AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BAZI KISMİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE

Figen ÖZPINAR

DANIŞMAN
Prof.Dr. Zeynep Fidan KOÇAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EKİM 2009

ONAY SAYFASI

Prof.Dr. Zeynep Fidan KOÇAK danışmanlığında
Figen ÖZPINAR tarafından hazırlanan
"**Bazı Kısmi Fark Denklemlerinin Salınımlılığı Üzerine**"
başlıklı bu çalışma, lisansüstü(doktora) eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca
12. 10. 2009
tarihinde aşağıdaki jüri tarafından
Matematik Anabilim Dalında
Doktora Tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof.Dr. Zeynep Fidan KOÇAK	
Üye	Prof.Dr. Mehmet SEZER	
Üye	Doç.Dr. Emine MISIRLI	
Üye	Doç.Dr. Hüseyin YILDIRIM	
Üye	Doç.Dr. Özkan ÖCALAN	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../......./....... tarih ve
....../....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

ÖZET

BAZI KISMİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE

Doktora Tezi

Figen ÖZPINAR

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof.Dr. Zeynep Fidan KOÇAK

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde kısmi fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.
İkinci bölümde fark denklemleri ve kısmi fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili temel bilgiler verilmiş olup, bunlara ilişkin bazı teorem ve lemmalar hatırlatılmıştır.
Üçüncü bölümde

$$\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + (-1)^{r+h+1} \, p y_{m-\tau,n-\sigma} = 0$$

yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer kısmi fark denklemlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Burada $m, n, \tau, \sigma \in \mathbb{N}$, $r, h \in \mathbb{N}_1$ ve p negatif olmayan bir reel sayıdır. Δ_m ve Δ_n bilindiği gibi tanımlı kısmi fark operatörleridir.
Dördüncü bölümde

$$\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + p_{m,n} f(y_{m-\tau,n-\sigma}) = q_{m,n}$$

yüksek mertebeden lineer olmayan ikinci yanlı kısmi fark denklemlerinin salınımlılığı için bazı kriterler elde edilmiştir. Burada $p_{m,n}$ ve $q_{m,n}$, $\mathbb{N}^2$ üzerinde tanımlı reel sayıların iki değişkenli dizileri, $m, n, \tau, \sigma \in \mathbb{N}$, $r, h \in \mathbb{N}_1$, $\lambda > 0$ olmak üzere $f(x) = |x|^{\lambda} \, sgnx$ özel durumunu içeren f fonksiyonu, $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ koşulunu sağlar. Δ_m ve Δ_n bilindiği gibi tanımlı kısmi fark operatörleridir.

Son bölümde

$$\Delta_n^2 y_{m,n} + p_n \Delta_n y_{m,n} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0, \quad \forall (m,n) \in \Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$$

ve

$$\Delta_n^2 y_{m,n} + p_n \Delta_n y_{m,n+1} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0, \quad \forall (m,n) \in \Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$$

lineer olmayan gecikmeli ayrık dalga denklemlerinin salınımlılığı ile bunların indirgenmiş lineer limit denklemlerinin salınımlılığı arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Burada $M \in \mathbb{N}_{n_0}$, $\Omega = \{1, 2, \ldots, M\}$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ ve $\{r_n\}$ reel sayı dizileri, f sürekli fonksiyonu konveks ve $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ ve $Ly_{m,n}$, ayrık Laplace operatörüdür.

2009, 71 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kısmi Fark Denklemi, Salınımlılık, Lineer Salınımlılık, Dalga Denklemi, Yüksek Mertebeden Kısmi Fark Denklemi.

ABSTRACT

ON THE OSCILLATION OF SOME PARTIAL DIFFERENCE EQUATIONS

Ph. D. Thesis

Figen ÖZPINAR

Afyon Kocatepe University
Institute for the Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : **Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK**

In this study, consist of five chapter. In the first chapter, information about oscillation of partial difference equations some studied before is given.
In the second chapter, some main topics of oscillation of difference equations and partial difference equations are given and some theorems and lemmas concerning these concepts also are reminded.
In the third chapter, necessary and sufficient conditions for the oscillation of the higher order linear partial difference equation with constant coefficient

$$\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + (-1)^{r+h+1}\, p y_{m-\tau,n-\sigma} = 0$$

are obtained, where $m, n, \tau, \sigma \in \mathbb{N}$, $r, h \in \mathbb{N}_1$, p is a nonnegative real number. The forward partial differences Δ_m and Δ_n are defined as usual, i.e.
$\Delta_m A_{m,n} = A_{m+1,n} - A_{m,n}$ and $\Delta_n A_{m,n} = A_{m,n+1} - A_{m,n}$.
In the fourth chapter some oscillation criteria for the forced oscillation of a class of high order nonlinear partial difference equation

$$\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + p_{m,n} f(y_{m-\tau,n-\sigma}) = q_{m,n}$$

are established, where $m, n, \tau, \sigma \in \mathbb{N}$, $r, h \in \mathbb{N}_1$, $p_{m,n}$ and $q_{m,n}$ are double real sequences defined on $\mathbb{N}^2$, $xf(x) > 0$ for $x \neq 0$, which includes the special case $f(x) = |x|^{\lambda} sgnx$ for $\lambda > 0$. The forward partial differences Δ_m and Δ_n are defined as usual.

In the last chapter relations between the oscillation discrete nonlinear delay wave equations of the form

$$\Delta_n^2 y_{m,n} + p_n \Delta_n y_{m,n} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0, \quad \forall (m, n) \in \Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$$

and

$$\Delta_n^2 y_{m,n} + p_n \Delta_n y_{m,n+1} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0, \quad \forall (m, n) \in \Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$$

and the oscillation of their linear limiting equations are investigated, where $M \in \mathbb{N}_{n_0}$, $\Omega = \{1, 2, \ldots, M\}$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{r_n\}$ are sequences of real numbers, f is continuous and convex, $uf(u) > 0$ for $u \neq 0$ and $Ly_{m,n}$ is the discrete Laplacian operator.

2009, 71 pages

Keywords and Phrases: Partial Difference Equation, Oscillation, Linear Oscillation, Wave Equation, Higher Order Partial Difference Equation.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında yardım ve desteğini esirgemeyen, katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam Prof.Dr. Zeynep Fidan KOÇAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez çalışması boyunca yardımlarını esirgemeyen Prof.Dr. Ömer AKIN ve Doç.Dr. Hüseyin YILDIRIM'a, manevi desteklerinden dolayı Prof.Dr. Emine SOYTÜRK ve Yrd.Doç.Dr. Osman TORUN'a, tezimin hazırlanması sırasında değerli katkılarından dolayı Araş.Gör. Başak KARPUZ'a ve hayatım boyunca sabırla beni destekleyen sevgili anne ve babama çok teşekkür ederim.

Figen ÖZPINAR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

E	Kaydırma operatörü
Δ	İleri fark operatörü
E_m	Birinci değişkene göre kaydırma operatörü
E_n	İkinci değişkene göre kaydırma operatörü
Δ_m	Birinci değişkene göre ileri fark operatörü
Δ_n	İkinci değişkene göre ileri fark operatörü
Δ_m^r	$\Delta_m\left(\Delta_m^{r-1}\right)$
Δ_n^h	$\Delta_n\left(\Delta_n^{h-1}\right)$
o	Landau sembolü(küçük-o)
$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, ...\}$
$\mathbb{N}_a$	$\{a, a+1, a+2, ...\}$
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar
Z	z-dönüşümü operatörü
L	Ayrık Laplace operatörü

1. GİRİŞ

Son yıllarda yoğun ilgi gören kısmi fark denklemleri, kısmi türevli denklemlerden önce ortaya çıkmış olmasına rağmen kısmi türevli denklemlere gösterildiği kadar fazla ilgi gösterilmemiştir. Bununla birlikte matematikçiler, fizikçiler, mühendisler ve bilgisayar bilimciler arasında son yirmi yılda yoğun bir ilgi olmuştur. Bu aktif ilgi şüphesiz modern bilgisayar donanımlarının gelişimine neden olduğu kadar bu denklemlerle kompleks dinamik sistemlerin modellemesini de kolaylaştırmıştır.
Kısmi fark denklemlerindeki bilinmeyen fonksiyonlar ayrık (discrete) bağımsız değişkenlere sahiptir ve böylece bilgisayar simulasyonunun kolayca yapılması sağlanır. Böyle simulasyonlar bu denklemlerle temsil edilen sistemlerin kompleks davranışlarını anlamamıza da yardımcı olabilecek bilgileri açığa çıkarır.
Kısmi fark denklemleri sonlu fark metotları ile kısmi türevli denklemlerin çözümlerinin yaklaşımında, rasgele yürüyüş problemlerinde, moleküler yörünge çalışmalarında, toplu göçlü nüfus hareketlerinde, kimyasal reaksiyonlarda ve matematik fiziğin problemleri gibi sonlu fark şemaları içeren uygulamalarda ortaya çıkmıştır.
Modeli kısmi fark denklemi olan problemlere üç çarpıcı örnek aşağıdaki gibidir.
Kısmi fark denklemlerinin basit bir örneği

$$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}, \qquad 1 \le k \le n$$

biçimindeki fark denklemidir. Binom katsayı fonksiyonu

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad k, n = 0, 1, 2, ...$$

bu denklemin bir çözümüdür.

Kısmi fark denklemlerinin bir fizik problemine uygulanmasına yönelik bir örnek olarak "çok uzun" bir çubuğun sıcaklık dağılımını gözönüne alalım. Farzedelim ki çubuk o kadar uzun olsun ki $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin yerine geçebilsin. $u_{m,n}$, çubuğun n zamanındaki ve m konumundaki sıcaklığı olsun. n zamanında $u_{m-1,n}$ sıcaklığı $u_{m,n}$'den yüksekse ısı , $m-1$ noktasından m'ye akacaktır. Artış miktarı $u_{m,n+1} - u_{m,n}$ 'dir ve bu artış $u_{m-1,n} - u_{m,n}$ farkı ile orantılıdır. Pozitif sabit olan r "yayılım oranı" olmak üzere bu

$$u_{m,n+1} - u_{m,n} = r\left(u_{m-1,n} - u_{m,n}\right), \quad r > 0$$

demektir. Benzer şekilde $u_{m+1,n} > u_{m,n}$ ise o zaman ısı $m+1$ noktasından m'ye akar. Böylece sonuç olarak

$$u_{m,n+1} - u_{m,n} = r\left(u_{m-1,n} - u_{m,n}\right) + r\left(u_{m+1,n} - u_{m,n}\right), \qquad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$$

olur. Bu ifade "Newton Soğuma Kanunu" nun ayrık (discrete) hali olarak görülebilir.

$$u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1} - 4u_{m,n} = 0$$

kısmi fark denklemi, Laplace Denkleminin ayrık(discrete) halidir.

Kısmi fark denklemlerinin çözümlerini elde etmek, çoğu zaman uzun uğraşlar gerektirir. Bu nedenle bu problemlerin çözümlerinin kalitatif davranışı hakkında bilgiler veren çalışmalar yapılmıştır. Bu tezde de kısmi fark denklemlerinin çözümlerini elde etmeden, çözümlerin davranışı hakkında kalitatif inceleme yapılmıştır.

Son yıllarda kısmi fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle salınımlılığı ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır.

Kısmi fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili literatürde bulabildiğimiz ilk çalışmalardan birisi B. G. Zhang ve S. T. Liu'nun 1995 yılında yaptıkları çalışmadır. Bu çalışmada

$$q_1 A_{m+1,n} + q_2 A_{m,n+1} - p A_{m,n} + \sum_{i=1}^{u} p_i A_{m-k_i,n-l_i} = 0, \quad m,n = 0,1,2... \tag{1.1}$$

$q_1, q_2, p, p_i \in \mathbb{R}$, k_i,$l_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2,...,u \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, sabit katsayılı lineer gecikmeli kısmi fark denkleminin bütün has çözümlerinin salınımlı olması için
(1.1) denkleminin

$$\Phi(\lambda,\mu) = q_1\lambda + q_2\mu - p + \sum_{i=1}^{u} p_i \lambda^{-k_i}\mu^{-l_i} = 0$$

karakteristik denkleminin pozitif köke sahip olmaması gerek ve yeter koşulu elde edilmiştir. Bunun sonucu olarak q_1, q_2, p ve p_i , $i = 1,2,...,u$, pozitif olmak üzere (1.1) denkleminin her has çözümünün salınımlı olması için

$$\sum_{i=1}^{u} p_i \frac{(k_i + l_i + 1)^{k_i+l_i+1} q_1^{k_i} q_2^{l_i}}{p^{k_i+l_i+1} k_i^{k_i} l_i^{l_i}} > 1 \tag{1.2}$$

yeter koşulunu elde etmişlerdir. $u = 1$ olması durumunda (1.2)'nin sadece yeter koşul değil aynı zamanda gerek koşul olduğunu da göstermişlerdir.

Yine B. G. Zhang ve S. T. Liu 1998 yılında yukarıdaki sonuçları

$$A_{m,n} = \sum_{i=1}^{u} p_i A_{m-k_i,n-l_i} + \sum_{j=1}^{v} q_j A_{m+\tau_j,n+\sigma_j}, \quad m,n = 0,1,2,..., \tag{1.3}$$

p_i ve q_j'ler $r \times r$ tipinde birer matris, $A_{m,n} = \left(a_{m,n}^1, a_{m,n}^2, ..., a_{m,n}^r\right)^T$, $k_i, l_i, \tau_j, \sigma_j \in \mathbb{N}$, $i = 1,2,...,u$, $j = 1,2,...,\upsilon$, u ve $\upsilon \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, gecikmeli lineer kısmi fark denklem sistemine genişletmişlerdir. (1.3) sisteminin her $\{A_{m.n}\}$ has çözümünün bileşenlerine göre salınımlı olması için gerek ve yeter koşulun (1.3) sisteminin

$$\det\left(\sum_{i=1}^{u} p_i \lambda^{-k_i}\mu^{-l_i} - I + \sum_{j=1}^{\upsilon} q_j \lambda^{\tau_j}\mu^{\sigma_j}\right) = 0$$

karakteristik denkleminin pozitif köke sahip olmaması sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca yine aynı çalışmada

$$a_{m,n} = \sum_{i=1}^{u} p_i a_{m-k_i,n-l_i} + \sum_{j=1}^{v} q_j a_{m+\tau_j,n+\sigma_j} \tag{1.4}$$

skaler lineer fark denkleminin her has çözümünün salınımlı olması için (1.4) denkleminin

$$1 = \sum_{i=1}^{u} p_i \lambda^{-k_i} \mu^{-l_i} + \sum_{j=1}^{v} q_j \lambda^{\tau_j} \mu^{\sigma_j}$$

karakteristik denkleminin pozitif köke sahip olmaması gerek ve yeter koşulunu elde etmişlerdir.

Benzer sonuçlar 1999 yılında B. G. Zhang ve B. M. Liu tarafından

$$A(x+1,y) + A(x,y+1) - pA(x,y) + \sum_{i=1}^{u} p_i A(x-\sigma_i, y-\tau_i) = 0, \tag{1.5}$$

$\sigma_i, \tau_i \in \mathbb{R}^+$, $p, p_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, olmak üzere, sürekli değişkenli kısmi fark denklemi için elde edilmiştir. (1.5) denkleminin her has $A(x,y)$ çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter koşulun (1.5) denkleminin

$$\Phi(\lambda,\mu) = \lambda + \mu - p + \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda^{-\sigma_i} \mu^{-\tau_i} = 0$$

karakteristik denkleminin pozitif köke sahip olmaması gerek ve yeter koşulu elde etmişlerdir. Buradan $p, p_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, olmak üzere (1.5) denkleminin her has çözümünün salınımlı olması için

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{(\sigma_i + \tau_i + 1)^{\sigma_i+\tau_i+1}}{\sigma_i^{\sigma_i} \tau_i^{\tau_i} p^{\sigma_i+\tau_i+1}} > 1 \tag{1.6}$$

yeter koşulunu elde etmişlerdir. $n = 1$ için (1.6)'nın sadece yeter koşul değil aynı zamanda gerek koşul olduğunu da göstermişlerdir.

2006 yılında J. Cheng ve Y. Chu yapmış oldukları çalışmada

$$T^i\left(x_{m,n} + ax_{m-k_1,n-l_1} - bx_{m+k_2,n+l_2}\right) = c\left(qx_{m-\sigma_1,n-\tau_1} + bx_{m+\sigma_2,n+\tau_2}\right), \tag{1.7}$$

$c = \pm 1$, $i \in \mathbb{N}$, a, b, p ve q negatif olmayan reel sayılar, $k_j, l_j, \tau_j, \sigma_j$, $j = 1, 2$, negatif olmayan tam sayılar olmak üzere, yüksek mertebe kısmi fark denklemi için bazı salınımlılık kriterleri elde etmişlerdir. Burada T operatörü, $Tx_{m,n} = (\Delta_m + \Delta_n + I)\, x_{m,n}$ ile tanımlıdır.

$\mathbb{N}^2$ üzerinde $P_{m,m} > 0$ ve $k, l \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$A_{m+1,n} + A_{m,n+1} - A_{m,n} + P_{m,n} A_{m-k,n-l} = 0 \tag{1.8}$$

değişken katsayılı lineer kısmi fark denklemi literatürde birçok defa ele alınmış ve $P_{m,m}$ katsayısına bağlı çeşitli salınımlılık kriterleri elde edilmiştir. İlk olarak B. G. Zhang ve S. T. Liu 1997 yılında (1.8) denkleminin salınımlı olması için

$$\liminf_{m,n\to\infty}\left\{\frac{1}{kl}\sum_{i=m-k}^{m-1}\sum_{j=n-l}^{n-1}P_{i,j}\right\}>\frac{\alpha^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}},\qquad \alpha=\max\{k,l\}$$

yeter koşulunu elde etmişlerdir. Bu şart daha sonraki çalışmalarda geliştirilmiştir. 1997 yılında yine B. G. Zhang ve S. T. Liu (1.8) denkleminin salınımlı olması için

$$\liminf_{m,n\to\infty}\left\{\frac{1}{kl}\sum_{i=m-k}^{m-1}\sum_{j=n-l}^{n-1}P_{i,j}\right\}>\frac{\lambda^{\lambda}}{(\lambda+1)^{\lambda+1}},\qquad \lambda=\frac{2kl}{k+l}$$

yeter koşulunu ve

$$\liminf_{m,n\to\infty}P_{m,n}>\frac{(k+l)^{k+l}}{(k+l+1)^{k+l+1}}$$

yeter koşulunu elde etmişlerdir. Daha sonra bu koşullar 1999 yılında C. J. Tian ve B. G. Zhang tarafindan

$$\liminf_{m,n\to\infty}\left\{\frac{1}{kl}\sum_{i=m-k}^{m-1}\sum_{j=n-l}^{n-1}P_{i,j}\right\}>\frac{\lambda^{\lambda}}{2^{\lambda}(\lambda+1)^{\lambda+1}},\qquad \lambda=\frac{2kl}{k+l}$$

ve

$$\liminf_{m,n\to\infty}P_{m,n}>\frac{1}{(k+l+1)\sqrt{C_{2l}^{2k+2l}}},\qquad C_k^n=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

biçiminde genişletilmiştir. C. J. Tian ve S. Xie tarafından 2004 yılında yeniden ele alınan (1.8) denkleminin tüm çözümlerinin

$$\liminf_{m,n\to\infty}\left\{\frac{1}{kl}\sum_{i=m-k}^{m-1}\sum_{j=n-l}^{n-1}P_{i,j}\right\}\geq q>0$$

$$q\left(1+\frac{klq}{1-klq}\right)^{\left(k^2+l^2\right)/(k+l)}>\omega=\frac{\lambda^{\lambda}}{2^{\lambda}(\lambda+1)^{\lambda+1}},\qquad \lambda=\frac{2kl}{k+l}$$

olması halinde salınımlı olacağı elde edilmiştir.

Lineer olmayan kısmi fark denklemlerinin salınımlıkları üzerine de çeşitli çalışmalar yapılmıştır. 1997'de B. G. Zhang ve S. T. Liu yapmış oldukları çalışmada

$$A_{m+1,n}+A_{m,n+1}-A_{m,n}+\sum_{i=1}^{u}P_i(m,n)\,f_i\left(A_{m-k_i,n-l_i}\right)=0, \tag{1.9}$$

her $i=1,2,...,u$ için $\mathbb{N}^2$ üzerinde $P_i(m,n)>0$; $k_i,l_i\in\mathbb{N}$, ve f_i, $x\neq 0$ için $xf_i(x)>0$ şartını sağlayan reel değerli, sürekli bir fonksiyon olmak üzere, lineer olmayan gecikmeli kısmi fark denkleminin salınımlılık davranışını incelemişler ve aşağıdaki koşullar sağlandığı sürece (1.9) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğu sonucunu elde etmişlerdir.

($\mathbf{A}_1$) $1 \leq i \leq u$ için f_i azalmayan ve

$$\liminf_{x \to 0} \frac{f_i(x)}{x} = S_i \in (0, \infty),$$

($\mathbf{A}_2$) $1 \leq i \leq u$ için

$$\liminf_{m,n \to \infty} P_i(m, n) = p_i > 0,$$

($\mathbf{A}_3$) $1 \leq i \leq u$ için

$$\sum_{i=1}^{u} 2^{\eta_i} S_i p_i \frac{(\eta_i + 1)^{\eta_i + 1}}{\eta_i^{\eta_i}} > 1, \quad \eta_i = \min\{k_i, l_i\}.$$

Yine aynı çalışmada ($\mathbf{A}_1$) koşuluyla birlikte

($\mathbf{A}_4$) $1 \leq i \leq u$ için $k_0 = \min\{k_1, k_2, ..., k_u\}$ ve $l_0 = \min\{l_1, l_2, ..., l_u\}$ olmak üzere

$$\limsup_{m,n \to \infty} \sum_{t=1}^{u} S_t \sum_{i=m}^{m+k_0} \sum_{j=n}^{n+l_o} P_t(i, j) > 1$$

koşulu sağlandığı sürece (1.9) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğu sonucu elde edilmiştir.

B. G. Zhang ve J. S. Yu 1998 yılında yapmış oldukları çalışmada

$$A_{m+1,n} + A_{m,n+1} - A_{m,n} + P_{m,n} f\left(A_{m-k,n-l}\right) = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.10}$$

f sürekli bir fonksiyon, $\mathbb{N}^2$ üzerinde $P_{m,n} \geq 0$ ve $k, l \in \mathbb{N}_1$ olmak üzere, lineer olmayan gecikmeli kısmi fark denkleminin çözümleri için lineerleştirilmiş salınımlılık kriterleri elde etmişlerdir. Yaptıkları çalışmada (1.10) denklemi ile

$$A_{m+1,n} + A_{m,n+1} - A_{m,n} + pA_{m-k,n-l} = 0, \tag{1.11}$$

$k, l \in \mathbb{Z}^+$ ve $p > 0$ olmak üzere,lineer denklemini birlikte gözönüne alarak aşağıdaki koşulların sağlandığı kabul edilmiştir.

($\mathbf{B}_1$) $\liminf_{m,n \to \infty} P_{m,n} = p > 0$,

($\mathbf{B}_2$) $x \neq 0$ için $\frac{f(x)}{x} > 0$ ve $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Bu koşullar altında (1.11) lineer denkleminin her çözümün salınımlılığının (1.10) lineer olmayan denklemin her çözümünün salınımlılığı anlamına gelmiş olduğu sonucuna ulaşıldı.

2003 yılında I. Kubiaczyk ve S. H. Saker yapmış oldukları çalışmada

$$\Delta_n(a_n \Delta_n(y_{m,n})) + p_n \Delta_n y_{m,n} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0 \tag{1.12}$$

lineer olmayan gecikmeli(delay) ayrık dalga denklemi için salınımlılık kriterleri elde etmişlerdir.

Bu çalışmalar ışığında üçüncü bölümde yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer kısmi fark denklemlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Bu bölümde yapılan çalışmalar Prof.Dr. Ömer Akın ve Yrd.Doç.Dr. Yaşar Bolat ile beraber yürütülmüştür.

Tezin dördüncü bölümünde fark denklemlerinde önemli bir yer tutan yüksek mertebeden lineer olmayan ikinci yanlı(forced) kısmi fark denklemlerinin salınımlılığı üzerine bir çalışma yapılmıştır.

Beşinci bölümde ise lineer olmayan ayrık(discrete) dalga denklemi için indirgenmiş lineer limit denklemi tanımlanmış ve bu iki denklemin salınımlılığı arasındaki ilişkiler ortaya konmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olacak bilinen bazı tanım, teorem ve lemmaları vereceğiz.
$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere tek değişkenli x_n fonksiyonu için öteleme(shift) operatörü

$$Ex_n = x_{n+1}$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

ile tanımlanır[Mickens R. E. 1990] .

$$E^k x_n = x_{n+k}$$

olarak kolayca hesaplanır. Ayrıca I özdeşlik(birim) operatörü olmak üzere $\Delta = E - I$ ve $E = \Delta + I$ olduğu açıkça görülür. Buna göre,

$$\begin{aligned} \Delta^k x_n &= (E-I)^k x_n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x_n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x_{n+k-i} \end{aligned}$$

ve benzer yolla

$$E^k x_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x_n$$

bulunur.

Tanım 2.1. $n \in \mathbb{N}$ bağımsız değişken ve x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel(veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun. $x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}$ terimleri arasında verilen bir fonksiyonel bağıntıya k. mertebeden bir fark denklemi denir[Agarwal R. P. 2000] .

Tanım 2.2. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki farktır[Agarwal R. P. 2000] .
Bir fark denklemini, $k, \sigma \in \mathbb{N}_1$ olmak üzere,

$$F(n, x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}, x_{n-1}, ..., x_{n-\sigma}) = q_n$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Teorem 2.1. Δ ve E operatörleri lineerdir. Yani $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere
(i) $\Delta\left[ax_n + by_n\right] = a\Delta x_n + b\Delta y_n$
(ii) $E\left[ax_n + by_n\right] = aEx_n + bEy_n$ $\left[\text{Elaydi S.1999}\right]$.

Lemma 2.1. **(i)** $\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_{n_0}$
(ii) $\Delta\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} x_k\right) = x_n$ $\left[\text{Elaydi S.1999}\right]$.

Lemma 2.2 (Çarpım ve bölüm kuralı). **(i)** $\Delta\left[x_n.y_n\right] = Ex_n.\Delta y_n + y_n.\Delta x_n$
(ii) $\Delta\left[\frac{x_n}{y_n}\right] = \frac{y_n.\Delta x_n - x_n.\Delta y_n}{y_n.Ey_n}$ [Mickens R. E. 1990].

Tanım 2.3. $x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$x^{(k)} = x\,(x-1)\ldots(x-k+1)$$

polinomuna "faktöriyel polinomu" denir$\left[\text{Elaydi S.1999}\right]$.
$x = n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq k$ ise

$$n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{ve} \quad n^{(n)} = n! \quad \text{olur.}$$

Ayrıca

$$\Delta x^{(k)} = (x+1)^{(k)} - x^{(k)} \quad , \quad Ex^{(k)} = (x+1)^{(k)}.$$

Lemma 2.3. $x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ bir sabit olmak üzere
(i) $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$
(ii) $\Delta^n x^{(k)} = k\,(k-1)\ldots(k-n+1)\,x^{(k-n)}$
(ii) $\Delta^k x^{(k)} = x^{(k)} = k!$ $\left[\text{Elaydi S.1999}\right]$.

Tanım 2.4. En az iki ayrık değişkenin bilinmeyen fonksiyonunu içeren fark denklemine kısmi fark denklemi denir$\left[\text{Zhang B. G. ve Zhou Y. 2007}\right]$.
Bu tarz fonksiyonlar $y_{m,n}$ veya $y\,(m,n)$ ile gösterilir. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $y_{m,n}$ fonksiyonu için sırasıyla birinci ve ikinci değişkene göre öteleme operatörü,

$$E_m y_{m,n} = y_{m+1,n} \quad , \quad E_n y_{m,n} = y_{m,n+1}$$

ve sırasıyla birinci ve ikinci değişkene göre ileri fark operatörü,

$$\Delta_m y_{m,n} = y_{m+1,n} - y_{m,n} \quad , \quad \Delta_n y_{m,n} = y_{m,n+1} - y_{m,n}$$

ile tanımlanır[Mickens R. E. 1990] .
$\Delta_m = E_m - I$ ve $\Delta_n = E_n - I$ olduğu açıktır.

$$E_m E_n y_{m,n} = E_n E_m y_{m,n} = y_{m+1,n+1}$$

ve sonuç olarak

$$E_m^r E_n^h y_{m,n} = y_{m+r,n+h}$$

olduğu kolayca görülür. Buna göre

$$\begin{aligned} \Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} &= (E_m - I)^r (E_n - I)^h y_{m,n} \\ &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} E_m^{r-i} \sum_{j=0}^{h} (-1)^j \binom{h}{j} E_n^{h-j} y_{m,n} \\ &= \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{h} (-1)^{i+j} \binom{r}{i} \binom{h}{j} y_{m+r-i,n+h-j} \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 2.5. Kısmi fark denklemleri, $y_{m,n}$, $y_{m+1,n}$, $y_{m,n+1}$, $y_{m+1,n+1}$, $y_{m+2,n}$, $y_{m,n+2}$ vb. terimleri arasında bir fonksiyonel bağıntı olarak tanımlanır[Mickens R. E. 1990] .
Kısmi fark denklemini, $k, l, \tau, \sigma \in \mathbb{N}_1$ olmak üzere,

$$F\left(m, n, y_{m,n}, y_{m+1,n}, y_{m,n+1}, ..., y_{m+r,n+h}, y_{m-1,n}, ..., y_{m-\tau,n-\sigma}\right) = q_{m,n}, \tag{2.1}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Eğer $q_{m,n}$ özdeş olarak sıfıra eşitse (2.1) denklemine "homogen kısmi fark denklemi", aksi halde "homogen olmayan kısmi fark denklemi" denir.

Örnek 2.1. Kısmi fark denklemine örnekler:

$$y_{m+1,n} - y_{m,n+1} = 0 \tag{2.2}$$

$$y_{m+2,n} + 2y_{m+1,n+1} + y_{m,n} = 0 \tag{2.3}$$

$$y_{m+1,n+1} + 3\left[y_{m,n}\right]^2 = 0 \tag{2.4}$$

$$y_{m+3,n+1} = y_{m,n} - 5y_{m+2,n+1}y_{m,n+1} \tag{2.5}$$

(2.2) ve (2.3) lineer denklemlerken, (2.4) ve (2.5) lineer olmayan kısmi fark denklemleridir.

Tanım 2.6. Eğer kısmi fark denklemi $y_{m,n}$ terimini içeriyorsa ve m ve n indislerine göre en büyük indis değerleri $m + k$ ve $n + l$ ise o zaman kısmi fark denkleminin mertebesi birinci değişkene göre k. mertebe, ikinci değişkene göre l. mertebe olarak adlandırılır[Mickens R. E. 1990] .

Örneğin (2.2) denklemi yeniden

$$y_{m+1,n} + y_{m,n} = y_{m,n+1} + y_{m,n}$$

biçiminde yazılabilir ve sonuç olarak hem m'ye hem de n'ye göre birinci mertebedendir. Aynı şekilde (2.3) denklemi m'ye göre ikinci, n'ye göre birinci mertebe; (2.4) denklemi m ve n'ye göre birinci ve (2.5) denklemi m'ye göre üçüncü n'ye göre birinci mertebedendir.

Tanım 2.7. (2.1) kısmi fark denklemi

$$y_{m,n} = \sum_{i=1}^{u} p_i y_{m-\tau_i,n-\sigma_i} + \sum_{j=1}^{v} q_j y_{m+k_j,n+l_j} \tag{2.6}$$

biçiminde verilirse (2.6) kısmi fark denklemine homogen, lineer kısmi fark denklemi denir.

Tanım 2.8. $i = 1, 2, ..., u$ için $\tau = \max \tau_i$, $\sigma = \max \sigma_i$ ve $M_0 \geq m_0$, $N_0 \geq n_0$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $\Omega = \mathbb{N}_{m_0-\tau} \times \mathbb{N}_{n_0-\sigma} \setminus \mathbb{N}_{m_0} \times \mathbb{N}_{n_0}$ kümesi başlangıç bölgesi olarak adlandırılır$\left[\text{Zhang B. G. ve Zhou Y. 2007}\right]$.

Tanım 2.9. Ω başlangıç bölgesi üzerinde tanımlı bir $\varphi_{i,j}$ fonksiyonuna başlangıç fonksiyonu denir$\left[\text{Zhang B. G. ve Zhou Y. 2007}\right]$.

Tanım 2.10.

$$y_{i,j} = \varphi_{i,j}, \qquad (i, j) \in \Omega \tag{2.7}$$

başlangıç şartıyla verilen (2.6) denklemi başlangıç değer problemi olarak adlandırılır$\left[\text{Zhang B. G. ve Zhou Y. 2007}\right]$.

Ardışık iterasyonla (2.6)-(2.7) başlangıç değer probleminin tek $\{y_{m,n}\}$ çözümü olduğunu görmek kolaydır. (2.6) denklemini $j = 1, 2, ..., v$ için $k = \max k_j$, $l = \max l_j$ olmak üzere

$$y_{m+k,n+l} = f\left(y_{m+k-1,n+l}, y_{m+k,n+l-1}, ..., y_{m,n}\right) - \sum_{i=1}^{u} p_i y_{m-\tau_i,n-\sigma_i} \tag{2.8}$$

biçiminde yazabilir ve bunu kullanarak $y_{k,l}$, $y_{k+1,l}$, $y_{k,l+1}$, ... terimleri kolaylıkla hesaplanır. Böylece $\{y_{m,n}\}$ reel değerli, iki değişkenli(double) dizisi tektir ve (2.6)-(2.7) başlangıç değer probleminin çözümü olarak adlandırılır.

Diğer bir deyişle (2.6) denkleminin bir çözümü $\mathbb{N}_{m_0-\tau} \times \mathbb{N}_{n_0-\sigma}$ üzerinde tanımlı ve

$\mathbb{N}_{m_0} \times \mathbb{N}_{n_0}$ üzerinde (2.6) denklemini sağlayan aşikar olmayan iki değişkenli $\{y_{m,n}\}$ dizisidir[Zhou Y. 2007] .

Tanım 2.11. Her $m \geq m_1$, $n \geq n_1$ için $y_{m,n} > 0$ (er geç pozitif dizi)(eventually positive) veya $y_{m,n} < 0$ (er geç negatif dizi) olacak şekilde m_1, n_1 pozitif tam sayıları varsa bir $y = \{y_{m,n}\}_{m=m_0, n=n_0}^{\infty \quad \infty}$ dizisine (0 etrafında) salınımlı olmayandır denir. Aksi halde y dizisi salınımlı olarak adlandırılır[Agarwal R. P. ve Popenda J. 1999] .

Tanım 2.12. Yeterince büyük her m ve n için

$$\left|y_{m,n}\right| \leq M\alpha^m \beta^n$$

olacak şekilde pozitif M, α ve β sayıları varsa (2.6) denkleminin bir $\{y_{m,n}\}$ çözümüne "has(proper) çözüm" denir[Zhang B. G. ve Zhou Y. 2007] .

Tanım 2.13 (Landau Sembolleri). n, sonsuza giden bir tamsayı değişkeni ve x, bir limit değerine giden sürekli bir değişken olsun. $\phi(n)$ veya $\phi(x)$ bir pozitif fonksiyon ve $f(n)$ veya $f(x)$ bir keyfi fonksiyon olsun. $O(x)$(büyük-o) ve $o(x)$(küçük-o) sembolleri Landau sembolleri olarak bilinir ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar:
(i) $f = O(\phi)$ ifadesinin anlamı en az bir A sabiti ve n ve x'in her değeri için $|f| < A\phi$ demektir.
(ii) $f = o(\phi)$ ifadesinin anlamı $f/\phi \to 0$ demektir[Hardy ve Wright 1979].

Teorem 2.2 (Fabry Teoremi). $\{a_{m,n}\}$ iki değişkenli dizisi, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $|z_1| < \alpha_1$, $|z_2| < \alpha_2$ olmak üzere $F(z_1, z_2)$ fonksiyonu,

$$F(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n}$$

ile tanımlansın. $a_{m,n} = 1 + o(1/M)$, $M = \max(m, n)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $F(z_1, z_2)$, $z_1 = 1$ ve $z_2 = 1'$de singulerdir[Zhang B. G. ve Zhou Y. 2007] .

Tanım 2.14 (z-dönüşümü). $|z_1| > r_1$, $|z_2| > r_2$, $r_1 \geq 0$ ve $r_2 \geq 0$ için

$$F(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} y_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n}$$

serileri yakınsak ise $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ olmak üzere $\{y_{m,n}\}$ iki değişkenli dizisinin z-dönüşümü

$$Z(y_{m,n}) = F(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} y_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n} \tag{2.9}$$

ile tanımlanır. Burada Z, z-dönüşümü uygulamasının operatörünü gösterir. z_1 ve z_2 kompleks düzlemde keyfi değerler alabilen kompleks değişkenlerdir. (2.9) denklemi $|z_1| > r_1$ ve $|z_2| > r_2$ bölgesinde z_1 ve z_2 değişkenlerinin bir kompleks analitik fonksiyonudur.

Bundan sonra

$$\sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} y_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n}.$$

serilerinde $m < 0$ ve $n < 0$ için $y_{m,n} = 0$ kabul edeceğiz$\left[\text{Zhang B. G. ve Zhou Y. 2007}\right]$.

Lemma 2.4. $\left|y_{m,n}\right| \leq M_1 r_1^m r_2^n, \quad m \geq M,\ n \geq N$ olacak şekilde M_1, M, ve N pozitif sabitlerinin var olduğunu kabul edelim. O zaman $\{y_{m,n}\}$'nin z-dönüşümü $|z_1| > r_1$ ve $|z_2| > r_2$ bölgesinde vardır$\left[\text{Zhang B. G. ve Zhou Y. 2007}\right]$.

Şimdi z-dönüşümünün bazı özelliklerini vereceğiz.

Lemma 2.5. **(i)**

$$Z(y_{m-k,n-l}) = z_1^{-k} z_2^{-l} F(z_1, z_2),$$

(ii) $F(k+i, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} y_{k+i,n} z_2^{-n}$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{\infty} F(k+i, z_2) z_1^{-i} = z_1^k \left(F(z_1, z_2) - \sum_{m=0}^{k-1} F(m, z_2) z_1^{-m} \right),$$

(iii)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{l-1} y_{k+i,n} z_1^{-i} z_2^{-n} = z_1^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{l-1} y_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n} - \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{l-1} y_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n} \right),$$

(iv) $F(z_1, n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} z_1^{-m}$ olmak üzere

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{l-1} y_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n} = \sum_{i=0}^{l-1} F(z_1, i) z_2^{-i},$$

(v)

$$\begin{aligned} Z(y_{m+k,n+l}) &= z_1^k z_2^l \Bigg(F(z_1, z_2) - \sum_{m=0}^{k-1} F(m, z_2) z_1^{-m} - \sum_{n=0}^{l-1} F(z_1, n) z_2^{-n}, \\ &\quad + \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{l-1} y_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n} \Bigg). \end{aligned}$$

$\left[\text{Zhang B. G. ve Zhou Y. 2007}\right]$.

Lemma 2.6. $x > 0$ için $F(x) = ax - bx^{\lambda}$ olsun. $a \geq 0$, $b > 0$ ve $\lambda > 1$ ise $F(x)$,

$$F_{\max} = (\lambda - 1)\,\lambda^{\lambda/(1-\lambda)} a^{\lambda/(\lambda-1)} b^{1/(1-\lambda)}$$

maksimum değerine ulaşır. $a > 0$, $b \geq 0$ and $0 < \lambda < 1$ ise $F(x)$,

$$F_{\min} = (\lambda - 1)\,\lambda^{\lambda/(1-\lambda)} a^{\lambda/(\lambda-1)} b^{1/(1-\lambda)}$$

minimum değerine ulaşır[Hardy G. H., Littlewood J. E. ve Polya G. 1952].

Teorem 2.3 (Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi). $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ...$ fonksiyonlarının ölçülebilir olduğunu kabul edelim. $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ olsun. O zaman

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j(x)dx = \int f(x)dx$$

olur.

Lemma 2.7. $u(k)$, $\mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı bir dizi olsun. O zaman
(i) $\liminf_{k\to\infty} \Delta^n u(k) > 0$ ise $0 \leq i \leq n-1$ için $\lim_{k\to\infty} \Delta^i u(k) = \infty$
(ii) $\limsup_{k\to\infty} \Delta^n u(k) < 0$ ise $0 \leq i \leq n-1$ için $\lim_{k\to\infty} \Delta^i u(k) = -\infty$ dur[Agarwal R. P. 2000].

Teorem 2.4 (Ayrık Kneser Teoremi). $\Delta^n u(k)$ farkı $\mathbb{N}_a$ üzerinde sabit işaretli ve özdeş olarak sıfır olmamak üzere $u(k)$ dizisi $\mathbb{N}_a$ 'da tanımlı ve $u(k) > 0$ olsun. O zaman $\Delta^n u(k) \leq 0$ için $n+m$ tek veya $\Delta^n u(k) \geq 0$ için $n+m$ çift sayı olacak şekilde $0 \leq m \leq n$, bir m tamsayısı vardır. Ayrıca
(i) $m \leq n-1$ ise her $k \in \mathbb{N}_a$ ve $m \leq i \leq n-1$ için $(-1)^{m+i}\, \Delta^i u(k) > 0$
(ii) $m \geq 1$ ise yeterince büyük her $k \in \mathbb{N}_a$ ve $1 \leq i \leq m-1$ için $\Delta^i u(k) > 0$
şartları sağlanır($m+n$ tek olduğunda n tek ise m çift ve n çift ise m tek , $m+n$ çift olduğunda n tek ise m tek ve n çift ise m çifttir) [Agarwal R. P. 2000].

Örnek 2.2. **(i)** $u(k) > 0$ ve $\Delta^5 u(k) \leq 0$ ise yeterince büyük her k için aşağıdaki durumlar olasıdır.
$(m = 0)$ $u(k) > 0$, $\Delta u(k) < 0$, $\Delta^2 u(k) > 0$, $\Delta^3 u(k) < 0$, $\Delta^4 u(k) > 0$, $\Delta^5 u(k) \leq 0$
$(m = 2)$ $u(k) > 0$, $\Delta u(k) > 0$, $\Delta^2 u(k) > 0$, $\Delta^3 u(k) < 0$, $\Delta^4 u(k) > 0$, $\Delta^5 u(k) \leq 0$
$(m = 4)$ $u(k) > 0$, $\Delta u(k) > 0$, $\Delta^2 u(k) > 0$, $\Delta^3 u(k) > 0$, $\Delta^4 u(k) > 0$, $\Delta^5 u(k) \leq 0$
(ii) $u(k) > 0$ ve $\Delta^6 u(k) \leq 0$ ise yeterince büyük her k için aşağıdaki durumlar olasıdır.
$(m = 1)$ $u(k) > 0$, $\Delta u(k) > 0$, $\Delta^2 u(k) < 0$, $\Delta^3 u(k) > 0$, $\Delta^4 u(k) < 0$, $\Delta^5 u(k) > 0$,

$\Delta^6 u(k) \leq 0$

$(m = 3)$ $u(k) > 0,\ \Delta u(k) > 0,\ \Delta^2 u(k) > 0,\ \Delta^3 u(k) > 0,\ \Delta^4 u(k) < 0,\ \Delta^5 u(k) > 0,$
$\Delta^6 u(k) \leq 0$

$(m = 5)$ $u(k) > 0,\ \Delta u(k) > 0,\ \Delta^2 u(k) > 0,\ \Delta^3 u(k) > 0,\ \Delta^4 u(k) > 0,\ \Delta^5 u(k) > 0,$
$\Delta^6 u(k) \leq 0.$

3. YÜKSEK MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI LİNEER KISMİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI İÇİN GEREK VE YETER KOŞULLAR

Bu bölümde

$$\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + (-1)^{r+h+1} p y_{m-\tau,n-\sigma} = 0 \tag{3.1}$$

biçimindeki yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer kısmi fark denklemini gözönüne alacağız. Burada $m, n, \tau, \sigma \in \mathbb{N}$, $r, h \in \mathbb{N}_1$ ve p negatif olmayan bir reel sayıdır. Δ_m ve Δ_n ileri farkları bilindiği gibi tanımlıdır, yani $\Delta_m y_{m,n} = y_{m+1} - y_m$ ve $\Delta_n y_{m,n} = y_{n+1} - y_n$. r ve h keyfi pozitif tamsayıları için yüksek mertebe kısmi farklar $\Delta_m^r y_{m,n} = \Delta_m \left(\Delta_m^{r-1} y_{m,n}\right)$, $\Delta_m^0 y_{m,n} = y_{m,n}$, $\Delta_n^h y_{m,n} = \Delta_n \left(\Delta_n^{h-1} y_{m,n}\right)$, $\Delta_n^0 y_{m,n} = y_{m,n}$ olarak tanımlanır.

Yüksek mertebe kısmi fark denklemlerinin kalitatif teorisi hakkında çeşitli çalışmalar vardır.

1997 yılında B. G. Zhang ve S. T. Liu

$$x_{m+k,n+l} + \sum_{i=1}^{s_1} \sum_{j=1}^{s_2} q_{i,j} x_{m+k-i,n+l-j} = 0$$

biçimindeki kısmi fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık davranışını incelemişlerdir. Burada k,$l \in \mathbb{N}$ ve $q_{i,j} \in \mathbb{R}$'dir.

1998 yılında yine B. G. Zhang ve S. T. Liu

$$A_{m,n} = \sum_{i=1}^{u} p_i A_{m-k_i,n-l_i} + \sum_{j=1}^{v} q_j A_{m+\tau_j,n+\sigma_j}$$

biçimindeki gecikmeli lineer kısmi fark denklem sisteminin çözümlerinin salınımlılığını çalışmışlardır. Burada $i = 1, 2, ..., u$ ve $j = 1, 2, ..., v$ olmak üzere p_i ve q_j $r \times r$ tipinde matrislerdir, $A_{m,n} = \left(a_{m,n}^1, a_{m,n}^2, ..., a_{m,n}^r\right)^T$, $k_i, l_i, \tau_j, \sigma_j \in \mathbb{N}$, $u, v \in \mathbb{N}_1$ olarak tanımlıdır.

2006 yılında J. Cheng ve Y. Chu

$$T^i \left(x_{m,n} + a x_{m-k_1,n-l_1} - b x_{m+k_2,n+l_2}\right) = c \left(q x_{m-\sigma_1,n-\tau_1} + b x_{m+\sigma_2,n+\tau_2}\right)$$

biçimindeki yüksek mertebe kısmi fark denkleminin salınımlılık koşullarını araştırmışlardır. Burada $c = \pm 1$, $i \in \mathbb{N}$, a, b, p ve q negatif olmayan reel sayılar, $j = 1, 2$ olmak üzere $k_j, l_j, \tau_j, \sigma_j$ negatif olmayan tamsayılardır ve T operatörü,

$$T x_{m,n} = (\Delta_m + \Delta_n + I) x_{m,n}$$

ile tanımlıdır.

Bunun yanında 2003 yılında B. G. Zhang, Y. Zhou ve Y. Q. Huang

$$\Delta_n^h \Delta_m^r (x_{m,n} - c x_{m-k,n-l}) + (-1)^{h+r+1} p_{m,n} f(x_{m-\tau,n-\sigma}) = 0$$

lineer olmayan yüksek mertebe nötral kısmi fark denklemi için pozitif çözümlerin varlığını araştırmışlardır. Bu çalışmayı yaparken aşağıdaki koşulların var olduğunu kabul etmişlerdir.

(i) $c \in \mathbb{R}$, $h, r, k, l \in \mathbb{N}_1$, $\tau, \sigma \in \mathbb{N}$, $\left\{p_{m,n}\right\}_{m=m_0,n=n_0}^{\infty,\infty}$ reel sayıların iki değişkenli dizisidir.

(ii) f, sürekli fonksiyonu azalmayandır, keyfi $x \neq 0$ için $xf(x) \geq 0$ ve $|x| \leq |y|$ iken $|f(x)| \leq |f(y)|' dir.$

2007'de C.F. Li ve Y. Zhou $\left\{p_{m,n}\right\}_{m=m_0,n=n_0}^{\infty,\infty}$, $\left\{q_{m,n}\right\}_{m=m_0,n=n_0}^{\infty,\infty}$reel sayıların iki değişkenli dizileri, $h, r, k, l \in \mathbb{N}_1$, $\sigma_i, \rho_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, $p_{m,n} \geq 0$, $q_{m,n} \geq 0$, $m \geq m_0$, $n \geq n_0$, olmak üzere

$$\Delta_n^h \Delta_m^r (x_{m,n} + c_{m,n} x_{m-k,n-l}) + p_{m,n} x_{m-\sigma_1,n-\rho_1} - q_{m,n} x_{m-\sigma_2,n-\rho_2} = 0$$

ve $\left\{p_{m,n}^{(s)}\right\}_{m=m_0,n=n_0}^{\infty,\infty}$ reel sayıların iki değişkenli dizileri, $h, r, k, l, d, u \in \mathbb{N}_1$, $\sigma_s, \rho_s \in \mathbb{N}$, $p_{m,n}^{(s)} \geq 0$, $s = 1, 2, ..., u$ olmak üzere

$$\Delta_n^h \Delta_m^r (x_{m,n} + c_{m,n} x_{m-k,n-l}) + \sum_{s=1}^{d} p_{m,n}^{(s)} x_{m-\sigma_s,n-\rho_s} - \sum_{s=d+1}^{u} q_{m,n}^{(s)} x_{m-\sigma_s,n-\rho_s} = 0$$

yüksek mertebe nötral kısmi fark denklemlerinin sınırlı ve sınırsız salınımlı olmayan çözümlerinin varlığını araştırmışlardır.

Kısmi fark denklemlerinin yanında adi fark denklemlerinin de kalitatif teorisi üzerine çalışmalar yapılmıştır. 1990 yılında CH. G. Philos ve Y.G. Sficas,

$$(-1)^{m+1} \Delta^m A_n + \sum_{k=0}^{\infty} p_k A_{n-l_k} = 0$$

yüksek mertebe fark denkleminin pozitif çözümlerini araştırmışlardır. Burada $m \in \mathbb{N}_1$, $(p_k)_{k \geq 0}$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $0 \leq l_0 < l_1 < l_2 ...$ olmak üzere $(l_k)_{k \geq 0}$ tamsayıların bir dizisidir.

(3.1) denkleminin bir çözümü ile demek istediğimiz, $m \geq -\tau$ ve $n \geq -\sigma$ için tanımlı ve $m \geq 0$, $n \geq 0$ için (3.1) denklemini sağlayan aşikar olmayan iki değişkenli(double) $\left\{y_{m,n}\right\}$ dizisidir. (3.1) denkleminin bir $\left\{y_{m,n}\right\}$ çözümü yeterince büyük her m ve n için $y_{m,n} > 0$ (veya $y_{m,n} < 0$) oluyorsa er geç(eventually) pozitif (veya er geç negatif) çözüm olarak adlandırılır. Ne er geç pozitif ne de er geç negatif çözüm değilse salınımlıdır denir.

$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$y_{m,n} = \lambda^m \mu^n \tag{3.2}$$

biçimindeki çözümleri gözönüne alacağız (3.2)'yi (3.1)'de yerine yazarak (3.1) kısmi fark denkleminin

$$\Phi(\lambda, \mu) = (\lambda - 1)^r (\mu - 1)^h + (-1)^{r+h+1} p \lambda^{-\tau} \mu^{-\sigma} = 0 \tag{3.3}$$

veya

$$\Phi(\lambda,\mu)=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{h}{j}\lambda^{r-i}\mu^{h-j}+(-1)^{r+h+1}p\lambda^{-\tau}\mu^{-\sigma}=0$$

karakteristik denklemini elde ederiz.
(λ,μ) , (3.3) denklemini sağlıyorsa ve ayrıca $\lambda>0$ ve $\mu>0$ oluyorsa (3.3) denkleminin pozitif kökleri olarak adlandırılır.
$\Omega=\mathbb{N}_{m_0-\tau}\times\mathbb{N}_{n_0-\sigma}/\mathbb{N}_{m_0}\times\mathbb{N}_{n_0}$ başlangıç bölgesi üzerinde tanımlı $\phi_{i,j}$ fonksiyonu, bir başlangıç fonksiyonu olmak üzere Ω üzerinde $\phi_{i,j}$'ye eşit, $\mathbb{N}_{m_0}\times\mathbb{N}_{n_0}$ üzerinde (3.1) denklemini sağlayan $\{y_{i,j}\}$ dizisini kurmak kolaydır.

Lemma 3.1. Bir başlangıç fonksiyonu $\phi_{i,j}$, bazı pozitif M_1, α ve β sayıları için

$$\left|\phi_{m,n}\right|\leq M_1\alpha^m\beta^n,\quad (m,n)\in\Omega \tag{3.4}$$

koşulunu sağlıyorsa (3.1) denkleminin buna karşılık gelen çözümü has çözümdür.

İspat. Ω başlangıç bölgesinde tanımlı $\phi_{i,j}$ başlangıç fonksiyonu, bazı pozitif M_1, α ve β sayıları için (3.4) koşulunu sağlasın. O zaman

$$\left|y_{m,n}\right|\leq M_1\alpha^m\beta^n\qquad,(m,n)\in\Omega$$

olur. Buradan

$$-M_1\alpha^m\beta^n\leq y_{m,n}\leq M_1\alpha^m\beta^n$$

ve

$$M_1\alpha^m\beta^n\geq -y_{m,n}\geq -M_1\alpha^m\beta^n\qquad.$$

olduğu açıktır. (3.1) denklemini yeniden

$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{h}{j}y_{m+r-i,n+h-j}+(-1)^{r+h+1}py_{m-\tau,n-\sigma}=0.$$

biçiminde yazabiliriz. Burada en büyük indisli $y_{m,n}$ terimini çekerek denklemi düzenleriz. Şimdi bu işlemi $r=1$, $h=1$ olmak üzere (3.1) denkleminin özel hali için yapacağız. $r=1$, $h=1$ için (3.1) denklemi

$$y_{m+1,n+1} - y_{m+1,n} - y_{m,n+1} + y_{m,n} - p y_{m-\tau,n-\sigma} = 0. \tag{3.5}$$

biçiminde olur ve bu denklem için başlangıç bölgesi $\Omega = \mathbb{N}_{-\tau} \times \mathbb{N}_{-\sigma} / \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$ olur. (3.5) denklemini

$$y_{m+1,n+1} = y_{m+1,n} + y_{m,n+1} - y_{m,n} + p y_{m-\tau,n-\sigma}$$

biçiminde yazabilir ve $y_{1,1}, y_{1,2}, y_{2,1}, y_{2,2}, \ldots$ terimlerini kolaylıkla hesaplayabiliriz. Örneğin

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= y_{1,0} + y_{0,1} - y_{0,0} + p y_{-\tau,-\sigma} \\ &\leq M_1\alpha + M_1\beta + M_1 + pM_1\alpha^{-\tau}\beta^{-\sigma} \\ &\leq M\alpha\beta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= y_{1,0} + y_{0,1} - y_{0,0} + p y_{-\tau,-\sigma} \\ &\geq -M_1\alpha - M_1\beta - M_1 - pM_1\alpha^{-\tau}\beta^{-\sigma} \\ &\geq -M\alpha\beta \end{aligned}$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. O zaman

$$\left| y_{1,1} \right| \leq M\alpha\beta$$

sonucunu elde ederiz. Benzer biçimde

$$\left| y_{m,n} \right| \leq M\alpha^m\beta^n$$

olacak şekilde M, α ve β pozitif sayılarının var olduğunu görürüz. Bu da $\left\{ y_{m,n} \right\}$ çözümünün has çözüm olduğunu gösterir.

Benzer sonuçları r ve h mertebelerinin diğer değerleri için de elde edebiliriz. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.1. (3.1) denkleminin her has çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul (3.3) karakteristik denkleminin pozitif köke sahip olmamasıdır.

İspat. Gereklik. Aksini kabul edelim. Yani (λ_0, μ_0) (3.3)'ün bir pozitif kökü olsun. O zaman $y_{m,n} = \lambda_0^m \mu_0^n$ olmak üzere $\{y_{m,n}\}$, (3.1)'in bir pozitif çözümüdür. Bu da bir çelişkidir.

Yeterlik. (3.3)'ün bir pozitif köke sahip olmadığını farz edelim. $\{y_{m,n}\}$, (3.1) denkleminin $|\phi_{m,n}| < c$ olacak şekilde $\phi_{m,n}$ başlangıç koşullu bir pozitif has çözümü olsun. O zaman

$$y_{m,n} = \phi_{m,n}, \quad (m,n) \in \Omega$$

olduğu için

$$|y_{m,n}| < c\,, \quad (m,n) \in \Omega.$$

olur. $y_{m,n} = \lambda^m \mu^n$ biçiminde olduğunu gözönüne alarak

$$|y_{0,0}| = 1 < c \Longrightarrow |y_{1,0}| = |\lambda| < |\lambda|.c$$

elde ederiz. O zaman

$$|y_{m,0}| = |\lambda^m| < |\lambda^m|.c^m < b_1.c^m$$

olacak şekilde bir $b_1 > 0$ sayısı vardır.

Benzer şekilde

$$|y_{0,0}| = 1 < c \Longrightarrow |y_{0,1}| = |\mu| < |\mu|.c$$

ve

$$|y_{0,n}| = |\mu^n| < |\mu^n|.c^n < b_2.c^n$$

olacak şekilde $b_2 > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$|y_{m,n}| = |\lambda^m \mu^n| < b_1 c^m.b_2 c^n$$

ve sonuç olarak

$$|y_{m,n}| < bc^{m+n}, \quad (m,n) \in \mathbb{N}^2 \tag{3.6}$$

olacak şekilde $b > 0$ sayısı vardır. Lemma 2.4'den $|z_i| > c$, $i = 1, 2$, için $\{y_{m,n}\}'$nin z-dönüşümü

$$Z(y_{m,n}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} y_{m,n} z_1^{-m} z_2^{-n} = F(z_1, z_2) \tag{3.7}$$

vardır. (3.1)'in her iki tarafının z-dönüşümünü alalım:

$$Z\left(\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + (-1)^{r+h+1} p y_{m-\tau,n-\sigma}\right) = Z(0)$$

Lemma 2.5'teki z-dönüşümünün özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} Z\left(\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n}\right) &= Z\left(\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{h}{j}y_{m+r-i,n+h-j}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{h}{j}z_1^{r-i}z_2^{h-j}\times\left\{Z\left(y_{m,n}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{r-i-1}y_{m,n}z_1^{-m}z_2^{-n}\right. \\ &\left.-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{h-j-1}y_{m,n}z_1^{-m}z_2^{-n}+\sum_{m=0}^{r-i-1}\sum_{n=0}^{h-j-1}y_{m,n}z_1^{-m}z_2^{-n}\right\}, \end{aligned}$$

$$Z\left((-1)^{r+h+1}py_{m-\tau,n-\sigma}\right)=(-1)^{r+h+1}pz_1^{-\tau}z_2^{-\sigma}Z\left(y_{m,n}\right),$$

$$Z(0)=0$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{h}{j}z_1^{r-i}z_2^{h-j}F\left(z_1,z_2\right)+(-1)^{r+h+1}pz_1^{-\tau}z_2^{-\sigma}F\left(z_1,z_2\right) \\ =&\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{h}{j}z_1^{r-i}z_2^{h-j}\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{r-i-1}y_{m,n}z_1^{-m}z_2^{-n}\right. \\ &\left.+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{h-j-1}y_{m,n}z_1^{-m}z_2^{-n}-\sum_{m=0}^{r-i-1}\sum_{n=0}^{h-j-1}y_{m,n}z_1^{-m}z_2^{-n}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\Phi(z_1,z_2)=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{h}{j}z_1^{r-i}z_2^{h-j}+(-1)^{r+h+1}pz_1^{-\tau}z_2^{-\sigma}$$

ve

$$\begin{aligned} \Psi(z_1,z_2) &= \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{h}{j}z_1^{r-i}z_2^{h-j}\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{r-i-1}y_{m,n}z_1^{-m}z_2^{-n}\right. \\ &\left.+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{h-j-1}y_{m,n}z_1^{-m}z_2^{-n}-\sum_{m=0}^{r-i-1}\sum_{n=0}^{h-j-1}y_{m,n}z_1^{-m}z_2^{-n}\right\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\Phi(z_1,z_2)F\left(z_1,z_2\right)=\Psi(z_1,z_2),\qquad |z_i|>c,\ i=1,2 \tag{3.8}$$

elde ederiz. (3.8) 'i yeniden

$$\Phi\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2}\right)F\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2}\right)=\Psi\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2}\right) \tag{3.9}$$

biçiminde yazabiliriz.

$$\omega(z_1, z_2) = F\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} y_{m,n} z_1^m z_2^n \tag{3.10}$$

olsun. (3.10), r_i'de, $i = 1, 2$, yakınsaklık yarıçapına sahiptir. Yani (3.9) $|z_i| < r_i$, $i = 1, 2$ için sağlanır. Benzer şekilde (3.8) $|z_i| > 1/r_i$, $i = 1, 2$,için sağlanır. Fabry Teoremine göre r_i, $i = 1, 2$ yakınsaklık yarıçapına sahip pozitif katsayılı bir kuvvet serisi $z_i = r_i$'de, $i = 1, 2$, de singulariteye sahiptir. $(z_1, z_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ için (3.3) pozitif köke sahip olmadığından $\Phi(z_1, z_2) \neq 0$ olur. Böylece $\Phi(1/r_1, 1/r_2) \neq 0$, ve buradan,

$$\omega(z_1, z_2) = \frac{\Psi(1/z_1, 1/z_2)}{\Phi(1/z_1, 1/z_2)}$$

$|z_1 - r_1| < \rho_1$ ve $|z_2 - r_2| < \rho_2$ bölgesinde analitiktir. Bu da $\omega(z_1, z_2)$ 'nin $z_i = r_i$'de, $i = 1, 2$, singuler olmasıyla çelişir. Buradan $r_i = \infty$, $i = 1, 2$, almalıyız. Yani, (3.8) $|z_i| > 0, i = 1, 2$, için sağlanır. Yeterince büyük her m ve n için $y_{m,n} = 0$ sonucu çıkar. Aksi halde (3.8)'in sol tarafi sağ tarafina eşit olmaz. Bu çelişki Teorem 3.1'i ispatlar. ■

Teorem 3.1'den (3.1)'in her has çözümünün salınımlı olması için belirgin bir koşul türetebiliriz.

Teorem 3.2. $p > 0$ olsun. O zaman (3.1)'in her has çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$p\frac{(\tau + r)^{\tau+r}(\sigma + h)^{\sigma+h}}{\tau^\tau \sigma^\sigma r^r h^h} > 1 \tag{3.11}$$

olmasıdır.

İspat. Gereklik. (3.11) koşulu sağlanmazsa (3.1)'in bir pozitif has çözüme sahip olduğunu götermek yeterlidir.

1. Durum. $r + h$ tek olsun. (3.11) sağlanmazsa (3.3)'ten

$$\Phi\left(1, \frac{\sigma}{\sigma + h}\right) = (1-1)^r\left(\frac{\sigma}{\sigma+h} - 1\right)^h + p\frac{(\sigma+h)^\sigma}{\sigma^\sigma} > 0$$

ve

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{\tau}{\tau+r}, \frac{\sigma}{\sigma+h}\right) &= \left(-\frac{r}{\tau+r}\right)^r\left(-\frac{h}{\sigma+h}\right)^h + p\frac{(\tau+r)^\tau(\sigma+h)^\sigma}{\tau^\tau\sigma^\sigma} \\ &= \frac{(-1)^{r+h} r^r h^h}{(\tau+r)^r(\sigma+h)^h} + p\frac{(\tau+r)^\tau(\sigma+h)^\sigma}{\tau^\tau\sigma^\sigma}\end{aligned}$$

buradan

$$\Phi\left(\frac{\tau}{\tau+r},\frac{\sigma}{\sigma+h}\right)=\frac{r^r h^h}{(\tau+r)^r(\sigma+h)^h}\left[-1+p\frac{(\tau+r)^{\tau+r}(\sigma+h)^{\sigma+h}}{\tau^\tau\sigma^\sigma r^r h^h}\right]\leq 0$$

elde ederiz.

2. Durum. $r+h$ çift olsun. (3.11) sağlanmazsa

$$\Phi\left(1,\frac{\sigma}{\sigma+h}\right)=(1-1)^r\left(-\frac{h}{\sigma+h}\right)^h-p\frac{(\sigma+h)^\sigma}{\sigma^\sigma}<0$$

ve

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{\tau}{\tau+r},\frac{\sigma}{\sigma+h}\right) &= \left(-\frac{r}{\tau+r}\right)^r\left(-\frac{h}{\sigma+h}\right)^h-p\frac{(\tau+r)^\tau(\sigma+h)^\sigma}{\tau^\tau\sigma^\sigma}\\ &= \frac{(-1)^{r+h}r^r h^h}{(\tau+r)^r(\sigma+h)^h}-p\frac{(\tau+r)^\tau(\sigma+h)^\sigma}{\tau^\tau\sigma^\sigma}\end{aligned}$$

buradan

$$\Phi\left(\frac{\tau}{\tau+r},\frac{\sigma}{\sigma+h}\right)=\frac{r^r h^h}{(\tau+r)^r(\sigma+h)^h}\left[1-p\frac{(\tau+r)^{\tau+r}(\sigma+h)^{\sigma+h}}{\tau^\tau\sigma^\sigma r^r h^h}\right]\geq 0$$

elde ederiz.

$\Phi(\lambda,\mu)$ sürekli olduğundan $\Phi(\lambda_0,\mu_0)=0$ olacak şekilde $\lambda_0\in\left[\frac{\tau}{\tau+r},1\right)$ ve $\mu_0=\frac{\sigma}{\sigma+h}$ vardır. Teorem 3.1'den, (3.1) pozitif çözüme sahiptir. Bu da çelişkidir.

Yeterlik. (3.11) koşulu altında (3.3) karakteristik denkleminin pozitif köke sahip olmadığını göstereceğiz.

1. Durum. $r+h$ tek olsun. Bu durumda (3.3) karakteristik denklemi

$$\Phi(\lambda,\mu)=(\lambda-1)^r(\mu-1)^h+p\lambda^{-\tau}\mu^{-\sigma}=0$$

olur. $(\lambda-1)^r(\mu-1)^h\geq 0$ için $\Phi(\lambda,\mu)'$nin pozitif köke sahip olmadığı açıktır. $(\lambda-1)^r(\mu-1)^h<0$ için $\Phi(\lambda,\mu)$'yi

$$\Phi(\lambda,\mu)=-(\lambda-1)^r(\mu-1)^h\left[-1+\frac{p}{-\lambda^\tau\mu^\sigma(\lambda-1)^r(\mu-1)^h}\right]$$

biçiminde yazalım.

$$f(\lambda,\mu)=-\lambda^\tau\mu^\sigma(\lambda-1)^r(\mu-1)^h$$

olsun. $\frac{\partial f}{\partial\lambda}=0$, $\frac{\partial f}{\partial\mu}=0$ denklemlerini çözerek

$$\lambda_0=\frac{\tau}{\tau+r},\qquad \mu_0=\frac{\sigma}{\sigma+h}$$

elde ederiz. $f(\lambda, \mu)$ fonksiyonu $\left(\lambda_0, \mu_0\right)$ noktasında maksimum değere ulaşır. Yani

$$\max_{\lambda, \mu \in (0,1)} f(\lambda, \mu) = f\left(\lambda_0, \mu_0\right) = \frac{\tau^\tau \sigma^\sigma r^r h^h}{(\tau + r)^{\tau + r} (\sigma + h)^{\sigma + h}}$$

Buradan $\lambda, \mu \in (0, 1)$ için

$$\Phi(\lambda, \mu) \geq -(\lambda - 1)^r (\mu - 1)^h \left[-1 + p\frac{(\tau + r)^{\tau + r} (\sigma + h)^{\sigma + h}}{\tau^\tau \sigma^\sigma r^r h^h}\right] > 0$$

olur. Bu da $\Phi(\lambda, \mu)$'nin pozitif köke sahip olmaması demektir.

2. Durum. $r + h$ çift olsun. Bu durumda (3.3) karakteristik denklemi

$$\Phi(\lambda, \mu) = (\lambda - 1)^r (\mu - 1)^h - p\lambda^{-\tau} \mu^{-\sigma} = 0$$

olur. $(\lambda - 1)^r (\mu - 1)^h \leq 0$ için $\Phi(\lambda, \mu)$ pozitif köke sahip değildir. $(\lambda - 1)^r (\mu - 1)^h > 0$ için $\Phi(\lambda, \mu)$'yi

$$\Phi(\lambda, \mu) = (\lambda - 1)^r (\mu - 1)^h \left[1 - \frac{p}{\lambda^\tau \mu^\sigma (\lambda - 1)^r (\mu - 1)^h}\right]$$

biçiminde yazalım.

$$f(\lambda, \mu) = \lambda^\tau \mu^\sigma (\lambda - 1)^r (\mu - 1)^h$$

olsun. $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$ denklemlerini çözerek

$$\lambda_0 = \frac{\tau}{\tau + r}, \qquad \mu_0 = \frac{\sigma}{\sigma + h}$$

elde ederiz. $f(\lambda, \mu)$ fonksiyonu $\left(\lambda_0, \mu_0\right)$ noktasında maksimum değere ulaşır. Yani

$$\max_{\lambda, \mu \in (0,1) \text{ veya } \lambda, \mu > 1} f(\lambda, \mu) = f\left(\lambda_0, \mu_0\right) = \frac{\tau^\tau \sigma^\sigma r^r h^h}{(\tau + r)^{\tau + r} (\sigma + h)^{\sigma + h}}.$$

Böylece $\lambda, \mu \in (0, 1)$ veya $\lambda, \mu > 1$, için

$$\Phi(\lambda, \mu) \leq (\lambda - 1)^r (\mu - 1)^h \left[1 - p\frac{(\tau + r)^{\tau + r} (\sigma + h)^{\sigma + h}}{\tau^\tau \sigma^\sigma r^r h^h}\right] < 0$$

olur. Bu da $\Phi(\lambda, \mu)$'nin pozitif köke sahip olmaması anlamına gelir. Teorem 3.1'e göre (3.1)'in her has çözümü salınımlıdır. ■

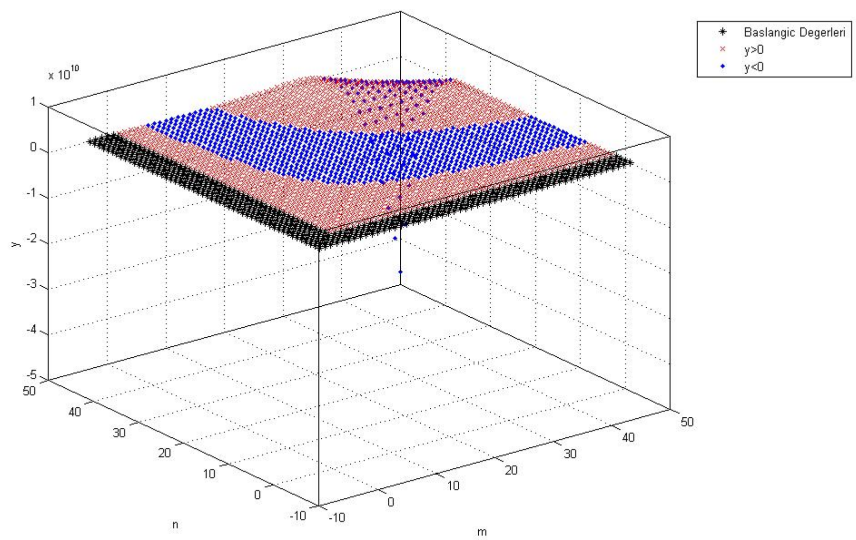
Örnek 3.1.

$$\Delta_m^2 \Delta_n^3 y_{m,n} + (0,0037)\, y_{m-3,n-1} = 0 \tag{3.12}$$

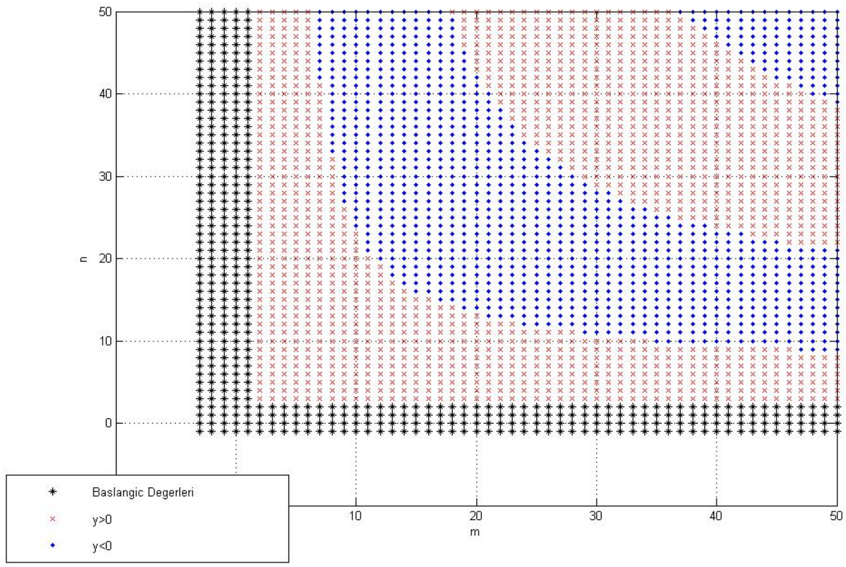
sabit katsayılı yüksek mertebe lineer kısmi fark denklemini gözönüne alalım. Burada $r = 2$, $h = 3$, $\tau = 3$, $\sigma = 1$ ve $p = 0.0037$'dir. (3.11) koşulu

$$p\frac{(\tau + r)^{\tau+r}\,(\sigma + h)^{\sigma+h}}{\tau^{\tau}\sigma^{\sigma}r^{r}h^{h}} = (0,0037)\,\frac{5^5 4^4}{3^3 1^1 2^2 3^3} \simeq 1,015 > 1$$

sağlandığından Teorem 3.2'ye göre (3.12) denkleminin her has çözümü salınımlıdır. Teoremimizi aydınlatacak olan aşağıdaki Şekil 3.1 ve Şekil 3.2, (3.12) denkleminin çözümünün grafiğini göstermektedir.



Şekil 3.1. (3.12)'nin çözüm grafiğinin yandan görünüşü



Şekil 3.2.(3.12)’nin çözüm grafiğinin üstten görünüşü

4. YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN İKİNCİ YANLI(FORCED) KISMİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Çalışmanın bu bölümünde

$$\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + p_{m,n} f(y_{m-\tau,n-\sigma}) = q_{m,n} \tag{4.1}$$

biçimindeki yüksek mertebeden lineer olmayan ikinci yanlı(forced) kısmi fark denklemi için salınımlılık koşullarını araştıracağız. Burada $p_{m,n}$ ve $q_{m,n}$, $\mathbb{N}^2$ üzerinde tanımlı reel sayıların iki değişkenli dizileri, $m, n, \tau, \sigma \in \mathbb{N}$, $r, h \in \mathbb{N}_1$, $\lambda > 0$ için $f(x) = |x|^\lambda \, sgnx$ özel durumunu içeren f fonksiyonu $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ şartını sağlar. Δ_m ve Δ_n bilindiği gibi tanımlı kısmi fark operatörleridir.

İkinci yanlı kısmi fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilglili oldukça az sayıda çalışma vardır. 1995 yılında S. S. Cheng, S. L. Xie ve B. G. Zhang

$$\Delta_n^2 u_{m,n-1} - \Delta_m^2 u_{m-1,n} + q\left(m, n, u_{m,n}\right) = f_{m,n}, \quad 1 \leq m \leq M, \; n \geq 1$$

biçimindeki hiperbolik tipten lineer olmayan ikinci yanlı kısmi fark denkleminin salınımlılık davranışını incelemişlerdir. Burada $f_{m,n}$, $1 \leq m \leq M$ ve $n \geq 0$ için tanımlı iki değişkenli reel bir dizi, $q\,(m, n, u)$, $\{1, 2, ..., M\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyondur.

Ayrıca aynı çalışmada

$$\Delta_{nm}^2 u_{m,n} + c\left(m, n, u_{m,n}\right) = f_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, ...$$

biçimindeki hiperbolik tipten ikinci yanlı kısmi fark denkleminin salınımlılığını araştırmışlardır. Burada $f_{m,n}$, $m, n \geq 1$ için tanımlı iki değişkenli reel bir dizi, $c\,(m, n, u)$, $\mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve

$$\Delta_{nm}^2 u_{m,n} = u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n} - u_{m,n+1} + u_{m,n}$$

olarak tanımlanmıştır.

Ve yine aynı çalışmada

$$\Delta_n u_{m,n} = a_n \Delta_m^2 u_{m-1,n} - p_n u_{m,n-\sigma} + f_{m,n}, \quad 1 \leq m \leq M, \; n \geq 0$$

biçimindeki homogen olmayan parabolik tipten ikinci yanlı kısmi fark denkleminin salınımlılığını araştırmışlardır. Burada σ gecikmesi negatif olmayan bir tamsayıdır, $n \geq 0$ için $a_n, p_n > 0$ ve $f_{m,n}$, $1 \leq m \leq M$, $n \geq 0$ için tanımlı iki değişkenli reel bir dizidir.

İkinci yanlı kısmi fark denklemlerinin yanısıra ikinci yanlı adi fark denklemlerinin salınımlılığı üzerine de çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Y. G. Sun ve S. H. Saker 2007 yılında

$$\Delta^m x_n + q_n f(x_{n-\tau}) = e_n$$

biçimindeki m. mertebe lineer olmayan ikinci yanlı fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığını araştırmışlardır. Burada $m \geq 1$ ve $\tau \geq 0$ tamsayılardır, Δ, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ ile tanımlı ileri fark operatörüdür, $2 \leq i \leq m$ için $\Delta^i x_n = \Delta\left(\Delta^{i-1} x_n\right)$, $\lambda > 0$ için $f(x) = |x|^\lambda \, sgnx$ özel durumunu içeren f fonksiyonu $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ şartını sağlar, q_n ve e_n $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel dizilerdir.

Bu bölümde yapılan çalışma yukarıdaki fark denklemi için yapılan çalışmanın iki boyutlu bir genelleştirmesidir.

Şimdi ana sonuçları elde ederken kullanacağımız $\alpha(m,s)$ ve $\beta(n,t)$ iki faktoriyel fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlıyalım:

$$\alpha(m,s) = \alpha_0(m,s) = (m-s)^{(k)} = (m-s)(m-s+1)\ldots(m-s+k-1), \quad k \geq r \tag{4.2}$$

ve

$$\alpha_i(m,s) = (-1)^i \, \Delta_s^i \alpha(m,s) = \binom{k}{i}(m-s)^{(k-i)}, \quad i = 0,1,\ldots,r. \tag{4.3}$$

Buradan

$$\begin{cases} \alpha(m,s) = 0, & m \leq s \leq m+r-1 \\ \alpha_i(m+i+1, m+r) = 0, & i = 0,1,\ldots,r-1 \\ \alpha_r(m,s) \geq 0, & 0 \leq s \leq m-1 \end{cases} \tag{4.4}$$

ve en az bir $m_0 \geq 0$ and $i = 1,2,\ldots,r$ için

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha_i(m+i+1, m_0)}{\alpha(m+1, m_0)} = 0 \tag{4.5}$$

elde ederiz.

Benzer şekilde;

$$\beta(n,t) = \beta_0(n,t) = (n-t)^{(l)} = (n-t)(n-t+1)\ldots(n-t+l-1), \quad l \geq h \tag{4.6}$$

ve

$$\beta_j(n,t) = (-1)^j \, \Delta_t^j \beta(n,t) = \binom{l}{j}(n-t)^{(l-j)}, \quad j = 0,1,\ldots,h \tag{4.7}$$

olsun. O zaman

$$\begin{cases} \beta(n,t) = 0, & n \leq t \leq n+h-1 \\ \beta_j(n+j+1, n+h) = 0, & j = 0,1,\ldots,h-1 \\ \beta_h(n,t) \geq 0, & 0 \leq t \leq n-1 \end{cases} \tag{4.8}$$

ve en az bir $n_0 \geq 0$ ve $j = 1, 2, \ldots, h$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_j\,(n + j + 1, n_0)}{\beta\,(n + 1, n_0)} = 0 \tag{4.9}$$

elde ederiz.

Teorem 4.1. $m, n \geq 0$ için $p_{m,n} \geq 0$ olsun.

$$\limsup_{m,n\to\infty} \frac{1}{\alpha\,(m + 1, m_0)\,\beta\,(n + 1, n_0)} \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha\,(m, s)\,\beta(n, t) q_{s,t} = \infty \tag{4.10}$$

ve

$$\liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{\alpha\,(m + 1, m_0)\,\beta\,(n + 1, n_0)} \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha\,(m, s)\,\beta(n, t) q_{s,t} = -\infty \tag{4.11}$$

ise (4.1)'in

$$\limsup_{m,n\to\infty} \left| y_{m,n} \right| < \infty \tag{4.12}$$

koşulunu sağlayan her çözümü salınımlıdır.

İspat. $y_{m,n}$, (4.1)'in (4.12)'yi sağlayan salınımlı olmayan çözümü olsun. Genelliği bozmadan $m \geq m_0 \geq 0$, $n \geq n_0 \geq 0$ için $y_{m,n} > 0$, $y_{m-\tau,n-\sigma} > 0$ kabul edelim. Önce (4.1)'i $\alpha\,(m, s)$ ve $\beta\,(n, t)$ ile çarpıp daha sonra bunu m_0'dan $m + r - 1'$e ve n_0'dan $n + h - 1$'e çift toplamla

$$\begin{aligned} &\sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha\,(m, s)\,\beta(n, t) \Delta_s^r \Delta_t^h y_{s,t} + \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha\,(m, s)\,\beta(n, t) p_{s,t} f\left(y_{s-\tau,t-\sigma}\right) \\ = &\sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha\,(m, s)\,\beta(n, t) q_{s,t} \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde ederiz. Lemma 2.2'de verilen fark operatörünün çarpma kuralına göre

$$\Delta_s \left[\alpha\,(m, s - 1)\, y_{s,t}\right] = \alpha\,(m, s)\,\Delta_s y_{s,t} + y_{s,t}\,\Delta_s \alpha\,(m, s - 1)$$

$$\alpha\,(m, s)\,\Delta_s y_{s,t} = \Delta_s \left[\alpha\,(m, s - 1)\, y_{s,t}\right] - y_{s,t}\,\Delta_s \alpha\,(m, s - 1)$$

elde ederiz.

$$\alpha\,(m + 1, s + 1) = (m + 1 - s - 1)^{(k)} = (m - s)^{(k)} = \alpha\,(m, s)\,, \qquad k \geq r$$

olduğundan

$$\alpha\,(m, s - 1) = \alpha\,(m + 1, s)$$

yazabiliriz. (4.3)'te $i=1$ için

$$\alpha_1(m,s)=-\Delta_s\alpha(m,s)$$

olduğu açıktır. Buna göre

$$\alpha(m,s)\,\Delta_s y_{s,t}=\Delta_s\left[\alpha(m+1,s)\,y_{s,t}\right]+\alpha_1(m+1,s)\,y_{s,t}$$

ve benzer yolla

$$\beta(n,t)\,\Delta_t y_{s,t}=\Delta_t\left[\beta(n+1,t)\,y_{s,t}\right]+\beta_1(n+1,t)\,y_{s,t},$$

olduğundan (4.2)-(4.4) ve (4.6)-(4.8)'i kullanarak

$$\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\,\Delta_s^r\Delta_t^h y_{s,t}=\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\alpha(m,s)\,\Delta_s^r\left\{\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\beta(n,t)\,\Delta_t^h y_{s,t}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=m_0}^{m+r-1}\alpha(m,s)\,\Delta_s^r\left\{\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\Delta_t\left[\beta(n+1,t)\,\Delta_t^{h-1}y_{s,t}\right]+\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\beta_1(n+1,t)\,\Delta_t^{h-1}y_{s,t}\right\}\\
&= \sum_{s=m_0}^{m+r-1}\alpha(m,s)\,\Delta_s^r\left\{\beta(n+1,n+h)\,\Delta_t^{h-1}y_{s,n+h}-\beta(n+1,n_0)\,\Delta_t^{h-1}y_{s,n_0}+\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\beta_1(n+1,t)\,\Delta_t^{h-1}y_{s,t}\right\}\\
&= \sum_{s=m_0}^{m+r-1}\alpha(m,s)\,\Delta_s^r\left\{-\beta(n+1,n_0)\,\Delta_t^{h-1}y_{s,n_0}+\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\beta_1(n+1,t)\,\Delta_t^{h-1}y_{s,t}\right\}\\
&= \sum_{s=m_0}^{m+r-1}\alpha(m,s)\,\Delta_s^r\left\{-\beta(n+1,n_0)\,\Delta_t^{h-1}y_{s,n_0}+\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\Delta_t\left[\beta_1(n+2,t)\,\Delta_t^{h-2}y_{s,t}\right]\right.\\
&\quad\left.+\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\beta_2(n+2,t)\,\Delta_t^{h-2}y_{s,t}\right\}\\
&= \sum_{s=m_0}^{m+r-1}\alpha(m,s)\,\Delta_s^r\left\{-\beta(n+1,n_0)\,\Delta_t^{h-1}y_{s,n_0}-\beta_1(n+2,n_0)\,\Delta_t^{h-2}y_{s,n_0}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\beta_2(n+2,t)\,\Delta_t^{h-2}y_{s,t}\right\}\\
&= \ldots=\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\alpha(m,s)\,\Delta_s^r\left\{-\sum_{j=0}^{h-1}\beta_j(n+j+1,n_0)\,\Delta_t^{h-j-1}y_{s,n_0}+\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\beta_h(n+h,t)y_{s,t}\right\}\\
&= -\sum_{j=0}^{h-1}\beta_j(n+j+1,n_0)\,\Delta_t^{h-j-1}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\alpha(m,s)\,\Delta_s^r y_{s,n_0}+\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\beta_h(n+h,t)\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\alpha(m,s)\,\Delta_s^r y_{s,t}\\
&= -\sum_{j=0}^{h-1}\beta_j(n+j+1,n_0)\,\Delta_t^{h-j-1}\left\{-\sum_{i=0}^{r-1}\alpha_i(m+i+1,m_0)\,\Delta_s^{r-i-1}y_{m_0,n_0}+\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\alpha_r(m+r,s)\,y_{s,n_0}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \beta_h(n+h,t) \left\{ -\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i\,(m+i+1,m_0)\,\Delta_s^{r-i-1} y_{m_0,t} + \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \alpha_r\,(m+r,s)\,y_{s,t} \right\} \\
= \; & \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{h-1} \alpha_i\,(m+i+1,m_0)\,\beta_j(n+j+1,n_0)\,\Delta_s^{r-i-1}\,\Delta_t^{h-j-1} y_{m_0,n_0} \\
& - \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{j=0}^{h-1} \alpha_r\,(m+r,s)\,\beta_j(n+j+1,n_0)\,\Delta_t^{h-j-1} y_{s,n_0} \\
& - \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha_i\,(m+i+1,m_0)\,\beta_h(n+h,t)\,\Delta_s^{r-i-1} y_{m_0,t} \\
& + \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha_r\,(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t) y_{s,t}
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

elde edilir. (4.14)'ü (4.13)'te yerine yazalım.

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha\,(m,s)\,\beta(n,t) q_{s,t} = \; & \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{h-1} \alpha_i\,(m+i+1,m_0)\,\beta_j\,(n+j+1,n_0)\,\Delta_s^{r-i-1}\,\Delta_t^{h-j-1} y_{m_0,n_0} \\
& - \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{j=0}^{h-1} \alpha_r\,(m+r,s)\,\beta_j\,(n+j+1,n_0)\,\Delta_t^{h-j-1} y_{s,n_0} \\
& - \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha_i\,(m+i+1,m_0)\,\beta_h(n+h,t)\,\Delta_s^{r-i-1} y_{m_0,t} \\
& + \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha_r\,(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t) y_{s,t} \\
& + \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha\,(m,s)\,\beta(n,t) p_{s,t} f\left(y_{s-\tau,t-\sigma}\right).
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

$m_0 \le s \le m+r-1$ için $\alpha\,(m,s) \ge 0$ ve $n_0 \le t \le n+h-1$ için $\beta\,(n,t) \ge 0$ olduğuna dikkat edelim. $y_{s-\tau,t-\sigma} > 0$ iken $f\left(y_{s-\tau,t-\sigma}\right) > 0$ ve $p_{s,t} \ge 0$ olduğunu gözönüne alarak (4.15)'i $\alpha\,(m+1,m_0)\,\beta\,(n+1,n_0)$ ile bölersek

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha\,(m+1,m_0)\,\beta\,(n+1,n_0)} \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha\,(m,s)\,\beta(n,t) q_{s,t} \\
\ge \; & \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{h-1} \frac{\alpha_i\,(m+i+1,m_0)}{\alpha\,(m+1,m_0)} \frac{\beta_j(n+j+1,n_0)}{\beta\,(n+1,n_0)} \Delta_s^{r-i-1}\,\Delta_t^{h-j-1} y_{m_0,n_0} \\
& - \frac{1}{\alpha\,(m+1,m_0)} \sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{j=0}^{h-1} \alpha_r\,(m+r,s)\, \frac{\beta_j(n+j+1,n_0)}{\beta\,(n+1,n_0)} \Delta_t^{h-j-1} y_{s,n_0} \\
& - \frac{1}{\beta\,(n+1,n_0)} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \frac{\alpha_i\,(m+i+1,m_0)}{\alpha\,(m+1,m_0)} \beta_h(n+h,t)\,\Delta_s^{r-i-1} y_{m_0,t}
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

elde ederiz. Bu da (4.5) ve (4.9) uygulanmış (4.11) ile çelişir. ■

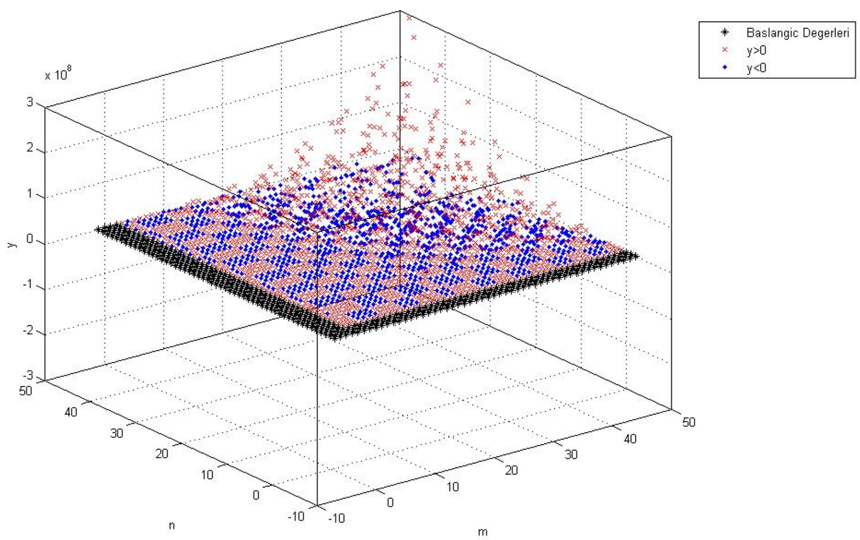
Örnek 4.1. $\lambda > 0$ olmak üzere

$$\Delta_m^3 \Delta_n y_{m,n} + \frac{n}{(m+1)^3} \left|y_{m-1,n-2}\right|^{\lambda} sgn\left(y_{m-1,n-2}\right) = m^3 n^2 \cos m \sin n \qquad (4.17)$$

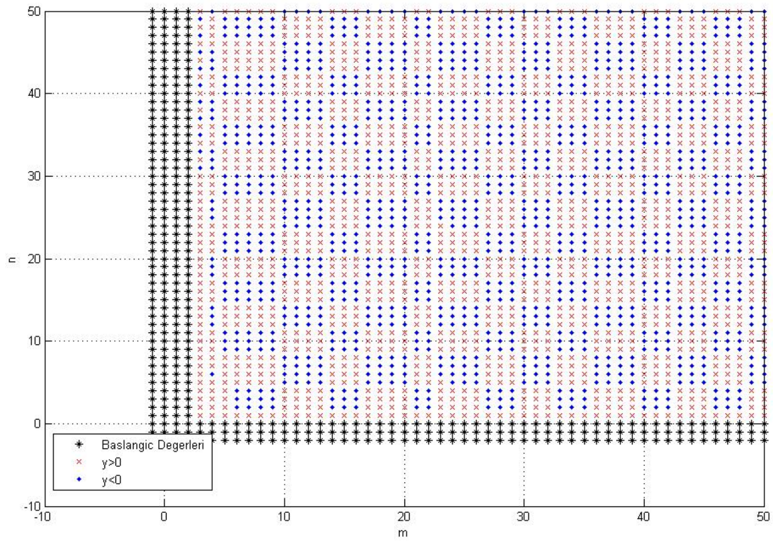
ikinci yanlı kısmi fark denklemini gözönüne alalım. Teorem 4.1'e göre (4.17) denkleminin (4.12) koşulunu sağlayan her çözümü salınımlıdır.
Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de (4.17) zorunlu kısmi fark denkleminin $\lambda = 0,2$ için özel durumu olan

$$\Delta_m^3 \Delta_n y_{m,n} + \frac{n}{(m+1)^3} \left|y_{m-1,n-2}\right|^{0,2} sgn\left(y_{m-1,n-2}\right) = m^3 n^2 \cos m \sin n \qquad (4.18)$$

kısmi fark denkleminin çözümünün grafiği görülmektedir.



Şekil 4.1. (4.18)'in çözüm grafiğinin yandan görünüşü

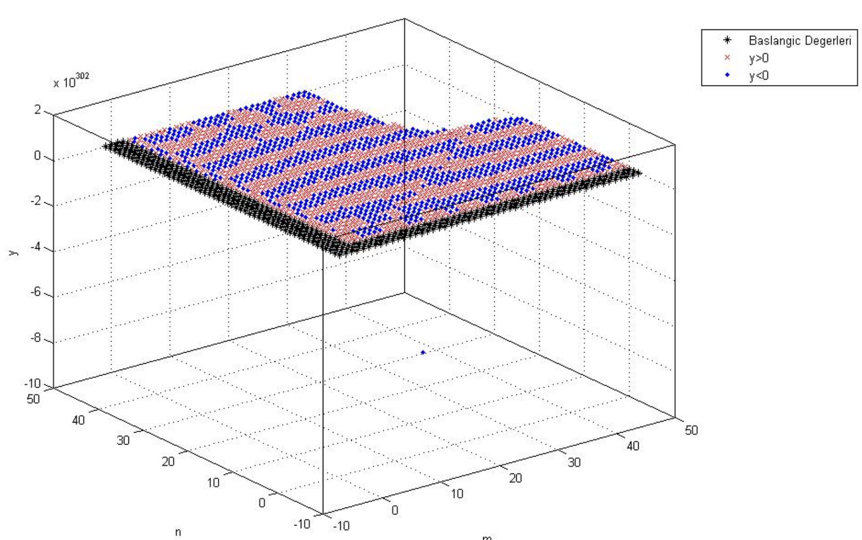


Şekil 4.2. (4.18)'in çözüm grafiğinin üstten görünüşü

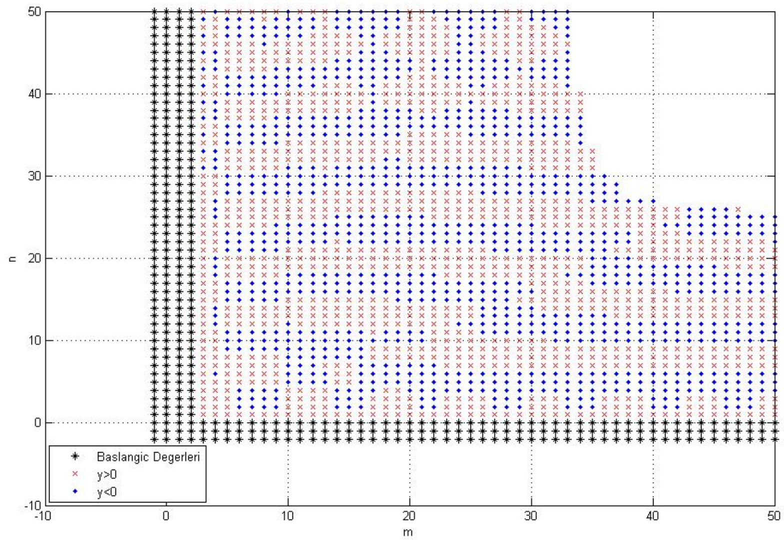
Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'de de (4.16) denkleminin $\lambda = 2$ için özel durumu olan

$$\Delta_m^3 \Delta_n y_{m,n} + \frac{n}{(m+1)^3} \left| y_{m-1,n-2} \right|^2 sgn \left(y_{m-1,n-2} \right) = m^3 n^2 \cos m \sin n \qquad (4.19)$$

kısmi fark denkleminin çözümünün grafiği görülmektedir.



Şekil 4.3. (4.19)'un çözüm grafiğinin yandan görünüşü



Şekil 4.4. (4.19)'in çözüm grafiğinin üstten görünüşü

Teorem 4.2. $m, n \geq 0$ için $p_{m,n} < 0$ ve $|f(x)| \geq c|x|^{\lambda}$ olacak şekilde $c > 0$ ve $\lambda > 1$ sayılarının var olduğunu kabul edelim. Eğer en az bir $m_0, n_0 > 0$ için

$$\limsup_{m,n\to\infty} \frac{1}{\alpha(m+1, m_0)\,\beta(n+1, n_0)} \left[\sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha(m,s)\,\beta(n,t) q_{s,t} - \sum_{s=m_0}^{m-1} \sum_{t=n_0}^{n-1} \Phi_1(m,n,s,t) \right] = \infty \tag{4.20}$$

$$\liminf_{m,n\to\infty} \frac{1}{\alpha(m+1, m_0)\,\beta(n+1, n_0)} \left[\sum_{s=m_0}^{m+r-1} \sum_{t=n_0}^{n+h-1} \alpha(m,s)\,\beta(n,t) q_{s,t} - \sum_{s=m_0}^{m-1} \sum_{t=n_0}^{n-1} \Phi_1(m,n,s,t) \right] = -\infty \tag{4.21}$$

ise (4.1) denkleminin $\tau = \sigma = 0$ olmak üzere

$$\limsup_{m,n\to\infty} \frac{|y_{m,n}|}{\alpha(m+1, m_0)\,\beta(n+1, n_0)} < \infty \tag{4.22}$$

koşulunu sağlayan her çözümü salınımlıdır. Burada

$$\Phi_1(m,n,s,t) = (\lambda-1)\,\lambda^{\lambda/(1-\lambda)} \left[\alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)\right]^{\lambda/(\lambda-1)} \left[c\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\,|p_{s,t}|\right]^{1/(1-\lambda)}$$

olarak tanımlıdır.

İspat. $y_{m,n}$, $\tau = \sigma = 0$ olmak üzere, (4.1) denkleminin (4.22) şartını sağlayan salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Genelliği bozmadan $k > 0$ bir sabit olmak üzere $m \geq m_0 \geq 0$, $n \geq n_0 \geq 0$ için $y_{m,n} > 0$ ve $y_{m,n} \leq k\alpha(m+1, m_0)\,\beta(n+1, n_0)$

olduğunu kabul edelim. (4.1) denklemini $\alpha(m,s)$ ve $\beta(n,t)$ ile çarpıp m_0'dan $m+r-1$'e ve n_0'dan $n+h-1$'e toplayalım. Teorem 4.1'deki ifadeye benzer

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\alpha(m,s)\,\beta(n,t)q_{s,t}\\
=\;&\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\frac{\alpha_i(m+i+1,m_0)}{\alpha(m+1,m_0)}\frac{\beta_j(n+j+1,n_0)}{\beta(n+1,n_0)}\Delta_s^{r-i-1}\Delta_t^{h-j-1}y_{m_0,n_0}\\
&-\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\alpha_r(m+r,s)\frac{\beta_j(n+j+1,n_0)}{\beta(n+1,n_0)}\Delta_t^{h-j-1}y_{s,n_0}\\
&-\frac{1}{\beta(n+1,n_0)}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\frac{\alpha_i(m+i+1,m_0)}{\alpha(m+1,m_0)}\beta_h(n+h,t)\Delta_s^{r-i-1}y_{m_0,t}\\
&+\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\big[\alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}\\
&-\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\left|p_{s,t}\right|f\left(y_{s,t}\right)\big].
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitliği düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\alpha(m,s)\,\beta(n,t)q_{s,t}\\
=\;&\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\frac{\alpha_i(m+i+1,m_0)}{\alpha(m+1,m_0)}\frac{\beta_j(n+j+1,n_0)}{\beta(n+1,n_0)}\Delta_s^{r-i-1}\Delta_t^{h-j-1}y_{m_0,n_0}\\
&-\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\alpha_r(m+r,s)\frac{\beta_j(n+j+1,n_0)}{\beta(n+1,n_0)}\Delta_t^{h-j-1}y_{s,n_0}\\
&-\frac{1}{\beta(n+1,n_0)}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\frac{\alpha_i(m+i+1,m_0)}{\alpha(m+1,m_0)}\beta_h(n+h,t)\Delta_s^{r-i-1}y_{m_0,t}\\
&+\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)}\Bigg\{\sum_{s=m}^{m+r-1}\sum_{t=n}^{n+h-1}\big[\alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}\\
&-\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\left|p_{s,t}\right|f\left(y_{s,t}\right)\big]\\
&+\sum_{s=m}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n-1}\left[\alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}-\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\left|p_{s,t}\right|f\left(y_{s,t}\right)\right]\\
&+\sum_{s=m_0}^{m-1}\sum_{t=n}^{n+h-1}\left[\alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}-\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\left|p_{s,t}\right|f\left(y_{s,t}\right)\right]\\
&+\sum_{s=m_0}^{m-1}\sum_{t=n_0}^{n-1}\left[\alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}-\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\left|p_{s,t}\right|f\left(y_{s,t}\right)\right]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

$s=m,m+1,\ldots,m+r-1$ için $\alpha(m,s)=0$ ve $t=n,n+1,\ldots,n+h-1$ için

$\beta\,(n,t)=0$ olduğuna dikkat ederek;

$$\frac{1}{\alpha\,(m+1,m_0)\,\beta\,(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\alpha\,(m,s)\,\beta(n,t)q_{s,t}$$

$$=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\frac{\alpha_i\,(m+i+1,m_0)}{\alpha\,(m+1,m_0)}\frac{\beta_j(n+j+1,n_0)}{\beta\,(n+1,n_0)}\Delta_s^{r-i-1}\Delta_t^{h-j-1}y_{m_0,n_0}$$

$$-\frac{1}{\alpha\,(m+1,m_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\alpha_r\,(m+r,s)\,\frac{\beta_j(n+j+1,n_0)}{\beta\,(n+1,n_0)}\Delta_t^{h-j-1}y_{s,n_0}$$

$$-\frac{1}{\beta\,(n+1,n_0)}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\frac{\alpha_i\,(m+i+1,m_0)}{\alpha\,(m+1,m_0)}\beta_h(n+h,t)\,\Delta_s^{r-i-1}y_{m_0,t}$$

$$+\frac{1}{\alpha\,(m+1,m_0)\,\beta\,(n+1,n_0)}\left\{\sum_{s=m}^{m+r-1}\sum_{t=n}^{n+h-1}\left[\alpha_r\,(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}\right]\right.$$

$$\left.+\sum_{s=m}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n-1}\left[\alpha_r\,(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}\right]+\sum_{s=m_0}^{m-1}\sum_{t=n}^{n+h-1}\left[\alpha_r\,(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{\alpha\,(m+1,m_0)\,\beta\,(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m-1}\sum_{t=n_0}^{n-1}\left[\alpha_r\,(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}\right.$$

$$\left.-\alpha\,(m,s)\,\beta(n,t)\left|p_{s,t}\right|f\left(y_{s,t}\right)\right]$$

ve buradan

$$\frac{1}{\alpha\,(m+1,m_0)\,\beta\,(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\alpha\,(m,s)\,\beta(n,t)q_{s,t}$$

$$=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\frac{\alpha_i\,(m+i+1,m_0)}{\alpha\,(m+1,m_0)}\frac{\beta_j(n+j+1,n_0)}{\beta\,(n+1,n_0)}\Delta_s^{r-i-1}\Delta_t^{h-j-1}y_{m_0,n_0}$$

$$-\frac{1}{\alpha\,(m+1,m_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\alpha_r\,(m+r,s)\,\frac{\beta_j(n+j+1,n_0)}{\beta\,(n+1,n_0)}\Delta_t^{h-j-1}y_{s,n_0}$$

$$-\frac{1}{\beta\,(n+1,n_0)}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\frac{\alpha_i\,(m+i+1,m_0)}{\alpha\,(m+1,m_0)}\beta_h(n+h,t)\,\Delta_s^{r-i-1}y_{m_0,t}$$

$$+\frac{1}{\alpha\,(m+1,m_0)\,\beta\,(n+1,n_0)}\left\{\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=0}^{h-1}\alpha_r\,(r,s)\,\beta_h(h,t)y_{s+m,t+n}\right.$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{t=n_0}^{n-1}\alpha_r\,(r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s+m,t}+\sum_{s=m_0}^{m-1}\sum_{t=0}^{h-1}\alpha_r\,(m+r,s)\,\beta_h(h,t)y_{s,t+n}\right\}$$

$$+\frac{1}{\alpha\,(m+1,m_0)\,\beta\,(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m-1}\sum_{t=n_0}^{n-1}\left[\alpha_r\,(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}\right.$$

$$\left.-\alpha\,(m,s)\,\beta(n,t)\left|p_{s,t}\right|f\left(y_{s,t}\right)\right]$$

elde ederiz. (4.22)'den $d > 0$ olmak üzere

$$\frac{|y_{m,n}|}{\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)} < d$$

ve

$$y_{m,n} < d\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)$$

olduğunu dikkate alıp f fonksiyonu üzerindeki kabulü kullanarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\,q_{s,t}\\
\leq\;& M+\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m-1}\sum_{t=n_0}^{n-1}\big[\alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)\,y_{s,t}\\
&-c\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\,|p_{s,t}|\,y_{s,t}^{\lambda}\big] \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. Öte yandan $a = \alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)$ ve $b = c\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\,|p_{s,t}|$ olsun. Lemma 2.6'ya göre

$$\begin{aligned}
&\alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)y_{s,t}-c\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\,|p_{s,t}|\,y_{s,t}^{\lambda}\\
\leq\;&(\lambda-1)\,\lambda^{\lambda/(1-\lambda)}\left[\alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)\right]^{\lambda/(\lambda-1)}\left[c\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\,|p_{s,t}|\right]^{1/(1-\lambda)}=\Phi_1(m,n,s,t)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (4.23)'ten

$$\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)}\left[\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\alpha(m,s)\,\beta(n,t)q_{s,t}-\sum_{s=m_0}^{m-1}\sum_{t=n_0}^{n-1}\Phi_1(m,n,s,t)\right]\leq M$$

elde ederiz. Bu da (4.20) ile çelişir. ■

Teorem 4.3. $|f(x)| \leq c|x|^{\lambda}$ olacak şekilde $c > 0$ and $0 < \lambda < 1$ iki pozitif sabitin varlığını kabul edelim. Eğer en az bir $m_0, n_0 > 0$ için

$$\limsup_{m,n\to\infty}\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\left[\alpha(m,s)\,\beta(n,t)q_{s,t}-\Phi_2(m,n,s,t)\right]=\infty \qquad (4.24)$$

$$\liminf_{m,n\to\infty}\frac{1}{\alpha(m+1,m_0)\,\beta(n+1,n_0)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\left[\alpha(m,s)\,\beta(n,t)q_{s,t}-\Phi_2(m,n,s,t)\right]=-\infty \qquad (4.25)$$

oluyorsa $\tau = \sigma = 0$ için (4.1) denkleminin (4.12) koşulunu sağlayan her çözümü salınımlıdır. Burada

$$\Phi_2(m,n,s,t)=(\lambda-1)\,\lambda^{\lambda/(1-\lambda)}\left[\alpha_r(m+r,s)\,\beta_h(n+h,t)\right]^{\lambda/(\lambda-1)}\left[c\alpha(m,s)\,\beta(n,t)\overline{p}_{s,t}\right]^{1/(1-\lambda)},$$

ve $\overline{p}_{s,t} = \max\left\{-p_{s,t}, 0\right\}$ olarak tanımlıdır.

İspat. $y_{m,n}$, $\tau = \sigma = 0$ olmak üzere, (4.1) denkleminin (4.12) koşulunu sağlayan salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Genelliği bozmadan $m \geq m_0 \geq 0$, $n \geq n_0 \geq 0$ için $y_{m,n} > 0$ ve olduğunu kabul edelim. Teorem4.2'nin ispatına benzer

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\left(m+1, m_0\right)\beta\left(n+1, n_0\right)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\alpha\left(m, s\right)\beta(n, t)q_{s,t} \\
\geq\ & \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\frac{\alpha_i\left(m+i+1, m_0\right)}{\alpha\left(m+1, m_0\right)}\frac{\beta_j(n+j+1, n_0)}{\beta\left(n+1, n_0\right)}\Delta_s^{r-i-1}\Delta_t^{h-j-1}y_{m_0,n_0} \\
&-\frac{1}{\alpha\left(m+1, m_0\right)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\alpha_r\left(m+r, s\right)\frac{\beta_j(n+j+1, n_0)}{\beta\left(n+1, n_0\right)}\Delta_t^{h-j-1}y_{s,n_0} \\
&-\frac{1}{\beta\left(n+1, n_0\right)}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\frac{\alpha_i\left(m+i+1, m_0\right)}{\alpha\left(m+1, m_0\right)}\beta_h(n+h, t)\Delta_s^{r-i-1}y_{m_0,t} \qquad (4.26) \\
&+\frac{1}{\alpha\left(m+1, m_0\right)\beta\left(n+1, n_0\right)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\left[\alpha_r\left(m+r, s\right)\beta_h(n+h, t)y_{s,t}\right. \\
&\left.-c\alpha\left(m, s\right)\beta(n, t)\overline{p}_{s,t}y_{s,t}^{\lambda}\right]
\end{aligned}$$

elde ederiz. $a = \alpha_r\left(m+r, s\right)\beta_h(n+h, t)$ ve $b = c\alpha\left(m, s\right)\beta(n, t)\overline{p}_{s,t}$ olsun.
Lemma 2.6'dan

$$\begin{aligned}
& \alpha_r\left(m+r, s\right)\beta_h(n+h, t)y_{s,t} - c\alpha\left(m, s\right)\beta(n, t)\overline{p}_{s,t}y_{s,t}^{\lambda} \\
\geq\ & (\lambda-1)\lambda^{\lambda/(1-\lambda)}\left[\alpha_r\left(m+r, s\right)\beta_h(n+h, t)\right]^{\lambda/(\lambda-1)}\left[c\alpha\left(m, s\right)\beta(n, t)\overline{p}_{s,t}\right]^{1/(1-\lambda)} \\
=\ & \Phi_2\left(m, n, s, t\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. O zaman (4.26)'yı kullanarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\left(m+1, m_0\right)\beta\left(n+1, n_0\right)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\left[\alpha\left(m, s\right)\beta(n, t)q_{s,t} - \Phi_2\left(m, n, s, t\right)\right] \\
\geq\ & \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\frac{\alpha_i\left(m+i+1, m_0\right)}{\alpha\left(m+1, m_0\right)}\frac{\beta_j(n+j+1, n_0)}{\beta\left(n+1, n_0\right)}\Delta_s^{r-i-1}\Delta_t^{h-j-1}y_{m_0,n_0} \\
&-\frac{1}{\alpha\left(m+1, m_0\right)}\sum_{s=m_0}^{m+r-1}\sum_{j=0}^{h-1}\alpha_r\left(m+r, s\right)\frac{\beta_j(n+j+1, n_0)}{\beta\left(n+1, n_0\right)}\Delta_t^{h-j-1}y_{s,n_0} \\
&-\frac{1}{\beta\left(n+1, n_0\right)}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{t=n_0}^{n+h-1}\frac{\alpha_i\left(m+i+1, m_0\right)}{\alpha\left(m+1, m_0\right)}\beta_h(n+h, t)\Delta_s^{r-i-1}y_{m_0,t}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da (4.5) ve (4.9) uygulanmış (4.25) ile çelişir. ■

5. LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ(DELAY) AYRIK(DISCRETE) DALGA DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde lineer olmayan gecikmeli(delay) ayrık(discrete) dalga denklemlerinin salınımlılığı ile bunların indirgenmiş lineer limit denklemlerinin salınımlılığı arasındaki ilişkileri araştıracağız.

Ayrık dalga denkleminin salınımlılık davranışı üzerine 2003 yılında I. Kubiaczyk ve S. H. Saker tarafindan yapılan çalışmada;

$$\forall n \in S \text{ için } y_{0,n} = y_{M+1,n} = 0$$

sınır şartı ile

$$\Delta_n(a_n \Delta_n(y_{m,n})) + p_n \Delta_n y_{m,n} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0$$

lineer olmayan gecikmeli dalga denkleminin çözümlerinin salınımlılık davranışını incelemişlerdir. Burada $M \in \mathbb{N}_{n_0}$, $\Omega = \{1, 2, \ldots, M\}$, $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ve $L y_{m,n}$ ayrık Laplace operatörüdür. $a_n, r_n, p_n, q_n \in \mathbb{N}_{n_0} \to \mathbb{R}^+$, $\sigma \in \mathbb{N}$, f sürekli fonksiyonu konveks ve $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$, $f(u)/u \geq k > 0$.

Lineer limit denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili 2001 yılında Z. Zhang ve B. Ping tarafından adi fark denklemlerinde çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada

$$\Delta^2 x_n + a_n \Delta x_n + b_n f(x_{n-\tau}) = 0,$$

ve

$$\Delta^2 x_n + a_n \Delta x_{n+1} + b_n f(x_{n-\tau}) = 0$$

biçimindeki ikinci mertebe lineer olmayan sönümlü(damped) terimli fark denklemlerinin salınımlılığı ile bunların lineer limit denklemlerinin salınımlılığı arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Burada τ pozitif bir tamsayı, $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ sırasıyla $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in (0, \infty)$ limitlerine sahip reel sayıların birer dizisi, f sürekli bir fonksiyondur.

Bu bölümde

$$\Delta_n^2 y_{m,n} + p_n \Delta_n y_{m,n} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0, \quad \forall (m,n) \in \Omega \times \mathbb{N}_{n_0} \quad (5.1)$$

ve

$$\Delta_n^2 y_{m,n} + p_n \Delta_n y_{m,n+1} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0, \quad \forall (m,n) \in \Omega \times \mathbb{N}_{n_0} \quad (5.2)$$

lineer olmayan gecikmeli kısmi fark denklemlerini

$$y_{0,n} = y_{M+1,n} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (5.3)$$

sınır şartıyla birlikte gözönüne alacağız. Burada $M \in \mathbb{N}_{n_0}$, $\Omega = \{1, 2, \ldots, M\}$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ ve $\{r_n\}$ reel sayı dizileri, f sürekli fonksiyonu konveks ve $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ ve $\Delta_m^2 y_{m,n} = \Delta_m \left(\Delta_m y_{m,n}\right)$ olmak üzere $Ly_{m,n}$,

$$Ly_{m,n} = \Delta_m^2 y_{m-1,n}, \tag{5.4}$$

ile tanımlı ayrık Laplace operatörüdür.

$$y_{m,s} = \mu_{m,s}, \quad n_0 - \sigma \leq s \leq n_0,\ m \in \Omega. \tag{5.5}$$

başlangıç şartını gözönüne alalım.
(5.1)(veya (5.2)),(5.3) ve (5.5) Başlangıç Sınır Değer Problemi(BSDP)'nin bir çözümü ile demek istenilen; $(m, n) \in \Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$ için (5.1)(veya (5.2)'yi), $(m, n) \in \partial\Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$ için (5.3)'ü ve $(m, n) \in \Omega \times \{n_0 - \sigma, \ldots, n_0\}$ için (5.5)'i sağlayan bir $\left\{y_{m,n}\right\}$ dizisidir.Bir $\left\{y_{m,n}\right\}$ çözümü yeterince büyük her m ve n için $y_{m,n} > 0$ (veya $y_{m,n} < 0$) oluyorsa er geç pozitif(veya er geç negatif) olarak adlandırılır. Eğer bir çözüm ne er geç pozitif ne de er geç negatif değilse salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir denir. Bir denklemin tüm çözümleri salınımlı ise o denkleme salınımlıdır denir.
Ana sonuçlarımızı elde etmek için aşağıdaki Lemmaları kullandık.

Lemma 5.1.

$$\begin{aligned} &L\psi_m + \alpha\psi_m = 0, \quad m \in \Omega \\ &\psi_0 = \psi_{M+1} = 0 \end{aligned} \tag{ODP}$$

özdeğer problemini(ODP) gözönüne alalım. Burada L (5.4)'te tanımlandığı gibidir. α_0 ODP'nin en küçük özdeğeri ve ϕ_m buna karşılık gelen özfonksiyon olsun. O zaman $m \in \Omega$ olmak üzere $\alpha_0 > 0$ ve $\phi_m > 0$ olur[Fu S. C. ve Tsai L. Y. 1998] .

Lemma 5.2 (Ayrık Green Formülü). y_m, z_m iki dizi olsun. O zaman

$$\sum_{m=1}^{M} z_m Ly_m - \sum_{m=1}^{M} y_m Lz_m = \left[z_m \Delta_m y_m - y_m \Delta_m z_m\right]_{m=0}^{M}$$

olur. Burada L (5.4)'te tanımlandığı gibidir$\big[$Agarwal R. P., Grace S. R. ve O'Regan D. 2000$\big]$.

Lemma 5.3 (Ayrık Jansen Eşitsizliği). f, pozitif ve $\mathbb{R}^+$ 'de konveks bir fonksiyon olsun. O zaman $m \in \Omega$ olmak üzere $y_m > 0$ ve $\phi_m > 0$ için

$$\sum_{m \in \Omega} f(y_m)\phi_m \geq \sum_{m \in \Omega} \phi_m f\left(\frac{1}{\sum\limits_{m \in \Omega} \phi_m} \sum_{m \in \Omega} y_m \phi_m\right)$$

olur[Li X. P. 1982] .

Bazı kabuller altında aşağıdaki denklemler sırasıyla (5.1) ve (5.2) denklemlerinin indirgenmiş lineer limit denklemleridir:

$$\Delta^2 x_n + p\Delta x_n + q x_{n-\sigma} + \alpha_0 r x_n = 0, \tag{5.6}$$

ve

$$\Delta^2 x_n + p\Delta x_{n+1} + q x_{n-\sigma} + \alpha_0 r x_n = 0 \tag{5.7}$$

Burada $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $\lim_{n\to\infty} q_n = q$, $\lim_{n\to\infty} r_n = r$, ve $\alpha_0, q, r > 0$.

Lemma 5.4. (5.6) ve (5.7) denklemlerinin her çözümün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul bu denklemlerin sırasıyla

$$F(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + p(\lambda - 1) + q\lambda^{-\sigma} + \alpha_0 r = 0 \tag{5.8}$$

ve

$$G(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + p\lambda(\lambda - 1) + q\lambda^{-\sigma} + \alpha_0 r = 0 \tag{5.9}$$

karakteristik denklemlerinin pozitif köke sahip olmamalarıdır[Ladas G., Philos Ch. C. ve Sficas Y. G. 1989] .

Lemma 5.5. $p < 0$ ve (5.6) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\Delta^2 z_n + (p - \varepsilon)\Delta z_n + (q - \varepsilon) z_{n-\sigma} + \alpha_0(r - \varepsilon) z_n = 0 \tag{5.10}$$

denkleminin de her çözümü salınımlı olacak şekilde bir $\varepsilon \in (0, t)$, $t = \min\{q, r\}$, vardır.

İspat. (5.6) denkleminin her çözümünün salınımlı olması demek (5.8) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması demektir. (5.10) denkleminin karakteristik denklemi

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + (p - \varepsilon)(\lambda - 1) + (q - \varepsilon)\lambda^{-\sigma} + \alpha_0(r - \varepsilon) = 0$$

olur. $\lambda \leq 1$ ise $\Phi(\lambda)'$ nın pozitif köke sahip olmadığı açıktır.
$\lambda > 1$ durumu için $F(1) = q + \alpha_0 r > 0$ ve $F(\infty) = \infty$ olur. Böylece
$k = \min\{F(\lambda) : \lambda > 0\} > 0$ elde ederiz. Buradan $\lambda \geq 1$ için

$$F(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + p(\lambda - 1) + q\lambda^{-\sigma} + \alpha_0 r \geq k$$

olduğu açıktır. Benzer şekilde $\lambda \longrightarrow \infty$ iken

$$\Psi(\lambda) = (\lambda-1)^2 + (p-\frac{t}{2})(\lambda-1) + (q-\frac{t}{2})\lambda^{-\sigma} + \alpha_0(r-\frac{t}{2}) \longrightarrow \infty$$

olduğu görülür. Bunun anlamı $\lambda > 1$ için

$$\Psi(\lambda) = (\lambda-1)^2 + (p-\frac{t}{2})(\lambda-1) + (q-\frac{t}{2})\lambda^{-\sigma} + \alpha_0(r-\frac{t}{2}) \geq \frac{k}{2}$$

olacak şekilde $\lambda_0 > 0$ vardır.

$$a = \left\{\lambda_0 - 1 + \lambda_0^{-\sigma} + \alpha_0\right\}, \quad \varepsilon = \min\left\{\tfrac{t}{2}, \tfrac{k}{2a}\right\}$$

olsun. O zaman $\lambda > \lambda_0$ için

$$\begin{aligned} (\lambda-1)^2 + (p-\varepsilon)(\lambda-1) + (q-\varepsilon)\lambda^{-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon) &\geq \\ (\lambda-1)^2 + (p-\frac{t}{2})(\lambda-1) + (q-\frac{t}{2})\lambda^{-\sigma} + \alpha_0(r-\frac{t}{2}) &\geq \frac{k}{2} \end{aligned}$$

ve $1 < \lambda \leq \lambda_0$ için

$$\begin{aligned} (\lambda-1)^2 + (p-\varepsilon)(\lambda-1) + (q-\varepsilon)\lambda^{-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon) &= F(\lambda) - \varepsilon\left(\lambda - 1 + \lambda^{-\sigma} + \alpha_0\right) \\ &\geq F(\lambda) - a\varepsilon \\ &\geq k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2} \end{aligned}$$

buluruz. Buradan $\Phi(\lambda)$ pozitif köke sahip değildir. Bunun anlamı (5.10) denklemi de salınımlıdır. ■

Lemma 5.6. $0 \leq p < 1$ ve (5.6) denkleminin her çözümü salınımlı olsun. O zaman

$$\Delta^2 z_n + (p+\varepsilon)\Delta z_n + (q-\varepsilon)z_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)z_n = 0 \qquad (5.11)$$

denkleminin de her çözümü salınımlı olacak şekilde bir $\varepsilon \in (0, t)$ vardır.

Lemma 5.7. $p \geq 1$ ve (5.7) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\Delta^2 z_n + (p+\varepsilon)\Delta z_{n+1} + (q-\varepsilon)z_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)z_n = 0 \qquad (5.12)$$

denkleminin de her çözümü salınımlı olacak şekilde bir $\varepsilon \in (0, t)$ vardır.

Lemma 5.6 ve Lemma 5.7'nin ispatları Lemma 5.5 ile benzerdir.

Lemma 5.8. $p < 1$ ve f'nin azalmayan olduğunu kabul edelim.

$$x_n \geq \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma}\right) + \alpha_0 r_i x_i \right] \prod_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j} \tag{5.13}$$

fark eşitsizliği bir pozitif x_n çözümüne sahip ise buna karşılık gelen

$$z_n = \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(z_{i-\sigma}\right) + \alpha_0 r_i z_i \right] \prod_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j} \tag{5.14}$$

fark denklemi bir pozitif z_n çözümüne sahiptir ve ergeç $0 < z_n \leq x_n$ sağlanır.

İspat. x_n'nin (5.13)'ün bir pozitif çözümü olduğunu kabul edelim. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\left\{u_{n,k}\right\}$ fonksiyon dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$u_{n,0} = 1,$$

$$u_{n,1} = \begin{cases} \frac{1}{x_n} \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma} u_{i-\sigma,0}\right) + \alpha_0 r_i x_i u_{i,0} \right] \prod_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j}, & n > N, \\ \frac{n}{N} u_{N+1,1} + \left(1 - \frac{n}{N}\right), & N - \sigma \leq n \leq N, \end{cases}$$

$$u_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{x_n} \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma} u_{i-\sigma,k-1}\right) + \alpha_0 r_i x_i u_{i,k-1} \right] \prod_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j}, & n > N, \\ \frac{n}{N} u_{N+1,k} + \left(1 - \frac{n}{N}\right), & N - \sigma \leq n \leq N. \end{cases}$$

(5.13) eşitsizliğini x_n ile bölerek

$$\begin{aligned} u_{n,0} &= 1 \\ &\geq \frac{1}{x_n} \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma}.1\right) + \alpha_0 r_i x_i .1 \right] \prod_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j} \\ &= \frac{1}{x_n} \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma} u_{i-\sigma,0}\right) + \alpha_0 r_i x_i u_{i,0} \right] \prod_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j} \\ &= u_{n,1} \end{aligned}$$

elde ederiz. f azalmayan olduğundan $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$'dir. Böylece

$$\begin{aligned} u_{n,2} &= \frac{1}{x_n} \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma} u_{i-\sigma,1}\right) + \alpha_0 r_i x_i u_{i,1} \right] \prod_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j} \\ &\leq \frac{1}{x_n} \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma} u_{i-\sigma,0}\right) + \alpha_0 r_i x_i u_{i,0} \right] \prod_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j} \\ &= u_{n,1} \end{aligned}$$

ve buradan

$$
\begin{aligned}
u_{n,k} &= \frac{1}{x_n} \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma} u_{i-\sigma,k*1} \right) + \alpha_0 r_i x_i u_{i,k*1} \right] \prod_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j} \\
&\leq \frac{1}{x_n} \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma} u_{i-\sigma,k-2} \right) + \alpha_0 r_i x_i u_{i,k-2} \right] \prod_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j} \\
&= u_{n,k-1}
\end{aligned}
$$

ve sonuç olarak $0 < u_{n,k} \leq u_{n,k-1} \leq \cdots \leq u_{n,0} = 1$ elde ederiz. Böylece $u_n = \lim_{k\to\infty} u_{n,k}$ vardır ve $n \geq N - \sigma$ için $0 < u_n \leq 1$ sağlanır. Lebesgue monoton yakınsaklık teoremi ile

$$
u_n = \begin{cases} \frac{1}{x_n} \sum\limits_{s=N}^{n-1} \sum\limits_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma} u_{i-\sigma} \right) + \alpha_0 r_i x_i u_i \right] \prod\limits_{j=s}^{i} \frac{1}{1-p_j}, & n > N, \\ \frac{n}{N} u_{N+1} + \left(1 - \frac{n}{N} \right), & N - \sigma \leq n \leq N. \end{cases}
$$

elde ederiz. Buradan $\{u_n\}, n \geq N - \sigma$ için $0 < u_n \leq 1$ şartını sağlar. $z_n = x_n u_n$ olsun. O zaman z_n (5.14)'ün bir pozitif çözümü olur. $0 < u_n \leq 1$ eşitsizliğini x_n ile çarparsak $0 < z_n \leq x_n$ elde etmiş oluruz. ■

Lemma 5.9. $p \geq 1$ ve f'nin azalmayan olduğunu kabul edelim.

$$
x_n \geq \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(x_{i-\sigma} \right) + \alpha_0 r_i x_i \right] \prod_{j=s}^{i} \left(1 + p_j \right) \tag{5.15}
$$

fark eşitsizliği bir pozitif x_n çözümüne sahip ise buna karşılık gelen

$$
z_n = \sum_{s=N}^{n-1} \sum_{i=s}^{\infty} \left[q_i f\left(z_{i-\sigma} \right) + \alpha_0 r_i z_i \right] \prod_{j=s}^{i} \left(1 + p_j \right) \tag{5.16}
$$

fark denklemi bir pozitif z_n çözümüne sahiptir ve ergeç $0 < z_n \leq x_n$ sağlanır.

Lemma 5.9'un ispatı Lemma 5.8'in ispatı ile benzerdir.

Teorem 5.1. $p < 0$ ve

$$
\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = 1 \tag{5.17}
$$

olduğunu kabul edelim. (5.6)'nın her çözümünün salınımlı olduğunu da kabul edelim. O zaman $\Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$ bölgesinde (5.1),(5.3) ve (5.5) Başlangıç Sınır Değer Probleminin(BSDP) her çözümü salınımlıdır.

İspat. Aksine $\{y_{m,n}\}$'nin (5.1),(5.3) ve (5.5) BSDP'nin $\Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$ bölgesinde salınımlı

olmayan bir çözümü olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmadan her $n \geq n_1$ için $y_{m,n-\sigma} > 0$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}_{n_0}$ sayısının varlığını kabul edebiliriz.
(5.1) denklemini ϕ_m özfonksiyonu ile çarpıp ve m üzerinden toplayarak $(m, n) \in \Omega \times \mathbb{N}_{n_1}$ için

$$\Delta_n^2 \left(\sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n} \right) + p_n \Delta_n \left(\sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n} \right) + q_n \sum_{m\in\Omega} \phi_m f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n \sum_{m\in\Omega} \phi_m L y_{m,n} = 0 \tag{5.18}$$

elde ederiz. Lemma 5.2 ve (5.3)'ten

$$\sum_{m\in\Omega} \phi_m L y_{m,n} - \sum_{m\in\Omega} y_{m,n} L \phi_m = \left[\phi_m \Delta_m y_{m,n} - y_{m,n} \Delta_m \phi_m\right]_{m=0}^{M} = 0 \tag{5.19}$$

bulunur. Sonuç olarak Lemma 5.1'den (5.19) bağıntısı

$$\sum_{m\in\Omega} \phi_m L y_{m,n} = \sum_{m\in\Omega} y_{m,n} L \phi_m = -\alpha_0 \sum_{m\in\Omega} y_{m,n} \phi_m \tag{5.20}$$

haline indirgenir. Böylece Lemma 5.3, (5.18) ve (5.20)'den

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 \left(\sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n} \right) + p_n \Delta_n \left(\sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n} \right) + q_n \sum_{m\in\Omega} \phi_m f \left(\frac{1}{\sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m} \sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n-\sigma} \right) \\ +\alpha_0 r_n \sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n} \leq 0 \end{aligned} \tag{5.21}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Bu eşitsizliği $\sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m$ ile bölelim:

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 \left(\frac{1}{\sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m} \sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n} \right) + p_n \Delta_n \left(\frac{1}{\sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m} \sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n} \right) \\ +q_n f \left(\frac{1}{\sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m} \sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n-\sigma} \right) + \alpha_0 r_n \frac{1}{\sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m} \sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n} \leq 0 \end{aligned}$$

$x_n = \frac{1}{\sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m} \sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n}$ olsun. Buradan $\{x_n\}$,

$$\Delta^2 x_n + p_n \Delta x_n + q_n f\left(x_{n-\sigma}\right) + \alpha_0 r_n x_n \leq 0 \tag{5.22}$$

gecikmeli fark eşitsizliğinin bir pozitif çözümüdür. Burada Δ adi fark operatörüdür.
$\lim_{n\to\infty} p_n = p < 0$, $\lim_{n\to\infty} q_n = q > 0$, and $\lim_{n\to\infty} r_n = r > 0$ olduğundan $j > n_2$ için $p_j < 0$, $q_j, r_j > 0$ olacak şekilde bir $n_2 > n_1$ vardır.

$$\omega_n = \prod_{j=n_2}^{n-1} \frac{1}{1-p_j} \Delta x_n$$

olsun. O zaman

$$
\begin{aligned}
\Delta\omega_n &= \prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}\Delta x_{n+1}-\prod_{j=n_2}^{n-1}\frac{1}{1-p_j}\Delta x_n \\
&= \prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}(x_{n+2}-x_{n+1})-\prod_{j=n_2}^{n-1}\frac{1}{1-p_j}\Delta x_n \\
&= \prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}(x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n+x_{n+1}-x_n)-\prod_{j=n_2}^{n-1}\frac{1}{1-p_j}\Delta x_n \\
&= \prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}\Delta^2 x_n+\prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}\Delta x_n-\prod_{j=n_2}^{n-1}\frac{1}{1-p_j}\Delta x_n \\
&= \prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}\Delta^2 x_n+\prod_{j=n_2}^{n-1}\frac{1}{1-p_j}\left(\frac{1}{1-p_n}-1\right)\Delta x_n \\
&= \prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}\Delta^2 x_n+\prod_{j=n_2}^{n-1}\frac{1}{1-p_j}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)\Delta x_n
\end{aligned}
$$

ve sonuç olarak (5.22)'den

$$
\begin{aligned}
\Delta\omega_n &= \prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}\Delta^2 x_n+\prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}p_n\Delta x_n \\
&\leq -\prod_{j=n_2}^{n}\frac{q_n}{1-p_j}f(x_{n-\sigma})-\prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}\alpha_0 r_n x_n < 0 \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

elde edilir. ω_n için iki durum vardır:

(i) $n > n_3 > n_2$ için $\omega_n < 0$ veya,

(ii) $n > n_4 > n_3$ için $\omega_n > 0$.

(i) $n > n_3$ için $\Delta x_n < 0$ dır. $j > n_2$ için $p_j < 0$ olduğundan (5.23)'ten

$$
\prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}\Delta^2 x_n=\Delta\omega_n-\prod_{j=n_2}^{n}\frac{1}{1-p_j}p_n\Delta x_n < 0
$$

elde ederiz. Buradan $n > n_3$ için $\Delta^2 x_n < 0$ 'dır. Bunun anlamı $n > n_3$ için

$$
\begin{aligned}
\Delta x_{n+1}-\Delta x_n &< 0 \\
\Delta x_{n+1} &< \Delta x_n
\end{aligned}
$$

ve bu da Δx_n azalan demektir. Δx_n azalan ve $\Delta x_n < 0$ olduğundan $n > n_3$ için $\Delta x_n < -c$ olacak şekilde pozitif bir c sayısı vardır. Bu da $n \to \infty$ iken $x_n \to -\infty$ demektir ve bu imkansızdır.

(ii) $n > n_4$ için $\Delta x_n > 0$ olması x_n'nin artan olması anlamına gelir. $x_n > 0$ ve x_n artan olması $\lim_{n\to\infty} x_n = c = \infty$ olduğunu gösterir.

$c < \infty$ ise

$$
\lim_{n\to\infty}\left[q_n f(x_{n-\sigma})+\alpha_0 r_n x_n\right]=qf(c)+\alpha_0 rc > 0
$$

olur. Bu $n > n_5$ için $q_n f(x_{n-\sigma}) > qf(c)/2$, $\alpha_0 r_n x_n > \alpha_0 rc/2$ ve $p_n > p-1$ olacak şekilde bir $n_5 > n_4$ sayısının anlamına gelir. Buradan

$$\Delta^2 x_n + (p-1)\Delta x_n + \frac{q}{2} f(c) + \alpha_0 \frac{r}{2} c \le 0$$

ve böylece

$$\Delta^2 x_n + (p-1)\Delta x_n \le -\frac{q}{2} f(c) - \alpha_0 \frac{r}{2} c$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafını toplayarak

$$\sum_{i=n_5}^{n-1} \Delta\left(\Delta x_i + (p-1)x_i\right) \le \sum_{i=n_5}^{n-1} \left(-\frac{q}{2} f(c) - \alpha_0 \frac{r}{2} c\right)$$

ve böylece

$$\Delta x_n + (p-1)x_n - \Delta x_{n_5} - (p-1)x_{n_5} \le \left(-\frac{q}{2} f(c) - \alpha_0 \frac{r}{2} c\right)(n-n_5)$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limite geçtiğimizde $\Delta x_n + (p-1)x_n \to -\infty$ buluruz. Bu $\lim_{n\to\infty} x_n = c < \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \Delta x_n = -\infty$ anlamına gelir. Bu da Lemma 2.7'den $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ demektir. Bu bir çelişkidir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \tag{5.24}$$

elde ederiz.

(5.17) ve (5.24)'ten $n > n_6$ için $q_n\left(f(x_{n-\sigma})/x_{n-\sigma}\right) > q-\varepsilon$ ve $r_n > r-\varepsilon$, $p_n > p-\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_6 > n_5$ sayısı vardır. (5.22)'de yerine yazarak $n \ge n_6$ için

$$\Delta^2 x_n + (p-\varepsilon)\Delta x_n + (q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n \le 0$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği $\left(1/(1-p+\varepsilon)\right)^{n-n_6+1}$ ile çarparak

$$\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\left[\Delta^2 x_n + (p-\varepsilon)\Delta x_n + (q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right] \le 0$$

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\Delta^2 x_n + \left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6}\tfrac{p-\varepsilon}{1-p+\varepsilon}\Delta x_n \\ &+ \left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\alpha_0(r-\varepsilon)x_n \le 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\Delta^2 x_n + \left[\left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1} - \left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6}\right]\Delta x_n \\ &+ \left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\alpha_0(r-\varepsilon)x_n \le 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\Delta^2 x_n + \Delta\left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6}\Delta x_n \\ &\le -\left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right]\end{aligned}$$

$$\Delta\left[\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6}\Delta x_n\right]\leq-\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right]$$

elde ederiz. Eşitsizliğin her iki tarafını toplayarak

$$\sum_{i=s}^{n}\Delta\left[\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-n_6}\Delta x_i\right]\leq-\sum_{i=s}^{n}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-n_6+1}\left[(q-\varepsilon)x_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right]$$

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{n+1-n_6}\Delta x_{n+1}-\left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{s-n_6}\Delta x_s\\ \leq&-\sum_{i=s}^{n}\left(\tfrac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-n_6+1}\left[(q-\varepsilon)\,x_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right]\end{aligned}$$

buluruz. $n\to\infty$ ve böylece

$$\Delta x_s\geq\sum_{i=s}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-s+1}\left[(q-\varepsilon)\,x_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right]$$

elde ederiz. Yine eşitsizliğin her iki tarafını toplayalım:

$$\sum_{s=n_6}^{n-1}\Delta x_s\geq\sum_{s=n_6}^{n-1}\sum_{i=s}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-s+1}\left[(q-\varepsilon)\,x_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right]$$

O zaman

$$x_n\geq\sum_{s=n_6}^{n-1}\sum_{i=s}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-s+1}\left[(q-\varepsilon)\,x_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right]$$

sonucuna varırız. Lemma 5.8'den

$$z_n=\sum_{s=n_6}^{n-1}\sum_{i=s}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-s+1}\left[(q-\varepsilon)\,z_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right]$$

denklemi bir z_n pozitif çözümüne sahiptir ve $0<z_n\leq x_n$ sağlanır. z_n'nin (5.10) denkleminin bir pozitif çözümü olduğunu görmek kolaydır. Bunun için z_n'nin (5.10) denklemini sağladığını göstermek yeterlidir.

$$\Delta z_n=\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-n+1}\left[(q-\varepsilon)\,z_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right]$$

$$\begin{aligned}(p-\varepsilon)\,\Delta z_n&=\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-n}\frac{p-\varepsilon}{1-p+\varepsilon}\left[(q-\varepsilon)\,z_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right]\\&=\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-n+1}\left[(q-\varepsilon)\,z_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right]\\&\quad-\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-n}\left[(q-\varepsilon)\,z_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right]\end{aligned}$$

$$\Delta^2 z_n = \sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-n}\left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right]$$
$$-\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p+\varepsilon}\right)^{i-n+1}\left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma}+\alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right]$$

Bu değerleri (5.10) denkleminde yerine yazarak z_n'nin denklemi sağladığı görülür. Teorem 5.1'in kabulü ve Lemma 5.5'ten (5.10) salınımlı olacak şekilde bir $\varepsilon \in (0,t)$ vardır. Bu çelişki Teorem 5.1'i ispatlar. ■

Örnek 5.1.

$$\Delta_n^2 y_{m,n} - \left(3+\frac{1}{3^n}\right)\Delta_n y_{m,n} + \left(5+\frac{1}{3^n}\right)\left[\frac{\left(y_{m,n-2}\right)^3}{\left(y_{m,n-2}\right)^2+1}\right] - \left(2+\sqrt{2}+\frac{1}{3^n}\right) L y_{m,n} = 0, \tag{5.25}$$

$$y_{0,n} = y_{4,n} = 0, \tag{5.26}$$

$$y_{m,n} = (-1)^{m+n}, \qquad -2 \le n \le 1,\ m \in \{1,2,3\} \tag{5.27}$$

BSDP'ni gözönüne alalım.

$$\begin{cases} L\psi_m + \alpha\psi_m = 0, & m \in \{1,2,3\} \\ \psi_0 = \psi_4 = 0. \end{cases} \tag{5.28}$$

Özdeğer probleminin özdeğerleri $\left\{2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}\right\}$dir. Böylece en küçük özdeğer $\alpha_0 = 2-\sqrt{2}$ dir.

O zaman (5.25),(5.26) ve(5.27) BSDP'nin indirgenmiş lineer limit denklemi

$$\Delta^2 x_n - 3\Delta x_n + 5x_{n-2} + \left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)x_n = 0 \tag{5.29}$$

biçimindedir. Lineer limit denkleminin karakteristik denklemi

$$(\lambda-1)^2 - 3(\lambda-1) + 5\lambda^{-2} + 2 = 0 \tag{5.30}$$

veya

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 + 5\lambda^{-2} = 0$$

biçimindedir.

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6, \qquad \gamma(\lambda) = 5\lambda^{-2}$$

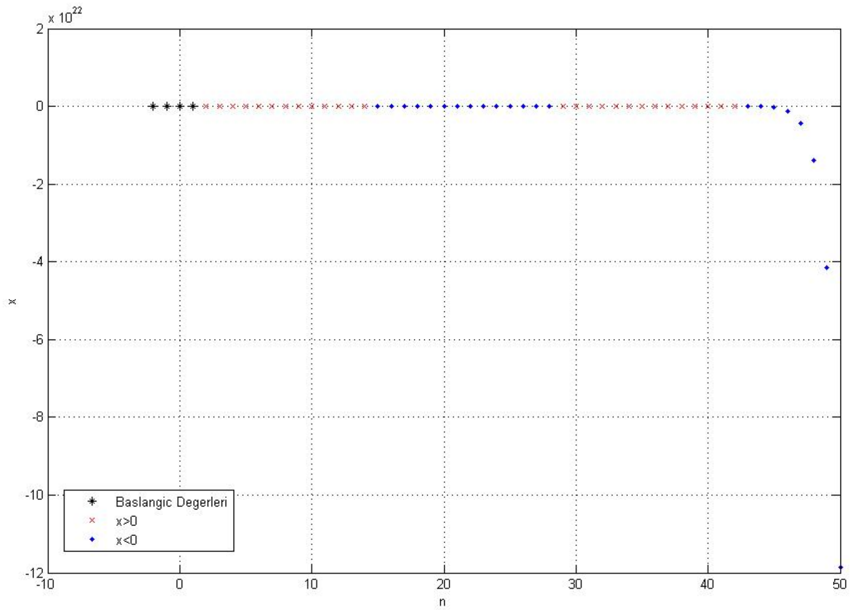
fonksiyonlarını dikkate alalım. $2 < \lambda < 3$ ise $\varphi(\lambda) < 0$,
$\min\{\varphi(\lambda) : 2 < \lambda < 3\} = -1/4$ ve $\gamma(\lambda) = 5\lambda^{-2} > 5/9$'dur. O zaman

$$\varphi(\lambda) + \gamma(\lambda) > 0, \qquad 2 < \lambda < 3.$$

$0 < \lambda \leq 2$ veya $\lambda \geq 3$ ise $\varphi(\lambda) \geq 0$ ve $\gamma(\lambda) > 0$. Böylece $\lambda > 0$ için

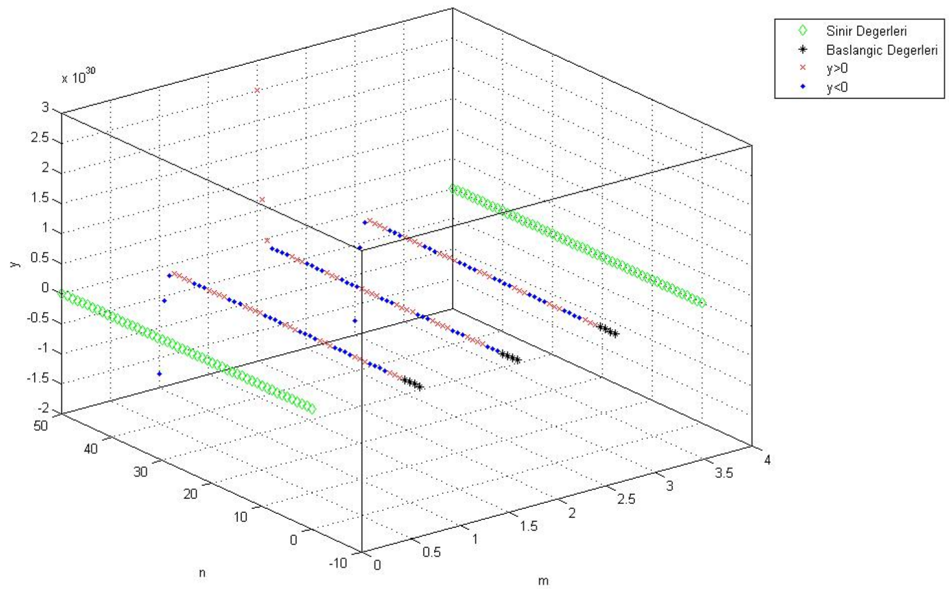
$$(\lambda - 1)^2 - 3(\lambda - 1) + 5\lambda^{-2} + 2 = \varphi(\lambda) + \gamma(\lambda) > 0$$

olur. (5.30) denklemi pozitif köke sahip değildir. Lemma 5.4'e göre (5.29) denkleminin her çözümü Şekil 5.1'de de görüldüğü gibi salınımlıdır.

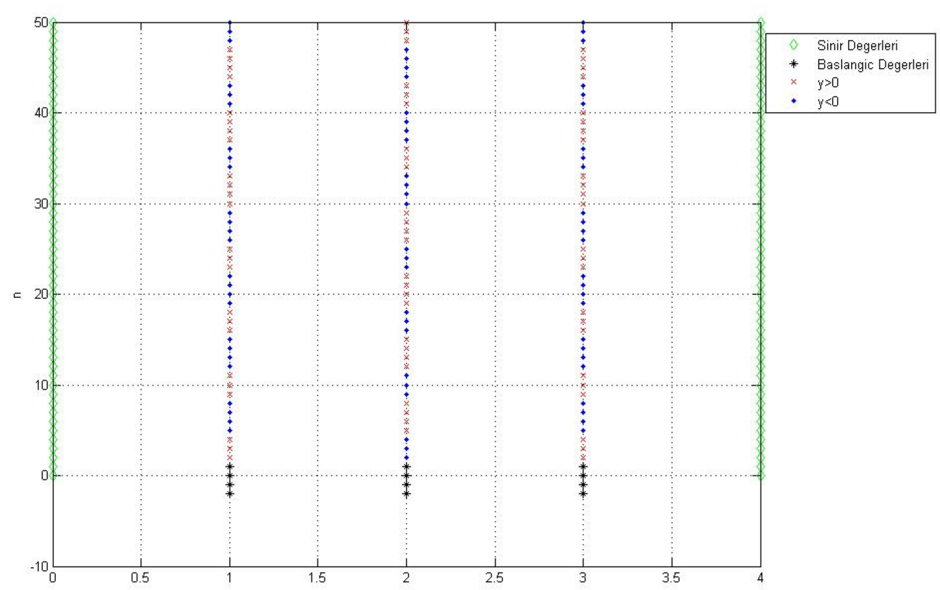


Şekil 5.1. (5.29) sönümlü fark denkleminin çözüm grafiği

Teorem 5.1'e göre (5.25),(5.26) ve(5.27) BSDP'nin de her çözümü Şekil 5.2 ve Şekil 5.3'te görüldüğü gibi salınımlıdır.



Şekil 5.2. BSDP'nin çözüm grafiğinin yandan görünüşü



Şekil 5.3. BSDP'nin çözüm grafiğinin üstten görünüşü

Teorem 5.2. $0 < p < 1$,

$$\lim_{u\to\infty} f(u) = \infty \tag{5.31}$$

ve

$$\lim_{|u|\to 0} \frac{f(u)}{u} = 1 \tag{5.32}$$

olduğunu kabul edelim. Ayrıca (5.6)'nın her çözümünün salınımlı olduğunu da kabul edelim. O zaman $\Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$ bölgesinde (5.1),(5.3) ve (5.5) Başlangıç Sınır Değer Probleminin(BSDP) de her çözümü salınımlıdır.

İspat. Teorem 5.1'in ispatına benzer olarak

$$x_n = \frac{1}{\sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m} \sum_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n}$$

dönüşümü ile

$$\Delta^2 x_n + p_n \Delta x_n + q_n f(x_{n-\sigma}) + \alpha_0 r_n x_n \le 0$$

eşitsizliğini elde edebiliriz. $0 < p < 1$ ise

$$\omega_n = \prod_{j=n_2}^{n-1} \frac{1}{1-p_j} \Delta x_n$$

biçiminde tanımlayabiliriz o zaman

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_n &= \prod_{j=n_2}^{n} \frac{1}{1-p_j} \Delta^2 x_n + \prod_{j=n_2}^{n} \frac{1}{1-p_j} p_n \Delta x_n \\
&\le -\prod_{j=n_2}^{n} \frac{q_n}{1-p_j} f(x_{n-\sigma}) - \prod_{j=n_2}^{n} \frac{1}{1-p_j} \alpha_0 r_n x_n < 0
\end{aligned}$$

olur. ω_n için iki durum söz konusudur:

(i) $n > n_3 > n_2$ için $\omega_n > 0$, veya

(ii) $n > n_4 > n_3$ için $\omega_n < 0$.

(i) $n > n_3$ için $\Delta x_n > 0$'dır. Yeterince büyük her n için $\Delta^2 x_n < 0$ ve $p_n > 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \Delta x_n = l \ge 0$. Eğer $l > 0$ ise $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. (5.31)'den $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. (5.22)'de $n \to \infty$ iken limite geçtiğimizde $\lim_{n\to\infty} \Delta^2 x_n = -\infty$ elde ederiz. Böylece $n > n_5$ için

$$\Delta^2 x_n < -k \tag{5.33}$$

olacak şekilde $k > 0$ ve $n_5 > n_4$ sayıları vardır. (5.33)'ün her iki tarafını iki defa toplayarak

$$\sum_{i=n_5}^{n-1} \Delta^2 x_i < -\sum_{i=n_5}^{n-1} k$$

$$\Delta x_n - \Delta x_{n_5} < -k\,(n-n_5)$$

$$\sum_{s=n_5}^{n-1} \Delta x_s < -\sum_{s=n_5}^{n-1} \left[k\,(n-n_5) + \Delta x_{n_5}\right]$$

$$x_n - x_{n_5} < -\left[k\,(n-n_5) + \Delta x_{n_5}\right](n-n_5)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

elde ederiz ki bu imkansızdır. Buradan $l = 0$ olur. O zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = c > 0$. Teorem 5.1'de (**ii**)'nin ispatından bunun imkansız olduğu görülür.

(**ii**) $n > n_4$ için $\Delta x_n < 0$. O zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = c > 0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır. Yukarıdaki işlemlerden biliyoruz ki $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ imkansızdır. O zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ alırız. (5.32)'den $q_n f\,(x_{n-\sigma}) > (q-\varepsilon)x_{n-\sigma}$ dır. Ayrıca $p_n < p+\varepsilon$, $r_n > r-\varepsilon$'dur. (5.22)'de yerine yazarsak $n \geq n_6$ için

$$\Delta^2 x_n + (p+\varepsilon)\Delta x_n + (q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n \leq 0$$

elde ederiz. Teorem 5.1'in ispatına benzer yolla

$$\left(\frac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\left[\Delta^2 x_n + (p+\varepsilon)\Delta x_n + (q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right] \leq 0$$

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\Delta^2 x_n + \Delta\left(\tfrac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{n-n_6}\Delta x_n\\ &\leq -\left(\tfrac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right]\end{aligned}$$

$$\Delta\left[\left(\frac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{n-n_6}\Delta x_n\right] \leq -\left(\frac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{n-n_6+1}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right]$$

$$\sum_{i=N}^{n-1}\Delta\left[\left(\frac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{i-n_6}\Delta x_i\right] \leq -\sum_{i=N}^{n-1}\left(\frac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{i-n_6+1}\left[(q-\varepsilon)x_{i-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right]$$

$$\Delta x_n \leq -\sum_{i=N}^{n-1}\left(\frac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{i-n+1}\left[(q-\varepsilon)x_{i-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right]$$

$$\sum_{s=n}^{k}\Delta x_s \leq -\sum_{s=n}^{k}\sum_{i=N}^{n-1}\left(\frac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{i-s+1}\left[(q-\varepsilon)x_{i-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right]$$

$$x_{k+1} - x_n \leq -\sum_{s=n}^{k}\sum_{i=N}^{n-1}\left(\frac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{i-s+1}\left[(q-\varepsilon)x_{i-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right]$$

elde ederiz. $k \to \infty$ iken limite geçersek $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ olduğundan

$$x_n \geq \sum_{s=n}^{\infty}\sum_{i=N}^{s-1}\left(\frac{1}{1-p-\varepsilon}\right)^{i-s+1}\left[(q-\varepsilon)\,x_{i-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right].$$

Lemma 5.8'den

$$z_n = \sum_{s=n}^{\infty} \sum_{i=N}^{s-1} \left(\frac{1}{1-p-\varepsilon} \right)^{i-s+1} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i \right]$$

denklemi bir pozitif z_n çözümüne sahiptir ve $0 < z_n \leq x_n$ koşulu sağlanır.

$$\begin{aligned} \Delta z_n &= \sum_{s=n+1}^{\infty} \sum_{i=N}^{s-1} \left(\frac{1}{1-p-\varepsilon} \right)^{i-s+1} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i \right] \\ &\quad - \sum_{s=n}^{\infty} \sum_{i=N}^{s-1} \left(\frac{1}{1-p-\varepsilon} \right)^{i-s+1} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i \right] \\ &= -\sum_{i=N}^{n-1} \left(\frac{1}{1-p-\varepsilon} \right)^{i-n+1} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p+\varepsilon)\, \Delta z_n &= -\sum_{i=N}^{n-1} \left(\frac{1}{1-p-\varepsilon} \right)^{i-n+1} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i \right] \\ &\quad + \sum_{i=N}^{n-1} \left(\frac{1}{1-p-\varepsilon} \right)^{i-n} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 z_n &= -\sum_{i=N}^{n} \left(\frac{1}{1-p-\varepsilon} \right)^{i-n} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i \right] \\ &\quad - \sum_{i=N}^{n-1} \left(\frac{1}{1-p-\varepsilon} \right)^{i-n+1} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i \right] \end{aligned}$$

değerlerini (5.11) denkleminde yerine yazarak z_n'nin (5.11)'in bir pozitif çözümü olduğu görülür. Teorem 5.2'nin kabulünden ve Lemma 5.6'dan (5.11) denklemi salınımlı olacak şekilde bir $\varepsilon \in (0, t)$ sayısı vardır. Bu çelişki ispatı tamamlar. ■

Sonuç 5.1. $p = 0$ ve (5.31),(5.32) şartları sağlanırsa $\Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$ bölgesinde (5.1),(5.3) ve (5.5) BSDP'nin her çözümü salınımlıdır.

İspat. $\{y_{m,n}\}$'nin (5.1),(5.3) ve (5.5) BSDP'nin $\Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$ bölgesinde bir ergeç pozitif çözümü olduğunu kabul edelim. O zaman $\Delta^2 z_n < 0$'dır. Kneser Teoreminden yeterince büyük her n için $\Delta z_n > 0$ olur. Buradan $\lim_{n\to\infty} x_n = c > 0$. f'nin sürekliliğinden yeterince büyük her n için $q_n f(x_{n-\sigma}) > K_1$, $\alpha_0 r_n x_n > K_2$ ve $K_1 + K_2 = K$ olacak şekilde $K_1, K_2, K > 0$ sayıları vardır. (5.22)'den $\Delta^2 x_n + K_1 + K_2 \leq 0$ elde ederiz. Bu da $\Delta^2 x_n \leq -K$ anlamına gelir. İki defa toplayarak $x(n) \longrightarrow -\infty$. Bu çelişki ispatı tamamlar. ■

Teorem 5.3. $p > 1$ ve (5.32)'nin sağlandığını kabul edelim. Ayrıca (5.7)'nin her çözümünün salınımlı olduğunu da kabul edelim. O zaman $\Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$ bölgesinde (5.2),(5.3) ve (5.5) Başlangıç Sınır Değer Probleminin(BSDP) her çözümü salınımlıdır.

İspat. Aksine $\{y_{m,n}\}$'nin (5.2),(5.3) ve (5.5) BSDP'nin $\Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$ bölgesinde salınımlı olmayan bir çözümü olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmadan her $n \geq n_1$ için $y_{m,n-\sigma} > 0$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}_{n_0}$ sayısının varlığını kabul edebiliriz.
Teorem 5.1'in ispatına benzer yolla $x_n = \frac{1}{\sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m} \sum\limits_{m\in\Omega} \phi_m y_{m,n}$ olmak üzere

$$\Delta^2 x_n + p_n \Delta x_{n+1} + q_n f(x_{n-\sigma}) + \alpha_0 r_n x_n \leq 0$$

elde ederiz. $\lim_{n\to\infty} p_n = p > 1$, $\lim_{n\to\infty} q_n = q > 0$, ve $\lim_{n\to\infty} r_n = r > 0$, olduğundan $j > n_2$ için $p_j, q_j, r_j > 0$ olacak şekilde bir $n_2 > n_1$ sayısı vardır.

$$\omega_n = \prod_{j=n_2}^{n-1} \left(1 + p_j\right) \Delta x_n$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \Delta\omega_n &= \prod_{j=n_2}^{n} \left(1 + p_j\right) \Delta x_{n+1} - \prod_{j=n_2}^{n-1} \left(1 + p_j\right) \Delta x_n \\ &= \prod_{j=n_2}^{n-1} \left(1 + p_j\right) \left[(1 + p_n) \Delta x_{n+1} - \Delta x_n\right] \\ &= \prod_{j=n_2}^{n-1} \left(1 + p_j\right) \left[\Delta^2 x_n + \Delta x_n + p_n \Delta x_{n+1} - \Delta x_n\right] \\ &= \prod_{j=n_2}^{n-1} \left(1 + p_j\right) \Delta^2 x_n + \prod_{j=n_2}^{n-1} \left(1 + p_j\right) p_n \Delta x_{n+1} \end{aligned}$$

ve (5.22)'den

$$\Delta\omega_n \leq -\prod_{j=n_2}^{n-1} \left(1 + p_j\right) q_n f(x_{n-\sigma}) - \prod_{j=n_2}^{n-1} \left(1 + p_j\right) \alpha_0 r_n x_n < 0$$

elde ederiz.
ω_n için iki durum söz konusudur:
(i) $n > n_3 > n_2$ için $\omega_n > 0$ veya
(ii) $n > n_4 > n_3$ için $\omega_n < 0$.
(i) $n > n_3$ için $\Delta x_n > 0$ olur. Yeterince büyük her n için $\Delta^2 x_n < 0$ ve $p_n > 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \Delta x_n = l \geq 0$. Eğer $l > 0$ ise $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \Delta^2 x_n = 0$ olur. $\lim_{n\to\infty} p_n \Delta x_{n+1} = pl > l$, $\lim_{n\to\infty} q_n f(x_n) > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \alpha_0 r_n x_n > 0$ olur. Bu da

(5.22) eşitsizliği ile çelişir. Böylece $l = 0$ ise $\lim_{n\to\infty} x_n = c > 0$. Teorem 5.1'deki **(ii)** 'nin ispatından bunun imkansız olduğu görülür.

(ii) $\Delta x_n < 0$ dır. O zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = c > 0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır. Yukarıdaki ispattan $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ durumu imkansızdır. Böylece $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ alabiliriz.

Teorem 5.1'in ispatına benzer yolla $n \geq n_6$ için

$$\Delta^2 x_n + (p+\varepsilon)\,\Delta x_{n+1} + (q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n \leq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Teorem 5.1'in ispatına benzer yöntem ile

$$(1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\left[\Delta^2 x_n + (p+\varepsilon)\,\Delta x_{n+1} + (q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right] \leq 0$$

$$(1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\left[\Delta x_{n+1} - \Delta x_n\right] + \left[(1+p+\varepsilon)^{n-n_6+1} - (1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\right]\Delta x_{n+1}$$
$$+ (1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right] \leq 0$$

$$(1+p+\varepsilon)^{n-n_6+1}\,\Delta x_{n+1} - (1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\,\Delta x_n \leq$$
$$-(1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right]$$

$$\Delta\left[(1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\,\Delta x_n\right] \leq -(1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right]$$

$$\sum_{i=N}^{n-1}\Delta\left[(1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\,\Delta x_n\right] \leq -\sum_{i=N}^{n-1}(1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right]$$

$$\Delta x_n \leq -\sum_{i=N}^{n-1}(1+p+\varepsilon)^{n-n_6}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right]$$

$$\sum_{s=n}^{k}\Delta x_s \leq -\sum_{s=n}^{k}\sum_{i=N}^{n-1}(1+p+\varepsilon)^{n-s}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right]$$

$$x_{k+1} - x_n \leq -\sum_{s=n}^{k}\sum_{i=N}^{n-1}(1+p+\varepsilon)^{n-s}\left[(q-\varepsilon)x_{n-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_n\right]$$

elde ederiz. $k \to \infty$ iken limite geçtiğimizde $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ olduğundan

$$x_n \geq \sum_{s=n}^{\infty}\sum_{i=N}^{s-1}(1+p+\varepsilon)^{i-s}\left[(q-\varepsilon)\,x_{i-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)x_i\right].$$

ve Lemma 5.9'dan

$$z_n = \sum_{s=n}^{\infty}\sum_{i=N}^{s-1}(1+p+\varepsilon)^{i-s}\left[(q-\varepsilon)\,z_{i-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right]$$

denklemi bir pozitif z_n çözümüne sahiptir ve $0 < z_n \leq x_n$ sağlanır.

$$\begin{aligned}
\Delta z_n &= \sum_{s=n+1}^{\infty}\sum_{i=N}^{s-1}(1+p+\varepsilon)^{i-s}\left[(q-\varepsilon)\,z_{i-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right] \\
&\quad - \sum_{s=n}^{\infty}\sum_{i=N}^{s-1}(1+p+\varepsilon)^{i-s}\left[(q-\varepsilon)\,z_{i-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right] \\
&= -\sum_{i=N}^{n-1}(1+p+\varepsilon)^{i-n}\left[(q-\varepsilon)\,z_{i-\sigma} + \alpha_0(r-\varepsilon)z_i\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 z_n &= -\sum_{i=N}^{n} (1+p+\varepsilon)^{i-n-1} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i\right] \\
&\quad - \sum_{i=N}^{n-1} (1+p+\varepsilon)^{i-n} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Delta z_{n+1} = -\sum_{i=N}^{n} (1+p+\varepsilon)^{i-n-1} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i\right]
$$

$$
\begin{aligned}
(p+\varepsilon)\, \Delta z_{n+1} &= -\sum_{i=N}^{n} (1+p+\varepsilon)^{i-n} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i\right] \\
&\quad + \sum_{i=N}^{n} (1+p+\varepsilon)^{i-n-1} \left[(q-\varepsilon)\, z_{i-\sigma} + \alpha_0 (r-\varepsilon) z_i\right]
\end{aligned}
$$

değerlerini (5.12)'de yerine yazarak z_n'nin (5.12)'in bir pozitif çözümü olduğu görülür. Teorem 5.3'ün kabulü ve Lemma 5.7'dan (5.12) denklemi salınımlı olacak şekilde bir $\varepsilon \in (0, t)$ sayısı vardır. Bu çelişki ispatı tamamlar. ■

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada,

$$\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + (-1)^{r+h+1}\, p y_{m-\tau,n-\sigma} = 0$$

yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer kısmi fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı incelenmiştir. Buna bağlı olarak bu tip denklemlerde birden fazla gecikme terimi olması halinde salınımlılık kriterleri araştırılabilir.
Bunun yanısıra bu çalışmada,

$$\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + p_{m,n} f(y_{m-\tau,n-\sigma}) = q_{m,n}$$

yüksek mertebeden lineer olmayan ikinci yanlı kısmi fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı incelenmiştir. Aynı şekilde gecikme teriminin birden fazla fonksiyonunu içeren yeni denklemler tanımlanabilir ve bu çalışma yardımıyla bu denklemlerin çözümleri üzerine incelemeler yapılabilir.
Bunlara ilaveten,

$$\Delta_n^2 y_{m,n} + p_n \Delta_n y_{m,n} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0$$

ve

$$\Delta_n^2 y_{m,n} + p_n \Delta_n y_{m,n+1} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0$$

lineer olmayan gecikmeli ayrık dalga denklemlerinin indirgenmiş lineer limit denklemleri tanımlanıp, bunların salınımlılıkları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Burada kullanılan teknik yardımıyla ayrık laplace denklemi ve ayrık ısı denklemi gibi çok bilinen kısmi fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı üzerine çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker Inc., New York, 2000.

Agarwal, R. P. and Zhou, Y., Oscillation of partial difference equations with continuous variables, Mathematical and Computer Modellig, 31: 17-29, 2000.

Cheng, S. S., Partial Difference Equations, Taylor&Francis Group, London and New York, 2003.

Choi, S. K., Koo, N. J. and Zhang, B. G., The oscillation for partial difference equations with continuous arguments, Computers & Mathematics with Applications, 41: 1495-1503, 2001.

Cui, B. T. and Liu, Y. Q., Oscillation for partial difference equations with continuous variables, Journal of Computational and Applied Mathematics, 154: 373-391, 2003.

Elaydi, S., An Introduction to Difference Equations, Springer-Verlag, New York, 1999.

Fu, S. C. and Tsai, L. Y., Oscillation in nonlinear difference equations, Computers & Mathematics with Applications, 36: 193–201, 1998.

Fu, S. C. and Tsai, L. Y., Oscillation theorems for fourth-order partial difference equations, Computers & Mathematics with Applications, 46: 253-262, 2003.

Gilbert, R. P., Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations, Academic Press, New York, 1969.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G., Inequalites, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

Kubiaczyk, I. and Saker, S. H., Oscillation theorems for discrete nonlinear delay wave equations, Z. Angew. Math. Mech. 83: 812–819, 2003.

Ladas, G., Philos, Ch.C. and Sficas, Y. G., Necessary and sufficient conditions for the oscillation of difference equations, Libertas Math. 9, 1989.

Li, C. F. and Zhou, Y., Existence of bounded and unbounded non-oscillatory solutions for partial difference equations, Mathematical and Computer Modelling 45: 825-833, 2007.

Li, X. P., Partial difference equations used in the study of molecular orbits, Acta Chimica Sinica 40: 688–694, 1982 (in Chinese).

Liu, S. T. and Liu, Y. Q., Oscillation theorems for second-order nonlinear partial difference equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 132: 479-482, 2001.

Liu, S. T., Liu, Y. Q. and Deng, Q. F., Oscillation for nonlinear delay partial difference equations with positive and negative coefficients, Computers & Mathematics with Applications, 43: 1219-1230, 2002.

Liu, S. T. and Zhang, B. G., Oscillatory behavior of delay partial difference equations with positive and negative coefficients, Computers & Mathematics with Applications, 43: 951-964, 2002.

Mickens, R. E., Difference Equations, Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.

Philos, CH. G. and Sficas, Y. G., Positive solutions of difference equations, Proceedings of the American Mathematical Society 108 (1): 107-115, 1990.

Salem, Sh. and Raslan, K. R., Oscillation of some second order damped difference equations,International Journal of Nonlinear Science 5: 246–254, 2008.

Shi, B., Wang, Z. C. and Yu, J. S., Oscillation of nonlinear partial difference equations with delays, Computers & Mathematics with Applications, 32: 29-39, 1996.

Sun, Y. G. and S. H. Saker, Forced oscillation of higher nonlinear difference equations, Applied Mathematics and Computation 187 (2007) 868-872.

Tian, C. and Xie, S., Further oscillation criteria for delay partial difference equations, Computers & Mathematics with Applications, 47: 1905-1914, 2004.

Wong, P. J. Y. and Agarwal,R.P., Oscillation criteria for nonlinear partial difference equations with delays, Computers & Mathematics with Applications, 32: 57-86, 1996.

Xie, S. L. and Tian,C. J., Frequent oscillatory criteria for partial difference equations with several delays, Computers & Mathematics with Applications, 48: 335-345, 2004.

Xie, S., Tian, C. and Xie, Z., Oscillation of a class of partial difference equtaions with unbounded delay, Computers & Mathematics with Applications, 42: 529-541, 2001.

Zhang, B. G., Oscillation theorems for certain nonlinear delay partial difference equations, Nonlinear Analysis,41: 447-454, 2000.

Zhang, B. G., Oscillation of delay partial difference equations, Progress in Natural Science 11: 321–330, 2001.

Zhang, B. G. and Agarwal, R. P., The oscillation and stability of delay partial difference equations, Computers & Mathematics with Applications, 45: 1253-1295, 2003.

Zhang, B. G. and Chen, G. D., Oscillation of certain second order nonlinear difference equations, J. Math. Anal. Appl. 199, 1996.

Zhang, B. G. and Liu, B. M., Oscillation criteria of certain nonlinear partial difference equations , Computers & Mathematics with Applications, 38: 107-112, 1999.

Zhang, B. G. and Liu, B. M., Necessary and sufficient conditions for oscillations of partial difference equations with continuous variables, Computers & Mathematics with Applications, 38: 163-167, 1999.

Zhang, B. G. and Liu, S. T., Necessary and sufficient conditions for oscillations of delay partial difference equations, Discussiones Mathematicae differential Inclussions 15: 213-219, 1995.

Zhang, B. G. and Liu, S. T., Necessary and sufficient conditions for oscillations of partial difference equations, Nonlinear Studies 3 (2): 187-192, 1996.

Zhang, B. G. and Liu, S. T., Necessary and sufficient conditions for oscillations of partial difference equations, DCDIS 3: 89-96, 1997.

Zhang, B. G. and Liu, S. T., On the oscillation of two partial difference equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 206: 480-492, 1997.

Zhang, B. G. and Liu, S. T., Necessary and sufficient conditions for oscillations of linear delay partial difference equations, Discrete Dynamics in Nature and Society 1: 265-268, 1998.

Zhang, B. G. and Liu, S. T., Oscillation of partial difference equations with variable coefficients, Computers & Mathematics with Applications, 36: 10-12, 1998.

Zhang, B. G. and Tian, C. J., Oscillation criteria of a class of partial difference equations with delays, Computers & Mathematics with Applications, 48: 291-303, 2004.

Zhang, B. G.and Wang, Y. H., Oscillation theorems for certain delay partial difference equations, Applied Mathematics Letters, 19: 639-646, 2006.

Zhang, B. G. and Xing, Q., Oscillation of certain partial difference equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 329: 567-580, 2007.

Zhang, B. G. and Yu, J. S., Linearized oscillation theorems for certain nonlinear delay

partial difference equations, Computers & Mathematics with Applications,

35: 111-116, 1998.
Zhang, B. G. and Zhou, Y., Qualitative Analysis of Delay Partial Difference Equations, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2007.
Zhang, B. G., Zhou, Y. and Huang, Y. Q., Existence of positive solutions for certain nonlinear partial difference equations, Mathemetical and Computer Modelling 38: 331-337, 2003.
Zhang, Z. G. and Ping, B., Linear oscillation of second-order nonlinear difference equations with damped term, Computers Math. Applic. 41: 659–667, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Figen ÖZPINAR

Doğum Yeri : Afyonkarahisar

Doğum Tarihi : 24.08.1971

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Afyon Lisesi, 1988

Lisans : Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 1992

Yüksek Lisans: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 1996

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

1993-1997 Öğretmen, MEB

1997- Öğretim Görevlisi, Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Bolvadin Meslek Yüksekokulu

EKLER

1. Bu çalışmanın üçüncü bölümünde ele alınan

$$\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + (-1)^{r+h+1} \, p y_{m-\tau,n-\sigma} = 0$$

yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer kısmi fark denkleminin salınımlılığını araştırdığımız "Necessary and sufficient conditions for oscillation of certain higher order partial difference equations" adlı çalışma "*International Journal of Difference Equations (IJDE)*" adlı dergiye yayınlanması için gönderilmiş ve yayına kabul edilmiştir.

2. Dördüncü bölümde ele alınan

$$\Delta_m^r \Delta_n^h y_{m,n} + p_{m,n} f(y_{m-\tau,n-\sigma}) = q_{m,n}$$

yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi fark denkleminin zorlamalı salınımlılığını araştırdığımız "Forced oscillation of a class of high order nonlinear partial difference equations" adlı çalışma yayın için gönderilmiştir.

3. Beşinci bölümde

$$\Delta_n^2 y_{m,n} + p_n \Delta_n y_{m,n} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0, \quad \forall (m,n) \in \Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$$

ve

$$\Delta_n^2 y_{m,n} + p_n \Delta_n y_{m,n+1} + q_n f\left(y_{m,n-\sigma}\right) - r_n L y_{m,n} = 0, \quad \forall (m,n) \in \Omega \times \mathbb{N}_{n_0}$$

lineer olmayan gecikmeli ayrık dalga denklemlerinin salınımlılığı ile bunların indirgenmiş lineer limit denklemlerinin salınımlılığı arasındaki ilişkileri araştırdığımız "Linear oscillation of discrete nonlinear delay wave equations" adlı çalışma yayın için gönderilmiştir.