_{k-2}| - 1 > \overline{x}_2 - 1$ olduğundan $|x_k|(|x_{k-2}| - 1) > \overline{x}_2(\overline{x}_2 - 1) = 1$ veya eş değer olarak $|x_k||x_{k-2}| - 1 > |x_k|$ olur. Buradan ve (5.1)'den

$$|x_{k+1}| = |x_k x_{k-2} - 1| > |x_k||x_{k-2}| - 1 > |x_k| > \overline{x}_2 \tag{5.69}$$

elde edilir. Tümevarımla ispat sonlanır.

Sonuç 5.15: Varsayalım ki (5.1)'in bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlasın;

$$\min\{x_{-2}, x_{-1}, x_0\} > \overline{x}_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{5.70}$$

O zaman çözüm ∞'a ıraksar.

İspat: Aksine varsayalım ki çözüm ∞'a ıraksamasın. Dizi artan ve sınırlı olduğu için yakınsak olmak zorundadır. Ancak (5.1) sadece iki tane denge noktasına sahiptir ve onların her ikiside x_0'dan küçüktür. Böylece çelişkiye düşeriz ve ispat tamamlanır.

Gelecek sonucu verebilmek için aşağıdaki tanıma ihtiyaç duyarız.

Tanım 5.16: Varsayalım ki (5.1)'in bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünü alalım ve $i \in \{1, 2\}$ olsun. O zaman eğer $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_{N+n(k+l)+1}, ..., x_{N+n(k+l)+k} \geq \overline{x}_i$$

ve

$$x_{N+n(k+l)+1}, ..., x_{N+n(k+l)+k+l} < \overline{x}_i$$

veya sırasıyla

$$x_{N+n(k+l)+1}, ..., x_{N+n(k+l)+k} < \overline{x}_i$$

ve

$$x_{N+n(k+l)+1}, ..., x_{N+n(k+l)+k+l} \geq \overline{x}_i$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ varsa, o zaman diyebiliriz ki çözüm k^+, l^- (veya k^-, l^+) kalıbında eninde sonunda yarı döngülere sahiptir.

Uyarı 5.17: Şunu da not edelim ki $M > 2$ için eninde sonunda yarı döngü örnekleri $k_1^{\pm}, k_2^{\pm}, k_3^{\pm}, ..., k_M^{\pm}$'ye genişletilebilir.

Teorem 5.18: Varsayalım ki (5.1)'in bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlasın;

$$\min\{|x_{-2}|, |x_{-1}|, |x_0|\} > \overline{x}_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{5.71}$$

ve x_{-2}, x_{-1}, x_0'dan en az bir tanesi negatif olsun. O zaman

$$|x_n| \geq \overline{x}_2,\ n \geq -2 \tag{5.72}$$

olur ve çözüm eninde sonunda artan yedi alt diziye ayrılabilir, öyle ki çözüm aşağıdaki eninde sonunda yarı döngü kalıplarına sahiptir;

$$1^+, 1^-, 2^+, 3^-. \tag{5.73}$$

İspat: Varsayalım ki $x_{-2}, x_{-1}, x_0 < -\overline{x}_2$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = x_0 x_{-2} - 1 > \overline{x}_2^2 - 1 = \overline{x}_2,$$

$$x_2 = x_1 x_{-1} - 1 < -\overline{x}_2^2 - 1 = -\overline{x}_2 - 2 < -\overline{x}_2,$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_2x_0 - 1 > \overline{x}_2^2 - 1 = \overline{x}_2, \\
x_4 &= x_3x_1 - 1 > \overline{x}_2^2 - 1 = \overline{x}_2, \\
x_5 &= x_4x_2 - 1 < -\overline{x}_2^2 - 1 = -\overline{x}_2 - 2 < -\overline{x}_2, \\
x_6 &= x_5x_3 - 1 < -\overline{x}_2^2 - 1 = -\overline{x}_2 - 2 < -\overline{x}_2, \\
x_7 &= x_6x_4 - 1 < -\overline{x}_2^2 - 1 = -\overline{x}_2 - 2 < -\overline{x}_2,
\end{aligned} \tag{5.74}$$

olur. Dolayısıyla $-2 \leq i \leq 7$ için $|x_i| > \overline{x}_2$ ve $x_5, x_6, x_7 < -\overline{x}_2 - 2 < -\overline{x}_2 < 0$ bulunur. Tümevarımla her bir $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned}
x_{7k+1} &= x_{7k}x_{7k-2} - 1 > \overline{x}_2^2 - 1 = \overline{x}_2, \\
x_{7k+2} &= x_{7k+1}x_{7k-1} - 1 < -\overline{x}_2^2 - 1 = -\overline{x}_2 - 2 < -\overline{x}_2, \\
x_{7k+3} &= x_{7k+2}x_{7k} - 1 > \overline{x}_2^2 - 1 = \overline{x}_2, \\
x_{7k+4} &= x_{7k+3}x_{7k+1} - 1 > \overline{x}_2^2 - 1 = \overline{x}_2, \\
x_{7k+5} &= x_{7k+4}x_{7k+2} - 1 < -\overline{x}_2^2 - 1 = -\overline{x}_2 - 2 < -\overline{x}_2, \\
x_{7k+6} &= x_{7k+5}x_{7k+3} - 1 < -\overline{x}_2^2 - 1 = -\overline{x}_2 - 2 < -\overline{x}_2, \\
x_{7k+7} &= x_{7k+6}x_{7k+4} - 1 < -\overline{x}_2^2 - 1 = -\overline{x}_2 - 2 < -\overline{x}_2,
\end{aligned} \tag{5.75}$$

bulunur. Böylelikle ispatın ilk aşaması biter.

Geriye kalan diğer altı durum $1, 2, 3, 4, 5, 6$ için yukarıdaki durumdan takip edilebilir. Buradan ve Teorem 5.14 ile, $\{x_{7k+i}\}_{k=0}^{\infty}$ dizisi, yukarıda belirtilen yarı döngü örneği ile monoton olarak ∞ veya $-\infty$'a ıraksar.

6. $x_n = x_{n-l}x_{n-k} - 1$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DİNAMİĞİ

Bu bölümde $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$, $obeb(k, l) = 1$ olmak üzere

$$x_n = x_{n-l}x_{n-k} - 1,\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{6.1}$$

yüksek mertebeden fark denkleminin çözümlerinin uzun terimli davranışlarını

$$x_{-l}, ..., x_{-2}, x_{-1}$$

başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere araştırılacaktır.

Şunu hemen not edelim ki (6.1)

$$\overline{x}_1 =: \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \overline{x}_2 =: \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{6.2}$$

denge noktalarına sahiptir.

6.1 Yardımcı Bir Sonuç

Burada, bu bölümün ana sonucunun ispatında kullanılacak, periyodiklik üzerine yardımcı bir sonuç verilecektir. Bu sonuç aşağıdaki önermede birleştirilecektir. Hemen şunu not edelim ki (6.1)'in bir çözümü eninde sonunda denge noktalarından birine eşit oluyorsa, o çözüme aşikardır denir.

Önerme 6.1: Varsayalım ki $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$ ve $obeb(k, l) = 1$ olsun. Bu durumda (6.1) fark denklemi l-periyotlu aşikar olmayan herhangi bir çözüme sahip değildir.

İspat: İlk olarak not edelim ki sıfıra eşit olmayan terimlerle (6.1)'in herhangi bir çözümü

$$x_{n-l} = \frac{x_n + 1}{x_{n-k}} \tag{6.3}$$

denkleminin bütün negatif indislerine uzatılabilir. Şimdi varsayalım ki $p_0, p_1, ..., p_{l-1}$, (6.1) denkleminin l-periyotlu aşikar olmayan bir çözümü olsun. Bu çözüm açık şekilde aşağıdaki cebirsel denklemi sağlar;

$$p_{i+k} = p_{i+k}p_i - 1, \; i = 0, 1, ..., l - 1. \tag{6.4}$$

Eğer bir bir $i + k$ indeksi $\{0, 1, 2, ..., l - 1\}$ kümesinin dışında ise

$$p_{i+k} = p_{i+k(\mathrm{mod}\, l)} \tag{6.5}$$

diyebiliriz. Bazı $p_i s$'ler sıfıra eşit ise, $0 = -1$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$\text{her bir } i \in \{0, 1, ..., l - 1\} \text{ için } p_i \neq 0 \tag{6.6}$$

bulunur. Dahası yukarıdaki açıklamaya göre, negatif indislerine ilişkin bir çözümü iki taraflı periyodik çözümü olarak kabul edilebilir. (6.4) sistemi

$$p_i = \frac{p_{i+k} + 1}{p_{i+k}} = f(p_{i+k}), \; i = 0, 1, ..., l - 1 \tag{6.7}$$

sistemine denktir. Buradan ve (p_i) dizisinin l-periyodikliğinden

$$p_i = f^{(l)}(p_{i+lk}) = f^{(l)}(p_i), \, i = 0, 1, ..., l - 1 \tag{6.8}$$

yazılabilir, yani, p_i, $i = 0, 1, ..., l - 1$

$$x = f^{(l)}(x) \tag{6.9}$$

denkleminin çözümleridir. Açık bir şekilde bu denklem

$$x = \frac{a_l x + b_l}{c_l x + d_l} \tag{6.10}$$

formunda yazılabilir. Buradaki a_l, b_l, c_l, d_l katsayıları aşağıdaki yolla elde edilir;

$$\begin{pmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{l-1} & b_{l-1} \\ c_{l-1} & d_{l-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^l . \tag{6.11}$$

Dolayısıyla,

$$a_l = a_{l-1} + b_{l-1}, \ b_l = a_{l-1}, \ l \geq 2, \tag{6.12}$$

$$c_l = c_{l-1} + d_{l-1}, \ d_l = c_{l-1}, \ l \geq 2, \tag{6.13}$$

olur. Şimdi

$$c_l = a_{l-1}, \, d_l = b_{l-1}, \, l \geq 2 \tag{6.14}$$

olduğunu ispatlayalım. $l = 2$ için, (6.14) eşitliği açıktır. (6.14) $l = -1$ için doğru ise, bu durumda tümevarımla ve (6.12), (6.13) eşitlikleri ile aşağıdaki durum elde edilir;

$$\begin{aligned} c_l &= c_{l-1} + d_{l-1} = a_{l-2} + b_{l-2} = a_{l-1}, \\ d_l &= c_{l-1} = a_{l-2} = b_{l-1}, \, l \geq 3. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Tümevarımla iddia'nın ispatı sonlanır.

Eğer x, (6.10)'in bir çözümü ise, o zaman basit bir hesaplama ile aşağıdaki eşitliğin sağlandığı görülür;

$$c_l x^2 + (d_l - a_l)x - b_l = 0. \tag{6.16}$$

Eş değer olarak

$$a_{l-1}(x^2 - x - 1) = 0 \tag{6.17}$$

yazılabilir. Buradan ve (6.12)'dan $l \geq 2$ için $a_l \geq a_{l-1} \geq ... \geq a_1 = 1$ olduğu için, $x = \overline{x}_1$ veya $x = \overline{x}_2$ olur. Dolayısıyla her bir p_i, bu iki denge noktasından birine eşittir.

Varsayalım ki $i \in \{0, 1, ..., l-1\}$ için $p_i = \overline{x}_1$ olsun. Bu durumda her bir $j \in \{0, 1, ..., l-1\}$ için

$$p_i = f^{(j)}(p_i) = p_{i-jk} \tag{6.18}$$

olur. Eğer $j_1, j_2 \in \{0, 1, ..., l-1\}$, $j_1 \neq j_2$ için $i - j_1 k = i - j_2 k (\operatorname{mod} l)$ oluyorsa, $(j_1 - j_2)k = 0(\operatorname{mod} l)$ olur. Ancak bu $obeb(k, l) = 1$ varsayımı ile çelişir. Dolayısıyla her bir $i \in \{0, 1, ..., l-1\}$ için $p_i = \overline{x}_1$ bulunur.

Benzer şekilde bazı $i \in \{0, 1, ..., l-1\}$ için $p_i = \overline{x}_2$ ise, o zaman her bir $i \in \{0, 1, ..., l-1\}$ için $p_i = \overline{x}_2$ bulunur. İspat tamamlanır.

6.2 (6.1)'in Sınırsız Çözümleri

Aşağıdaki genel teorem (6.1) denkleminin başlangıç koşullarına ilişkin denklemin sınırsız çözümlerinin varlığını gösterir.

Teorem 6.2: Varsayalım ki $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$ olsun ve $(x_n)_{n \geq -l}$, (6.1)'in bir çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar doğrudur;

(a) Eğer

$$\min\{|x_{-l}|, ..., |x_{-2}|, |x_{-1}|\} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \overline{x}_2 \tag{6.19}$$

ise, o zaman

$$(|x_{(m-1)l-i}|)_{m \in \mathbb{N}},\ i = 1, 2, ..., l \tag{6.20}$$

alt dizileri kuvvetli şekilde artandır.

(b) Eğer (6.19) koşulu sağlanıyor ve $(|x_{(m-1)l-i_0}|)_{m \in \mathbb{N}}$ alt dizisi sınırlı olacak şekilde bir $i_0 \in \{1, 2, ..., l\}$ varsa, o zaman $(x_n)_{n \geq -l}$ dizisinde sınırlıdır.

(c) Eğer $obeb(k, l) = 1$ ve

$$\min\{x_{-l}, ..., x_{-2}, x_{-1}\} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \overline{x}_2 \tag{6.21}$$

ise, o zaman $(x_n)_{n \geq -l}$ dizisi $n \to \infty$ için $+\infty$'a ıraksar.

İspat (a): Hipotezden

$$|x_{j-k}| - 1 > \overline{x}_2 - 1,\ j = 0, 1, ..., k-1 \tag{6.22}$$

durumu vardır ve bu yüzden

$$|x_{j-l}| (|x_{j-k}| - 1) > \overline{x}_2(\overline{x}_2 - 1) = 1,\ j = 0, 1, ..., k-1 \tag{6.23}$$

olur. Böylelikle

$$|x_{j-l}| |x_{j-k}| - |x_{j-l}| > 1,\ j = 0, 1, ..., k-1 \tag{6.24}$$

veya eşdeğer olarak

$$|x_{j-l}| |x_{j-k}| - 1 > |x_{j-l}|,\ j = 0, 1, ..., k-1 \tag{6.25}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$|x_j| = |x_{j-l}x_{j-k} - 1| > |x_{j-l}| |x_{j-k}| - 1,\ j = 0, 1, ..., k-1 \tag{6.26}$$

durumu mevcuttur. (6.24) ve (6.25) birleştirilerek

$$|x_j| > |x_{j-l}| > \overline{x}_2,\ j = 0, 1, ..., k-1 \tag{6.27}$$

elde edilir. Varsayalım ki $0 \leq j \leq j_0 < l-1$ için

$$\overline{x}_2 < |x_{j-l}| < |x_j| \tag{6.28}$$

kanıtlamış olduğumuzu varsayalım. $j_0 + 1 - k \leq j_0$ olduğundan, (6.28)'den

$$|x_{j_0+1-l}| \left(|x_{j_0+1-k}| - 1\right) > \overline{x}_2(\overline{x}_2 - 1) = 1 \tag{6.29}$$

elde edilir. Dolayısıyla (6.1), üçgen eşitsizliği, (6.28) ve (6.29)'dan

$$|x_{j_0+1}| = |x_{j_0+1-l}x_{j_0+1-k} - 1| > |x_{j_0+1-l}|\,|x_{j_0+1-k}| - 1 > |x_{j_0+1-l}| > \overline{x}_2 \tag{6.30}$$

elde edilir. Sonuç olarak, tümevarımla

$$\overline{x}_2 < |x_{j-l}| < |x_j|,\ j = 0, 1, ..., l-1 \tag{6.31}$$

bulunur.

Şimdi bazı $m \in \mathbb{N}_0$'lar için

$$\overline{x}_2 < |x_{j-l}| < |x_j| < |x_{j+l}| < ... < |x_{j+ml}|,\ j = 0, 1, ..., l-1 \tag{6.32}$$

durumunu kanıtlamış olduğumuzu varsayalım.

(6.1) otonom olduğundan, $y_n = x_{n+(m+1)l}$, $n \geq -l$ dizisi

$$y_{-l} = x_{ml}, ..., y_{-1} = x_{ml+l-1} \tag{6.33}$$

başlangıç koşulları ile birlikte bir çözümdür. Kanıtladığımız şey ile

$$\overline{x}_2 < |y_{j-l}| < |y_j|,\ j = 0, 1, ..., l-1 \tag{6.34}$$

durumu takip edilir veya eş değer olarak

$$\overline{x}_2 < |x_{j+ml}| < \left|x_{j+(m+1)l}\right|,\ j = 0, 1, ..., l-1. \tag{6.35}$$

Tümevarımla bu durumun ispatı sonlanır.

(b) Genelliği bozmaksızın, diğer durumlar indislerin kaydırılmasıyla elde edilebileceğinden varsayalım ki $(|x_{(m-1)l}|)_{m\in\mathbb{N}_0}$ alt dizisi sınırlı olsun. (a)'dan alt dizi artan olduğundan, o artarak bir $a > \overline{x}_2$ noktasına yakınsar. Buradan ve

$$x_{ml-k} = \frac{1 + x_{ml}}{x_{(m-1)l}},\ m \in \mathbb{N}_0 \tag{6.36}$$

olduğundan

$$|x_{ml-k}| = \frac{|1 + x_{ml}|}{\left|x_{(m-1)l}\right|} < \frac{1 + a}{\overline{x}_2},\ m \in \mathbb{N}_0 \tag{6.37}$$

bulunur. Dolayısıyla $(|x_{ml-k}|)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sınırlıdır da, (a) içindeki durumlar sağlandığından o yakınsaktır. Tümevarımla, $(|x_{ml-sk}|)_{m\in\mathbb{N}_0}$ alt dizisinin sınırlı olduğu ve sonuç olarak her bir $s \in \{0, 1, ..., l-1\}$ için yakınsak olduğu elde edilir. Şimdi şunu da not edelim ki bu l alt dizileri ayrık kümedirler.Aslında, eğer bazı $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ ve $s_1, s_2 \in \{0, 1, ..., l-1\}$ için

$$m_1 l - s_1 k = m_2 l - s_2 k \tag{6.38}$$

alsaydık, $(s_1 - s_2)k \equiv 0(\operatorname{mod} l)$ bulurduk. $|s_1 - s_2| < l$ olduğundan, bu $obeb(k, l) > 1$ olması anlamına gelirdi ki bu bir çelişkidir.

Bu bütün $(\left|x_{(m-1)l-i}\right|)_{m\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2, ..., l$ alt dizilerinin yakınsak olduğunu gösterir. Dolayısıyla $(x_n)_{n\geq -l}$ dizisininde sınırlı olduğu bulunur. Bu durumun ispatı sonlanır.

(c) Bu durumda (6.1)'in bir $(x_n)_{n\geq -l}$ çözümü pozitif olduğu için, (b)'nin ispatı ile $(x_{(m-1)l-i})_{m\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2, ..., l$ alt dizisi yakınsaktır. Böylece çözüm ya l-periyodik bir çözüme yada (6.1)'in denge noktasına yakınsaktır. Ancak, Önerme 6.1 ile, (6.1) l-periyodik aşikar olmayan herhangi bir çözüme sahip değildir. Böylece, o denge noktasına yakınsak olmalıdır. Ancak bu, $\min\{x_{-l}, ..., x_{-2}, x_{-1}\} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \overline{x}_2$ olduğundan mümkün değildir. Bu bir çelişkidir. Böylelikle teoremin ispatı sonlanır.

Soru: (6.19) koşulu $n \to \infty$ için $|x_n| \to \infty$ olduğunu garanti eder mi sorusu araştırmaya değer ilginç bir sorudur.

KAYNAKLAR

Amleh, A. M., Grove, E. A., Ladas G. and Georgiou, D. A. (1999). On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **233**: $790 - 798$.

Amleh, A. M., E. Camouzis, and Ladas G. (2008a). On the dynamics of a rational difference equation I. *International Journal of Difference Equations*, **3**(1): $1 - 35$.

Amleh, A. M., E. Camouzis, and Ladas G. (2008b). On the dynamics of a rational difference equation II. *International Journal of Difference Equations*, **3**(2): $195 - 225$.

Berenhaut, K. S. and Stević, S. (2006). The behavior of the positive solutions of the difference equation $x_n = A + (x_{n-2}/x_{n-1})^p$. *Journal of Difference Equations and Applications*, **12**(9): $909 - 918$.

Berenhaut, K. S., Foley, J. D. and Stević, S. (2006). Quantative bounds for the recursive sequence $y_{n+1} = A + (y_n/y_{n-k})$. *Applied Mathematics Letters*, **19**: $983 - 989$.

Berenhaut, K. S., Foley, J. D. and Stević, S. (2008). The global attractivity of the rational difference equation $y_n = A + (y_{n-k}/y_{n-m})^p$. *Proceedings of the American Mathematicial Society*, **136**(1): $103 - 110$.

Berg, L. (2002). On the asymptotics of nonlinear difference equations. *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*, **21**(4): $1061 - 1074$.

Berg, L. (2008). On the asymptotics of the difference equation $x_{n-3} = x_n(1+ x_{n-1}x_{n-2})$. *Journal of Difference Equations and Applications*, **14**(1): $105 - 108$.

Beverton, H. and Holt, S. J. (1993). On the Dynamics of Exploited Fish Populations. *Chapman&Hall, London, UK.*

Camouzis, E., DeVault, R. G. and Kosmala, W. (2004). On the period five trichotomy of all positive solutions of $x_{n+1} = (p + x_{n-2})/x_n$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **291**(1): $40 - 49$.

Devault, R., Ladas G and Schultz W. (1998). On the recursive sequence $x_{n+1} =$

$(A/x_n) + (1/x_{n-2})$. *Proceedings of the American Mathematicial Society*, **126**(11): $3257 - 3261$.

Devault, R., Kent, C. and Kosmala, W. (2003). On the recursive sequence $x_{n+1} = p + (x_{n-k}/x_n)$. *Journal of Difference Equations and Applications*, **9**(8): $721 - 730$.

Devault, R., Kocić, V. and Stutson D. (2005). Global behavior of solutions of the nonlinear difference equation $x_{n+1} = p_n + (x_{n-1}/x_n)$. *Journal of Difference Equations and Applications*, **11**(8): $707 - 719$.

Elaydi, S. N., (1996). An Introduction to Difference Equations. *Springer-Verlag, New York, Inc.*

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S. (2003). On the asymptotic behavior of the difference equation $x_{n+1} = \alpha +\ (x_{n-1}^p/x_n^p)$. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **12**$(1-2)$: $31 - 37$.

Grove, E. A. and Ladas, G. (2005). Periodicities in Nonlinear Difference Equations. *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, *Chapman & Hall, Boca Raton, Fla, USA.*

Gümüş, M. and Öcalan, Ö. (2012). Some Notes on the Difference Equation $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n^k$. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2012**(258502): $1 - 12$.

Gümüş, M., Öcalan, Ö. and Felah, N. B. (2012). On the Dynamics of the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-k}^p/x_n^q$. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2012**(241303): $1 - 11$.

Gümüş, M. (2013). The Periodicity of Positive Solutions of the Nonlinear Difference Equation $x_{n+1} = \alpha + x_{n-k}^p/x_n^q$. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2013**(742912): $1 - 3$.

Gümüş, M. and Öcalan, Ö. (2014). Global Asymptotic Stability of a Nonautonomous Difference Equation. *Journal of Applied Mathematics*, **2014**(395954): $1 - 5$.

Iricanin, B. and Stević, S. (2009). Eventually constant solutions of a rational difference equation. *Applied Mathematics and Computation*, **215**(2): $854 - 856$.

Kent, C. M. (2001). Convergence of solutions in a nonhyperbolic case. *Nonlinear*

Analysis, **47**(7): 4651 − 4665.

Kent, C. M., Kosmala, W., Radin, M. A. and Stević, S. (2010a). Solutions of the difference equation $x_{n+1} = x_n x_{n-1} - 1$. *Abstract and Applied Analysis*, **2001**(469683): 1 − 13.

Kent, C. M., Kosmala, W. and Stević, S. (2010b). Long-Term Behavior of Solutions of the Difference Equation $x_{n+1} = x_{n-1}x_{n-2} - 1$. *Abstract and Applied Analysis*, **2010**(152378): 1 − 17.

Kent, C. M., Kosmala, W. and Stević, S. (2011a). On the difference equation $x_{n+1} = x_n x_{n-2} - 1$. *Abstract and Applied Analysis*, **2011**(815285): 1 − 15.

Kent, C. M. and Kosmala, W. (2011b). On the Nature of Solutions of the Difference Equation $x_{n+1} = x_n x_{n-3} - 1$. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, **2**(2): 24 − 43.

Kocić, V. and Ladas, G. (1993). Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.*

Kulenović M. R. S and Ladas G. (2001). Dynamics of Second Order Rational Difference Equations, With Open Problems and Conjecture. *Chapman & Hall, Boca Raton, Fla, USA.*

Kulenović M. R. S, Ladas G and Overdeep C. B. (2004). On the dynamics of $x_{n+1} = p_n + (x_{n-1}/x_n)$ with a period-two cofficient. *Journal of Difference Equations and Applications*, **10**(10): 905 − 914.

Kulenović M. R. S, Ladas G and Sizer W. S. (1998). On the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha x_n + \beta x_{n-1})/(\gamma x_n + \delta x_{n-1})$. *Math. Sci. Res. Hot-line* **2**: 51 − 61.

Papaschinopoulos, G., Schinas, C. J. and Stefanidou, G. (2011). On the nonautonomous difference equation $x_{n+1} = A_n + (x_{n-1}^p/x_n^q)$. *Applied Mathematics and Computation*, **217**: 5573 − 5580.

Pielou, E. C. (1974). Population and Community Ecology: Principles and Methods. *Gordon and Breach Science Publishers, New York, NY, USA.*

Öcalan, Ö., Ögünmez, H. and Gümüş, M. (2014). Global behavior test for a nonlinear difference equation with a period-two coefficient. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis,* **21**: 307 − 316.

Öcalan, Ö. (2014). Dynamics of the difference equation with a period-two coefficient. *Applied Mathematics and Computation*, **228**: $31-37$.

Schinas, C. J., Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G. (2009). On the recursive sequence $x_{n+1}=A+(x_{n-1}^{p}/x_{n}^{q})$. *Advances in Difference Equations*, **2009** (327649): $1-11$.

Stević, S. (2003a). On the recursive sequence $x_{n+1}=\alpha_n+x_{n-1}/x_n$ II. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A*, **10**(6): $911-916$.

Stević, S. (2003b). On the recursive sequence $x_{n+1}=\alpha_n+(x_{n-1}/x_n)$. *International Journal of Mathematical Sciences*, **2**(2): $237-243$.

Stević, S. (2004). More on the difference equation $x_{n+1}=x_{n-1}/1+(x_nx_{n-1})$. *Applied Mathematics E-Notes*, **4**: $80-85$.

Stević, S. (2005). On the recursive sequence $x_{n+1}=\alpha+(x_{n-1}^{p}/x_{n}^{p})$. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **18**$(1-2)$: $229-234$.

Stević, S. (2006a). Global stability and asymptotics of some classes of rational difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **316**(1): $60-68$.

Stević, S. (2006b). On monotone solutions of some classes of difference equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2006**(53890): $1-9$.

Stević, S. (2006c). On positive solutions of a $(k+1)-$th order difference equation. *Applied Mathematics Letters*, **19**(5): $427-431$.

Stević, S. (2007a). Asymptotics of some classes of higher-order difference equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2007**(56813): $1-20$.

Stević, S. (2007b). The recursive sequence $x_n=1+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_{n-p_i}/\sum_{j=1}^{m}\beta_j x_{n-q_j}$. *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, **2007**(39404): $1-7$.

Stević, S. (2007c). On the recursive sequence $x_{n+1}=\alpha+(x_{n}^{p}/x_{n-1}^{p})$. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2007**(34517): $1-9$.

Stević, S. (2008). On the difference equation $x_{n+1}=\alpha+x_{n-1}/x_n$. *Computers and Mathematics with Applications*, **56**(5): $1159-1171$.

Stević, S. and Iričanin, B. (2011). Unbounded Solutions of the Difference Equation $x_n=x_{n-l}x_{n-k}-1$. *Abstract and Applied Analysis*, **2011**(561682): $1-8$.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Fatma Hilal GÜMÜŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Ankara, 28.02.1987
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim	:	542 447 09 00, hilal87hilal@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	:	Yunus Emre Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, 2005
Lisans	:	Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2011

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Türkiye İş Bankası A.Ş, 2012-2013

Türkiye Vakıflar Bankası T.A.O, 2013-?