**GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI-DEĞİŞMELİ**

**HALKALAR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**


**Erman SARI**

**DANIŞMAN**
**Doç. Dr. Muhittin BAŞER**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**HAZİRAN 2011**

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI-DEĞİŞMELİ HALKALAR

**Erman SARI**

**DANIŞMAN**
**Doç. Dr. Muhittin BAŞER**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**HAZİRAN 2011**

**ONAY SAYFASI**

Doç. Dr. Muhittin BAŞER danışmanlığında,

Erman SARI tarafından hazırlanan

Genelleştirilmiş Yarı-Değişmeli Halkalar

başlıklı bu çalışma lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri

uyarınca

08/06/2011

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Fatih NURAY

Üye : Doç. Dr. Muhittin BAŞER

Üye : Doç. Dr. Murat PEKER

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN
Enstitü Müdürü

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI-DEĞİŞMELİ HALKALAR**

Erman SARI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhittin BAŞER

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar, bazı halka sınıfları ve bir halka üzerindeki polinom halkaları hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, yarı-değişmeli halkaların bir genelleştirmesi olan $\alpha-$yarı-değişmeli halkalar karakterize edilmiş ve bu halka sınıflarının bazı temel özellikleri incelenmiştir.

**2011, 49 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** İnmiş Halkalar, Yarı-Değişmeli Halkalar, (Genelleştirilmiş) Armendariz Halkalar.

**ABSTRACT**

Msc Thesis

**EXTENDED SEMICOMMUTATIVE RINGS**

Erman SARI

Afyon Kocatepe University

Institute for the Natural and Applied Sciences

Supervisor: Assoc. Doc. Dr. Muhittin BAŞER

This thesis consists of three chapters. The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions, some ring classes and polynomial rings on a ring are recalled. In the third chapter, $\alpha$ −semicommutative rings, which is a generalization of semicommutative rings are characterized and the basic properties of this ring classes are studied.

**2011, Page 49**

**Key Words:** Reduced Rings, Semicommutative Rings, (Generalized) Armendariz Rings

# TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, ayrıca çalışmamın her aşamasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan ve ufkumu genişleten değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Muhittin BAŞER (Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi)'e, ayrıca tez yazım aşamasındaki yardımlarından dolayı değerli arkadaşım Öznur KOPARAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme, gösterdiği sabır ve anlayışla her zaman yanımda olan sevgili kuzenim Filiz TANRIVERDİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Erman SARI

AFYONKARAHİSAR, Haziran 2011

# İÇİNDEKİLER

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | $R$ halkasının bir endomorfizması |
| $\alpha$ | $R$ nin bir $\alpha$ endomorfizmasının $R$ nin bir genişlemesine genişletilmişi |
| $D$ | $R$ halkasının Dorroh genişlemesi |
| $I_n$ | $n \times n$ tipindeki birim matris |
| $I_R$ | $R$ halkasının birim endomorfizması |
| ${}_R M_R$ | $R - R$ bimodülü |
| $M_n\ \ R$ | $R$ üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası |
| $R^A$ | Bir $A$ kümesinden $R$ halkasına tüm fonksiyonların kümesi |
| $R\ \ x$ | $R$ üzerindeki polinomlar halkası |
| $R\ \ x; x^{-1}$ | $R$ üzerindeki Laurent polinomlar halkası |
| $R\ \ x; \alpha$ | $R$ nin skew polinom halkası |
| $R[\ x; \alpha]$ | $R$ nin Ore polinom halkası |
| $T\ \ R, M$ | $R$ halkasının $M$ modülü ile aşikar genişlemesi |
| $UTM_n\ \ R$ | $R$ üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası |
| $x^n$ | $R\ \ x$ halkasının $x^n$ tarafından üretilen ideali |

# 1. GİRİŞ

Yakın zamanlarda, bir çok halka kuramcı tarafından çalışılan halka sınıflarından birisi olan yarı-değişmeli halkalar ilk olarak 1973 yılında Shin tarafından çalışılmıştır ki, o yıllarda henüz bu halka sınıfları, yarı-değişmeli olarak adlandırılmamıştı. Sonraki yıllarda, bu halka sınıflarını zero-insertive ismi altında Habeb çalışmış ve bir çok ilginç sonuç elde etmiştir. Daha sonraki yıllarda bu halkalara yarı-değişmeli halkalar denilmiş ve günümüzdeki bu halka sınıfı ile ilgili yapılan çalışmalarda bu isim kullanılmıştır. $R$ bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için;

$$ab = 0 \Longrightarrow aRb = 0$$

oluyorsa, bu durumda $R$ halkasına yarı-değişmeli (semicommutative) halka denir. Bu koşulu sağlayan halkalar, teoride oldukça fazla öneme sahiptir. Yakın zamanlarda birçok araştırmacı bu halka sınıflarının çeşitli genelleştirmelerini yaparak teoriye katkıda bulunmuşlardır.

Çalışmamızın detaylarına geçmeden önce yarı-değişmeli halkalarla ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar hakkında bazı bilgiler verelim. Eğer bir $R$ halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır (nilpotent) elemanı yoksa veya denk olarak $a \in R$ için $a^2 = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda $R$ ye bir inmiş (reduced) halka denir. Her tamlık bölgesinin inmiş bir halka olduğu açıktır. Ayrıca inmiş halkaların sınıfının yarı-değişmeli halkaların sınıfını kapsadığı bilinmektedir. $a, b \in R$ için;

$$ab = 0 \Longrightarrow ba = 0$$

şartını sağlayan halka sınıfları Chon tarafından terslenebilir (reversible) halkalar olarak adlandırılmıştır. Her terslenebilir halkanın yar-değişmeli olduğu bilinmektedir. Ayrıca; $a, b, c \in R$ için;

$$abc = 0 \Longrightarrow acb = 0$$

koşulunu sağlayan halkalarda simetrik (symmetric) olarak isimlendirilmiştir. Her simetrik halka yarı-değişmelidir. Ancak bu gerektirmenin tersi doğru olmayabilir. Diğer taraftan, her değişmeli halkanın yarı-değişmeli olduğu da açıktır. İnmiş halkaların sınıfının diğer bir genelleştirilmesi Armendariz halkalardır.

(Rege ve Chhawchharia 1997)' de Armendariz halka tanımını şu şekilde vermişlerdir. $R\ x$ ; $R$ üzerindeki polinomların halkası olmak üzere $f\ x\ = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $g\ x\ = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x]$ polinomları için $f\ x\ g\ x\ = 0$ iken, her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_ib_j = 0$ oluyorsa, bu durumda $R$ halkası Armendariz halka olarak adlandırılmıştır. Bu özelliği sağlayan halkalara Armendariz halka denilmesinin sebebi; inmiş bir halkanın bu özelliği sağladığını 1974 de gösteren kişinin E.P. Armendariz olmasıdır. Halkaların Armendarizlik özelliği üzerine birçok makale yazılmıştır. Bunlardan bazıları (Armendariz 1974), (Hong ve diğerleri 2003), (Hong ve diğerleri 2005), (Hong ve diğerleri 2006) ve (Kim ve Lee 2000) dir.

$R$ bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olmak üzere $R$ halkasından katsayılı polinomların kümesi, polinomlarda bilinen toplama işlemi ve herhangi bir $a \in R$ için $xa = \alpha\ a\ x$ ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya endomorfizma tipinin Ore genişlemesi (ya da skew polinom halkası ) denir ve $R[x; \alpha]$ ile gösterilir.

Son yıllarda bir $R$ halkasının Armendarizlik özelliği skew polinomların halkasına genişletilmiştir. ( Hong ve diğerleri 2003, 2006 ) aşağıdaki tanımları vermişlerdir. $p\ x\ = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $q\ x\ = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x; \alpha]$ polinomları için $p\ x\ q\ x\ = 0$ iken, her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ oluyorsa, bu durumda $R$ halkası $\alpha$ −skew Armendariz ($\alpha$ −Armendariz) olarak adlandırılmıştır. Eğer $\alpha$; $R$ nin birim endomorfizması olarak alınırsa bu durumda, yukarıdaki iki tanım da Armendariz halka tanımı ile çakışacaktır. Ayrıca $R$; $\alpha$ −skew Armendariz ($\alpha$ −Armendariz) bir halka ve $S, \alpha(S) \subseteq S$ olacak şekilde $R$ nin bir alt halkası ise, bu durumda $S$ de $\alpha$ −skew Armendariz ($\alpha$ −Armendariz) dir. Diğer taraftan her $\alpha$ −Armendariz halkanın $\alpha$ −skew Armendariz halka olduğu (Hong ve diğerleri 2006) da ispatlanmıştır ve bu gerektirmenin tersinin doğru olmadığına dair örnek verilmiştir. (Krempa 1996)' da $\alpha; R$ halkasının bir endomorfizması olmak üzere $a \in R$ için,

$$a\alpha\ a\ = 0 \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda $\alpha$'yı katı (rigid) endomorfizma olarak adlandırmıştır. Daha sonra (Hong ve diğerleri 2003) bir $R$ halkasının katı bir $\alpha$ endomorfizmasının var olması durumunda $R$ yi $\alpha$ −katı ($\alpha$ −rigid) halka olarak adlandırmışlardır.

Kolayca görülebilir ki; $I_R; R$ nin birim endomorfizması olmak üzere $R$ halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul $R$ nin $I_R$ $-$katı olmasıdır. Bir $R$ halkasının herhangi bir katı endomorfizması bir monomorfizmadır. (Hong ve diğerleri 2000)' de $\alpha$ $-$katı halkaların inmiş halka olduğunu ispatlamışlardır. Diğer taraftan (Hong ve diğerleri 2000)' de herhangi bir $\alpha$ $-$katı halkanın $\alpha$ $-$Armendariz olduğu ispatlanmış ve bunun tersinin doğru olmadığına dair örnek verilmiştir. (Hong ve diğerleri 2003)' den bir $R$ halkasının $\alpha$ $-$katı olması için gerek ve yeter koşulun $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının inmiş olması gerektiğini biliyoruz.

Yukarıda ifade edilen bilgilerin ışığı altında; (Başer ve diğerleri 2008)' dan yararlanarak $R$ halkasının bir $\alpha$ endomorfizması için $\alpha$ $-$yarı-değişmeli halkaların sınıfı tanımlanacak, bu halka sınıflarıyla diğer halka sınıflarının ilişkileri, özelliklede genelleştirilmiş Armendariz halkalar ile arasındaki ilişkiler çalışılacaktır.

Çalışmamız boyunca $R$ birimli bir halka ve aksi söylenmedikçe de $\alpha; R$ nin sıfırdan ve birimden farklı bir endomorfizması olacaktır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde, sonraki bölümde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlerle birlikte polinom hallkları, matris halkaları gibi bazı özel halka sınıfları verilecektir.

Üçüncü bölümde (Başer ve diğerleri 2008) ve (Başer ve Kwak 2010) çalışmalarından yararlanarak $\alpha$ $-$yarı-değişmeli halkalar karakterize edilecek ve bu halka sınıflarının bazı temel özellikleri incelenecektir. Örneğin; $R$ nin inmiş ve $\alpha$ $-$yarı-değişmeli bir halka olması durumunda, bu halkanın $\alpha$ $-$skew Armendariz halka olduğu ispatlanacaktır. Diğer taraftan bir $R$ halkasının $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının yarı-değişmeli olması durumunda, $R$ halkasının $\alpha$ $-$yarı-değişmeli olduğu ispatlanacaktır. Diğer taraftan $\alpha$ $-$yarı-değişmeli bir halkanın birçok genişlemesinin $\alpha$ $-$yarı-değişmeli olduğu gösterilecektir.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramlar ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan bazı halka sınıfları hatırlatılacaktır. Bu bölümde kullandığımız temel referanslar (Hungerford, 1982), (Anderson ve Fuller 1992) ve (Lam 2001) dır.

## 2.1 Halkalar ve Halka Homomorfizmaları

Bu kısımda halka teorideki bazı temel kavramlar tanımlanacak ve halkaların sıkça kullanacağımız bazı özellikleri verilecektir.

**Tanım 2.1.1.** $R$ boştan farklı bir küme ve $R$ üzerinde, genellikle $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma ile gösterilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer;

(i) $(R, +)$ bir değişmeli grup,

(ii) Her $a, b, c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ (çarpmanın birleşme özelliği),

(iii) Her $a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ (sol ve sağ dağılma özelliği)

oluyorsa, bu durumda $R$ ye $(+)$ ve $(.)$ ikili işlemleri ile birlikte bir *halka* denir.

$R$ bir halka olmak üzere eğer, her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa $R$ ye *değişmelidir* denir. Eğer her $a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa, bu durumda $R$ ye *birimli bir halka* denir. $1_R$ elemanına da halkanın *birimi* denir. Bir halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına halkanın *sıfırı* denir ve $0_R$ veya herhangi bir karışıklığa sebep olmazsa 0 ile gösterilir.

**Teorem 2.1.2.** $R$ bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her $a \in R$ için $0a = a0 = 0$ dır.

(ii) Her $a, b \in R$ için $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ dir.

(iii) Her $a, b \in R$ için $(-a)(-b) = ab$ dir.

(iv) Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $a, b \in R$ için $(na)b = a(nb) = n(ab)$ dir.

(v) Her $a_i, b_j \in R$ için $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ dir.

**Tanım 2.1.3.** $R$ bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ $(ba = 0)$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ varsa, bu durumda $a$ ya bir *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan bir elemana halkanın bir *sıfır böleni* denir.

**Tanım 2.1.4.** $R$ birimli bir halka olmak üzere $a \in R$ olsun. Eğer $ca = 1_R$ $(ab = 1_R)$ olacak şekilde bir $c \in R$ $(b \in R)$ varsa bu durumda $a$ ya *sol (sağ) tersinir eleman* denir. $c$ $(b)$ elemanına $a$ nın bir *sol (sağ) tersi* denir. Hem sağ hem de sol tersinir bir elemana *tersinir eleman* denir.

**Tanım 2.1.5.** $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir $R$ halkasının hiçbir sıfır böleni yoksa bu $R$ halkasına bir *tamlık bölgesi* denir. $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir $R$ halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise, bu durumda $R$ halkasına bir *cisim* denir.

**Uyarı 2.1.6.**

(i) Her tamlık bölgesi 0 ve $1_R$ gibi en az iki elemana sahiptir.
(ii) Her cisim bir tamlık bölgesidir.
(iii) Değişmeli ve birimli bir $R$ halkasının bir cisim olması için gerek ve yeter koşul $R$ nin sıfırdan farklı elemanlarının kümesinin çarpma işlemine göre bir grup olmasıdır.

**Örnek 2.1.7.** $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli bir halkadır. Bununla beraber $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi farklı ikili işlemlere göre de halka yapılabilir. Fakat bundan sonraki çalışmalarımızda $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası denildiğinde, tamsayıların bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikteki halka yapısı göz önüne alınacaktır. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir tamlık bölgesidir. $\mathbb{Q}$ (rasyonel sayılar), $\mathbb{R}$ (reel sayılar) ve $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte birer cisimdir.

**Örnek 2.1.8.** $\mathbb{Z}_n = \ 0, 1, 2, \dots, n-1$ kümesi $a + b = a + b$ ve $ab = ab$ ikili işlemleri ile birlikte değişmeli ve birimli bir halkadır. Eğer $p$ bir asal tamsayı ise $\mathbb{Z}_p$ bir cisimdir.

**Tanım 2.1.9.** $R$ ile $S$ iki halka ve $f: R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $a, b \in R$ için

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ab) = f(a)f(b)$$

oluyorsa, bu durumda $f$ ye bir *halka homomorfizması* denir. $f: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere eğer, $f$ birebir ise, bu durumda $f$ ye bir *monomorfizma*, örten ise, bu durumda $f$ ye bir *epimorfizma* denir. Eğer bir $f: R \to S$ halka homomorfizması hem birebir hem de örten ise, bu durumda $f$ ye bir izomorfizma ve $R$ ile $S$ halkalarına da *izomorf* halkalar denir. $R \cong S$ ile gösterilir. Bir $f: R \to R$ homomorfizmasına $R$ halkasının bir *endomorfizması* denir. Bir $f: R \to R$ izomorfizmayada $R$ halkasının bir *otomorfizması* denir.

**Örnek 2.1.10.** $R$ bir halka olmak üzere $O: R \to R, O(a) = 0_R$ ve $I_R: R \to R, I_R(a) = a$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar $R$ halkasının endomorfizmalarıdır. Bunlara sırasıyla $R$ nin *sıfır endomorfizması* ve *birim endomorfizması* adı verilir.

**Tanım 2.1.11.** $f: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere

$$Ker\, f = \{ r \in R \mid f(r) = 0_S \} \text{ ve } Im\, f = \{ f(r) \mid r \in R \}$$

kümelerine sırasıyla, $f$ homomorfizmasının *çekirdeği* ve *görüntüsü* denir.

**Tanım 2.1.12.** $R$ bir halka olmak üzere eğer, her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir pozitif en küçük $n$ tamsayısı varsa, bu durumda $R$ halkası $n$ *karekteristiğine* sahiptir denir ve $Char\, R = n$ yazılır. Eğer böyle bir $n$ tamsayısı yoksa $R$ nin *karekteristiği sıfırdır* denir.

**Tanım 2.1.13.** $R$ ile $S$ iki halka olmak üzere, bir $f: R \to S$ monomorfizmasına $R$ nin $S$ ye bir *gömülüşü* denir. Eğer böyle bir monomorfizma varsa, bu durumda $R$ halkası $S$ halkası içine *gömülebilir* denir.

**Teorem 2.1.14.** Her $R$ halkası birimli bir $S$ halkası içine gömülebilir. Bu $S$ halkası bir tek değildir. Ayrıca, $S$ halkası karekteristiği 0 veya $R$ nin karekteristiği ile aynı olacak şekilde seçilebilir.

**İspat.** $R$ bir halka olmak üzere $S = R \times \mathbb{Z} = R \oplus \mathbb{Z} = \quad r, k \ | \, r \in R, \ k \in \mathbb{Z}$ kartezyen çarpım kümesi bileşensel toplama ve

$$r_1, k_1 \quad r_2, k_2 \ = \ r_1 r_2 + k_2 r_1 + k_1 r_2, k_1 k_2 \qquad r_i \in R; k_i \in \mathbb{Z}$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $0{,}1$ birimine sahip, karekteristiği 0 olan bir halkadır. Ayrıca $f: R \to S, f \ r \ = (r, 0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir monomorfizmadır.

Eğer $Char\, R = n > 0$ ise, bu durumda $S = R \oplus \mathbb{Z}_n$ kartezyen çarpım kümesi bileşensel toplama ve

$$r_1, k_1 \quad r_2, k_2 \ = \ r_1 r_2 + k_2 r_1 + k_1 r_2, k_1\, k_2$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $(0, 1)$ birimine sahip bir halkadır. Ayrıca $Char\, S = n$ olup $g: R \to S, g \ r \ = (r, 0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir monomorfizmadır. ■

**Uyarı 2.1.15.** $\alpha: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere $\alpha \ 0_R \ = 0_S$ dir. Bununla beraber $R$ ile $S$ birimli halkalar ise $\alpha \ 1_R \ = 1_S$ olmak zorunda değildir. Gerçekten $\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\alpha \ n \ = (n, 0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir halka homomorfizmasıdır. Fakat $\alpha \ 1 \ = \ 1{,}0 \ \neq (1{,}1)$ dir. Bununla beraber eğer $\alpha: R \to S$ örten bir halka homomorfizması ise, bu durumda $\alpha \ 1_R \ = 1_S$ olur.

**Örnek 2.1.16.** $R, S, T$ üç halka, $f: R \to S$, $g: S \to T$ halka homomorfizmaları olmak üzere $g \circ f: R \to T$ bileşke fonksiyonu da bir halka homomorfizmasıdır. Eğer $\alpha: R \to R$ bir homomorfizma ise, bu durumda $\alpha \circ \alpha = \alpha^2$ hatta daha genel olarak $i \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $\alpha^i = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{i\ tane}$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.17.** $R$ bir halka $a \in R$ olmak üzere eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n$ doğal sayısı varsa, bu durumda $a$ ya *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir.

**Tanım 2.1.18.** Bir $R$ halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir $e$ elemanına *eşkare (idempotent)* eleman denir. Birimli bir halkada $0_R$ ve $1_R$ eşkare elemanlardır.

**Tanım 2.1.19.** $R$ bir halka olmak üzere

$$C = \ c \in R \mid \text{Her } r \in R \text{ için } cr = rc$$

kümesine $R$ halkasının *merkezi* denir.

**Tanım 2.1.20.** Bir $R$ halkasının bir $e$ eşkare elemanı $R$ halkasının merkezine ait ise, bu durumda $e$ eşkare elemanına *merkezil eşkare (central idempotent) eleman* denir. Bir $R$ halkasının tüm eşkare elemanları merkezil eşkare ise, bu durumda $R$ halkası *abel* olarak adlandırılır.

## 2.2. Alt halkalar, İdealler ve Bölüm Halkaları

**Tanım 2.2.1.** $R$ bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olmak üzere $S$ kümesi $R$ de tanımlı toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer $S; R$ deki işlemlere göre kendi başına bir halka ise, bu durumda $S$ ye $R$ nin bir *alt halkası* denir. $I; R$ nin bir alt halkası olmak üzere, eğer her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx \in I$ oluyorsa, bu durumda $I$ ya $R$ nin bir *sol ideali*, $xr \in I$ oluyorsa, bu durumda da $I$ ya $R$ nin bir *sağ ideali* denir. Eğer $I$ hem bir sol hem de bir sağ ideal ise, bu durumda $I$ ya $R$ nin bir *ideali* denir.

Her ideal bir alt halkadır. Fakat her alt halka bir ideal olmak zorunda değildir. Gerçekten bir halkanın merkezi bir alt halka olmasına rağmen bir ideal olmak zorunda değildir.

**Örnek 2.2.2.** Her bir $n$ tamsayısı için $n = kn \mid k \in \mathbb{Z}$ devirli alt gurubu, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bir idealidir.

**Örnek 2.2.3.** $R$ bir halka olmak üzere $0$ ve $R; R$ nin idealleridir.

$R$ bir halka olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_n;$ $R$ nin boştan farklı alt kümeleri olsun.

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \ a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in A_i, i = 1,2,\dots,n$$

şeklinde gösterilir. Eğer $A$ ve $B;$ $R$ nin boştan farklı alt kümeleri ise bu durumda,

$$AB = \ a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \mid a_i \in A, b_i \in B, \ n \in \mathbb{N}^*$$

şeklinde gösterilir. Eğer $A = \ a$ ise, bu durumda $AB$ yerine $aB$ yazılır. Eğer $B$ kümesi toplama işlemine göre kapalı ise, bu durumda $aB = \ ab \mid b \in B$ olur.

**Örnek 2.2.4.** $R$ bir halka ve $e$ de $R$ de bir merkezil eşkare eleman olmak üzere $1_R - e$ de bir merkezil eşkaredir. Ayrıca $eR$ ve $(1_R - e)R$ kümeleri $R$ nin idealleridir.

Grup teoride normal alt grupların oynadığı rolü halka teoride idealler oynar. $R$ bir halka $I$ da $R$ nin bir ideali olsun. $R$ değişmeli toplamsal bir grup olduğundan $I; R$ nin bir toplamsal normal alt grubudur. Böylece;

$$R/I = \ a + I \mid a \in R$$

kümesi,

$$a + I \ + \ b + I \ = \ a + b \ + I$$

şeklinde tanımlanan toplama işlemine göre değişmeli gruptur. $R/I$ değişmeli grubu,

$$a + I \quad b + I \ = ab + I$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya $R$ nin $I$ ideali yardımıyla elde edilen *bölüm halkası* denir. $R$ değişmeli iken $R/I$ nında değişmeli ve $R$ birimli iken $R/I$ ninde birimli olduğu açıktır.

**Teorem 2.2.5.** $R$ bir halka ve $I$ da onun bir ideali olmak üzere;

$$\pi: R \to R/I, \pi \ r \ = r + I$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $I$ çekirdeğine sahip bir epimorfizmadır.

**Tanım 2.2.6.** $R$ bir halka $I$ da onun bir ideali olmak üzere $R/I$ halkasına $R$ nin bir *homomorfik görüntüsü* denir.

**Tanım 2.2.7.** $R$ bir halka $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere;

$$l_R \ X \ = \ r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } rx = 0$$

$$r_R \ X \ = \ r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } xr = 0$$

kümelerine sırayla $R$ içinde $X$ in *sol ve sağ sıfırlayanı* denir. Eğer $X = \{x\}$ ise bu durumda $l_R(X) = l_R(\{x\}) = l_R(x)$ şeklinde gösterilir.

**Önerme 2.2.8.** $R$ bir halka $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere; $l_R(X)$ ; $R$ nin bir sol ideali, $r_R(X)$ de $R$ nin bir sağ idealidir. Ayrıca $X$ ve $Y$; $R$ nin boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere;

(i) $X \subset Y$ ise $l_R(Y) \subset l_R(X)$ ve $r_R(Y) \subset r_R(X)$ dir.
(ii) $X \subset r_R(l_R(X))$ ve $X \subset l_R(r_R(X))$ dir.
(iii) $l_R(X) = l_R(r_R(l_R(X)))$ dir.

## 2.3. Matris Halkaları ve Polinom Halkaları

Bu bölümde verilen bir $R$ halkasından elde edilen bazı yeni halkaları hatırlatacağız.

**Tanım 2.3.1.** $R$ birimli bir halka ve $x$ bir bilinmeyen olmak üzere;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

şeklindeki bir formal toplama $R$ den katsayılı bir polinom denir. $R$ den katsayılı tüm polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir. Yani;

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}^*, a_i \in R\}$$

şeklindedir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j \in R[x]$$

olmak üzere, bu iki polinomun toplamı ve çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır. $n$ ve $m$ tamsayılarından büyük olanını $k$ ile gösterirsek;

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i+b_i)x^i$$

şeklinde tanımlanır.

$$c_l = \sum_{j=0}^{l} a_j b_{l-j}$$

olmak üzere,

$$f\ x\ g(x) = \sum_{l=0}^{m+n} c_l x^l$$

şeklinde tanımlanır. $c_l$ katsayıları daha açık bir ifadeyle;

$$c_l = a_0 b_l + a_1 b_{l-1} + a_2 b_{l-2} + \cdots + a_{l-2} b_2 + a_{l-1} b_1 + a_l b_0$$

şeklindedir. Yukarıda tanımlanan ikili işlemlere göre $R[x]$ kümesi bir halkadır. Bu halkaya $R$ üzerindeki *polinomların halkası* veya $R$ den *katsayılı polinomların halkası* denir.

**Tanım 2.3.2.** $R$ bir halka olmak üzere;

$$R\ \ x\ \ = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R$$

kümesi polinomlarda bilinen toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır. Bu halkaya $R$ den katsayılı *kuvvet serilerinin halkası* adı verilir.

**Tanım 2.3.3.** $R$ bir halka olmak üzere;

$$R\ \ x; x^{-1}\ \ = \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R\ (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir.})$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya $R$ den katsayılı *Laurent polinomlarının halkası* adı verilir.

**Tanım 2.3.4.** $R$ bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olsun. $(R\ x\ , +)$ değişmeli grubu, $r \in R$ için $xr = \alpha\ \ r\ \ x$ yardımı ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya endomorfizma tipinin bir *Ore genişlemesi* veya *Skew polinom halkası* denir ve $R[x; \alpha]$ ile gösterilir. Yukarıda tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte

$(R\ [x]\ ,+)$ değişmeli grubuda bir halkadır. Bu halkayada endomorfizma tipinin *Skew kuvvet serilerinin halkası* denir ve $R[[x;\alpha]]$ ile gösterilir.

**Tanım 2.3.5.** $R$ bir halka olmak üzere bileşenleri $R$ den gelen $n$ satırlı ve $n$ sütunlu matrislerin kümesi matrislerde bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya $R$ üzerinde $n \times n$ tipindeki *matrislerin halkası* denir ve $M_n(R)$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.3.6.** $R$ bir halka ve $(M,+)$ bir değişmeli grup olmak üzere eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir $R \times M \to M, (r,m) \longmapsto rm$ fonksiyonu varsa, bu durumda $M$ ye bir *sol* $R$ *−modül* denir. Her $r,s \in R$ ve $x,y \in M$ için;

(i) $r\ \ x+y\ \ = rx+ry$
(ii) $\ r+s\ \ x = rx+sx$
(iii) $r\ \ sx\ \ =\ \ rs\ \ x$

$R$; $1_R$ birimine sahip birimli bir halka olmak üzere, ek olarak her $x \in M$ için $1_R x = x$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda $M$ ye bir *birimsel sol* $R$ *−modül* denir.

**Tanım 2.3.7.** $R$ bir halka ve $S$ değişmeli bir halka olmak üzere, eğer $(R,+)$ bir sol $S$ −modül ve bu modül yapısındaki $S \times R \to R, (s,r) \longmapsto sr$ fonksiyonu; her $s \in S$ ve her $r_1, r_2 \in R$ için;

$$s\ \ r_1 r_2\ \ =\ \ sr_1\ \ r_2 = r_1(sr_2)$$

özelliğine sahip ise, bu durumda $R$ halkasına $S$ değişmeli halkası üzerinde bir *cebir* veya *R ye* $S$ *−cebir* denir.

**Tanım 2.3.8.** $S$ değişmeli bir halka ve $R_1$ ile $R_2$; $S$ −cebirler olsun. Bir $f: R_1 \to R_2$ halka homomorfizması aynı zamanda bir $S$ −modül homomorfizması ise bu durumda $f$ ye bir $S$ *−cebir homomorfizması* denir.

## 2.4. Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda bazı özel halka sınıfları hatırlatılacak ve bu halka sınıfları arasındaki ilişkiler verilecektir.

**Tanım 2.4.1.** Bir $R$ halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için,

$$a^2 = 0 \implies a = 0$$

oluyorsa, bu durumda $R$ ye *inmiş* (*reduced*) *halka* denir.

Sıfır bölensiz her halka inmiş halkadır. Daha özel olarak $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası inmiş bir halkadır. Diğer taraftan $0 \neq 2 \in \mathbb{Z}_4$ için $(2)^2 = 22 = 0$ olduğundan $\mathbb{Z}_4$ halkası inmiş bir halka değildir. Ayrıca inmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğunu görmek çok kolaydır.

**Tanım 2.4.2.** $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \implies ba = 0$$

oluyorsa, bu durumda $R$ halkasına *terslenebilir* (*reversible*) denir.

**Lemma 2.4.3.** Her inmiş halka terslenebilir bir halkadır.

**İspat.** $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = baba = b0a = 0$ ve $R$ inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. ■

**Tanım 2.4.4.** $R$ bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \implies aRb = 0$$

oluyorsa, bu durumda $R$ halkası *yarı-değişmeli* (*semicommutative*) olarak adlandırılır. Bir $R$ halkasının yarı değişmeli olması için gerek ve yeter şart koşul her bir $a \in R$ için $r_R\;a$ $(l_R\;a)$ kümesinin $R$ nin bir ideali olmasıdır.

Her terslenebilir halka yarı-değişmelidir. Gerçekten $R$ terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için, $ab = 0$ olsun. $R$ terslenebilir olduğundan $ba = 0$ ve böylece her $r \in R$ için

$bar = 0$ olur. Tekrar $R$ terslenebilir olduğundan $arb = 0$ yani $aRb = 0$ elde edilir ki, bu da $R$ nin yarı-değişmeli olduğunu gösterir.

**Tanım 2.4.5.** $R$ bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için,

$$aRa = 0 \;\Rightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda $R$ halkası *yarı asal* (*semiprime*) olarak adlandırılır.

**Tanım 2.4.6.**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$$

olmak üzere,

$$f(x)g(x) = 0 \Rightarrow a_i b_j = 0 \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$$

oluyorsa, bu durumda $R$ halkası *Armendariz* olarak adlandırılır.

Yukarıdaki koşulu sağlayan halkalara Armendariz ismi verilmiştir. Çünkü 1974' te E.P. Armendariz, inmiş bir halkanın yukarıdaki koşulu sağladığını göstermiştir. Yani her inmiş halka bir Armendariz halkadır.

**Tanım 2.4.7.** $R$ bir halka ve $\alpha: R \to R$ bir endomorfizma olsun. $a \in R$ için,

$$a\alpha(a) = 0 \;\Rightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda $R$ halkasına $\alpha$ *−katı* ($\alpha$ *−rigid*) halka denir.

$R$ bir $\alpha$ −katı halka olmak üzere, $\alpha(S) \subseteq S$ koşulunu sağlayan $R$ nin her $S$ alt halkası da $\alpha$ −katı bir halkadır. Diğer taraftan $I_R$; $R$ nin birim endomorfizması olmak üzere; $R$ nin $\alpha$ − katı olması için gerek ve yeter koşul $R$ nin inmiş bir halka olmasıdır.

**Lemma 2.4.8.** $R$ bir $\alpha$ −katı halka olsun. Bu durumda $\alpha$ bir monomorfizmadır.

**İspat.** $a \in R$ için $\alpha(a) = 0$ olsun. Buradan $a\alpha(a) = a0 = 0$ olup $R$; $\alpha$ −katı olduğundan $a = 0$ bulunurki bu da $\alpha$ nın bir monomorfizma olduğunu gösterir. ■

$R$ inmiş olmayan bir halka olmak üzere $R$ nin $I_R$ birim endomorfizması bir monomorfizmadır. Fakat $R$; $I_R$ $-$katı değildir. Yani yukarıdaki Lemma'nın tersi doğru değildir.

**Lemma 2.4.9.** $R$ bir halka ve $\alpha: R \to R$ bir endomorfizma olsun. Eğer $R$; $\alpha$ $-$katı ise, bu durumda $R$ bir inmiş halkadır.

**İspat.** $R$; $\alpha$ $-$katı bir halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $a\alpha\ \ a\ \ \alpha\ \ a\alpha\ \ a\ \ \ = a\alpha\ \ a^2\ \ \alpha^2\ \ a\ \ = a\alpha\ \ 0\ \ \alpha^2\ \ a\ \ = a0\alpha^2\ \ a\ \ = 0$ olup, $R$; $\alpha$ $-$katı olduğundan $a\alpha\ \ a\ \ = 0$ ve tekrar $R$; $\alpha$ $-$katı olduğundan $a = 0$ elde edilir. Yani $R$ bir inmiş halkadır. ■

**Lemma 2.4.10.** Her inmiş halka yarı asaldır.

**İspat.** $R$ inmiş bir halka ve $a \in R$ için $aRa = 0$ olsun. Bu durumda $1_R \in R$ için de $a1_Ra = a^2 = 0$ olacağından ve $R$ inmiş olduğundan $a = 0$ elde edilir ki bu da $R$ nin yarı asal olduğunu gösterir. ■

**Tanım 2.4.11.** $R$ bir halka ve $\alpha$; $R$ nin bir endomorfizması olsun.

$$p\ \ x\ \ = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\,, \qquad q\ \ x\ \ = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere,

$$p\ \ x\ \ q\ \ x\ \ = 0 \Longrightarrow a_i\alpha^i(b_j) = 0 \quad (0 \le i \le n, 0 \le j \le m)$$

oluyorsa, bu durumda $R$ halkasına $\alpha$ $-$*skew Armendariz* halka denir.

**Tanım 2.4.12.** $R$ bir halka ve $\alpha$; $R$ nin bir endomorfizması olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = 0 \Rightarrow a_i b_j = 0 \ \ (0 \le i \le n, 0 \le j \le m)$$

oluyorsa, bu durumda $R$ halkasına $\alpha$ *−Armendariz* halka denir.

Aşağıdaki verilen önermedeki gerektirmeler (Hong ve diğerleri 2003) tarafından verilmiştir.

**Önerme 2.4.13.** $R$ bir halka ve $\alpha$; $R$ nin bir endomorfizması olsun.

(i) Eğer $R$; $\alpha$ −katı ise, bu durumda $R$; $\alpha$ −Armendarizdir.
(ii) Eğer $R$; $\alpha$ −Armendariz ise, bu durumda $R$; $\alpha$ −skew Armendarizdir.
(iii) $R$ nin $\alpha$ −katı olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\alpha]$ halkasının inmiş olmasıdır.

**Tanım 2.4.14.** $a, b, c \in R$ için,

$$abc = 0 \Rightarrow acb = 0$$

oluyorsa, bu durumda $R$ halkasına *simetrik* (*symmetric*) denir.

Son olarak yukarıda tanıtılan halka sınıfları için aşağıdaki gerektirmeler vardır. Bu gerektirmelerin hiçbirinin tersi doğru değildir.

$R$; $\alpha$ −katı $\Rightarrow$ $R$ inmiş $\Rightarrow$ $R$ simetrik $\Rightarrow$ $R$ terslenebilir $\Rightarrow$ $R$ yarı-değişmelidir.

## 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI-DEĞİŞMELİ HALKALAR

Bu bölümde, yarı-değişmeli halkalarla ilgili yapılan çalışmalar ve halkaların Armendariz'lik özelliğinin skew polinomlar halkasına genelleştirilmesi göz önüne alınarak; katı ve yarı-değişmeli halkaların bir genelleştirmesi olan $\alpha$ −yarı-değişmeli halkalar tanımlanacak, bu yeni halka sınıfının bazı karakterizasyonları ve bu halka sınıflarının diğer halka sınıfları ile özelliklede genelleştirilmiş Armendariz halkalarla olan ilişkileri çalışılacaktır. Çalışmamız boyunca $R$ birimli bir halkayı ve aksi belirtilmedikçe $\alpha$ da $R$ halkasının sıfırdan ve birimden farklı bir endomorfizmasını gösterecektir. Bu bölüm için temel referansımız (Başer, Harmancı ve Kwak 2008) ve (Başer ve Kwak 2010) olacaktır.

### 3.1. Genelleştirilmiş Yarı-Değişmeli Halkaların Temel Özellikleri

**Tanım 3.1.1.** $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması $aR\alpha(b) = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda, $R$ halkasının $\alpha$ endomorfizmasına *yarı-değişmelidir* (*semicommutative*) denir. Eğer, bir $R$ halkasının yarı-değişmeli bir $\alpha$ endomorfizması varsa, bu durumda $R$ halkasına $\alpha$ −*yarı-değişmeli* ($\alpha$-*semicommutative*) denir.

Verilen tanım ile ilgili hemen elde edebileceğimiz basit sonuçları aşağıda sıralayalım.

**Uyarı 3.1.2.**

(i) $R$ halkasının birim endomorfizması $I_R$ olmak üzere, $R$ nin $I_R$ −yarı-değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R$ halkasının yarı-değişmeli olmasıdır.

(ii) Bir $\alpha$ −yarı-değişmeli halkanın $\alpha(S) \subset S$ koşulunu sağlayan her bir $S$ alt halkası da $\alpha$ −yarı-değişmelidir.

(iii) $R$ bir tamlık bölgesi olmak üzere, $R$ halkası her $\alpha$ endomorfizması ile birlikte $\alpha$ −yarı-değişmelidir. Fakat, bu durumun tersi genelde doğru değildir.

En geniş halka sınıflarından birisi olan inmiş halkaların sınıfı göz önünde bulundurulduğunda, inmiş halkaların $\alpha-$yarı-değişmeli olabileceği düşünebilir. Fakat, $R$ halkası $\alpha-$yarı-değişmeli olmayacak şekilde inmiş ve hatta değişmeli bir $R$ halkasının bir $\alpha$ endomorfizması bulunabilir. Bu durum için aşağıdaki örneği verelim.

**Örnek 3.1.3.** Bileşensel toplama ve bileşensel çarpma işlemleri ile birlikte $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ halkasını göz önüne alalım. $R$ değişmeli olduğundan $R$ yarı-değişmelidir. Kolayca görülebilir ki $\alpha: R \to R, \alpha((a,b)) = (b,a)$ şeklinde tanımlanan bağıntı $R$ halkasının bir otomorfizmasıdır. Tanımlanan $R$ halkası inmiş halka olduğunu görmek çok kolaydır. Fakat, bu $R$ halkası $\alpha-$yarı-değişmeli değildir. Gerçekten; $(a,b), (c,d) \in R$ için $(a,b)^2 = (0,0) \Rightarrow (a^2, b^2) = (0,0) \Rightarrow a^2 = 0$ ve $b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ ve $b = 0$ olduğundan $R$ halkası inmiş halkadır. $(1,0), (0,1) \in R$ için $(1,0)(0,1) = (0,0)$ olup, $(1,1) \in R$ için $(0,0) \neq (1,0)(1,1)\alpha((0,1)) = (1,0) \in aR\alpha(b)$ olduğundan, $R$ halkası $\alpha-$yarı-değişmeli değildir.

Yukarıdaki örnek aynı zamanda, yarı-değişmeli halkaların sınıfı ile $\alpha-$yarı-değişmeli halkaların sınıfının birbirinden bağımsız olduğunu gösterir.

$R$ bir halka, $\alpha; R$ nin bir endomorfizması, $I; R$ nin bir ideali ve $\alpha(I) \subseteq I$ olsun. Bu durumda, $\alpha: R/I \to R/I, \alpha(a+I) = \alpha(a) + I$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $R/I$ bölüm halkasının bir endomorfizmasıdır. Gerçekten, her $a + I, b + I \in R/I$ için;

$$\begin{aligned}\alpha((a+I)+(b+I)) &= \alpha((a+b)+I) = \alpha(a+b)+I = (\alpha(a)+\alpha(b))+I \\ &= (\alpha(a)+I)+(\alpha(b)+I) = \alpha(a+I)+\alpha(b+I)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha((a+I)(b+I)) &= \alpha(ab+I) = \alpha(ab)+I = \alpha(a)\alpha(b)+I \\ &= (\alpha(a)+I)(\alpha(b)+I) = \alpha(a+I)+\alpha(b+I)\end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha(I) \subseteq I$ şartı $\alpha(a+I) = \alpha(a)+I$ şeklinde tanımlanan bağıntının bir fonksiyon olabilmesi için gereklidir. Gerçekten; $a+I = b+I$ olsun. Bu durumda $(a-b)+I = I$ olup buradan $a-b \in I$ ve kabulden $\alpha(a-b) \in \alpha(I) \subset I$ dır. Yani $\alpha(a-b) \in I$ olup $\alpha(a)-\alpha(b) \in I$ olur. Buradan $(\alpha(a)-\alpha(b))+I = I$ dir. O halde $\alpha(a)+I = \alpha(b)+I$ yani $\alpha(a+I) = \alpha(b+I)$ elde edilir. $R$ nin herhangi bir sıfırdan farklı $\alpha$ −yarı-değişmeli $I$ öz ideali için, eğer $R/I$; $\alpha$ −yarı-değişmeli ise, bu durumda $R$ nin $\alpha$ −yarı-değişmeli olabileceği düşünülebilir. Fakat aşağıdaki örnekten böyle bir durumun gerçekleşmesinin mümkün olmadığını görüyoruz.

**Örnek 3.1.4.** $F$ bir cisim olmak üzere

$$R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}$$

halkasını ve bu halkanın

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. $R$; $\alpha$ −yarı-değişmeli değildir. Gerçekten;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$$

için $AB = O$ ancak $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

elde edilir. O halde $O \neq A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha(B) \in AR\alpha(B)$ olup $R$ halkası $\alpha$ −yarı-değişmeli değildir. Diğer taraftan, $R$ halkasının sıfırdan farklı tüm öz idealleri;

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b, c \in F \right\}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in F \right\}$$

şeklindedir. Fakat $R/I \cong F$ ve $R/J \cong F$ olduklarından $R/I$ ve $R/J$ bölüm halkaları da $\alpha$ −yarı-değişmelidir. $R$ nin $K$ ideali için;

$$R/K = \begin{matrix} a & 0 \\ 0 & c \end{matrix} + K \mid a, c \in F$$

bölüm halkası inmiş bir halkadır ve $\alpha$ endomorfizması $R/K$ üzerinde özdeşlik dönüşümüdür. Böylece $R/K$ bölüm halkası da $\alpha$ −yarı-değişmelidir.

**Önerme 3.1.5**. $R$ bir halka, $I; R$ nin $\alpha(I) \subseteq I$ şartını sağlayan bir ideali olmak üzere

$R/I$; $\alpha$ −yarı-değişmeli olsun. Eğer $I$ birimsiz bir halka olarak kendi başına $\alpha$ −katı ise, bu durumda $R; \alpha$ −yarı-değişmeli dir.

**İspat.** $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $aR\alpha\ b\ =\ ar\alpha(b) | r \in R\ \subseteq I$ dır. Gerçekten; $a, b \in R$ olduğundan $a + I, b + I \in R/I$ dır ve $(a + I)\ b + I\ = ab + I = 0 + I = I$ olur. $R/I$ halkası $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğundan $(a + I) R/I\, \alpha\ b + I\ = I$ elde edilir. Böylece her $r \in R$ için $(a + I)\ r + I\ \ \alpha\ b\ + I\ = I \Rightarrow ar\alpha\ b\ + I = I \Rightarrow$ $ar\alpha\ b\ \in I$ elde edilir. Sonuç olarak $aR\alpha\ b\ \subseteq I$ bulunur. Şimdi her $x \in I$ için $I \trianglelefteq R$ olduğundan $\alpha\ b\ x\alpha\ a\ \in I$ olur. $\alpha\ b\ x\alpha\ a\ ^2 = \alpha\ b\ x\alpha\ a\ \alpha\ b\ x\alpha\ a\ =$ $\alpha\ b\ x\alpha\ ab\ x\alpha\ a\ = \alpha\ b\ x\alpha\ 0\ x\alpha\ a\ = \alpha\ b\ x0x\alpha\ a\ = 0$ olup, $I; \alpha$ −katı olduğundan $\alpha\ b\ x\ \alpha\ a\ = 0$ elde edilir. Böylece $\alpha\ b\ I\ \alpha\ a\ = 0$ sonucuna varılır. Şimdi her $x \in I$ için

$$ar\alpha\ b\ x\alpha\ ar\alpha\ b\ x\ = ar\alpha\ b\ x\alpha\ a\ \alpha\ r\alpha\ b\ x\ = ar0\alpha\ r\alpha\ b\ x\ = 0$$

olur. Buradan $I; \alpha$ −katı olduğundan $ar\alpha\ b\ x = 0$ ve böylece $ar\alpha\ b\ I = 0$ elde edilir. Yani $aR\alpha\ b\ I = 0$ dır. Dolayısıyla $ar\alpha\ b\ \in I$ ve $\alpha(I) \subseteq I$ olduğundan $ar\alpha\ b\ \alpha\ ar\alpha\ b\ \ \in aR\alpha\ b\ I$ dır. Fakat $aR\alpha\ b\ I = 0$ olduğundan $ar\alpha\ b\ \alpha\ ar\alpha\ b\ \ = 0$ ve $R, \alpha$ −katı olduğundan da $ar\alpha\ b\ = 0$ yani $aR\alpha\ b\ = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $R; \alpha$ −yarı-değişmelidir. ■

**Sonuç 3.1.6.** [Huh, Lee ve Smoktunowicz 2002, Teorem 6] Bir $R$ halkasının bir $I$ ideali için $R/I$ bölüm halkası yarı-değişmeli olmak üzere, eğer $I$ birimsiz bir halka olarak inmiş bir halka ise, bu durumda $R$ yarı-değişmelidir.

**İspat.** Önerme 3.1.5 de $R$ halkasının $\alpha$ endomorfizması yerine birim endomorfizma alınır. ■

**Önerme 3.1.7.** $R$; $\alpha$ −yarı-değişmeli bir halka olsun.

(i) Eğer $\alpha$; $R$ nin bir monomorfizması ise, bu durumda $\alpha\ 1_R\ = 1_R$ dır.

(ii) $R$ nin herhangi bir eşkare (idempotent) elemanı $e$ olmak üzere; $\alpha\ 1_R\ = 1_R$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha\ e\ = e$ olmasıdır.

**İspat.** (i) $\alpha$ bir monomorfizma olsun.

$$\alpha(1_R)\ 1_R - \ \alpha\ 1_R\ \ = \alpha\ 1_R\ 1_R - \ \alpha\ 1_R\ \alpha\ 1_R\ = \alpha\ 1_R\ - \alpha\ 1_R\ = 0$$

olup, $R$; $\alpha-$ yarı-değişmeli olduğundan $\alpha\ 1_R\ R\alpha\ 1_R - \alpha\ 1_R\ \ = 0$ elde edilir. Böylece $0 = \alpha\ 1_R\ \alpha\ 1_R - \alpha\ 1_R\ \ = \alpha\ \ 1_R\ 1_R - \alpha\ 1_R\ \ = \alpha\ 1_R - \alpha\ 1_R$ olup $\alpha$ monomorfizma olduğundan $1_R - \ \alpha\ 1_R\ = 0$ yani $\alpha\ 1_R\ = 1_R$ bulunur.

(ii) $\alpha\ 1_R\ = 1_R$ ve $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $1_R - e\ e = 0$ ve $e\ 1_R - e\ = 0$ dır. Bu durumda $R$; $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğundan $eR\alpha\ 1_R - e\ = 0$ ve $1_R - e\ R\alpha(e) = 0$ olur. Böylece $0 = e\alpha\ 1_R - e\ = e\ \alpha\ 1_R\ - \alpha\ e\ \ = e\ 1_R - \alpha\ e\ = e - e\alpha(e)$ olup, buradan $e\alpha\ e\ = e$ elde edilir. Diğer taraftan $0 =\ 1_R - e\ \alpha\ e\ = 1_R\alpha(e) - e\alpha(e) = \alpha(e) - e\alpha(e)$ olup, buradan $e\alpha\ e\ = \alpha\ e$ bulunur. Sonuç olarak $\alpha\ e\ = e$ elde edilir. Tersine herhangi bir $e^2 = e \in R$ için $\alpha\ e\ = e$ olsun. Bu durumda $1_R^2 = 1_R 1_R = 1_R$ olduğundan $\alpha\ 1_R\ = 1_R$ dir. ■

Aşağıdaki örnekten Önerme 3.1.7. (i) nin tersinin doğru olmadığını görürüz.

**Örnek 3.1.8.** $F$ bir cisim olmak üzere $F$ üzerinde $R = F[x]$ polinom halkasını ve bu halkanın,

$$\alpha : R \longrightarrow R\ ,\ \alpha(f(x)) = f(0)$$

şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. $R$ nin birimi $1_R$ için $\alpha(1_R) = 1_R$ ancak $\alpha$ monomorfizma değildir. $R$ tamlık bölgesi olduğundan $R; \alpha-$yarı-değişmeli halkadır.

$R$ değişmeli bir $S$ halkası üzerinde bir cebir olsun. Bu durumda

$$D = R \times S = \{(r,s) \mid r \in R, s \in S\}$$

kartezyen çarpım kümesi;

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1,\ s_1 s_2)$$

ikili işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya $R$ nin $S$ ile *Dorroh genişlemesi* denir. $R$ nin bir $\alpha$ endomorfizması için, $\alpha : D \rightarrow D, \alpha((r,s)) = (\alpha(r), s)$ şeklinde tanımlanan bağıntı bir $S-$Cebir homomorfizmasıdır.

**Önerme 3.1.9.** Eğer $R$ bir $\alpha-$yarı-değişmeli halka, $\alpha(1_R) = 1_R$ ve $S$ bir tamlık bölgesi olmak üzere $R$ nin $S$ ile Dorroh genişlemesi olan $D$ halkası da $\alpha-$yarı-değişmelidir.

**İspat.** $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in D$ için $(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (0,0)$ olsun. Bu durumda $(0,0) = (r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1, s_1 s_2)$ olduğundan $r_1 r_2 + s_2 r_1 + s_1 r_2 = 0$ ve $s_1 s_2 = 0$ olur. $S$ bir tamlık bölgesi olduğundan $s_1 = 0$ veya $s_2 = 0$ olur. Eğer $s_1 = 0$ ise, bu durumda $0 = r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1 = r_1 r_2 + s_2 r_1$ elde edilir. $0 = r_1 r_2 + s_2 r_1 = r_1 r_2 + r_1(s_2 1_R) \Rightarrow r_1(r_2 + s_2 1_R) = 0$ olur. $R$ $\alpha-$yarı-değişmeli olduğundan $r_1 R \alpha(r_2 + s_2 1_R) = 0$ olur. Böylece her $r \in R$ için $r_1 r(\alpha(r_2) + \alpha(s_2 1_R)) = 0$ elde edilir. Yani $r_1 r(\alpha(r_2) + s_2 \alpha(1_R)) = 0$ ve $\alpha(1_R) = 1_R$ olduğundan $r_1 r \alpha(r_2) + r_1 r s_2 = 0$ bulunur. Böylece her $(r,s) \in D$ için $(r_1, 0)(r,s)\alpha((r_2, s_2)) = (r_1 r + s r_1, 0)(\alpha(r_2), s_2) = (r_1 r\, \alpha(r_2) + s r_1\, \alpha(r_2) + s_2(r_1 r) + s_2(s r_1), 0) = (0,0)$ elde edilir.

Böylece $(r_1, s_1)D\alpha(r_2s_2) = 0$ elde ederiz ki bu da $D$ Dorroh genişlemesinin $\alpha-$yarı-değişmeli olduğunu gösterir. Benzer şelilde $s_2 = 0$ olması durumundada $D$ Dorroh genişlemesinin $\alpha$ $-$yarı-değişmeli olduğu gösterilebilir. ■

**Sonuç 3.1.10.** Eğer $R$ yarı-değişmeli bir halka ve $S$ bir tamlık bölgesi ise, bu durumda $R$ nin $S$ ile Dorroh genişlemesi olan $D$ halkası yarı-değişmelidir.

Önerme 3.1.9 daki "$\alpha(1_R) = 1_R$" koşulu fazladan değildir. Gerçekten bu durumu aşağıdaki örnekte görelim.

**Örnek 3.1.11.** $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ olmak üzere $R$ halkasının

$\alpha: R \to R, \alpha((a, b)) = (0, b)$ şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. $R$ halkasının $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ile Dorroh genişlemesi $D$ olsun. Yani $D = R \times \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $((1,0), -1), ((1,0), 0) \in D$ için $((1,0), 0)((1,0), -1) = 0$ olmasına rağmen $((1,0), 0)((1,0), 0)\alpha((1,0), -1) = ((-1,0), 0) \neq 0$ dır. Yani $D$ Dorroh genişlemesi $\alpha$ $-$yarı-değişmeli değildir.

$R$ bir halka ve $\alpha$; $R$ nin bir endomorfizması olmak üzere

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \mapsto \alpha(a_0) + \alpha(a_1)x + \cdots + \alpha(a_m)x^m$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonda $R[x]$ polinom halkasının bir endomorfizmasıdır. $R[x]$ polinom halkasının yukarıdaki şekilde tanımlanan endomorfizmasınıda $\alpha$ ile göstereceğiz.

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=-s}^{n} a_ix^i : s \geq 0, n \geq 0, a_i \in R \right\}$$

şeklinde tanımlanan küme polinomlarda ki toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya *Laurent polinomlarının halkası* denir. $\alpha$; $R$ nin bir endomorfizması olmak üzere $\alpha$ yardımıyla $R[x]$ polinom halkası üzerinde tanımladığımız endomorfizmanın benzeri $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinomlarının halkası üzerinde de tanımlanır.

**Önerme 3.1.12.** $R$ bir halka ve $\alpha(1_R) = 1_R$ olsun. $R[x]$ in $\alpha$ −yarı-değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x;x^{-1}]$ halkasının $\alpha$ −yarı-değişmeli olmasıdır.

**İspat.** $R[x;x^{-1}]$ $\alpha$ −yarı-değişmeli olsun. Bu durumda $R[x]$ **;** $R[x;x^{-1}]$ halkasının bir alt halkası olduğundan $R[x]$ de $\alpha$ −yarı-değişmelidir. Şimdi $R[x]$ ; $\alpha$ −yarı-değişmeli olsun. $R[x;x^{-1}]$ halkasının $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $f(x), g(x) \in R[x;x^{-1}]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda, $f_1(x) = f(x)x^n, g_1(x) = g(x)x^n \in R[x]$ olacak şekilde bir $n$ pozitif tamsayısı vardır ve $f_1(x)g_1(x) = 0$ dır. $R[x]$ ; $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğundan $f_1(x)R[x]\alpha(g_1(x)) = 0$ dır. Şimdi $h(x) \in R[x;x^{-1}]$ keyfi bir eleman olsun. Bu durumda $h_1(x) = h(x)x^m \in R[x]$ olacak şekilde pozitif bir $m$ tamsayısı vardır. Bu durumda $f(x)h(x)\alpha(g(x)) = f_1(x)x^{-n}h_1(x)x^{-m}\alpha(g_1(x)x^{-n})$ olup, buradan da kolayca görülebileceği üzere

$f(x)h(x)\alpha(g(x)) = f_1(x)h_1(x)\alpha(g_1(x))x^{-2n-m} = 0$ elde edilir. Bu da $R[x;x^{-1}]$ halkasının $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğunu gösterir. ■

**Sonuç 3.1.13.** [Huh, Lee ve Smoktunowicz 2002, Sonuç 4] $R$ bir halka olsun. $R[x]$ in yarı-değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x;x^{-1}]$ halkasının yarı-değişmeli olmasıdır.

$R$ bir halka ve $M$ bir $(R,R)$ −bimodül olmak üzere;

$$R \oplus M = R \times M = \{(r,m) \mid r \in R, m \in M\}$$

kümesi,

$$(r_1,m_1) + (r_2,m_2) = (r_1 + r_2,\ m_1 + m_2)$$

$$(r_1,m_1)(r_2,m_2) = (r_1r_2,\ r_1m_2 + m_1r_2)$$

ikili işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya $R$ nin $M$ ile *aşikar genişlemesi* (*trival extension*) denir ve $T(R,M)$ ile gösterilir. Bir $R$ halkasının $M$; $(R,R)$ −bimodülü ile aşikar genişlemesi

$$\left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R, m \in M\right\}$$

halkasına izomorftur.

$R$ bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olmak üzere $R$ nin $T(R,R)$ aşikar genişlemesi üzerinde

$$\alpha: T(R,R) \rightarrow T(R,R),\ \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ 0 & \alpha(a) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $T(R,R)$ halkasının bir endomorfizmasıdır. $T(R,0)$ ; $R$ ye izomorf olduğundan α ın $T(R,0)$ a kısıtlamasını $\alpha$ ile özdeş kılarız.

**Teorem 3.1.14.** $R$ inmiş bir halka ve $n$ bir pozitif tamsayı olsun. Eğer $R$ $\alpha-$yarı-değişmeli ve $\alpha(1_R) = 1_R$ ise, bu durumda $\langle x^n \rangle$ ; $R[x]$ in $x^n$ tarafından üretilen ideali olmak üzere $R[x]/\langle x^n \rangle$ bölüm halkası da α −yarı-değişmelidir.

**İspat.** $S = R[x]/\langle x^n \rangle$ olsun. Eğer $n = 1$ ise, bu durumda $S \cong R$ olup, $R$ ; $\alpha-$yarı-değişmeli olduğundan $S$ de $\alpha-$yarı-değişmelidir. Eğer $n = 2$ ise, bu durumda $R[x]/\langle x^2 \rangle \cong T(R,R)$ dir. Şimdi bu halkaların izomorf olduklarını ispatlayalım.

$R[x]/\langle x^2 \rangle = \{a + bx + \langle x^2 \rangle \mid a, b \in R\}$ olduğu kolayca görülebilir.

$$\varphi: R[x]/\langle x^2 \rangle \rightarrow T(R,R),\ \varphi(a + bx + \langle x^2 \rangle) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir izomorfizmadır. Gerçekten;

$a + bx + \langle x^2 \rangle, c + dx + \langle x^2 \rangle \in R[x]/\langle x^2 \rangle$ için $a + bx + \langle x^2 \rangle = c + dx + \langle x^2 \rangle \Rightarrow$

$(a - c) + (b - d)x \in \langle x^2 \rangle \Rightarrow a - c = 0$ ve $b - d = 0 \Rightarrow a = c$ ve $b = d$

$\Rightarrow \varphi\left(a+bx+\langle x^2\rangle\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \varphi(c+dx+\langle x^2\rangle)$ olduğundan $\varphi$ bağıntısı bir fonksiyondur. $a+bx+\langle x^2\rangle, c+dx+\langle x^2\rangle \in R[x]/\langle x^2\rangle$ için

$$\varphi\left(\left(a+bx+\langle x^2\rangle\right)+\left(c+dx+\langle x^2\rangle\right)\right) = \varphi\left(a+bx+\langle x^2\rangle\right) + \varphi\left(c+dx+\langle x^2\rangle\right)$$

$$\varphi\left(\left(a+bx+\langle x^2\rangle\right)\left(c+dx+\langle x^2\rangle\right)\right) = \varphi\left(a+bx+\langle x^2\rangle\right)\varphi\left(c+dx+\langle x^2\rangle\right)$$

oldukları da kolayca gösterilebilir. Açık olarak da $\varphi$ birebir ve örtendir. Sonuç olarak $\varphi$ izomorfizma olup $R[x]/\langle x^2\rangle \cong T(R,R)$ dir. Hatırlatalım ki; $R$ nin bir inmiş halka olması için gerek ve yeter koşul $a,b \in R$ için $ab^2=0$ olması $ab=0$ olmasıdır. Ayrıca her inmiş halkanın yarı-değişmeli olduğunu biliyoruz. $\alpha$; $R$ halkasının bir endomorfizması iken, aşağıdaki şekilde tanımlanan α bağıntısı da $R[x]/\langle x^n\rangle$ bölüm halkasının bir endomorfizmasıdır.

$$\alpha: R[x]/\langle x^n\rangle \to R[x]/\langle x^n\rangle, \; f(x)+\langle x^n\rangle \to \alpha\left(f(x)+\langle x^n\rangle\right) = \alpha\left(f(x)\right)+\langle x^n\rangle$$

$R$ inmiş ve $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğundan $T(R,R)$; $\alpha$ −yarı-değişmelidir. Gerçekten;

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R,R)$$

için $AB=O$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ac=0 \quad \text{ve} \quad ad+bc=0$$

elde edilir. Bu durumda $0=adc+bc^2$ olup, burada $R$ yarı-değişmeli olduğundan $adc=0$ olur. Böylece $bc^2=0$ elde edilir. $R$ inmiş olduğundan $bc^2=0$ olması $bc=0$ olmasını gerektirir. Yukarıda $ad+bc=0$ ve $bc=0$ olduğundan $ad=0$ bulunur. Böylece $R$; $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğundan; $aR\alpha(c)=0$, $aR\alpha(d)=0$ , $bR\alpha(c)=0$ dır. Keyfi $C = \begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(c) & \alpha(d) \\ 0 & \alpha(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah\alpha(c) & ah\alpha(d) + (ak+bh)\alpha(c) \\ 0 & ah\alpha(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, bu da $AT(R,R)\alpha(B) = 0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $S \cong T(R,R)$ $\alpha$ −yarı-değişmelidir. Şimdi $n \geq 3$ olduğunu kabul edelim. $x = x + x^n$ olmak üzere

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i,\ g = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j \in S$$

için $fg = 0$ olsun. Eğer $i + j \geq n$ ise, bu durumda $a_i b_j x^{i+j} = 0$ dır. Böylece $i + j \leq n - 1$ alabiliriz. $fg = 0$ eşitliği bize aşağıdaki denklem sistemini verir:

(1) $a_0 b_0 = 0,$

(2) $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0,$

(3) $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0,$

$\vdots$

(4) $a_0 b_{n-2} + a_1 b_{n-3} + \cdots + a_{n-3} b_1 + a_{n-2} b_0 = 0,$

(5) $a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_1 + a_{n-1} b_0 = 0.$

Yukarıdaki (2) denklemini sağdan $b_0$ ile çarparsak, $0 = a_0 b_1 b_0 + a_1 b_0 b_0 = a_1 b_0^2$ elde ederiz ki, bu da bize $a_1 b_0 = 0$ olduğunu verir. Böylece (1) denklemini de kullanarak;

(6) $a_1 b_0 = 0$ ve $a_0 b_1 = 0$

elde ederiz. (3) denklemi sağ taraftan sırasıyla $b_0$ ve $b_1$ ile çarpılır ve (1) ile (6) kullanılırsa $0 = a_0 b_2 = a_1 b_1 = a_2 b_0$ elde edilir. Bu şekilde devam ederek $i + j = 0,1,\ldots,n-2$ için $a_i b_j = 0$ elde edilir. (5) denklemini sağ taraftan $b_0$ ile çarparsak $0 = a_{n-1} b_0 b_0$ ve böylece $a_{n-1} b_0 = 0$ elde edilir. Bu durumda (5) denklemi,

(7) $a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_1 = 0$

haline gelir. (7) denklemini sağ taraftan $b_1$ ile çarparsak $a_{n-2} b_1 b_1 = 0$ ve böylece $a_{n-2} b_1 = 0$ elde ederiz. Buradan $a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-3} b_2 = 0$ eşitliğine sahip oluruz. İşlemlere bu şekilde devam ederek $i + j = n - 1$ olacak şekildeki her $i$ ve $j$ için $a_ib_j = 0$ elde ederiz. Sonuç olarak $i + j \leq n - 1$ olacak şekildeki her $i$ ve $j$ için $a_ib_j = 0$ bulunur. $R$; $\alpha$ −yarı-değişmeli ve inmiş olduğundan da herhangi bir pozitif $t$ tamsayısı için $a_iR\alpha^t(b_j) = 0$ bulunur. Bu yüzden $fR\alpha(g) = 0$ ve böylece [Hirano 2002, Lemma 2.1.] den $fS\alpha(g) = 0$ elde ederiz. Böylece $S$ halkası $\alpha$ −yarı-değişmelidir. ■

### 3.2. Genelleştirilmiş Yarı Değişmeli Halkalar ve Armendarizlik Özelliği

Bu kısımda, $\alpha$ −yarı-değişmeli halkaların sınıfı ile $\alpha$ −Armendariz halkaların sınıfı arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. Bir $R$ halkasının $\alpha$ −katı olması için gerek ve yeter koşulun $R$ halkasının inmiş ve $\alpha$ −Armendariz olması gerektiğini [Hong, Kwak ve Rizvi 2006, Önerme 1.7] den biliyoruz. Şimdi bu karakterizasyonun ispatını hatırlatalım. $R$ inmiş ve $\alpha$ −Armendariz ve $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. $f(x) = ax$ ve $g(x) = ax \in R[x;\alpha]$ için $f(x)g(x) = axax = a\alpha(a)x^2 = 0x^2 = 0$ elde edilir. Buradan $R$; $\alpha$ −Armendariz olduğundan $aa = 0 \Rightarrow a^2 = 0$ olur ve $R$ halkası inmiş olduğundan $a = 0$ elde edilir. Böylece $R$ halkası $\alpha$ −katıdır. Tersine, $R$; $\alpha$ −katı halka olsun. $\alpha$ −katı halkaların inmiş halka olduğunu biliyoruz. O halde $R$ nin $\alpha$ −Armendariz olduğunu gösterelim. $R$; $\alpha$ −katı $\Rightarrow$ $R[x;\alpha]$ inmiş $\Rightarrow$ $R[x;\alpha]$ Armendarizdir. Böylece $f(x), g(x) \in R[x;\alpha]$ için $f(x)g(x) = 0$ olması $a_ib_j = 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $R$; $\alpha$ −Armendariz halkadır.

$R$ değişmeli ve inmiş bir halka olmak üzere bu halkanın kendisi $\alpha$ −yarı-değişmeli olmayacak şekilde bir $\alpha$ endomorfizmasının var olduğunu Örnek 3.1.3 den biliyoruz.

**Önerme 3.2.1.** $R$ bir halka ve $\alpha$; $R$ nin bir endomorfizması olmak üzere;

(1) $R$ halkasının $\alpha$ −katı olması için gerek ve yeter koşul $\alpha$ nın bir monomorfizma ve $R$ nin $\alpha$ −yarı-değişmeli bir inmiş halka olmasıdır.

(2) Eğer $R$ terslenebilir $\alpha$ −Armendariz bir halka ise, bu durumda $R$; $\alpha$ −yarı-değişmelidir.

**İspat.** (1) $R;\ \alpha-$katı olsun. Biliyoruz ki $R;\ \alpha-$katı $\Rightarrow R$ inmiş ve $R;\ \alpha-$katı $\Rightarrow \alpha$ bir monomorfizmadır. Bu durumda $R$ nin $\alpha-$yarı-değişmeli olduğunu göstermek yeterlidir. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $R$ inmiş $\Rightarrow R$ terslenebilir olduğundan $ba = 0$ dır. Her $r \in R$ için $ar\alpha\ b\ \alpha\ ar\alpha\ b\ \ = ar\alpha\ b\ \alpha\ ar\ \alpha^2\ b\ = ar\alpha\ b\ \alpha\ a\ \alpha\ r\ \alpha^2\ b\ =$ $ar\alpha\ ba\ \ \alpha\ r\ \alpha^2\ b\ = ar\alpha\ 0\ \alpha\ r\ \alpha^2\ b\ = ar0\alpha\ r\ \alpha^2\ b\ = 0$ ($\alpha$ homomorfizma olduğundan $\alpha\ 0\ = 0$) dır. Böylece $R;\ \alpha-$yarı-değişmelidir. Tersine, $\alpha$ monomorfizma, $R$ halkası inmiş ve $\alpha-$yarı-değişmeli ve $a \in R$ için $a\alpha\ a\ = 0$ olsun. $R$ terslenebilir olduğundan $\alpha\ a\ a = 0$ olup, $R;\ \alpha-$yarı-değişmeli olduğundan da $\alpha\ a\ R\alpha\ a\ = 0$ dır. Böylece $\alpha\ a^2\ = 0$ olur ki $\alpha$ monomorfizma olduğundan $a^2 = 0$ ve $R$ inmiş olduğundanda $a = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $R;\ \alpha-$katı bir halkadır.

2 $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $R$ terslenebilir olduğundan $ba = 0$ dır. Bu durumda $R$ $\alpha-$Armendariz olduğundan [Hong ve diğerleri 2006, Önerme 1.3(1) ] gereğince $\alpha\ b\ a = 0$ olur. Şimdi bunu görelim. $R;\ \alpha-$Armendariz ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $p = \ \alpha\ a\ x$ ve $q = bx \in\ R\ x;\alpha$ için $pq = \alpha\ a\ x\,bx = \ \alpha\ a\ \alpha\ b\ x^2 =$ $\alpha\ ab\ x^2 = \alpha\ 0\ x^2 = 0x^2 = 0$ olup, buradan $\alpha\ a\ b = 0$ elde edilir. Böylece her $r \in R$ için $\alpha\ b\ ar = 0$ dır. $R$ terslenebilir olduğundan $ar\alpha\ b\ = 0$ olup, buradan $aR\alpha\ b\ = 0$ elde edilir. Böylece $R;\ \alpha-$yarı-değişmelidir. ■

Önerme 3.2.1.(2) nin tersi doğru değildir. Örnek 3.1.8. de verilen $R$ halkası değişmeli tamlık bölgesi olduğundan $R;\ \alpha-$yarı-değişmeli ancak [Hong, Kwak ve Rizvi 2006, Örnek 1.8] gereğince $R;\ \alpha-$Armendariz değildir. Bununla beraber aşağıdaki lemmayı ispatlayabiliyoruz.

**Lemma 3.2.2.**

(1) Eğer $R$ halkasının Skew polinom halkası olan $R\ x;\alpha$ yarı-değişmeli bir halka ise, bu durumda $R;\ \alpha-$yarı-değişmelidir.

(2) $R;\ \alpha-$Armendariz halka olmak üzere, eğer $R;\ \alpha-$yarı-değişmeli ise, bu durumda $R$ ; yarı-değişmelidir.

**İspat.** (1) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $R[x; \alpha]$ yarı-değişmeli olduğundan $a R[x; \alpha] b = 0$ dır. Keyfi $r \in R$ için $arxb = 0 \Rightarrow ar\alpha(b)x = 0 \Rightarrow ar\alpha(b) = 0$ dır. Böylece $R;\ \alpha-$yarı-değişmelidir.

(2) $R;\ \alpha-$Armendariz ve $\alpha-$yarı-değişmeli olmak üzere $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $R;\ \alpha-$yarı-değişmeli olduğundan $aR\alpha(b) = 0$ dır. Keyfi $r \in R$ için, $p = arx$ ve $q = b \in R[x; \alpha]$ alalım. $ar\alpha(b) = 0$ olduğundan $pq = arxb = ar\alpha(b)x = 0$ elde edilir. $R;\ \alpha-$Armendariz olduğundan $arb = 0$ dır. Böylece $aRb = 0$ olup $R$ yarı-değişmelidir. ∎

**Teorem 3.2.3.**

(1) Eğer $R;\alpha-$Armendariz halka ise, bu durumda $R$ nin $\alpha-$yarı-değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x; \alpha]$ nin yarı-değişmeli olmasıdır.
(2) Eğer $R$ Armendariz halka ise, bu durumda $R$ nin $\alpha-$yarı-değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ in $\alpha-$yarı-değişmeli olmasıdır.

**İspat.** (1) $R;\ \alpha-$Armendariz halka olsun. Kabul edelim ki $R;\ \alpha-$yarı-değişmeli olsun. $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x; \alpha]$ için $pq = 0$ olsun. $R;\ \alpha-$Armendariz olduğundan her $i, j$ için $a_i b_j = 0$ olur. $R;\ \alpha-$yarı-değişmeli olduğundan her $i, j$ ve keyfi pozitif $k$ tamsayısı için $a_i R \alpha^k(b_j) = 0$ olur. Böylece her $c_k x^k \in R[x; \alpha]$ için

$p(c_k x^k)q = (\sum_{i=0}^{m} a_i x^i)(c_k x^k)(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)(c_k x^k(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)) = a_0 c_k \alpha^k(b_0)\, x^k + (a_0 c_k \alpha^k(b_1) + a_1\, \alpha(c_k) \alpha^{k+1}(b_0))x^{k+1} + \cdots + a_m \alpha^m c_k \alpha^{m+k}(b_n)\, x^{k+n+m} = 0$ elde edilir. Böylece her $h \in R[x; \alpha]$ için Lemma 3.2.2.(2) den $phq = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $pR[x; \alpha]q = 0$ olup $R[x; \alpha]$ yarı-değişmeli halkadır. Tersine $R[x; \alpha]$ yarı-değişmeli olsun. Bu durumda Lemma 3.2.2.(1) den $R;\ \alpha-$yarı-değişmelidir.

(2) $R$ Armendariz halka olsun. $R$ nin $\alpha-$yarı-değişmeli halka olduğunu kabul edelim. $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. $R$ Armendariz ve $\alpha-$yarı-değişmeli olduğundan, keyfi negatif olmayan $k$ tam sayısı ve her $i, j$ için $a_i b_j = 0$ ve $a_i R\, \alpha^k(b_j) = 0$ dır. Böylece $f(x) R \alpha(g(x)) = 0$ olup, [Hirano 2002,

Lemma 2.1] gereğince $f(x)R[x;\alpha]g(x)=0$. Böylece $R[x;\alpha]$ $-$yarı-değişmeli halkadır. Tersine, $R[x;\alpha]$ $-$yarı-değişmeli olsun. $\alpha$; $R$ nin bir endomorfizması olmak üzere $\alpha: R[x]\to R[x]$, $a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m\in R[x]$ için $\alpha(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)=\alpha(a_0)+\alpha(a_1)x+\cdots+\alpha(a_m)x^m$ biçiminde tanımlanan fonksiyon da $R[x]$ polinomlar halkasının bir endomorfizmasıdır. $a,b\in R$ için, $ab=0\Rightarrow aR[x]\alpha(b)=0\Rightarrow aR\alpha(b)=0$ elde edilir. ■

**Sonuç 3.2.4.** [Rege ve Chhawchharia 1997, Önerme 4.6] $R$ Armendariz halka olsun. Eğer $R$ yarı-değişmeli ise, bu durumda $R[x]$ yarı-değişmelidir.

**Teorem 3.2.5.** $R$; $\alpha$ $-$yarı-değişmeli bir halka olsun. Eğer $\alpha(1_R)=1_R$ ise, bu durumda $R[x;\alpha]$ daki tüm eşkare elemanlar $R$ deki eşkare elemanlar ile aynıdır. Ayrıca $R[x;\alpha]$ abelyandır.

**İspat.** $e^2=e\in R$ olsun. Bu durumda $e(1_R-e)=0$ ve $(1_R-e)e=0$ olur. Böylece $R$; $\alpha$ $-$yarı-değişmeli olduğundan $(1_R-e)r\alpha(e)=0$ ve $er\alpha(1_R-e)=0$ elde edilir. Önerme 3.1.7.(ii) den $(1_R-e)re=0$ ve $er(1_R-e)=0$ olur. Yani $re=ere=er$ olur ki bu da bize $R$ halkasının abelyan olduğunu gösterir. Önerme 3.1.7.(ii) den herhangi bir $e^2=e\in R$ için $\alpha(e)=e$ olduğunu hatırlatalım.

Şimdi $f(x)=e_0+e_1x+e_2x^2+\cdots+e_nx^n$ olmak üzere $f^2(x)=f(x)\in R[x;\alpha]$ olsun. $f^2(x)=f(x)$ eşitliğinden aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

(0) $e_0^2=e_0$,

(1) $e_0e_1+e_1\alpha(e_0)=e_1$,

(2) $e_0e_2+e_1\alpha(e_1)+e_2\alpha^2(e_0)=e_2$,

$\vdots$

$(n)$ $e_0e_n+e_1\alpha(e_{n-1})+\cdots+e_{n-1}\alpha^{n-1}(e_1)+e_n\alpha^n(e_0)=e_n$.

Yukarıdaki (0) dekleminden $e_0$ elemanı $R$ de bir eşkaredir ve hipotezden bu eşkare merkezidir. Ayrıca Önerme 3.1.7.(ii) den dolayı da $\alpha\ \ e_0\ \ = e_0$ dır. Böylece yukarıdaki denklem sisteminden aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

(1′) $2e_1e_0 = e_1,$

(2′) $e_0e_2 + e_1\alpha(e_1) + e_2e_0 = e_2,$

$\vdots$

(n′) $e_0e_n + e_1\alpha\ \ e_{n-1}\ \ + \cdots + e_{n-1}\alpha^{n-1}(e_1) + e_ne_0 = e_n.$

Yukarıdaki (1′) denklemi sağ taraftan $(1_R - e_0)$ ile çarpılırsa $e_1(1_R - e_0) = 0$ elde edilir. Böylece $e_1 = e_1e_0$ olup, (1′) denkleminden $e_1 = 0$ elde edilir. Diğer taraftan (2′) denklemi $2e_0e_2 = e_2$ haline gelir. Benzer şekilde $0 = 2e_0e_2(1_R - e_0) = e_2(1_R - e_0)$ dan $e_0e_2 = e_2$ olup $e_2 = 0$ bulunur. Bu işleme devam edilirse $i \geq 1$ için $e_i = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $f\ \ x\ \ = e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_nx^n = e_0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n = e_0 = e_0^2 \in R$ bulunur. Diğer taraftan $R$ abelyan olduğundan $R[x;\alpha]$ da abelyandır. Gerçekten; $e^2\ \ x\ \ = e(x)\ \in R\ \ x;\alpha$ için $e\ \ x\ \ = e \in R$ dir. $g\ \ x\ \ = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in R\ \ x;\alpha$ olmak üzere $g\ \ x\ \ e = b_0e + b_1\alpha\ \ e\ \ x + \cdots + b_n\alpha^n(e)\ x^n$ dir. $R$ abelyan ve $\alpha\ \ e\ \ = e$ olduğundan $g\ \ x\ \ e = b_0e + b_1\alpha\ \ e\ \ x + \cdots + b_n\alpha^n\ \ e\ \ x^n = b_0e + b_1ex + \cdots + b_ne\ x^n = eb_0 + eb_1x + \cdots + eb_n\ x^n = e\ \ b_1x + \cdots + b_nx^n\ \ =$ $eg(x)$ olur. Böylece $R\ \ x;\alpha$ abelyandır. ■

**Sonuç 3.2.6.** Eğer $R$ yarı-değişmeli halka ise, bu durumda $R\ \ x$ abelyandır.

**Teorem 3.2.7.** Eğer $R$ inmiş ve $\alpha$ −yarı-değişmeli halka ise, bu durumda $R;\alpha$ −skew Armendarizdir.

**İspat.** $R$ inmiş ve $\alpha$ −yarı-değişmeli bir halka olmak üzere

$p\ \ x\ \ = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m\ ,\ \ q\ \ x\ \ = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n\ \in R\ \ x;\alpha$

için $p\ \ x\ \ q\ \ x\ \ = 0$ olsun. Bu durumda $k = 0,1,2,\ldots,m+n$ için

$${}_{i+j=k}\, a_i\alpha^i(b_j) = 0$$

elde edilir. İddia ediyoruz ki; her $i, j$ için $a_i\alpha^i\ b_j\ = 0$ dir. Bunun ispatını $i + j$ üzerine tümevarım uygulayarak yapacağız. $a_0b_0 = 0$ olduğundan iddiamız $i + j = 0$ için doğrudur. Şimdi kabul edelim ki iddiamız $i + j \leq s$ için doğru olsun. Yani $i + j \leq s$ için $a_i\alpha^i\ b_j\ = 0$ olsun. İddiamızın $i + j = s + 1$ içinde doğru olduğunu göstereceğiz. Yukarıdaki eşitlikte $k = s + 1$ alınırsa

$$a_0b_{s+1} + a_1\alpha\ b_s\ + \cdots + a_s\alpha^s\ b_1\ +\ a_{s+1}\alpha^{s+1}\ b_0\ = 0 \tag{1}$$

elde edilir. (1) eşitliğini sağdan $\alpha^{s+1}\ b_0$ ile çarparsak

$$a_0b_{s+1}\alpha^{s+1}\ b_0\ + a_1\alpha\ b_s\ \alpha^{s+1}\ b_0\ + \cdots +\ a_{s+1}\alpha^{s+1}\ b_0\ \alpha^{s+1}\ b_0\ = 0 \tag{2}$$

olup tümevarım hipotezinden ve $R$; $\alpha -$yarı-değişmeli olduğundan $i = 0,1,2, \dots, s$ için $a_i\alpha^i\ b_0\ = 0$ olması $0 \leq i \leq s$ için $a_iR\alpha^{s+1}\ b_0\ = 0$ olmasını gerektirir. Yani

$$a_0b_{s+1}\alpha^{s+1}\ b_0\ = a_1\alpha\ b_s\ \alpha^{s+1}\ b_0\ = \cdots = a_s\alpha^s\ b_1\ \alpha^{s+1}\ b_0\ = 0$$

olup (2) denkleminden $a_{s+1}(\ \alpha^{s+1}(b_0))^2 = 0$ elde edilir. Bu arada $R$ halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşulun $a, b \in R$ için $ab^2 = 0$ olmasının $ab = 0$ olması gerektirdiğini hatırlatalım. Böylece $R$ inmiş halka olduğundan $a_{s+1}(\ \alpha^{s+1}(b_0))^2 = 0$ olması $a_{s+1}\alpha^{s+1}\ b_0\ = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla (1) denklemi

$$a_0b_{s+1} + a_1\alpha\ b_s\ + \cdots + a_s\alpha^s\ b_1\ = 0 \tag{3}$$

şeklinde olur. Benzer olarak (3) denklemi sağdan $\alpha^s\ b_1$ ile çarpılır ve kabuller kullanılırsa $a_s(\ \alpha^s(b_1))^2 = 0$ ve böylece de $a_s\alpha^s\ b_1\ = 0$ elde edilir. Bu işlem devam ettirilirse

$$a_{s+1}\alpha^{s+1}\ b_0\ =\ a_s\alpha^s\ b_1\ = \cdots =\ a_0\ b_{s+1}\ = 0$$

elde edilir. Böylece $i + j = s + 1$ şartını sağlayan tüm $i, j$ ler için $a_i\alpha^i\ b_j\ = 0$ olduğunu ispatlamış olduk. Sonuç olarak tümevarım hipotezi gereğince her $i$ ve $j$ için $a_i\alpha^i\ b_j\ = 0$ elde edilir ki, bu da bize $R$ halkasının $\alpha -$skew Armendariz olduğunu verir. ∎

**Sonuç 3.2.8.** [Hong, Kim ve Kwak 2003, Sonuç 4] Eğer $R$ bir $\alpha-$katı halka ise, bu durumda $R;\ \alpha-$skew Armendariz halkadır.

$\alpha-$Armendariz halkaların $\alpha-$skew Armendariz olduğunu biliyoruz. Teorem 3.2.7. deki " $R;\alpha-$skew Armendariz dir '' ifadesi " $R;\alpha-$Armendariz '' ifadesiyle yer değiştiremez. Gerçekten Örnek 3.1.8. deki $R$ halkasını ve bu halkanın $\alpha$ endomorfizmasını göz önüne alalım. Yani $F$ bir cisim, $R = F[x]$ ve $\alpha(f(x)) = f(0)$ olmak üzere $R$ inmiş ve $\alpha-$yarı-değişmelidir. Fakat [Hong, Kwak ve Rizvi 2006, Örnek 1.8] den $R;\ \alpha-$Armendariz değildir.

Diğer taraftan Teorem 3.2.7. nin hipotezinde istenen "$R$ nin inmiş halka" olma şartı fazladan değildir. Gerçekten bunu aşağıdaki örnekten görebiliriz.

**Örnek 3.2.9.** $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_4\right\}$ halkasının $\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda $R$ halkasının $\alpha-$yarı-değişmeli fakat inmiş olmadığı kolayca gösterilebilir. Fakat $R;\alpha-$skew Armendariz değildir. Gerçekten $p(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \in R[x;\alpha]$ için $p^2(x) = 0$ fakat $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ dır.

### 3.3. Genelleştirilmiş Yarı-Değişmeli Halka Örnekleri

Bu bölümde katı ve yarı-değişmeli halkaların bir genelleştirmesi olan $\alpha-$yarı-değişmeli halkalar için bazı örnekler verilecek ve bu halka sınıflarının bazı genişlemeleri ele alınacaktır. Özellikle de Armendariz halkaların bir genelleştirmesi olan $\alpha - sps$ Armendariz halkalar tanımlanacak bu yeni halka sınıfının bazı karakterizasyonları ve bu halka sınıfının diğer halka sınıfları ile olan ilişkileri çalışılacaktır.

**Tanım 3.3.1.** $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olması $acb = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda $R$ halkasına *simetriktir* denir.

**Önerme 3.3.2.**

(i) [Shin 1973, Lemma 1.1] Her inmiş halka simetriktir.

(ii) [Shin 1973, Lemma 1.1] $R$ halkası simetrik ise $R$ terslenebilirdir.

(iii) [Shin 1973, Lemma 1.2] $R$ halkasının yarı-değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $r_R(a)$ nın $R$ nin bir ideali olmasıdır.

(iv) [Shin 1973, Önerme 1.4] Her simetrik halka yarı-değişmelidir.

**İspat.** (i) $R$ inmiş ve $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. $R$ inmiş olduğundan $R$ terslenebilir dır. Bunu sıkça kullanacağız. Böylece $abc = 0 \Rightarrow a\ bcb\ = 0 \Rightarrow\ bcb\ a = 0 \Rightarrow\ b\ cbac\ = 0 \Rightarrow\ cbac\ b = 0 \Rightarrow\ cba\ ^2 = 0 \Rightarrow cbacba = 0 \Rightarrow cba = 0 \Rightarrow bac = 0 \Rightarrow acb = 0$ elde edilir.

(ii) $R$ birimli bir halka ve simetrik olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $ab = 0 \Rightarrow 1_R\, ab = 0 \Rightarrow 1_R\, ba = 0 \Rightarrow ba = 0$ elde edilir. Yani $R$ terslenebilirdir.

(iii) $R$ halkası yarı-değişmeli olsun. $r_R(a) \neq \emptyset$ dır. Gerçekten $a \in R$ , $0 \in R$ için $a0 = 0 \in r_R(a)$ dır. $r_R\ a\ \subset R$ olduğu aşikardır. $b_1, b_2 \in r_R(a)$ için $ab_1 = 0$ ve $ab_2 = 0$ olup $ab_1 - ab_2 = 0$ elde edilir ve buradan $a(b_1 - b_2) = 0$ yazılır. Böylece $b_1 - b_2 \in r_R(a)$ dır. $r \in R$ ve $b \in r_R\ (a)$ için, $b \in r_R\ (a)$ olduğundan $ab = 0$ olup $R$ halkası yarı-değişmeli olduğundan $arb = 0$ olur. Böylece $br \in r_R(a)$ olur. Sonuç olarak $r_R(a)$; $R$ nin bir idealidir. Tersine her $a \in R$ için $r_R(a)$; $R$ nin bir ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $b \in r_R\ (a)$ dır. $r_R(a)$; $R$ nin bir ideali olduğundan her $r \in R$ için $rb \in r_R\ (a)$ olup buradan $arb = 0$ elde edilir. Böylece $aRb = 0$ olup $R$ halkası yarı-değişmelidir.

(iv) $R$ simetrik halka olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $abr = 0 \Rightarrow arb = 0 \Rightarrow aRb = 0$ elde edilir. Böylece keyfi simetrik halka yarı-değişmelidir. ■

**Tanım 3.3.3.** $R$ bir halka ve $\alpha$; $R$ nin bir endomorfizması olsun. $(R[x],+)$ değişmeli grubu, $r \in R$ için $xr = \alpha(r)x$ yardımı ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya endomorfizma tipinin bir *Ore genişlemesi* veya *Skew polinom halkası* denir ve $R[x;\alpha]$ ile gösterilir. Yukarıda tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $(R[[x]],+)$ değişmeli grubu da bir halkadır. Bu halkayada endomorfizma tipinin *Skew kuvvet serilerinin halkası* denir ve $R[[x;\alpha]]$ ile gösterilir.

**Örnek 3.3.4.** $F$ bir cisim, $R = F[x]$; $F$ üzerindeki polinomların halkası olsun. $R$ halkasının $\alpha: R \to R$; $\alpha(f(x)) = f(0)$ şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. $R$ değişmeli bir tamlık bölgesi ve dolayısıyla inmiş bir halkadır. Şimdi $f(x), g(x) \in R$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f(x) = 0$ veya $g(x) = 0$ dır. Böylece $f(x) = 0$ veya $\alpha(g(x)) = 0$ dır. Buradan $f(x)R\alpha(g(x)) = 0$ olur ki buda $R$ nin $\alpha-$yarı-değişmeli olduğunu gösterir. Ayrıca $0 \neq x \in R$ için $x\alpha(x) = 0$ olduğundan $R$; $\alpha-$katı değildir.

**Örnek 3.3.5.** $\mathbb{Z}$ tamsayıların halkası olmak üzere $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid \mathrm{a, b, c} \in \mathbb{Z}\right\}$ halkasını göz önüne alalım. Açık olarak $\alpha: R \to R$ ; $\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan bağıntı $R$ nin bir endomorfizmasıdır. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in R$ için, $AB = 0$ olsun. Bu durumda $aa' = 0$ olup buradan $a = 0$ veya $a' = 0$ dır. Böylece $AR\alpha(B) = 0$ olur ki, buradan $R$; $\alpha-$yarı-değişmeli halka olur. Ancak, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $R$ de bir eşkare elemandır fakat $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan $R$ halkası abelyan değildir.

$R$ yarı-değişmeli bir halka iken $T(R,R)$ yarı-değişmeli bir halka olmak zorunda değildir. Bunu aşağıdaki örnekte görelim.

**Örnek 3.3.6.** $R$ reel sayılar cismi üzerindeki Hamilton quaternionlarının halkası $\mathbb{H}$ olmak üzere $R = T(\mathbb{H},\mathbb{H})$ olsun. Bu durumda $\mathbb{H}$ inmiş halka olduğundan $R = T(\mathbb{H},\mathbb{H})$

terslenebilir ve böylece $R$ yarı-değişmeli halkadır. Fakat $T(R,R)$ bir yarı-değişmeli halka değildir. Gerçekten;

$$\begin{pmatrix} 0 & i & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T(R,R)$$

için

$$\begin{pmatrix} 0 & i & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olmasına rağmen

$$\begin{pmatrix} 0 & i & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq$$

$O$ dır.

$R$ ; $\alpha$ −yarı-değişmeli bir halka iken $T(R,R)$ ; $\alpha$ −yarı-değişmeli bir halka olmayabilir. Bunu aşağıdaki örnekte görelim.

**Örnek 3.3.7.** $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{Z} \right\}$ halkasının $\alpha: R \to R$; $\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda $R$ nin $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğu kolayca görülebilir. Fakat,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T(R,R)$$

için $AB = O$ dır. Ancak $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için

$$O \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AC\alpha(B) \in AT(R,R)\alpha(B)$$ olduğundan $T(R,R)$ ; $\alpha$ −yarı-değişmeli değildir.

Bir $R$ halkasının $T(R,R)$ aşikar genişlemesi aşağıdaki matris halkasına genişletilebilir.

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in R \right\}$$

$R$ nin bir $\alpha$ endomorfizması için $\alpha((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij}))$ şeklinde tanımlanan bağıntı da $S_3(R)$ halkasının bir endomorfizmasıdır.

**Örnek 3.3.8.** $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ değişmeli ve inmiş halkasını göz önüne alalım. $\alpha: R \to R$ $\alpha((a,b)) = (b,a)$ şeklinde tanımlanan bağıntı $R$ nin bir otomorfizmasıdır. Bu durumda $S_3(R)$ ; $\alpha$ −yarı-değişmeli değildir. Gerçekten;

$$A = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \in S_3(R)$$

için $AB = O$ ancak $AA\alpha(B) = A \neq O$ dır. Böylece $AS_3(R)\alpha(B) \neq O$ olduğundan $S_3(R)$ ; $\alpha$ −yarı-değişmeli değildir.

**Önerme 3.3.10.** $R$ bir inmiş halka olsun. Eğer $R$; $\alpha$ −yarı-değişmeli halka ise, bu durumda $S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in R \right\}$ ; $\alpha$ −yarı-değişmelidir.

**İspat.** $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & a' & d' \\ 0 & 0 & a' \end{pmatrix} \in S_3(R)$ için $AB = O$ olsun. Bu durumda aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

(1) $aa' = 0$

(2) $ab' + ba' = 0$

(3) $ac' + bd' + ca' = 0$

(4) $ad' + da' = 0$

$R;\ \alpha -$yarı-değişmeli olduğundan denklem (1) den $aR\alpha\ \ a' \ \ = 0$ elde ederiz. Her inmiş halka yarı-değişmeli olduğundan denklem (2) yi sağdan $a'$ ile çarparsak $0 =$ $ab' + ba'\ \ a' = ba'^2$ buluruz. Böylece $ba' = 0$ ve denklem (2) den $ab' = 0$ olur. Benzer şekilde (4) denkleminden $da' = 0$ ve $ad' = 0$ olur. (3) denkleminden $0 =$ $ac' + bd' + ca'\ \ a' = ca'^2$ olduğundan $ca' = 0$ ve $ac' + bd' = 0$ elde edilir. Sonra, $0 = a(ac' + bd')$ $=a^2c'$ olduğundan $ac' = 0$ ve $bd' = 0$ dır. Böylece $R;\ \alpha -$yarı-değişmeli halka olduğundan $aR\alpha\ \ a' \ \ = 0,$ $aR\alpha\ \ b' \ \ = 0,$ $bR\alpha(a') = 0,$ $aR\alpha\ \ c' \ \ = 0,$ $aR\alpha\ \ d' \ \ = 0,$ $bR\alpha(d') = 0,$ $cR\alpha\ \ a' \ \ = 0,$ $dR\alpha\ \ a' \ \ = 0$ dır. Sonuç olarak $AS_3\ \ R\ \ \alpha\ \ B \ \ = 0$ olur. Dolayısıyla $AS_3\ \ R$ ; $\alpha -$yarı-değişmeli halkadır. ■

**Sonuç 3.3.11.** [Kim ve Lee 2003, Önerme 1.2] Eğer $R$ bir inmiş halka ise, bu durumda $S_3\ \ R$ halkası yarı-değişmelidir.

$n \geq 2$ için;

$$S_n\ \ R \ = \ \begin{matrix} a & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{matrix} \ \ |a,\ a_{ij} \in R$$

matris halkasını göz önüne alalım. Önerme 3.3.10 göz önünde bulundurularak; $R, \alpha -$ katı bir halka olmak üzere $n \geq 4$ için $S_n\ \ R$ halkasının da $\alpha -$yarı-değişmeli olabileceği düşünülebilir. Fakat aşağıdaki Örnek 3.3.14 bu olasılığı ortadan kaldırır.

**Lemma 3.3.12.** $\alpha; R$ halkasının bir endomorfizması olmak üzere eğer $R;\ \alpha -$katı halka ise, bu durumda $\alpha\ \ 1 \ \ = 1$ dir.

**İspat.** $1 - \alpha\ \ 1 \ \ \alpha(1 - \alpha\ \ 1\ ) = \ 1 - \alpha\ \ 1 \ \ \ \alpha\ \ 1 \ - \alpha\ \ \alpha\ \ 1 \ \ \ = \alpha\ \ 1 \ - \alpha\ \ \alpha\ \ 1 \ \ -$ $\alpha\ \ 1\ \ \alpha\ \ 1 \ \ + \alpha\ \ 1\ \ \alpha\ \ \alpha\ \ 1 \ \ \ = \alpha\ \ 1 \ - \alpha\ \ \alpha\ \ 1 \ \ - \alpha\ \ 1 \ + \ \alpha\ \ \alpha\ \ 1 \ \ \ = 0$ olup $R;\ \alpha -$katı olduğundan $1 - \alpha\ \ 1 \ \ = 0$ ve böylece $\alpha\ \ 1 \ \ = 1$ elde edilir. ■

**Lemma 3.3.13.** $\alpha; R$ halkasının bir endomorfizması olmak üzere eğer $R$ ; $\alpha -$katı ise, bu durumda her $e^2 = e \in R$ için $\alpha\ \ e \ \ = e$ dir.

**İspat.** $e^2 = e \in R$ ve $R$; $\alpha$ −katı olsun. Bu durumda, $R$; $\alpha$ −yarı-değişmelidir. $e(1-e) = 0$ ve $(1-e)e = 0$ olup $R$; $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğundan $e\alpha(1-e) = 0$ ve $(1-e)\alpha(e) = 0$ dır. $e\alpha(1-e) = 0$ olduğundan $e\alpha(e) = e$ ve $(1-e)\alpha(e) = 0$ olduğundan da $e\alpha(e) = \alpha(e)$ elde edilir. Böylece $\alpha(e) = e$ bulunur. ■

**Örnek 3.3.14.** $R$; $\alpha$ −katı bir halka olmak üzere

$$S_4(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a, a_{ij} \in R \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. $R$; $\alpha$ −katı olduğundan Lemma 3.3.12 ve Lemma 3.3.13 gereğince $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ ve özellikle $\alpha(1) = 1$ dir.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_4(R)$$

için $AB = O$ dır. Fakat,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_4(R) \quad \text{için} \quad O \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = AC\alpha(B) \in AS_4(R)\alpha(B)$$

dir. Yani $AS_4(R)\alpha(B) \neq O$ olduğundan $S_4(R)$; $\alpha$ −yarı-değişmeli değildir. Benzer şekilde $n \geq 5$ için de $S_n(R)$ halkasının $\alpha$ −yarı-değişmeli olmadığı gösterilebilir.

$R$; $\alpha$ −katı halka ise, bu durumda $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ve $q = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in R[[x;\alpha]]$ için, $pq = 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \leq i$, $0 \leq j$ için $a_i b_j = 0$ olmasıdır [Hong, Kim, Kwak 2000, Önerme 17 ve Sonuç 18].

**Tanım 3.3.15.** $\alpha$; $R$ halkasının bir endomorfizması olmak üzere; eğer $p = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $q = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in R[[x;\alpha]]$ için $pq = 0$ iken her $i, j$ için $a_i b_j = 0$ oluyorsa, bu durumda $R$ halkasına $\alpha$ endomorfizması ile birlikte *skew kuvvet serisi Armendariz halka* (veya kısaca *$\alpha - sps$ Armendariz halka*) denir.

**Uyarı 3.3.16.**

(i) Eğer $R$; $\alpha -$katı halka ise, bu durumda $R$; $\alpha - sps$ Armendarizdir.

(ii) Bir $\alpha - sps$ Armendariz halkanın $\alpha(S) \subset S$ koşulunu sağlayan her $S$ alt halkası da $\alpha - sps$ Armendarizdir.

**Örnek 3.3.17.** $\mathbb{Z}_2$ modül 2 ye göre kalan sınıfların halkası olmak üzere $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ olsun. $R$ halkasının $\alpha : R \to R$; $\alpha((a,b)) = (b,a)$ şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. $p = (1,0)x$ ve $q = (0,1) \in R[x;\alpha]$ için $(1,0)(0,1) = (0,0) \in R$ ancak $pq \neq 0$ dır. Ayrıca , $R$; $\alpha - sps$ Armendariz değildir. Gerçekten; $p = (1,0) + (1,0)x$ ve $q = (0,1) + (1,0)x \in R[x;\alpha]$ için $pq = 0$ fakat $(1,0)(1,0) \neq (0,0) \in R$ dır.

**Teorem 3.3.18.** $R$ bir halka olmak üzere;

(1) $R$; $\alpha -$katı halka $\Leftrightarrow$ $R$ inmiş $\alpha - sps$ Armendariz halkadır.

(2) Eğer $R[x;\alpha]$ yarı-değişmeli halka ise, bu durumda $R$; $\alpha -$yarı-değişmelidir.

(3) $R$; $\alpha - sps$ Armendariz halka olsun. Bu durumda;

(i) Eğer $R$; $\alpha -$yarı-değişmeli ise, bu durumda $R[x;\alpha]$ yarı-değişmelidir

(ii) Eğer $a, b \in R$ için $ab = 0$ ise, keyfi pozitif $n$ tamsayısı için $\alpha^n(a)b = 0$ dır.

(iii) Eğer $a, b \in R$ ve pozitif $m$ tamsayısı için $a\alpha^m(b) = 0$ ise $ab = 0$ dır.

**İspat.** (1) $R$; $\alpha -$katı halka olsun. Bu durumda [Hong, Kim, Kwak 2000, Önerme 17 ve Sonuç 18] gereğince $R$ inmiş $\alpha - sps$ Armendariz halkadır. Tersine $R$ inmiş $\alpha - sps$ Armendariz halka olsun. Kabul edelimki; $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. $p = ax$, $q = a \in R[x;\alpha]$ için, $pq = axa = a\alpha(a)x = 0x = 0$ elde edilir. $R$; $\alpha - sps$ Armendariz olduğundan $a^2 = 0$ ve $R$ inmiş olduğundan $a = 0$ olur. Böylece $R$; $\alpha -$katı halkadır.

(2) $R[x;\alpha]$ yarı-değişmeli halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $aR[x;\alpha]b = 0$ olur. Böylece her $r \in R$ için $arxb = 0$ dır. Bu durumda $ar\alpha(b)x = 0$ elde edilir. Böylece $aR\alpha(b) = 0$ olup $R$; $\alpha -$yarı-değişmelidir.

(3) $R;\ \alpha - sps$ Armendariz halka olsun.

i $R;\ \alpha -$yarı-değişmeli halka olsun. $R\ \ x;\alpha$ nin yarı-değişmeli olduğunu göstereceğiz. Fakat, ilk olarak $R$ nin yarı-değişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. $R;\ \alpha -$yarı-değişmeli olduğundan $aR\alpha\ \ b\ \ = 0$ dır. $g = b \in R\ \ x;\alpha$ ve keyfi $r \in R$ için $f = arx \in R\ \ x;\alpha$ alalım. $fg = arxb = ar\alpha\ \ b\ \ x = 0$ dır. $R;\ \alpha - sps$ Armendariz olduğundan $arb = 0$ dır. Böylece $aRb = 0$ olup $R$ yarı-değişmelidir. Şimdi; $p = \ {}_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ , $q = \ {}_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in R\ \ x;\alpha$ için $pq = 0$ olsun. $R;\ \alpha - sps$ Armendariz olduğundan her $i, j$ için $a_i b_j = 0$ dır. Böylece, $R;\ \alpha -$yarı-değişmeli olduğundan $a_i R\ \alpha\ \ b_j\ \ = 0$ ve her $i, j$ ve pozitif $k$ tamsayısı için $a_i R\ \alpha^k\ \ b_j\ \ = 0$ dır. Her $i, j$ ve pozitif $k$ tamsayısı için $a_i R\ \alpha^k\ \ b_j\ \ = 0$ olduğundan $c_k x^k \in R\ \ x;\alpha$ için, $p\ \ c_k x^k\ \ q = \ \ {}_{i=0}^{\infty} a_i x^i\ \ c_k x^k\ \ {}_{j=0}^{\infty} b_j x^j\ \ = a_0 c_k \alpha^k\ \ b_0\ \ x^k + \ \ a_0 c_k \alpha^k\ \ b_1\ \ + a_1 \alpha\ \ c_k\ \ \alpha^{k+1}\ \ b_0\ \ \ x^{k+1} + \cdots = 0$ elde edilir. $R$ yarı-değişmeli olduğundan her $h \in R\ \ x;\alpha$ için $phq = 0$. Dolayısıyla $pR\ \ x;\alpha\ \ q = 0$ olup $R\ \ x;\alpha$ yarı-değişmelidir.

(ii) Kabul edelim ki $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $\alpha\ \ a\ \ b = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $p = \alpha\ \ a\ \ x,\ q = bx \in R\ \ x;\alpha$ seçelim. Bu durumda $pq = \ \alpha\ \ a\ \ xbx = \alpha\ \ a\ \ \alpha\ \ b\ \ xx = \alpha\ \ ab\ \ x^2 = \alpha\ \ 0\ \ x^2 = 0$ elde edilir. Böylece $R\ ;\alpha - sps$ Armendariz olduğundan $\alpha\ \ a\ \ b = 0$ bulunur.

(iii) Kabul edelim ki pozitif bir $m$ tamsayısı için $a\alpha^m\ \ b\ \ = 0$ olsun.$p = ax^m,\ q = bx \in R\ \ x;\alpha$ için $pq = ax^m bx = \ a\alpha^m\ \ b\ \ x^m x = 0x^{m+1} = 0$ elde edilir. Buradan $R;\ \alpha - sps$ Armendariz olduğundan $ab = 0$ elde edilir. ■

Eğer $R$ bir $\alpha - sps$ Armendariz halka ise, bu durumda kolayca görülebilir ki; $\alpha$ bir monomorfizmadır. Ayrıca Teorem 3.3.18. (3)(ii) ve (iii) den $a, b \in R$ için $a\alpha\ \ b\ \ = 0$ iken $\alpha\ \ a\ \ b = 0$ elde edilir.

**Sonuç 3.3.19.** Eğer $R$; $\alpha - sps$ Armendariz halka ise, bu durumda $\alpha(1_R) = 1_R$ ve her $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ dir.

**İspat.** $1_R - \alpha(1_R)\alpha(1_R) = \alpha(1_R) - \alpha(1_R) = 0$ olup Teorem 3.3.18 (3)(ii) gereğince $\alpha(1_R - \alpha(1_R))\alpha(1_R) = 0$ dır. Dolayısıyla $\alpha$ homomorfizma olduğundan $(\alpha(1_R) - \alpha(\alpha(1_R)))\alpha(1_R) = 0$ ve böylece $\alpha(1_R) - \alpha(\alpha(1_R)) = 0$ dır. Buradan $\alpha(1_R) = \alpha(\alpha(1_R))$ olup $\alpha$ monomorfizma olduğundan $1_R = \alpha(1_R)$ bulunur. Şimdi $e^2 = e \in R$ olsun. $e(1_R - e) = 0$ olduğundan Teorem3.3.18. (3) (ii) gereğince $\alpha(e)(1_R - e) = 0$ dır. Dolayısıyla $\alpha(e) - \alpha(e)e = 0$ olup, buradan $\alpha(e) = \alpha(e)e$ dir. Aynı şekilde $(1_R - e)e = 0$ olduğunda $e = \alpha(e)e$ elde edilir. Sonuç olarak $\alpha(e) = e$ bulunur. ■

**Lemma 3.3.20.** $R$; $\alpha - sps$ Armendariz bir halka olsun. Bu durumda $R[[x;\alpha]]$ daki eşkare elemanlar ile $R$ nin eşkare elemanları aynıdır ve $R[[x;\alpha]]$ abelyandır.

**İspat.** $e(x) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i x^i = e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_nx^n + \cdots \in R[[x;\alpha]]$ olmak üzere $e(x)^2 = e(x) \in R[[x;\alpha]]$ olsun. $e(x)(1_R - e(x)) = 0 = (1_R - e(x))e(x)$ olduğundan $(e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n + \cdots)((1_R - e_0) - e_1x - \cdots - e_nx^n \dots) = 0$ ve $((1_R - e_0) - e_1x - \cdots - e_nx^n \dots)(e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n + \cdots) = 0$ olur. $R$ $\alpha - sps$ Armendariz halka olduğundan $1 \leq i$ için $e_0(1_R - e_0) = e_0e_i = (1_R - e_0)e_i = 0$ dır. Böylece $1 \leq i$ için $e_i = 0$ ve bu durumda $e = e_0 = e_0^2$ elde edilir.

Şimdi iddia ediyoruz ki; $R$ abelyandır. Sonuç 3.3.19. dan keyfi $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ olduğunu biliyoruz. [Hong, Kim ve Kwak 2000, Önerme 20] deki ispat metodunu kullanacağız. Keyfi eşkare elemanlar $e$ ve $e' \in R$ için $ee'R \cap (1_R - e')(1_R - e)\alpha(R) = 0$ dır. Gerçekten; varsayalım ki uygun $s, t \in R$ için $0 \neq ee'(-t) = (1_R - e')(1_R - e)\alpha(s) \in ee'R \cap (1_R - e')(1_R - e)\alpha(R)$ olsun. Buradan $\alpha(e') = e'$ ve $\alpha(1_R - e) = 1_R - e$ olduğundan , $((1_R - e')x + e)(e'tx + (1_R - e)s) = (1_R - e')\alpha(e't)x^2 + ee't + (1_R - e')\alpha((1_R - e)s)x + e(1_R - e)s = (1_R - e')e'\alpha(t)x^2 + (ee't + (1_R - e')(1_R - e)\alpha(s))x + e(1_R - e)s = 0$ elde edilir. Ancak $ee't \neq 0$ olurki, bu da $R\,nin$ $\alpha - sps$ Armendariz olması ile çelişir. Ayrıca $e'e = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan $ee' = (1_R - e')(1_R - e)(-e') = (1_R - e')(1_R -$

$(e-\alpha(e'))\in ee'R\cap(1_R-e')(1_R-e)\alpha(R)=0$ elde edilir. Böylece keyfi eşkare eleman $e\in R$ ve keyfi $r\in R$ için $e''=e+er(1_R-e)$ olmak üzere $(e'')^2=(e+er(1_R-e))^2=(e+er(1_R-e))(e+er(1_R-e))=ee+eer(1_R-e)+er(1_R-e)e+er(1_R-e)er(1_R-e)=e^2+e^2r(1_R-e)+ere-eree+erer-erere-ereer+ereere=e^2+e^2r(1_R-e)+ere-ere^2+erer-erere-ere^2r+ere^2re=e+er(1_R-e)+ere-ere+erer-erere-erer+erere=e+er(1_R-e)=e''$ olur. Yani $e''$ eşkare elemandır. Ayrıca $(1_R-e)e''=0$ dır. Dolayısıyla $e''(1_R-e)=0$ ve böylece $er(1-e)=0$ olup $er=ere$ elde edilir. Aynı şekilde $e'''=(1_R-e)+(1_R-e)re$; $R$ de bir eşkare eleman ve $ee'''=0$ dır. Böylece $e'''e=0$ olup $(1_R-e)re=0$ olduğundan $re=ere$ elde edilir. Böylece keyfi $r\in R$ için $er=ere$ ve $re=ere$ olduğundan $er=re$ elde edilir. Dolayısıyla $R$ abelyandır. Sonuç olarak $R[x;\alpha]$ abelyandır. ■

**Önerme 3.3.21.** Eğer $R$; $\alpha-$yarı-değişmeli bir halka ve $\alpha(1_R)=1_R$ ise, bu durumda $R[x;\alpha]$ nın eşkare elemanları ile $R$ nin eşkare elemanları aynıdır ve $R[x;\alpha]$ abelyandır.

**İspat.** Önerme 3.1.7 den, keyfi $e^2=e\in R$ için $\alpha(e)=e$ ve $R$ abelyandır. $p=e_0+e_1x+e_2x^2+\cdots$ olmak üzere $p^2=p\in R[x;\alpha]$ olsun. Keyfi $e^2=e\in R$ için $\alpha(e)=e$ olduğunu kullanarak $p^2=p$ eşitliğinden

$e_0^2=e_0$ ;

$e_0e_1+e_1\alpha(e_0)=e_1$ ;

$e_0e_2+e_1\alpha(e_1)+e_2\alpha^2(e_0)=e_2$ ;

$\vdots$

$e_0e_k+e_1\alpha(e_{k-1})+\cdots+e_{k-1}\alpha^{k-1}(e_1)+e_k\alpha^k(e_0)=e_k$ ;

$\vdots$

denklem sistemini elde ederiz. $e_0^2=e_0$ olduğundan $e_0$ elemanı $R$ de bir eşkare ve $R$ abelyan olduğundan $e_0$ merkezidir. Böylece yukarıdaki denklem sisteminden aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

(5) $e_0e_1 + e_1e_0 = e_1$

(6) $e_0e_2 + e_1\alpha(e_1) + e_2e_0 = e_2$

$\vdots$

(7) $e_0e_k + e_1\alpha(e_{k-1}) + \dots + e_{k-1}\alpha^{k-1}(e_1) + e_ke_0 = e_k$

$\vdots$

(5) denklemini sağdan $1_R - e_0$ ile çarptığımızda $e_1(1_R - e_0) = 0$ elde ederiz. (5) denkleminden $e_1 = e_1e_0 = 0$ elde edilir. Böylece (6) denklemi $e_0e_2 + e_1\alpha(e_1) + e_2e_0 = e_0e_2 + 0\alpha(0) + e_2e_0 = e_0e_2 + e_2e_0 = e_2$ haline gelir. Buradan $2e_0e_2 = e_2$ olur. Benzer şekilde $2e_0e_2(1 - e_0) = e_2(1 - e_0)$ den $e_2 = 0$ elde edilir. Böyle devam edildiğinde $i \geq 1$ için $e_i = 0$ bulunur. Sonuç olarak $p = e_0 = e_0^2 \in R$ olur ve Önerme 3.1.7 den de $R[x;\alpha]$ abelyandır. ■

**Örnek 3.3.22.** $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$; $\alpha -$yarı-değişmeli halkasını göz önüne alalım. Burada $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanmaktadır. $\alpha(1_R) \neq 1_R$ olduğundan Sonuç 3.3.19. gereğince $R$; $\alpha - sps$ Armendariz bir halka değildir. Ayrıca $R[x;\alpha]$ yarı-değişmeli halka da değildir. Gerçekten;

$p = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$ ve $q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R[x;\alpha]$ için $pq = O$ dır. Fakat $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R[x;\alpha]$ için $p\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q \neq O$ dır. Böylece $pR[x;\alpha]q \neq O$ dır. Böylece $R[x;\alpha]$ yarı-değişmeli değildir. $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \in R[x;\alpha]$ için $f^2 = f \in R[x;\alpha]$ ancak $f \notin R$ dir. Son olarak; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için $AB = O$ dır. Ancak keyfi $n$ pozitif tamsayısı için $\alpha^n(A)B \neq O$ ve $B\alpha(C) = O$ olsa da $BC \neq O$ dır.

$R$ bir halka ve $X$ de boştan farklı bir küme olmak üzere;

$$R^X = \{ f \mid f: X \to R \text{ bir fonksiyon} \}$$

kümesi aşağıda tanımlanan ikili işlemlerle birlikte bir halkadır. Her $f, g \in R^X$ ve her $x \in X$ için,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

$\alpha$; $R$ halkasının bir endomorfizması olmak üzere,

$$\alpha: R^X \to R^X, \alpha(f) = \alpha o f$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun da $R^X$ halkasının bir endomorfizması olduğunu göstermek çok kolaydır.

**Önerme 3.3.23.** $\alpha$; $R$ halkasının bir endomorfizması olmak üzere ;

(i) $X$ boştan farklı bir küme olmak üzere $R$ nin $\alpha -$yarı-değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R^X$ halkasının $\alpha -$yarı-değişmeli olmasıdır.

(ii) $S$ herhangi bir halka ve $\sigma: R \to S$ bir halka izomorfizması olsun. Bu durumda $R$ nin $\alpha -$yarı-değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $S$ halkasının $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ $-$yarı-değişmeli olmasıdır.

**İspat.** (i) $R$; $\alpha -$yarı-değişmeli olsun. $R^X$ halkasının $\alpha -$yarı-değişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $f, g \in R^X$ için $fg = 0$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $0 = 0(x) = (fg)(x) = f(x)g(x)$ olup $R$ $\alpha -$yarı-değişmeli olduğundan $f(x)R\alpha(g(x)) = 0$ elde edilir. Buradan her $r \in R$ için; $0 = f(x)r\alpha(g(x)) = f(x)r(\alpha o g)(x)$ olur. Böylece her $h \in R^X$ için $f(x)h(x)(\alpha o g)(x) = 0$ olup $fR^X\alpha(g) = 0$ elde edilir. Bu da bize $R^X$ halkasının $\alpha -$yarı-değişmeli olduğunu gösterir. Şimdi $R^X$ halkası $\alpha -$yarı-değişmeli olsun. $R$ halkasının $\alpha -$yarı-değişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Her $x \in X$ için $f_a(x) = a$ ve $f_b(x) = b$ şeklinde tanımlanan $f_a, f_b \in R^X$ sabit fonksiyonlarını göz önüne alalım.

Böylece, her $x \in X$ için $0 = ab = f_a\ x\ f_b\ x\ =\ f_a f_b\ \ x$ olup $R^X$ halkası $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğundan $f_a R^X \alpha\ f_b\ \ = 0$ elde edilir. Böylece her bir $r \in R$ için $f_r\ x\ \ = r$ sabit fonksiyonu için de $f_a f_r \alpha\ f_b\ \ = 0$ olacaktır. Buradan her $x \in X$ için $0 = 0\ x\ \ = f_a\ x\ f_r\ x\ \alpha\ f_b\ \ x\ \ = f_a\ x\ f_r\ x\ \ \alpha o f_b\ \ x\ \ = ar\alpha(b)$ elde edilir. Yani $aR\alpha\ b\ \ = 0$ olur ki, bu da bize $R$ halkasının $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğunu gösterir.

(ii) $S$ herhangi bir halka ve $\sigma\colon R \to S$ bir halka izomorfizması olmak üzere açık olarak $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ fonksiyonu da $S$ halkasının bir endomorfizmasıdır. Şimdi $R$ $\alpha$ −yarı-değişmeli olsun. $S$ halkasının $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ −yarı-değişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $x, y \in S$ için $xy = 0$ olsun. $\sigma$ örten olduğundan $\sigma\ a\ \ = x$ ve $\sigma\ b\ \ = y$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır ve $0 = xy = \sigma\ a\ \sigma\ b\ \ = \sigma\ ab$ olup $\sigma$ birebir olduğundan $ab = 0$ bulunur. $R$ $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğundan $aR\alpha\ b\ \ = 0$ olur. Böylece her $r \in R$ için $ar\alpha\ b\ \ = 0$ olup, $\sigma$ bir homomorfizma olduğundan $0 = \sigma\ 0\ \ = \sigma\ a\ \sigma\ r\ \sigma\ \alpha\ b\ \ = \sigma\ a\ \sigma\ r\ \sigma\ \ \alpha\ \sigma^{-1}\sigma\ b\ \ \ = x\sigma\ r\ \ \sigma\alpha\sigma^{-1}\ (y)$ ve $\sigma$ örten olduğundan $xS\ \sigma\alpha\sigma^{-1}\ \ y\ \ = 0$ elde edilir ki, bu da $S$ halkasının $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ −yarı-değişmeli olduğunu gösterir. Tersine $S$ halkası $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ −yarı-değişmeli olsun. $R$ halkasının $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $S$ halkası içinde $0 = \sigma\ ab\ \ = \sigma\ a)\sigma(b$ olup, $S$ halkası $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ −yarı-değişmeli olduğundan $\sigma\ a\ S\sigma\alpha\sigma^{-1}\ \sigma\ b\ \ = 0$ olur. $\sigma$ birebir ve örten olduğundan $aR\alpha\ b\ \ = 0$ elde edilir ki, bu da bize $R$ halkasının $\alpha$ −yarı-değişmeli olduğunu gösterir. ■

## KAYNAKLAR

Anderson, F.W. and Fuller, K.R. 1992. Rings and categories of modules. Springer Verlag.

Armendariz, E.P. 1974. A note on extension of Baer and p.p.-Rings. Australian Mathematical Society, 18, 470-473.

Başer, M. and Kwak, T.K. 2010. On Extended Semicommutative Rings. Algebra Colloq, 17: 2, 257-264.

Başer, M., Hong, C.Y. and Kwak, T.K. 2009. On Extended Riversible Rings. Algebra Colloq, 16: 1, 37-48.

Başer, M., Harmancı, A. and Kwak, T.K. 2008. Generalized Semicommutative Rings and Their Extensions, Bull. Korean Math. Soc., 45, No. 2, 285-297.

Cohn, P.M. 1999. Reversible rings. Bull. London Math. Soc., 31, 641-648.

Habeb, J.M. 1990. A note on zero commutative and duo rings. Math. J. Okayama Univ., 32, 73-76.

Hong, C.Y. , Kim, N.K. and Kwak, T.K. 2000. Ore extensions of Baer and p.p.-rings. J. Pure and Appl. Algebra, 151(3), 215-226.

Hong, C.Y. , Kim, N.K. and Kwak, T.K. 2003. On skew Armendariz rings. Comm. Algebra, 31(3), 103-122.

Hong, C.Y. , Kim, N.K. and Kwak, T.K. 2005. Extensions of generalized reduced rings. Algebra Colloq., 12(2), 229-240.

Hong, C.Y. , Kwak, T.K. and Rizvi, S.T. 2006. Extensions of generalized Armendariz rings. Algebra Colloq., 13(2), 253-266.

Huh, C. , Lee, Y. and Smoktunowicz, A. 2002. Armendariz rings and semicommutative rings, Comm. Algebra 30 (2) 751-761.

Hungerford, T.W. 1982, Algebra. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Kim, N.K. and Lee, Y. 2000. Armendariz rings and reduced rings, J. Algebra, 223 477-488.

Kim, N.K. and Lee, Y. 2003. Extensions of reversible rings, J. Pure Appl. Algebra, 185, 207-223.

Krempa, J. 1996. Some examples of reduced rings. Algebra Colloq. 3 (4), 289-300.

Lam, T.Y. 2001. A First Course in Noncommutative Rings, Springer Verlag, New York, Inc.

Lambek, J. 1971. On the representation of modules by sheaves of factor modules, Canad. Math. Bull. 14, 359-368

Rege, M.B. and Chhawchharia, S. 1997. Armendariz rings, Proc. Japan Acad. (Ser. A, Math. Sci. ) 73, 14-17

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Erman SARI

**Doğum Yeri** : Kozan

**Doğum Tarihi**: 08. 02. 1986

**Medeni Hali** : Bekar

**Yabancı Dili** : İngilizce

**Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)**

**Lise** : Kozan Anadolu Lisesi, 2004

**Lisans** : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2009

**Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl**

---