ZAMAN SKALASINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Başak KARPUZ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2008

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

BAŞAK KARPUZ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. ÖZKAN ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2008

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Özkan Öcalan'ın danışmanlığında **Başak Karpuz** tarafından hazırlanan "**Zaman Skalarında Birinci Mertebeden Dinamik Denklemlerin Salınımlılığı**" başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 03.07.2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Birol TOPÇU	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
......./....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Zehra BOZKURT
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN DİNAMİK DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

Yüksek Lisans Tezi

Başak KARPUZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: **Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN**

Fark denklemler ve diferensiyel denklemler matematik tarihinin başlangıcından bugüne kadar büyük bir ilgi odağı olmuştur. Ayrıca, bu çalışma sahası geniş bir uygulama alanına sahiptir. Ancak fark denklemlerinin ve diferensiyel denklemlerin her ikisinin de yetersiz olduğu bir çok yer vardır ve eskiden cevapsız kalan bu soruların büyük bir bölümünü, henüz çok yeni olan dinamik denklemler kavramı açıklamıştır. Tezin ilk bölümünde, fark denklemler ve diferensiyel denlemler üzerinde elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, dinamik denklemler için gerekli olan zaman skalası kavramından bahsedilecektir. Üçüncü bölümde pozitif katsayılı dinamik denklemlerin salınımlılık davranışları ve dördüncü bölümde pozitif ve negatif katsayılı neutral dinamik denklemlerin salınımlılık davranışları incelenmiştir. Tezin son bölümünde ise üçüncü ve dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar literatürdeki var olan sonuçlarla kıyaslanmıştır.

2008, 42 sayfa
Anahtar Kelimeler: Neutral dinamik denklemler, salınımlılık, salınımsızlık, zaman skalası.

ABSTRACT

OSCILLATION OF FIRST-ORDER DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALES

Master of Science Thesis

Başak KARPUZ

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: **Assist. Prof. Dr. Özkan ÖCALAN**

Difference equations and differential equations have been a focus of interest, because there is a very large application field of this area. However, there are so many questions that neither difference equations nor differential equations fail to give reply, and most of such equations found their answers by the means of dynamic equations, which is a very new concept. In the first section of the thesis, we tread some results in the literature that are given for difference equations and differential equations; in the second section of the thesis, we introduce the concept of time scales of which dynamic equations are defined on; in the third section, we study oscillatory behaviour of dynamic equations including a positive coefficient, and in the fourth section, we study the oscillatory behaviour of neutral dynamic equations including positive and negative coefficients. And in the last section of the thesis, we compare our newly obtained results with the existing results in the literature.

2008, 42 pages
Keywords and Phrases: Neutral dynamic equations, oscillation, non-oscillation, time scales.

TEŞEKKÜR

Tüm eğitim ve öğretim hayatım boyunca bana destek olan ve matematik dünyasına ilk adımlarımı atmama sebep olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Bana, bu ilginç ve yeni konuyu tez çalışması olarak veren ve benim için çok değerli olan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN'a tüm yardımlarından, öğretilerinden ve bilimsel çalşmalara başlamamda öncü olmasından dolayı ne kadar teşekkür etsem azdır.

Ayrıca, Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Elemanları'nın her birine bana lisans ve yüksek lisans öğrenimim süresince gösterdikleri ilgiden ve verdikleri bilgilerden ötürü teşekkürlerimi bildirir ve değerli hocam Prof. Dr. Ağacık ZAFER'e tezimle bizzat ilgilendiği için teşekkürlerimi ve saygılarımı sunmayı borç bilirim.

Başak KARPUZ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{T}$	Zaman Skalası
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
Σ	Toplam Sembolü
Π	Çarpım Sembolü
$C_{rd}(A,B)$	A kümesinden B kümesine rd-sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathcal{R}(A,B)$	A kümesinden B kümesine regresif fonksiyonların kümesi
$:=$	Tanımlıdır
$=$	Eşittir
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\equiv$	Özdeştir
$\not\equiv$	Özdeş değildir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\circ$	Bileşke
e	Euler sayısı $(2,718\ldots)$
Log	Logaritma fonksiyonu

1 GİRİŞ

Fark denklemler teorisi, matematiğin sistematik olarak gelişmesiyle birlikte ortaya çıkan ilk teorilerden birisidir. Bu teori, zamana bağlı ayrık olayların matematiksel ifadesinde kullanılmıştır. Fark denklemler bir çok doğa olayını ifade etmekte kullanılır. Bununla birlikte, fark denlemler, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin incelenmesinde de kullanılır. Yani, verilen bir diferansiyel denklemin, ayrık benzeri olan fark denklem ifade edilir ve bu fark denklem, diferansiyel denklemin çözümünün yapısını araştırmak için incelenir. Bu nedenledir ki, fark denklem teorisi ve diferansiyel denklem teorisi birbirine çok yakın ve paralel olarak gelişmektedir. Fark denklem teorisi ile diferansiyel denklem teorisi arasında çok fazla benzerlikler olduğu kadar çok önemli farklılıkları da vardır. Örneğin, birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin salınmlı olan çözümleri yok iken, bu denkleme ilişkin fark denklemi salınımlı çözümlere sahip olabilmektedir.

Fark denklemler teorisi yaklaşık olarak sekiz asırlık çalışmalar sonunda sistematik bir hale gelmişken, diferansiyel denklemler teorisi dört asırdır çalışılmaktadır. Diferansiyel denklemler teorisinin daha kısa süredir çalışılmasının sebebi, doğa olaylarının kesiksiz olduğunun var sayılmasıdır. Bu yüzden, diferansiyel denklemler teorisi; fizik, kimya, biyoloji, astronomi, ekonomi ve diger bilimlere ait matematiksel ifade yöntemi olarak kullanılır. Ancak zaman sürekli olarak ilerlese de, olaylarının kendi içinde süreklilik ve süreksizlik hallerinin aynı anda olabileceği bir gerçektir. Dolayısıyla, her matematiksel olayı diferansiyel denklemlerle ve fark denlemlerle ifade etmek mümkün değildir.

Fark denklemler Fibonacci tarafından çalışma konusu olarak dikkate alınmıştır ve onun çok başarılı çalışmaları sonucunda bir çok matematikçi daha sonralarda bu ilginç alana yönelmiştir. Örneğin, Laplace sabit katsayılı homojen doğrusal fark denklemleri, Guichard ise aynı denklemin homojen olmayan özel hallerini ve Gelgrum bu denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışını inceleme konusu olarak seçmiştir.

Diferansiyel denklemler teorisi ise Leibnitz ve Newton tarafından başlatılıp, Claurit, Frobenious, Euler ve diğer bir çok matematikçi tarafından geliştirilmiştir. Bu teoriye adını veren Leibnitztir.

Yukarıda değinildiği gibi, doğa olayları ne tam olarak sürekli ne de tam olarak kesiklidir. Dolayısıyla, olaylara ilişkin denklemlerin modellemelerinde yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmaktadır. İşte bu teorinin adı Zaman Skalasıdır.

Zaman skalası teorisi ile birlikte, hem süreklilik hem de süreksizlik içeren olayların denklemlerinin matematiksel modellemesi formülize edilebilmektedir. Zaman skalası üzerinde tanımlı bu denklemlere dinamik denklemler denir. Dinamik denklemler zaman skalasının özel durumlarında, fark denkem yada diferansiyel denklem haline dönüşür ve Kuantum fiziğinde ortaya çıkan kuantum fark denklemine de dönüşür. Böylece fark denklem ve diferansiyel denklem için ayrı ayrı sonuçlar vermek yerine, keyfi zaman skalaları için geçerli birleştirilmiş sonuçlar verilebilir.

Ladas 1990 yılındaki çalışmasında, p pozitif bir reel sayı ve α pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta x(n) + px(n-\alpha) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

denkleminin her çözümünün salınımlılığını incelemiştir ve gerek ve yeter şart vermiştir. Erbe ve Zhang 1989 yılındaki çalışmalarında, $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ negatif değerli olmayan bir dizi ve α pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta x(n) + p(n)\, x(n-\alpha) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.0.1}$$

denkleminin her çözümünün salınımlılığı için yeter şart vermiştir. Ladas, Philos ve Sficas 1989 yılında, Erbe ve Zhang'ın elde ettiği sonuçları daha da geliştirmiştir. Bu çalışmada, (1.0.1) denkleminin her çözümünün salınımlılığı için

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{\eta=n-\alpha}^{n-1} p(\eta) > \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \tag{1.0.2}$$

koşulununun yeterli olduğu verilmiştir.

(1.0.1) denklemine karşılık gelen diferansiyel denklem

$$x'(t) + p(t)\, x(t-\alpha) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.0.3}$$

olup, bu denklem için Ladas 1979 ve Koplatadze ile Chanturia 1982 yıllarında

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\alpha}^{t} p(\eta)\, d\eta > \frac{1}{\mathrm{e}} \tag{1.0.4}$$

şartının salınımlılık için yeterli olduğunu vermiştir. Burada p negatif değerli olmayan sürekli bir fonksiyon ve α pozitif bir reel sayıdır. Açıkça

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha+1} = \mathrm{e} \tag{1.0.5}$$

olduğu görülebilir. (1.0.5) ifadesinden, (1.0.1) denklemi ile buna karşılık gelen (1.0.3) diferansiyel denkeminin yakın ilişkisi görülmektedir.

(1.0.1) ve (1.0.3) denklemlerini kapsayan dinamik denklem ise, p zaman skalasında negatif değerli olmayan bir fonksiyon ve α fonksiyonu azalmayan sınırsız ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için $\alpha(t) < t$ sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$x^{\Delta}(t) + p(t)\, x(\alpha(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{T} \tag{1.0.6}$$

şeklindedir. Zhang 2002 ve Bohner 2003 yıllarında (1.0.6) denkleminin her çözümünün salınımlılığı için

$$\liminf_{t\to\infty} \inf_{\substack{-\lambda p \in \mathcal{R}^+([\alpha(t),t))\\ \lambda>0}} \left\{ \frac{1}{\lambda\, \mathrm{e}_{-\lambda p}(t, \alpha(t))} \right\} > 1 \tag{1.0.7}$$

koşulunu elde etmişlerdir. Bölüm 4 te, (1.0.7) ifadesinin nasıl (1.0.2) ve (1.0.4) ifadesine dönüştüğü gösterilecektir.

Ladas ile Qian 1990, Chen ile Zhang 1994 ve diğer bir çok matematikçi, $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ ve $\{q(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ negatif değerli olmayan bir dizi ve α ile β pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\Delta x(n) + p(n)\, x(n-\alpha) - q(n)\, x(n-\beta) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.0.8}$$

fark denkleminin her çözümünün salınımlılığı için yeter koşullar vermişlerdir. (1.0.8) denklemine karşılık gelen diferansiyel denklem, p ile q negatif değerli olmayan sürekli fonksiyonlar ve α ile β pozitif bir reel sayılar olmak üzere

$$x'(t) + p(t)\, x(t-\alpha) - q(t)\, x(t-\beta) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.0.9}$$

şeklindedir. (1.0.9) denkleminin her çözümünün salınımlılığı içinde bir çok matematikçi yeter şartlar vermiştir. Ancak, Guan ile Shen 2007 yılındaki çalışmasında, p ile q negatif değerli olmayan sürekli fonksiyonlar ve $\alpha, \beta \in (1, \infty)$ reel sayılar olmak üzere

$$x'(t) + p(t)\, x(t/\alpha) - q(t)\, x(t/\beta) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.0.10}$$

denklemini (hatta daha da genel halini) ifade etmiş ve bu denklemin her çözümünün salınımlılığı için yeter şartlar vermişlerdir.

Zhang'ın ve Bohner'in pozitif katsayılı (1.0.1) ve (1.0.3) denklemleri için yaptıkları (1.0.6) genelleştirmesi gözönüne alınarak, "Acaba, (1.0.8), (1.0.9) ve (1.0.10) denklemleri için de uygun bir genelleştirme verilebilir mi?" sorusuna olumlu yanıt vereceğiz. Bu tezde, (1.0.8), (1.0.9) ve (1.0.10) denklemlerini, p ile q zaman skalasında negatif değerli olmayan fonksiyonlar ve α ile β fonksiyonları artan, sınırsız ve her $t \in \mathbb{R}^{+}$ için $\alpha(t), \beta(t) < t$ olmak üzere

$$x^{\Delta}(t) + p(t)\, x(\alpha(t)) - q(t)\, x(\beta(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{T}$$

denkleminin (ve hatta daha genel halinin) her çözümünün salınımlılığı için yeterli şartlar elde edilecektir ve yeni sonuçların nasıl literatürdeki sonuçlardan daha iyi sonuçlara dönüştüğü gösterilecektir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Zaman Skalası

Tanım 2.1 (Zaman skalası)**.** Reel sayıların boştan farklı ve kapalı olan alt kümelerine *zaman skalası*(time scale) denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir (Bohner, Peterson 2001).

$a, b \in \mathbb{T}$ için, $[a,b]_{\mathbb{T}} := [a,b] \cap \mathbb{T}$ ile tanımlansın. Daha genel olarak, bir aralığın alt indisinde $\mathbb{T}$ simgesi varsa, belirtilen aralığın zaman skalası ile arakesitini anlayacağız.

Tanım 2.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere

$$\sigma(t) := \inf (t, \infty)_{\mathbb{T}} \quad \text{ve} \quad \rho(t) := \sup(-\infty, t)_{\mathbb{T}}$$

ile tanımlanan operatörlere sırasıyla *ileri atlama*(forward jump) ve *geri atlama*(backward jump) operatörleri denir. Ayrıca uygunluk için

$$\inf \varnothing := \sup \mathbb{T} \quad \text{ve} \quad \sup \varnothing := \inf \mathbb{T}$$

ile tanımlanmıştır. İleri atlama operatöründen elde edilen *parçacıklılık*(graininess) fonksiyonu

$$\mu(t) := \sigma(t) - t \geq 0$$

ve

$$\mathbb{T}^{\kappa} := \begin{cases} (-\infty, \sup \mathbb{T})_{\mathbb{T}}, & \sup \mathbb{T} < \infty \text{ ve } \rho(\sup \mathbb{T}) < \sup \mathbb{T} \\ \mathbb{T}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanmıştır (Bohner, Peterson 2001).

Tanım 2.3. Tanım 2.2 ye göre zaman skalasının elemanları aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

(i) $\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sağ yoğun*(right dense) denir.

(ii) $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sağ saçınımlı*(right scattered) denir.

(iii) $\rho(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sol yoğun*(left dense) denir.

(iv) $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sol saçınımlı*(left scattered) denir.

(Bohner, Peterson 2001).

2.2 Delta Türev

Tanım 2.4. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için

$$\lim_{\substack{s\to t \\ s\neq\sigma(t)}} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

limiti mevcut ise bu limite f fonksiyonunun *Delta türevi*(delta derivative) veya *Hilger türevi* denir ve f^Δ ile gösterilir (Bohner, Peterson 2001).

Tezde aksi belirtilmedikçe, türev terimi ile delta türev kastedilecektir.

Teorem 2.5. *Kabul edelim ki; $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) f fonksiyonu t noktasında türeve sahipse; f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

(ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağ saçınımlı ise

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

(iii) t sağ yoğun olmak üzere; f fonksiyonunun t noktasında türeve sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin mevcut olmasıdır. Bu durumda ise

$$f^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

(iv) f fonksiyonu t noktasında türeve sahipse;

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t)$$

dir (Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.6. *Kabul edelim ki; $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında türeve sahip olsun. O zaman, aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *toplamının* t *noktasındaki türevi,*

$$(f+g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

dir.

(ii) $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *çarpımının* t *noktasındaki türevi,*

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)\, g(t) + f(\sigma(t))\, g^\Delta(t)$$

dir. Burada, $fg = gf$ *olduğuna da dikkat edilmelidir.*

(iii) $f(t)\, f(\sigma(t)) \neq 0$ *olmak üzere,* $1/f$ *fonksiyonu* t *noktasında türeve sahiptir ve*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)\, f(\sigma(t))}$$

dir (Bohner, Peterson 2001).

2.3 Delta İntegral

Tanım 2.7. Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sağ yoğun noktalarındaki sağdan limiti var (sonlu) ve sol yoğun noktalarındaki soldan limiti varsa f fonksiyonuna *düzenli*(reguler) denir (Bohner, Peterson 2001).

Tanım 2.8. Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sağ yoğun noktalarında sürekli ve sol yoğun noktalarındaki soldan limiti varsa f fonksiyonuna *rd-sürekli*(right dense continuous) denir.

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ şeklindeki rd-sürekli fonksiyonların kümesi $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir. $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $f^\Delta \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ifadelerini sağlayan fonksiyonların oluşturdukları küme ise $C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Bohner, Peterson 2001).

Tanım 2.9. Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, bir $R \subset \mathbb{T}^\kappa$ bölgesi için, her $t \in D$ noktalarında türevlenebilir ve $\mathbb{T}^\kappa \backslash D$ bölgesi sağ saçınımlı nokta içermeyen sayılabilir bir küme ise f fonksiyonuna D bölgesinde *ön-türevlenebilir*(predifferentiable) denir (Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.10 (Ortalama değer teoremi). *Kabul edelim ki, f, g fonksiyonları $\mathbb{T}$ üzerinde reel değerli ve aynı D bölgesinde ön-türevlenebilir olsun. Bu durumda, her $t \in D$ için*

$$\left|f^{\Delta}(t)\right| \leq g^{\Delta}(t)$$

ise, her $s, t\mathbb{T}$ ve $t \geq s$ için

$$|f(t) - f(s)| \leq g(t) - g(s)$$

dir (Bohner, Peterson 2001).

Sonuç 2.11. *$f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları aynı D bölgesinde ön-türevlenebilir ve $U \subset \mathbb{T}$, başlangıç ve bitiş noktaları sırasıyla $s, t \in \mathbb{T}$ olan kompakt bir aralık olsun. Bu durumda,*

$$|f(t) - f(s)| \leq \sup_{\eta \in U^{\kappa} \cap D} \left|f^{\Delta}(\eta)\right| |t - s|$$

sağlanır (Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.12 (Ön-antitürevlerin varlığı). *Kabul edelim ki, f düzenli olsun. Bu durumda, uygun bir D bölgesi ve bu bölgede ön-türevlenebilir F fonksiyonu vardır, öyle ki; her $t \in D$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ sağlanır (Bohner, Peterson 2001).*

Tanım 2.13. Kabul edelim ki, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli olsun. Bu durumda, Teorem 2.12 deki gibi olan her F fonksiyonuna f fonksiyonunun *ön-antitürevi*(pre-antiderivative) denir. Bu durumda, c keyfi bir sabit olmak üzere,

$$\int f(\eta) \Delta\eta = F(t) + c$$

ifadesine düzenli f fonksiyonunun *belirsiz integrali*(indefinite integral) denir. *Cauchy integrali*(Cauchy integral) ise

$$\int_{s}^{t} f(\eta) \Delta\eta = F(t) - F(s) \quad \text{her } s, t \in \mathbb{T}$$

ile tanımlıdır (Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.14 (Antitürevlerin varlığı)**.** *Her rd-sürekli fonksiyonun bir antitürevi vardır. Özel olarak, bir $s \in \mathbb{T}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için*

$$F(t) := \int_s^t f(\eta)\,\Delta\eta$$

ile tanımlı fonksiyon, f fonksiyonunun antitürevidir (Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.15. *$f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olmak üzere,*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\eta)\,\Delta\eta = \mu(t)\,f(t)$$

sağlanır (Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.16. *$f^{\Delta} \geq 0$ ise f fonksiyonu azalmayandır (Bohner, Peterson 2001).*

Teorem 2.17. *$r, s, t \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T})$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

(i) $\int_s^t (f+g)(\eta)\,\Delta\eta = \int_s^t f(\eta)\,\Delta\eta + \int_s^t g(\eta)\,\Delta\eta$

(ii) $\int_s^t (\lambda f)(\eta)\,\Delta\eta = \lambda \int_s^t f(\eta)\,\Delta\eta$

(iii) $\int_s^t f(\eta)\,\Delta\eta = -\int_t^s f(\eta)\,\Delta\eta$

(iv) $\int_s^t f(\eta)\,\Delta\eta = \int_s^r f(\eta)\,\Delta\eta + \int_r^t f(\eta)\,\Delta\eta$

(v) $\int_s^t f(\sigma(\eta))\,g^{\Delta}(\eta)\,\Delta\eta = (fg)(t) - (fg)(s) - \int_s^t f^{\Delta}(\eta)\,g(\eta)\,\Delta\eta$

(Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.18. *$s, t \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ olmak üzere, aşağıdakiler vardır:*

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *ise*

$$\int_s^t f(\eta)\,\Delta\eta = \int_s^t f(\eta)\,d\eta$$

dır.

(ii) $\mathbb{T}$ *sadece izole(hem sağ hem de sol saçınımlı) noktalardan oluşuyorsa,*

$$\int_{s}^{t} f(\eta)\,\Delta\eta = \sum_{\eta\in[t,s)} f(\eta)\,\mu(\eta)$$

dır.

(Bohner, Peterson 2001).

Tanım 2.19. $s \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ ve $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ olsun. Bu durumda, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerindeki *has olmayan integral*(improper integral)

$$\int_{s}^{\infty} f(\eta)\,\Delta\eta := \lim_{t\to\infty} \int_{s}^{t} f(\eta)\,\Delta\eta$$

ile tanımlıdır. Eğer bu limit mevcut ise has olmayan integral yakınsaktır, aksi halde de ıraksaktır denir (Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.20 (Değişken değiştirme)**.** *Kabul edelim ki,* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *kesin artan bir fonksiyon ve* $\tilde{\mathbb{T}} := f(\mathbb{T})$ *bir zaman skalası olsun.* $g \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *ve* $f \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *olmak üzere, her* $s, t \in \mathbb{T}$ *için*

$$\int_{s}^{t} g(\eta)\, f^{\Delta}(\eta)\,\Delta\eta = \int_{f(s)}^{f(t)} \left(g \circ f^{-1}\right)(\zeta)\,\tilde{\Delta}\zeta$$

dır (Bohner, Peterson 2001).

Sonuç 2.21. *Teorem 2.20 deki şartlar altında* $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}$ *ise*

$$\int_{s}^{t} g(\eta)\, f^{\Delta}(\eta)\,\Delta\eta = \int_{f(s)}^{f(t)} \left(g \circ f^{-1}\right)(\eta)\,\Delta\eta$$

dir.

Teorem 2.22 (Ara değer teoremi)**.** $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sürekli olsun.* $s, t \in \mathbb{T}$ *ve* $t > s$ *olmak üzere,*

$$f(s)\, f(t) < 0$$

sağlanıyorsa, bir $r \in [s, t)_{\mathbb{T}}$ *için* $f(r) = 0$ *veya* $f(r)\, f(\sigma(r)) < 0$ *olur (Bohner, Peterson 2001).*

Teorem 2.23 (Leibnitz kuralı)**.** *Kabul edelim ki, $s \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ve $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $r > s$ ve $r \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olmak üzere (r, r) noktasında sürekli olsun. Bununla birlikte, $f^{\Delta}(r, \cdot) \in C_{rd}([s, \sigma(r)]_{\mathbb{T}})$ olsun. O zaman; $g(t) := \int_s^t f(t, \eta)\,\Delta\eta$ ile tanımlanırsa $g^{\Delta}(t) = \int_s^t f^{\Delta}(t, \eta)\,\Delta\eta + f(\sigma(t), t)$ sağlanır (Bohner, Peterson 2001).*

Yukarıdaki teoremde türev birinci bileşene uygulanmaktadır.

2.4 Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon

Tanım 2.24. $h > 0$ olmak üzere, Hilger karmaşık sayıları, Hilger ekseni, Hilger yedek ekseni ve Hilger sanal çemberi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_h &:= \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\}, \\
\mathbb{R}_h &:= \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ ve } z > -\frac{1}{h} \right\}, \\
\mathbb{A}_h &:= \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R} \text{ ve } z < -\frac{1}{h} \right\}, \\
\mathbb{I}_h &:= \left\{ z \in \mathbb{C}_h : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\}.
\end{aligned}$$

Bunlarla beraber, $h = 0$ için $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R}$, $\mathbb{I}_0 := i\mathbb{R}$ ve $\mathbb{A}_0 := \varnothing$ ile tanımlıdır (Bohner, Peterson 2001).

Tanım 2.25. $h \geq 0$ olmak üzere, $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h := \{z \in \mathbb{C} : -\pi/h < \mathrm{Im}(z) \leq \pi/h\}$ *silindir dönüşümü*(cylinder transformation)

$$\xi_h(z) := \begin{cases} z, & h = 0 \\ \dfrac{1}{h}\operatorname{Log}(1 + zh), & h > 0 \end{cases}$$

ile tanımlıdır. *Ters silindir dönüşümünü*(inverse cylinder transformation) $\xi_h^{-1} : \mathbb{Z}_h \to \mathbb{C}_h$ ise

$$\xi_h^{-1}(z) := \begin{cases} z, & h = 0 \\ \dfrac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{zh} - 1\right), & h > 0 \end{cases}$$

şeklindedir (Bohner, Peterson 2001).

Tanım 2.26. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna

$$1 + \mu(t) f(t) \neq 0, \qquad \text{her } t \in \mathbb{T}^\kappa$$

ifadesini sağlıyorsa *regresif* (regressive) denir ve rd-sürekli regresif fonksiyonların kümesi

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) := \{f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) : 1 + \mu(t) f(t) \neq 0 \text{ her } t \in \mathbb{T}^\kappa\}$$

ile tanımlıdır (Bohner, Peterson 2001).

Tanım 2.27. *Pozitif regresif fonksiyonların kümesi* (set of positive regressive functions)

$$\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathbb{T}) = \mathcal{R}^+(\mathbb{T}, \mathbb{R}) := \{f \in \mathbb{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) : 1 + \mu(t) f(t) > 0 \text{ her } t \in \mathbb{T}^\kappa\}$$

ile tanımlıdır (Bohner, Peterson 2001).

Tanım 2.28. $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olmak üzere zaman skalası üzerinde *üstel fonksiyon* (exponential function)

$$\mathrm{e}_f(t, s) := \exp\left\{ \int_s^t \xi_{\mu(\eta)}(f(\eta)) \Delta\eta \right\} \qquad \text{her } s, t \in \mathbb{T}$$

ile tanımlıdır (Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.29. *$f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $s \in \mathbb{T}$ olmak üzere,*

$$x^\Delta - f(t) x = 0, \quad x(s) = x_0 \in \mathbb{R}$$

ile verilen başlangıç değer probleminin(initial value problem), $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki tek çözümü

$$x(t) = x_0 \, \mathrm{e}_f(t, s), \quad t \in \mathbb{T},$$

ile belirlidir (Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.30 (Sabitlerin değişimi)**.** *$f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $g \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $s \in \mathbb{T}$ olmak üzere,*

$$x^\Delta - f(t) x = g(t), \quad x(s) = x_0 \in \mathbb{R}$$

ile verilen başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(t) = x_0 \, \mathrm{e}_f(t, s) + \int_s^t \mathrm{e}_f(t, \sigma(\eta)) g(\eta) \Delta\eta, \quad t \in \mathbb{T},$$

ile belirlidir (Bohner, Peterson 2001).

Teorem 2.31 (Üstel fonksiyonun işareti). *Kabul edelim ki, $f \in \mathcal{R}$ ve $s \in \mathbb{T}$ olsun. O zaman,*

(i) $f \in \mathcal{R}^{+}$ *ise, her* $t \in \mathbb{T}$ *için* $\mathrm{e}_f(t,s) > 0$ *olur.*

(ii) $1+\mu(t) f(t) < 0$ *ifadesini sağlayan* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ *noktaları için* $\mathrm{e}_f(t,s)\,\mathrm{e}_f(\sigma(t), s) < 0$ *olur.*

(Bohner, Peterson 2001).

3 GECİKMELİ DİNAMİK DENKLEMLERİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Bundan sonraki bölümlerde $\mathbb{T}$ zaman skalasının üstten sınırsız olduğu kabul edilmiştir.

Tanım 3.1. $\alpha \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{T})$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathbb{T}$ üzerinde bir *gecikme fonksiyonudur*:

(i) yeterince büyük her $t \in \mathbb{T}$ için α azalmayan,

(ii) $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$,

(iii) yeterince büyük her $t \in \mathbb{T}$ için $\alpha(t) < t$.

α fonksiyonu, $\mathbb{T}$ üzerinde bir gecikme fonksiyonu olmak üzere, sabit bir $t_0 \in \mathbb{T}$ için $t_{-1} := \alpha(t_0)$ ile tanımlansın. Şimdi,

$$x^{\Delta} + p(t)\, x \circ \alpha = 0, \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \tag{3.0.1}$$

denklemini göz önüne alalım. (3.0.1) denkleminin bir çözümü, $x \in C_{rd}([t_{-1}, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ ve $x \in C^1_{rd}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olmak üzere, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalası üzerinde (3.0.1) denklemini özdeş olarak sağlar. Ayrıca, (3.0.1) denkleminin $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalası üzerinde, başlangıç fonksiyonu $\psi \in C_{rd}([t_{-1}, t_0)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olmak üzere, $[t_{-1}, t_0)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $x \equiv \psi$ ile belirli tek bir çözümü vardır.

(3.0.1) denkleminin bir çözümü, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalasının bir alt yarı sonsuz ekseninde sabit işaretli ise bu çözüme *salınımsız* denir. Eğer (3.0.1) denkleminin bir çözümü, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ zaman sklasının her alt yarı sonsuz ekseninde sabit işaretli değilse bu çözüme *salınımlı* denir. Eğer, her ψ başlangıç fonksiyonu için (3.0.1) denkleminin x çözümü salınımlı ise, (3.0.1) denklemine *salınımlı* denir.

Şimdi bu kavramları daha farklı şekillerde ifade edelim. Bir çözüm salınımlı ise artan ve ıraksak bir $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ disizi vardır ve

$$x(s_n)\, x(\sigma(s_n)) \leq 0$$

olur. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için s_n noktasına x fonksiyonunun *genelleştirilmiş sıfırı* denir.

Diğer taraftan bir çözüm salınımsız ise aşağıdaki iki durumdan birisi söz konusudur:

(i) yeterince büyük bir s vardır ve

$$x(t) \geq 0 \quad \text{her } t \in [s, \infty)_{\mathbb{T}}$$

sağlanır. Bu durumda çözüme *er geç pozitiftir* denir.

(ii) yeterince büyük bir s vardır ve

$$x(t) \leq 0 \quad \text{her } t \in [s, \infty)_{\mathbb{T}}$$

sağlanır. Bu durumda çözüme *er geç negatiftir* denir.

Uyarı 3.2. (3.0.1) denklemi lineer olduğundan, salınımsız bir çözümünün varlığı, er geç pozitif çözümünün varlığı anlamına gelir.

3.1 Yardımcı Sonuçlar

Bu bölümde dinamik denklemlerin salınımlılığının incelenmesi için gerekli bazı sonuçlar elde edilecektir.

Lemma 3.3. s, t noktaları $\mathbb{T}$ zaman skalasının $t \geq s$ özelliğine sahip iki noktası olsun. $-p \in \mathcal{R}^{+}(\mathbb{T})$ ve p nonnegatif ise

$$\exp\left\{-\int_{s}^{t} p(\eta)\,\Delta\eta\right\} \geq \mathrm{e}_{-p}(t, s) \geq 1 - \int_{s}^{t} p(\eta)\,\Delta\eta \tag{3.1.1}$$

sağlanır (Bohner 2005).

İspat. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $s \in \mathbb{T}$ sabit ve $t \in [s, \infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere

$$f(t) := -\int_{s}^{t} p(\eta)\,\Delta\eta$$

ile tanımlansın, o zaman $g := f^{\Delta} + p(t) f + p(t)$ olmak üzere

$$f^{\Delta} + p(t) f = g(t) - p(t) \tag{3.1.2}$$

olduğu görülür. Teorem 2.30 dan, (3.1.2) denkleminin $f(s) = 0$ başlangıç değeriyle verilen çözümü

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathrm{e}_{-p}(t,s) f(s) + \int_s^t \mathrm{e}_{-p}(t,\sigma(\eta)) [g(\eta) - p(\eta)] \Delta\eta \\ &\geq -\int_s^t \mathrm{e}_{-p}(t,\sigma(\eta)) p(\eta) \Delta\eta \\ &= 1 - \mathrm{e}_{-p}(t,s) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

dir. Bu da eşitsizliğin sol tarafıdır.

Şimdi eşitsizliğin diğer tarafını ispat edelim. Silindir dönüşümünün tanımından ve her $x \in [-1,\infty)_{\mathbb{R}}$ için $x \geq \operatorname{Log}(1+x)$ oluşundan, her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} \xi_{\mu(t)}(-p(t)) &= \begin{cases} -p(t), & \mu(t) = 0 \\ \dfrac{1}{\mu(t)} \operatorname{Log}(1 - p(t)\mu(t)), & \mu(t) > 0 \end{cases} \\ &\leq -p(t) \end{aligned}$$

olup,

$$\exp\left\{-\int_s^t p(\eta) \Delta\eta\right\} \geq \mathrm{e}_{-p}(t,s) \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Böylece, (3.1.3) ve (3.1.4) ifadelerinden (3.1.1) eşitsizliğinin sağlandığı görülür. □

3.2 Pozitif Katsayılı Dinamik Denklemler

Bu bölümde, $p \in C_{rd}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$ ve $\alpha \in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{T})$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde bir gecikme fonksiyonu olmak üzere

$$x^{\Delta} + p(t)\, x \circ \alpha = 0 \tag{3.2.1}$$

denkleminin $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalası üzerinde her çözümünün salınımlılığı incelenecektir.

Bu bölümde elde edilecek sonuçlar, bir sonraki bölümde inecelenecek denklemin salınımlılığı hakkında yardımcı olacaktır.

Teorem 3.4. *Eğer*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\alpha(t)}^{\sigma(t)} p(\eta)\,\Delta\eta > 1 \tag{3.2.2}$$

sağlanıyorsa, (3.2.1) *denkleminin her çözümü salınımlıdır (Şahiner, Stavroulakis 2006).*

İspat. Kabul edelim ki, (3.2.1) denkleminin bir er geç pozitif çözümü var olsun. Bu durumda bir $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(\alpha(t)) > 0$ sağlanır. (3.2.1) denkleminden, her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$x^{\Delta}(t) = -p(t)\,x(\alpha(t)) \leq 0 \tag{3.2.3}$$

olup, x çözümünün $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde artmayan olduğu görülür. (3.2.3) eşitliğinin her iki tarafının $\alpha(t_2) \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere, $[\alpha(t), t]_{\mathbb{T}}$ üzerinde integrali alınarak

$$x(\sigma(t)) - x(\alpha(t)) = -\int_{\alpha(t)}^{\sigma(t)} p(\eta)\,x(\alpha(\eta))\,\Delta\eta \leq -\int_{\alpha(t)}^{\sigma(t)} p(\eta)\,\Delta\eta x(\alpha(t)),$$

bulunur ve buradan da

$$\frac{x(\sigma(t))}{x(\alpha(t))} \leq -\left(\int_{\alpha(t)}^{\sigma(t)} p(\eta)\,\Delta\eta - 1\right) \tag{3.2.4}$$

elde edilir. (3.2.2) ifadesi dikkate alınarak, (3.2.4) eşitsizliğinin çelişkiye yol açtığı görülür. O halde, (3.2.1) denkleminin bir er geç pozitif çözümü yoktur. □

Lemma 3.5. $p \in C_{rd}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$ olmak üzere

$$x^{\Delta} + p(t)\,x \circ \alpha \leq 0, \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \tag{3.2.5}$$

eşitsizliğinin bir pozitif çözümü varsa, $-p$ fonksiyonu $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalasının bir alt yarı sonsuz aralığında pozitif regresiftir (Bohner 2005).

İspat. x fonksiyonu (3.2.5) denkleminin bir er geç pozitif çözümü olsun. Kabul edelim ki, $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(\alpha(t)) > 0$ olsun. Bu durumda, x fonksionunun $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde artmayan olduğu açıktır. O halde, her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t) > 0$ ve $\mu(t) \geq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mu(t)\left[x^{\Delta}(t) + p(t)x(t)\right] \\ &= x(\sigma(t)) - x(t) + p(t)\mu(t)x(t) \\ &> [\mu(t)p(t) - 1]x(t) \end{aligned}$$

sağlanır. Bu ise, $-p \in \mathcal{R}^{+}([t_1, \infty)_{\mathbb{T}})$ olduğunu söyler. □

Teorem 3.6. *Kabul edelim ki,*

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{\substack{-\lambda p \in \mathcal{R}^{+}\left([\alpha(t),t)_{\mathbb{T}}\right) \\ \lambda>0}} \{\lambda\, \mathrm{e}_{-\lambda p}(t, \alpha(t))\} < 1 \tag{3.2.6}$$

sağlansın. O zaman, (3.2.1) *denkleminin her çözümü* $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde salınımlıdır (Bohner 2005, Bohner, Karpuz, Öcalan 2008, Zhang, Deng 2002).*

İspat. Kabul edelim ki, (3.2.1) denkleminin er geç pozitif bir çözümü x olsun. O halde, bir $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $c > 1$ sabiti vardır, her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(\alpha(t)) > 0$ ve

$$\sup_{\substack{-\lambda p \in \mathcal{R}^{+}\left([\alpha(t),t)_{\mathbb{T}}\right) \\ \lambda>0}} \{\lambda\, \mathrm{e}_{-\lambda p}(t, \alpha(t))\} \leq \frac{1}{c} \tag{3.2.7}$$

sağlanır. (3.2.7), Lemma 3.3 ve Lemma 3.5 ten dolayı her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{1}{c} \geq \mathrm{e}_{-p}(t, \alpha(t)) \geq 1 - \int_{\alpha(t)}^{t} p(\eta)\,\Delta\eta$$

sağlanır, buradan da

$$\int_{\alpha(t)}^{\sigma(t)} p(\eta)\,\Delta\eta \geq \int_{\alpha(t)}^{t} p(\eta)\,\Delta\eta \geq c_0, \quad c_0 := \left(1 - \frac{1}{c}\right) > 0$$

olduğu görülür. $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere $f : [\alpha(t), \sigma(t)]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(s) := \int_{\alpha(t)}^{s} p(\eta)\,\Delta\eta - \frac{c_0}{2}$$

ile tanımlanırsa $f(\alpha(t)) f(\sigma(t)) \leq 0$ elde edilir. Böylece, Teorem 2.22 den bir $s_0 = s_0(t) \in [\alpha(t), \sigma(t)]_{\mathbb{T}}$ için $f(s_0) \leq 0$ ve $f(\sigma(s_0)) \geq 0$ olur. Buradan,

$$\int_{\alpha(t)}^{\sigma(s_0)} p(\eta)\,\Delta\eta = \frac{c_0}{2} + f(\sigma(s_0)) \geq \frac{c_0}{2}$$

$$\int_{s_0}^{\sigma(t)} p(\eta)\,\Delta\eta = \int_{\alpha(t)}^{\sigma(t)} p(\eta)\,\Delta\eta - \left[f(s_0) + \frac{c_0}{2}\right] \geq \frac{c_0}{2}$$

olduğu görülür. Bu durumda da

$$\begin{aligned} x(s_0) &\geq x(s_0) - x(\sigma(t)) = \int_{s_0}^{\sigma(t)} p(\eta)\, x(\alpha(\eta))\,\Delta\eta \geq \frac{c_0}{2} x(\alpha(t)) \\ &\geq \frac{c_0}{2}\left[x(\alpha(t)) - x(\sigma(s_0))\right] = \frac{c_0}{2} \int_{\alpha(t)}^{\sigma(s_0)} p(\eta)\, x(\alpha(\eta))\,\Delta\eta \\ &\geq \frac{c_0^2}{4} x(\alpha(s_0)) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

olup, $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$y(t) := \frac{x(\alpha(t))}{x(t)} \tag{3.2.9}$$

ile tanımlanırsa

$$y(s_0) \leq \frac{4}{c_0^2}$$

bulunur. Böylece, $\ell := \liminf_{t\to\infty} y(t)$ ifadesinin sonlu olduğu görülür.

(3.2.1) denkleminden

$$x^{\Delta}(t) + p(t)\, y(t)\, x(t) = 0$$

yazılır. Lemma 3.5 ten, $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve $-p \in \mathcal{R}^+([t_2, \infty)_{\mathbb{T}})$ olur. Teorem 2.29 dan dolayı, bu denklemin çözümü

$$x(t) = \mathrm{e}_{-py}(t, t_1)\, x(t_1), \quad \text{her } t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}} \tag{3.2.10}$$

eşitsizliğini sağlar. $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere $\underline{y}(t) := \inf\{y(\eta) : \eta \in [\alpha(t), t)_{\mathbb{T}}\}$ fonksiyonunu tanımlayaım. Açıkça, $\liminf_{t\to\infty} \underline{y}(t) = \ell$ sağlanır. Bir $t_3 \in [\alpha^{-1}(t_2), \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $-p \in \mathcal{R}^+([\alpha(t), t)_{\mathbb{T}})$ olduğundan, (3.2.9) ve (3.2.10) göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{x(\alpha(t))}{x(t)} = \frac{1}{\mathrm{e}_{-py}(t, \alpha(t))} \\ &\geq \frac{1}{\mathrm{e}_{-\underline{y}(t)p}(t, \alpha(t))} = \frac{\underline{y}(t)}{\underline{y}(t)\, \mathrm{e}_{-\underline{y}(t)p}(t, \alpha(t))} \\ &\geq c\underline{y}(t) \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

olduğu görülür. Bu durumda, (3.2.11) ifadesinin her iki tarafından, $t \to \infty$ için $\liminf$ alınarak, $\ell \geq c\ell$ olduğu görülür. Bu ise $c > 1$ ile çelişir ve ispatı tamamlar. $\square$

Uyarı 3.7. (3.2.6) ifadesi

$$\liminf_{t\to\infty} \inf_{\substack{-\lambda p \in \mathcal{R}^+([\alpha(t), t)_{\mathbb{T}}) \\ \lambda > 0}} \left\{ \frac{1}{\lambda\, \mathrm{e}_{-\lambda p}(t, \alpha(t))} \right\} > 1$$

ifadesine denktir.

Uyarı 3.8. Teorem 3.4 ve Teorem 3.6 da verilmiş olan sonuçlar

$$x^{\Delta} + p(t)\, x \circ \alpha \leq 0$$

dinamik eşitizliğinin er geç pozitif çözümünün olmasını engeller.

Teorem 3.9. *Kabul edelim ki, bir pozitif* λ_0 *sabiti ve her* $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *için*

$$-\lambda_0 p \in \mathcal{R}^+([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}) \quad ve \quad \lambda_0\, \mathrm{e}_{-\lambda_0 p}(t, \alpha(t)) \geq 1 \tag{3.2.12}$$

sağlansın. O zaman, (3.2.1) *denkleminin* $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde bir pozitif çözümü mevcuttur (Zhang, Deng 2002).*

İspat. (3.2.1) denkleminin bir pozitif çözümünün varlığını gösterelim. Bunun için,

$$y(t) := \begin{cases} 1, & t \in [t_{-1}, t_0)_{\mathbb{T}} \\ \dfrac{1}{\lambda_0\, \mathrm{e}_{-\lambda_0 p y}(t, \alpha(t))}, & t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} \end{cases} \tag{3.2.13}$$

şeklinde tanımlansın. (3.2.12) ve (3.2.13) ifadeleri dikkate alındığında, her $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $0 < y(t) \leq 1$ olur. Böylece, $-\lambda_0 py \in \mathcal{R}^+([t_0, \infty)_{\mathbb{T}})$ sağlanır. Şimdi, pozitif çözümü oluşturalım. Bunun için, x fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$x(t) := \begin{cases} 1, & t \in [t_{-1}, t_0)_{\mathbb{T}} \\ \mathrm{e}_{-\lambda_0 py}(t, t_0), & t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

Açıktır ki, Teorem 2.31 den, her $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$x(t) > 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_0 x(t) y(t) = x(\alpha(t)) \tag{3.2.14}$$

sağlanır. (3.2.13) ve (3.2.14) ifadelerinden, her $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$x^{\Delta}(t) = -\lambda_0 p(t) y(t) x(t) = -p(t) x(\alpha(t))$$

olur. Bu ise, x fonksiyonunun (3.2.1) denkleminin bir pozitif çözümü olduğunu gösterir. □

3.3 Pozitif ve Negatif Katsayılı Neutral Dinamik Denklemler

Bu bölümde, $r \in C^1_{rd}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$, $p, q \in C_{rd}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$ ve γ, α, β fonksiyonları da $\mathbb{T}$ üzerinde gecikme fonksiyonları olmak üzere

$$[x - r(t) x \circ \gamma]^{\Delta} + p(t) x \circ \alpha - q(t) x \circ \beta = 0 \tag{3.3.1}$$

denkleminin $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde her çözümünün salınımlılığı incelenecektir. Türev operatörü, x fonksiyonun gecikmeli bir terimine uygulanıyorsa, denkleme *neutral denklem* denir.

İfadelerde uygunluk için τ gecikme fonksiyonu $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde

$$\tau(t) := \begin{cases} \alpha(t), & r \equiv 0 \\ \min\{\gamma(t), \alpha(t)\}, & r \not\equiv 0 \end{cases}$$

ve $t_{-1} := \tau(t_0)$ ile tanımlansın. O zaman, (3.3.1) denkleminin çözümü olan x fonksiyonu, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalası üzerinde (3.3.1) denklemini sağlar, bununla birlikte $x \in C_{rd}([t_{-1}, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ ve $x - r(t) x \circ \gamma \in C^1_{rd}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ sağlar. $\psi \in C_{rd}([t_{-1}, t_0)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ bir başlangıç fonksiyonu olmak üzere, (3.3.1) denkleminin $[t_{-1}, t_0)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $x \equiv \psi$ ile belirli tek bir çözümü vardır.

Bu başlık altında kullanacağımız hipotezler aşağıdaki gibidir:

(H1) α, β gecikme fonksiyonları $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde kesin artan ve $\alpha < \beta$ olmak üzere δ gecikme fonksiyonu, $\delta := \beta^{-1} \circ \alpha$ ile tanımlansın. Ayrıca, $\delta \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{T})$ için $\delta(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ olsun.

(H2) $\overline{p} := p - \delta^{\Delta} q \circ \delta \in C_{rd}\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+\right)$ özdeş olarak 0 olmasın.

(H3) yeterince büyük her $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$r(t) + \int_{\delta(t)}^{t} q(\eta)\,\Delta\eta \leq 1$$

olsun.

(H4) $\underline{p} := \left(\overline{p} \circ \delta^{-1}\right) / \left(\delta^{\Delta} \circ \delta^{-1}\right) \in C_{rd}\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+\right)$ özdeş olarak 0 olmasın.

(H5) yeterince büyük her $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$r(t) + \int_{\delta(t)}^{t} \frac{p\left(\delta^{-1}(\eta)\right)}{\delta^{\Delta}\left(\delta^{-1}(\eta)\right)}\Delta\eta \geq 1$$

dir.

Lemma 3.10. (H1)–(H3) sağlansın ve x fonksiyonu (3.3.1) denkleminin bir er geç pozitif çözümü olsun. x in (3.3.1) denklemine ilişkin birinci kompanyan dönüsümü, $t \in [\tau^{-1}(t_0), \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\Gamma_x(t) := x(t) - r(t)\,x(\gamma(t)) - \int_{\delta(t)}^{t} q(\eta)\,x(\beta(\eta))\,\Delta\eta, \tag{3.3.2}$$

ile tanımlansın. O zaman, Γ_x fonksiyonu, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalasının bir alt yarı sonsuz ekseninde

$$\Gamma_x > 0 \quad \text{ve} \quad \Gamma_x^{\Delta} \leq 0 \tag{3.3.3}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. (H1) den dolayı, bir $t_1 \in [\alpha^{-1}(t_0), \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(\alpha(t)) > 0$ dir. O halde, (H2), (3.3.1) denklemi, Sonuç 2.21 ve Teorem 2.23

kullanılarak, her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}
\Gamma_x^{\Delta}(t) &= [x(t) - r(t)\,x(\gamma(t))]^{\Delta} - \left(\int_{\delta(t_1)}^{t} q(\eta)\,x(\beta(\eta))\,\Delta\eta + \int_{\delta(t)}^{\delta(t_1)} q(\eta)\,x(\beta(\eta))\,\Delta\eta \right)^{\Delta} \\
&= [x(t) - r(t)\,x(\gamma(t))]^{\Delta} - \left(\int_{\delta(t_1)}^{t} q(\eta)\,x(\beta(\eta))\,\Delta\eta + \int_{t}^{t_1} q(\delta(\eta))\,\delta^{\Delta}(t)\,x(\alpha(\eta))\,\Delta\eta \right)^{\Delta} \\
&= [x(t) - r(t)\,x(\gamma(t))]^{\Delta} - q(t)\,x(\beta(t)) + \delta^{\Delta}(t)\,q(\delta(t))\,x(\alpha(t)) \\
&= -\overline{p}(t)\,x(\alpha(t)) \leq 0 \qquad (3.3.4)
\end{aligned}$$

olur. Γ_x artmayan olup, (H2) den dolayı $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalasının bir alt yarı sonsuz ekseninde kesin pozitif veya kesin negatiftir. Kabul edelim ki, Γ_x fonksiyonu $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $\Gamma_x < 0$ olsun. $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $\overline{x}(t) := \sup\{x(\eta) : \eta \in [\alpha(t), \beta(t))_{\mathbb{T}}\}$ ve $\ell := \limsup_{t\to\infty} x(t)$ olarak tanımlamsın. Açıkça, $\limsup_{t\to\infty} \overline{x}(t) = \ell$ olur. Bu durumda, (3.3.2) ten, her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}
x(t) &= \Gamma_x(t) + r(t)\,x(\gamma(t)) + \int_{\delta(t)}^{t} q(\eta)\,x(\beta(\eta))\,\Delta\eta \\
&\leq \Gamma_x(t_2) + \left(r(t) + \int_{\delta(t)}^{t} q(\eta)\,\Delta\eta \right) \overline{x}(t) \\
&\leq \Gamma_x(t_2) + \overline{x}(t) \qquad (3.3.5)
\end{aligned}$$

yazılabilir. x fonksiyonunun sınırlı olduğunu göstermek için aksini kabul edelim. Bu durumda bir $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve $x(t_3) = \overline{x}(t_3)$ olur, bu ise (3.3.5) den $\Gamma_x(t_2) \geq 0$ çelişkisini verir. O halde, x sınırlıdır, yani ℓ negatif olmayan bir sabittir. (3.3.5) ifadesinin her iki tarafından $t \to \infty$ için $\limsup$ alınırsa $\ell \leq \Gamma_x(t_2) + \ell$ elde edilir, bu ise $\Gamma_x(t_2) \geq 0$ çelişkisini verir. Sonuç olarak, Γ_x fonksiyonu $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde pozitiftir. Yani, (3.3.3) geçerlidir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 3.11. *Kabul edelim ki, (H1)–(H3) ve*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\alpha(t)}^{\sigma(t)} \overline{p}\,(\eta)\,\Delta\eta > 1 \tag{3.3.6}$$

sağlansın. O zaman, (3.3.1) *denkleminin her çözümü salınımlıdır.*

İspat. Bu durumda, x çözümünün (3.3.1) denklemine ilişkin birinci kompanyan fonksiyonu olan Γ_x, Lemma 3.10 dan dolayı er geç pozitif ve artmayandır. Buradan, $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalasının bir alt yarı sonsuz ekseninde $\Gamma_x \leq x$ sağlanır. Bu eşitsizlik (3.3.4) da kullanılarak

$$\Gamma_x^{\Delta} + \overline{p}\,(t)\,\Gamma_x \circ \alpha \leq 0 \tag{3.3.7}$$

elde edilir. Ancak (3.3.6), Teorem 3.4 ve Uyarı 3.8 den, (3.3.7) eşitsizliği er geç pozitif çözüme sahip değildir. Bu çelişki ise x fonksiyonunun (3.3.1) denkleminin er geç pozitif çözümü olamayacağını ifade eder. □

Teorem 3.12. *Kabul edelim ki, (H1)–(H3) ve*

$$\liminf_{t\to\infty} \inf_{\substack{-\lambda\overline{p}\in\mathcal{R}^+\left([\alpha(t),t)_{\mathbb{T}}\right)\\ \lambda>0}} \left\{\frac{1}{\lambda\,\mathrm{e}_{-\lambda\overline{p}}\,(t,\alpha\,(t))}\right\} > 1$$

sağlansın. O zaman, (3.3.1) *denkleminin her çözümü salınımlıdır.*

İspat. (3.3.7), Teorem 3.6 ve Uyarı 3.8 dikkate alınarak ispat tamamlanır. □

Lemma 3.13. Kabul edelim ki, (H1), (H3), (H4) sağlansın. x fonksiyonu (3.3.1) denkleminin bir er geç pozitif çözümü olmak üzere, x in (3.3.1) denklemine ilişkin ikinci kompanyan dönüsümü, $t \in [\tau^{-1}(t_0),\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\Psi_x\,(t) := x\,(t) - r\,(t)\,x\,(\gamma\,(t)) - \int_{\delta(t)}^{t} \frac{p\,(\delta^{-1}\,(\eta))}{\delta^{\Delta}\,(\delta^{-1}\,(\eta))} x\,(\beta\,(\eta))\,\Delta\eta, \tag{3.3.8}$$

ile tanımlansın. O zaman, Ψ_x fonksiyonu, $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalasının bir alt yarı sonsuz ekseninde

$$\Psi_x > 0 \quad \text{ve} \quad \Psi_x^{\Delta} \leq 0 \tag{3.3.9}$$

eşitsizliklerini sağlar.

İspat. (H1) ve (H3) ten dolayı, bir $t_1 \in [\beta^{-1}(t_0), \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(\beta(t)) > 0$ dir. O halde, (3.3.1) denklemi, Sonuc 2.21 ve Teorem 2.23 kullanılarak, her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}\Psi_x^{\Delta}(t) &= [x(t) - r(t)x(\gamma(t))]^{\Delta} - \frac{p(\delta^{-1}(t))}{\delta^{\Delta}(\delta^{-1}(t))}x(\beta(t)) + p(t)x(\alpha(t)) \\ &= -\underline{p}(t)x(\beta(t)) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

olur. (H4) ve (3.3.10) ifadesinden görülür ki, Ψ_x artmayan olup, $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalasının bir alt yarı sonsuz ekseninde kesin pozitif veya kesin negatiftir. Kabul edelim ki, Ψ_x fonksiyonu $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $\Psi_x < 0$ olsun. $t_3 \in [\delta^{-1}(t_2), \infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere, (3.3.10) ifadesi t_3 ten $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ e integre edilerek,

$$\Psi_x(t) = \Psi_x(t_3) - \int_{t_3}^{t} \underline{p}(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta \tag{3.3.11}$$

elde edilir. (H3), (3.3.11) ve Ψ_x in tanımı kullanılarak, her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} x(t) &= \Psi_x(t_3) + r(t)x(\gamma(t)) + \int_{\delta(t)}^{t} \frac{p(\delta^{-1}(\eta))}{\delta^{\Delta}(\delta^{-1}(\eta))}x(\beta(\eta))\Delta\eta - \int_{t_3}^{t} \underline{p}(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta \\ &= \Psi_x(t_3) + r(t)x(\gamma(t)) - \int_{t_3}^{\delta(t)} \underline{p}(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta + \int_{\delta(t)}^{t} q(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta \\ &\leq \Psi_x(t_3) + r(t)x(\gamma(t)) + \int_{\delta(t)}^{t} q(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

yazılabilir. Böylece, (3.3.12) ifadesinden her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için,

$$\begin{aligned} x(t) &\leq \Psi_x(t_3) + \left(r(t) + \int_{\delta(t)}^{t} q(\eta)\Delta\eta \right)\overline{x}(t) \\ &\leq \Psi_x(t_3) + \overline{x}(t) \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda, Lemma 3.10 daki gibi $\Psi_x(t_3) < 0$ olamaz. Böylece, (3.3.9) sağlanır. □

Yeni sonuçlar elde edebilmek için, $\phi \in C_{rd}\left([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}^+\right)$ artmayan keyfi fonksiyon olmak üzere $\overline{g}_\phi : [t_0,\infty)^2_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\overline{g}_\phi(t,s) := \max\left\{\int_{\eta}^{\tau^{-1}(\eta)} \phi(\xi)\,\Delta\xi : \eta \in [s,t]_{\mathbb{T}}\right\}$$

ile tanımlansın. Açıkça, $\overline{g}_\phi$ fonksiyonu ikinci bileşeni sabit iken birinci bileşenine göre azalmayandır.

Lemma 3.14. Kabul edelim ki, (H1), (H3)–(H5) sağlansın. Bunlarla birlikte, uygun bir artmayan $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ fonksiyonu ve yeterince büyük bir $s \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$x^{\Delta^2} + \frac{\phi(t)\,\underline{p}(t)}{\overline{g}_\phi(t,s)}x \leq 0 \tag{3.3.13}$$

dinamik eşitsizliği $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalasında er geç pozitif çözüme sahip olmasın.

O zaman, x fonksiyonunun (3.3.1) denklemine ilişkin ikinci kompanyan dönüşümü olan Ψ_x, $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalasının bir alt yarı sonsuz ekseninde

$$\Psi_x < 0 \quad \text{ve} \quad \Psi_x^{\Delta} \leq 0 \tag{3.3.14}$$

eşitsizliklerini sağlar.

İspat. Bir $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve her $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.3.10) sağlanır. (3.3.14) ifadesinin geçerliliğini göstermek için aksini kabul edelim; yani, $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $\Psi_x(t) > 0$ olsun. Şimdi,

$$m := \frac{1}{2}\min\left\{x(\eta) : \eta \in [\tau(t_2), t_2]_{\mathbb{T}}\right\},$$

olmak üzere her $t \in [\tau(t_2),\infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t) > m$ olduğu gösterilecektir. Açıkça $m > 0$ dır, çünkü $x \geq \Psi_x > 0$ sağlanır. Kabul edelim ki, bir $T \in (t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(T) \leq m$ ve her $t \in [t_2, T)_{\mathbb{T}}$ için $x(t) > m$ olsun. Bu durumda,

$$m \geq x(T) = \Psi_x(T) + r(T)\,x(\gamma(T)) + \int_{\delta(T)}^{T} \frac{p(\delta^{-1}(\eta))}{\delta^{\Delta}(\delta^{-1}(\eta))}x(\beta(\eta))\,\Delta\eta > m$$

olup, çelişki elde edilir. O halde, her $t \in [\tau(t_2),\infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t) > m$ dir. $\ell := \lim_{t\to\infty}\Psi_x(t)$ ile tanımlansın, bu durumda aşağıdaki iki durum söz konusudur.

(i) $\ell = 0$ olsun. Bu durumda $\lim_{t\to\infty} \phi(t)\Psi_x(t) = 0$ olacağından, yeterince büyük bir $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve her $t \in [t_3, \tau^{-1}(t_3)]_{\mathbb{T}}$ için

$$x(t) > m > \frac{1}{\overline{g}_\phi(t,s)} \int_{t_3}^{\tau^{-1}(t)} \phi(\eta)\Psi_x(\eta)\Delta\eta$$

elde edilir.

(ii) $\ell > 0$ olsun. Açıkça her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $\Psi_x(t) > \ell$ dir. (3.3.8) dikkate alınarak, bir $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} x(t) &> \ell + r(t)x(\gamma(t)) + \int_{\delta(t)}^{t} \frac{p(\delta^{-1}(\eta))}{\delta^\Delta(\delta^{-1}(\eta))} x(\beta(\eta))\Delta\eta \\ &\geq \ell + \left(r(t) + \int_{\delta(t)}^{t} \frac{p(\delta^{-1}(\eta))}{\delta^\Delta(\delta^{-1}(\eta))}\Delta\eta \right) m \\ &\geq \ell + m \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

sağlanır. (3.3.15) yinelenerek, her $t \in [\tau^{-1}(t_3), \infty)_{\mathbb{T}}$ için,

$$\begin{aligned} x(t) &> \ell + r(t)x(\gamma(t)) + \int_{\delta(t)}^{t} \frac{p(\delta^{-1}(\eta))}{\delta^\Delta(\delta^{-1}(\eta))} x(\beta(\eta))\Delta\eta \\ & \ell + \left(r(t) + \int_{\delta(t)}^{t} \frac{p(\delta^{-1}(\eta))}{\delta^\Delta(\delta^{-1}(\eta))}\Delta\eta \right)(L+m) \\ &\geq 2\ell + m \end{aligned}$$

bulunur. Burada tümevarım uygulanarak artan ve ıraksak $\{\tau^{-n}(t_3)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $t \in [\tau^{-n}(t_3), \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t) > (n+1)\ell + m$ ifadesini sağladığı görülür. Böylece, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ olur. O halde, bir $t_4 \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve her $t \in [t_4, \tau^{-1}(t_4)]_{\mathbb{T}}$ için

$$
\begin{aligned}
x(t) &> \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(t_4, s)} \int_{t_4}^{\tau^{-2}(t_4)} \phi(\eta) \Psi_x(\eta) \Delta\eta \\
&\geq \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(t, s)} \int_{t_4}^{\tau^{-1}(t)} \phi(\eta) \Psi_x(\eta) \Delta\eta
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Yukarıdaki incelemelere göre, her $t \in [t_4, \tau^{-1}(t_4)]_{\mathbb{T}}$ için

$$
x(t) > \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(t, s)} y\left(\tau^{-1}(t)\right), \quad y(t) := \int_{t_4}^{t} \phi(\eta) \Psi_x(\eta) \Delta\eta \tag{3.3.16}
$$

sağlanır. Şimdi, (3.3.16) eşitsizliğinin $[t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde sağlandığı gösterilecektir. Aksi halde bir $T \in (\tau^{-1}(t_4), \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır, $[t_4, T)_{\mathbb{T}}$ üzerinde (3.3.16) sağlanır ve

$$
x(T) \leq \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(T, s)} y\left(\tau^{-1}(T)\right)
$$

olur. Ancak

$$
\begin{aligned}
x(T) &= \Psi_x(T) + r(T) x(\gamma(T)) + \int_{\delta(T)}^{T} \frac{p(\delta^{-1}(\eta))}{\delta^{\Delta}(\delta^{-1}(\eta))} x(\beta(\eta)) \Delta\eta \\
&> \Psi_x(T) + \frac{r(T) y(\tau^{-1}(\gamma(T)))}{\overline{g}_{\phi}(\gamma(T), s)} \\
&\quad + \int_{\delta(T)}^{T} \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(\beta(\eta), s)} \frac{p(\delta^{-1}(\eta))}{\delta^{\Delta}(\delta^{-1}(\eta))} y\left(\tau^{-1}(\beta(\eta))\right) \Delta\eta \\
&\geq \Psi_x(T) + \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(T, s)} \left(r(T) + \int_{\delta(T)}^{T} \frac{p(\delta^{-1}(\eta))}{\delta^{\Delta}(\delta^{-1}(\eta))} \Delta\eta \right) y(T)
\end{aligned} \tag{3.3.17}
$$

$$\geq \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(T,s)} \int_{T}^{\tau^{-1}(T)} \phi(\eta)\,\Psi_x(\eta)\,\Delta\eta + \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(T,s)} y(T)$$
$$= \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(T,s)} y\left(\tau^{-1}(T)\right)$$

bulunur. Bu ise (3.3.16) ile çelişir. O halde, (3.3.16) ifadesi geçerlidir. Yeterince büyük bir $t_5 \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $t \in [t_5, \infty)_{\mathbb{T}}$ için z fonksiyonu

$$z(t) := \int_{t_4}^{t} \Psi_x(\eta)\,\Delta\eta > 0$$

ile tanımlanirsa, her $t \in [t_5, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} x(\beta(t)) &> \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(\beta(t), s)} y\left(\tau^{-1}(\beta(t))\right) \\ &\geq \frac{1}{\overline{g}_{\phi}(t,s)} y(t) \\ &\geq \frac{\phi(t)}{\overline{g}_{\phi}(t,s)} z(t). \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

bulunur. Diğer taraftan, her $t \in [t_5, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$z^{\Delta^2}(t) = \Psi_x^{\Delta}(t) \tag{3.3.19}$$

olduğu görülür. (3.3.10), (3.3.18) ve (3.3.19) ifadelerinden z fonksiyonunun (3.3.13) dinamik eşisizliğinin bir er geç çözümü olur. Elde edilen bu son çelişki (3.3.14) ifadesinin geçerli olduğunu gösterir. □

Lemma 3.15. Kabul edelim ki, $a \in C_{rd}\left([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+\right)$ olsun.

$$x^{\Delta^2} + a(t)\,x = 0$$

denkleminin

(i) her çözümünün salınımlı olması için

$$\liminf_{t\to\infty} t \int_{t}^{\infty} a(\eta)\,\Delta\eta > \frac{1}{4}$$

sağlanması yeterlidir,

(ii) bir pozitif çözümünün olması için

$$\limsup_{t\to\infty} t \int_t^\infty a(\eta)\,\Delta\eta < \frac{1}{4}$$

sağlanması yeterlidir (Karpuz, 2008).

Uyarı 3.16. Lemma 3.15(i) deki şart altında

$$x^{\Delta^2} + a(t)\,x \leq 0$$

dinamik eşitsizliği $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ zaman skalasında er geç pozitif çözüme sahip değildir.

Teorem 3.17. *Kabul edelim ki, (H1),(H3)–(H5) sağlansın ve* (3.3.13) *er geç pozitif çözüme sahip olmasın. Bu durumda,* (3.3.1) *denkleminin her çözümü salınımlıdır.*

İspat. Kabul edelim ki, x (3.3.1) denkleminin er geç pozitif çözümü olsun. Bu durumda, Lemma 3.10 ve Lemma 3.13 ten çelişki elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.18. *Kabul edelim ki, (H1), (H3)–(H5) sağlansın ve azalmayan bir* $\phi : [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^+$ *fonksiyonu için*

$$\liminf_{t\to\infty} t \int_t^\infty \frac{\phi(\eta)\,\underline{p}(\eta)}{\overline{g}_\phi(\eta,s)}\Delta\eta > \frac{1}{4}$$

sağlanacak şekilde bir $s \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *varsa,* (3.3.1) *denkleminin her çözümü salınımlıdır.*

Uyarı 3.19. Yukarıda elde edilen sonuçların hepsi

$$[x - r(t)\,x\circ\gamma]^{\Delta} + p(t)\,x\circ\alpha - q(t)\,x\circ\beta \leq 0$$

dinamik eşitsizliğinin er geç pozitif çözümünün olmasını engeller.

4 UYGULAMALAR

4.1 Pozitif Katsayılı Dinamik Denklemler

Aşağıdaki sonuçlar literatürde yer alan çok önemli teoremlerdir ve hepsi Bölüm 3.2 de elde edilen sonuçların özel halidir. Bu bölümde p fonksiyonunun pozitif olduğu kabul edilmiştir.

Örnek 4.1. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^{+}$ için $\alpha(t) = t - \alpha$ olsun. Aşağıdaki fark denklemini gözönüne alalım:

$$\Delta x(t) + p(t)\, x(t-\alpha) = 0. \tag{4.1.1}$$

(4.1.1) denkleminin,

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{\eta=t-\alpha}^{t-1} p(\eta) > \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \tag{4.1.2}$$

sağlandığında her çözümü salınımlıyken, bir pozitif λ_0 sabiti ve her $t \in [0,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için

$$1 - \lambda_0 p(t) > 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_0 \prod_{\eta=t-\alpha}^{t-1} \left[1 - \lambda_0 p(\eta)\right] \geq 1 \tag{4.1.3}$$

sağlandığında bir pozitif çözümü vardır.

Çözüm. (4.1.1) denklemi için,

$$\begin{aligned}\inf_{\substack{-\lambda p \in \mathcal{R}^{+}\left([t-\alpha,t)_{\mathbb{Z}}\right)\\ \lambda>0}} \left\{\frac{1}{\lambda\, \mathrm{e}_{-\lambda p}(t, t-\alpha)}\right\} &\geq \inf_{\substack{1-\lambda p(\eta)>0\\ \eta\in[t-\alpha,t)_{\mathbb{Z}}\\ \lambda>0}} \left\{\frac{1}{\lambda} \prod_{\eta=t-\alpha}^{t-1} \left[1-\lambda p(\eta)\right]^{-1}\right\}\\ &\geq \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha+1} \sum_{\eta=t-\alpha}^{t-1} p(\eta) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

olarak elde edilir. Uyarı 3.7 ve (4.1.4) ten dolayı (4.1.2) ifadesi sağlandığında her çözüm salınımlıdır. (4.1.1) denkleminin pozitif çözümünün varlıgı ise (4.1.3) ifadesinden ve Teorem 3.9 dan görülmektedir.

Örnek 4.2. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}^{+}$ için $\alpha(t)=t-\alpha$ olsun. Bu durumda,

$$x'(t)+p(t)\,x(t-\alpha)=0 \tag{4.1.5}$$

denkleminin,

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_{t-\alpha}^{t}p(\eta)\,d\eta>\frac{1}{\mathrm{e}} \tag{4.1.6}$$

sağlandığında her çözümü $[0,\infty)_{\mathbb{R}}$ üzerinde salınımlıyken, bir pozitif λ_0 sabiti ve her $t\in[0,\infty)_{\mathbb{R}}$ için

$$\frac{\lambda_0}{\mathrm{e}^{\lambda_0\int\limits_{t-\alpha}^{t}p(\eta)d\eta}}\leq 1 \tag{4.1.7}$$

sağlandığında bir pozitif çözümü vardır (bakınız Győri, Ladas 1991, Theorem 2.3.1, Theorem 2.3.2).

Çözüm. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\inf_{\substack{-\lambda\overline{p}\in\mathcal{R}^{+}\left([t-\alpha,t)_{\mathbb{R}}\right)\\ \lambda>0}}\left\{\frac{1}{\lambda\,\mathrm{e}_{-\lambda\overline{p}}(t,t-\alpha)}\right\}&=\inf_{\lambda>0}\left\{\frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\lambda\int\limits_{t-\alpha}^{t}\overline{p}(\eta)\,d\eta\right\}\right\}\\ &=\mathrm{e}\int\limits_{t-\alpha}^{t}\overline{p}(\eta)\,d\eta\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, (4.1.6) sağlandığında, Uyarı 3.7 den dolayı (4.1.5) denkleminin her çözüm salınımlıdır. Teorem 3.9 dikkate alınarak, (4.1.7) sağlandığında ise (4.1.5) denkleminin bir pozitif çözümü olduğunu görmek kolaydır.

Örnek 4.3. $q>1$ için $\mathbb{T}=q^{\mathbb{Z}}\cup\{0\}$ ve $\gamma\in\mathbb{N}$ için $\alpha(t)=t/q^{\alpha}$ olsun. Bu durumda,

$$\Delta_q x(t)+p(t)\,x(t/q^{\alpha})=0,\quad \Delta_q x(t)=\frac{x(qt)-x(t)}{(q-1)\,t} \tag{4.1.8}$$

denkleminin

$$\liminf_{t\to\infty}\sum_{\eta=1}^{\alpha}\frac{t}{q^{\eta}}p(t/q^{\eta})>\frac{1}{q-1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{(\alpha+1)} \tag{4.1.9}$$

sağlandığında her çözümü $[1,\infty)_{q^{\mathbb{Z}}\cup\{0\}}$ üzerinde salınımlıdır.

Çözüm. Örnek 4.1 in çözümü dikkate alınarak, Uyarı 3.7 den (4.1.8) denkleminin (4.1.9) ifadesi altında her çözümünün salınımlı olduğu görülür.

4.2 Pozitif ve Negatif Katsayılı Neutral Dinamik Denklemler

Aşağıdaki örnekler literatürdeki çok önemli teoremlerdir ve hepsi Bölüm 3.3 te elde edilen sonuçların özel halidir. Bu bölümde r, p, q fonksiyonlarının pozitif oldukları kabul edilmiştir.

Örnek 4.4. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\alpha > \beta$ olmak üzere $\gamma, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ için $\gamma(t) = t - \gamma$, $\alpha(t) = t - \alpha$ ve $\beta(t) = t - \beta$ olsun. Ayrıca, yeterince büyük her t için

$$r(t) + \sum_{\eta=t-\alpha+\beta}^{t-1} q(\eta) \leq 1 \quad \text{ve} \quad \overline{p}(t) = p(t) - q(t-\alpha+\beta) \geq 0 \, (\not\equiv 0)$$

olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{\eta=t-\alpha}^{t-1} \overline{p}(\eta) > \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}$$

ise

$$\Delta\left[x(t) - r(t)\, x(t-\gamma)\right] + p(t)\, x(t-\alpha) - q(t)\, x(t-\beta) = 0 \qquad (4.2.1)$$

denkleminin her çözümü $[0,\infty)_{\mathbb{Z}}$ üzerinde salınımlıdır (bakınız Ladas, Qian 1989, Theorem 2).

Çözüm. Açıkça, her $t \in \mathbb{Z}$ için $\delta(t) = t - \alpha + \beta$, $\Delta\delta(t) \equiv 1$ ve $\delta(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\inf_{\substack{-\lambda\overline{p}\in\mathcal{R}^{+}\left([t-\alpha,t)_{\mathbb{Z}}\right)\\ \lambda>0}} \left\{\frac{1}{\lambda\, \mathrm{e}_{-\lambda\overline{p}}(t, t-\alpha)}\right\} &\geq \inf_{\substack{1-\lambda\overline{p}(\eta)>0\\ \eta\in[t-\alpha,t)_{\mathbb{Z}}\\ \lambda>0}} \left\{\frac{1}{\lambda} \prod_{\eta=t-\alpha}^{t-1} \left[1-\lambda\overline{p}(\eta)\right]^{-1}\right\} \\ &\geq \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha+1} \sum_{\eta=t-\alpha}^{t-1} \overline{p}(\eta)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Teorem 3.12 den dolayı (4.2.1) denklemine ait her çözüm salınımlıdır.

Örnek 4.5. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, $\alpha>\beta$ olmak üzere $\gamma,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{+}$ için $\gamma(t)=t-\gamma$, $\alpha(t)=t-\alpha$ ve $\beta(t)=t-\beta$ olsun. Bununla birlikte, yeterine büyük her t için

$$r(t)+\int\limits_{t-\alpha+\beta}^{t} q(\eta)\,d\eta\leq 1 \quad \text{ve} \quad \overline{p}=p(t)-q(t-\alpha+\beta)\geq 0$$

sağlansın. Bu durumda,

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_{t-\alpha}^{t}\overline{p}(\eta)\,d\eta>\frac{1}{\mathrm{e}}$$

ise

$$[x(t)-r(t)\,x(t-\gamma)]'+p(t)\,x(t-\alpha)-q(t)\,x(t-\beta)=0 \tag{4.2.2}$$

denkleminin her çözümü $[0,\infty)_{\mathbb{R}}$ üzerinde salınımlıdır (bakınız Győri, Ladas 1991, Theorem 2.6.1).

Çözüm. Bu durumda, her $t\in\mathbb{R}$ için $\delta(t)=t-\alpha+\beta$, $\delta'(t)\equiv 1$ ve $\delta(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ olarak elde edilir. Buna ek olarak,

$$\begin{aligned}\inf_{\substack{-\lambda\overline{p}\in\mathcal{R}^{+}\left([t-\alpha,t)_{\mathbb{R}}\right)\\ \lambda>0}}\left\{\frac{1}{\lambda\,\mathrm{e}_{-\lambda\overline{p}}(t,t-\alpha)}\right\}&=\inf_{\lambda>0}\left\{\frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\lambda\int\limits_{t-\alpha}^{t}\overline{p}(\eta)\,d\eta\right\}\right\}\\&=\mathrm{e}\int\limits_{t-\alpha}^{t}\overline{p}(\eta)\,d\eta\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 3.12 den dolayı, (4.2.2) denkleminin her çözüm salınımlıdır.

Aşağıda örnek olarak verilen sonuçlar literetürde önemli yer tutan teoremlerin geliştirilmesidir ve bu sunuçların hepsi Sonuç 3.18 in özel bir halidir.

Örnek 4.6. $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, $\alpha>\beta$ olmak üzere $\gamma,\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^{+}$ için $\gamma(t)=t-\gamma$, $\alpha(t)=t-\alpha$ ve $\beta(t)=t-\beta$ olsun. Ayrıca yeterince büyük her t için

$$r(t)+\sum_{\eta=t-\alpha+\beta}^{t-1}q(\eta)\leq 1, \quad r(t)+\sum_{\eta=t-\alpha+\beta}^{t-1}p(\eta+\alpha-\beta)\geq 1$$

ve

$$\underline{p}(t) = p(t+\alpha-\beta) - q(t) \geq 0$$

olsun. Eğer,

$$\liminf_{t\to\infty} t \sum_{\eta=t}^{\infty} \underline{p}(\eta)\, d\eta > \frac{\max\{\gamma,\alpha\}}{4}$$

ise (4.2.1) denkleminin her çözümü $[0,\infty)_{\mathbb{Z}}$ üzerinde salınımlıdır.

Çözüm. Her $t \in \mathbb{Z}$ için $\delta(t) = t - \alpha + \beta$, $\Delta\delta(t) \equiv 1$ ve $\delta(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ olduğu görülür, $\phi(t) = 1$ ve her $t \geq s \geq 0$ için

$$\overline{g}_{\phi}(t,s) = \max\left\{ \sum_{\xi=\eta}^{\max\{\eta+\gamma,\eta+\alpha\}-1} 1 : \eta \in [s,t]_{\mathbb{Z}} \right\} = \max\{\gamma,\alpha\}$$

bulunur. Sonuç 3.18 den dolayı, (4.2.1) denklemine ait olan her çözüm salınımlıdır.

Uyarı 4.7. Örnek 4.6 ten görülmektedir ki, Tang, Shen, Peng, 2000, Teorem 1 deki

$$r(t) + \sum_{\eta=t-\alpha+\beta}^{t-1} q(\eta) \equiv 1$$

şartı (4.2.1) denkleminin her çözümünün salınımlığını göstermek için gerekli değildir.

Örnek 4.8. $\mathbb{T} = [0,\infty)_{\mathbb{R}}$, $\gamma, \alpha, \beta \geq 1$ ve $\alpha > \beta$ olmak üzere,

$$\gamma(t) = t/\gamma, \quad \alpha(t) = t/\alpha \quad \text{ve} \quad \beta(t) = t/\beta$$

ile verilsin. Bununla birlikte, yeterine büyük her t için

$$r(t) + \int_{\beta t/\alpha}^{t} q(\eta)\, d\eta \leq 1, \quad r(t) + \int_{\beta t/\alpha}^{t} \frac{\alpha}{\beta} p(\alpha\eta/\beta)\, d\eta \geq 1$$

ve

$$\overline{p}(t) = \frac{\alpha}{\beta} p(\alpha t/\beta) - q(t) \geq 0,$$

sağlansın. Bu durumda,

$$\liminf_{t\to\infty} t \int_{t}^{t} \frac{1}{\eta}\overline{p}(\eta)\, d\eta > \frac{\ln(\max\{\gamma,\alpha\})}{4}$$

ise

$$[x(t) + r(t)\, x(t/\gamma)]' + p(t)\, x(t/\alpha) - q(t)\, x(t/\beta) = 0 \qquad (4.2.3)$$

pantograf denkleminin her çözümü $[1,\infty)_{\mathbb{R}}$ üzerinde salınımlıdır.

Çözüm. Bu durumda, her $t \in \mathbb{R}$ için $\delta(t) = \beta t/\alpha$, $\delta'(t) \equiv \beta/\alpha$ ve $\delta([0,\infty)_{\mathbb{R}}) = [0,\infty)_{\mathbb{R}}$ olarak elde edilir. Açıkça, $\phi(t) = 1/t$ ve her $t \geq s \geq 1$ için

$$\overline{g}_{\phi}(t,s) = \max\left\{ \int_{\eta}^{\max\{\gamma\eta,\alpha\eta\}} \frac{1}{\xi} d\xi : \eta \in [s,t]_{\mathbb{R}} \right\} = \ln(\max\{\gamma,\alpha\})$$

bulunur. Sonuç 3.18 den dolayı, (4.2.1) denklemine ait her çözüm salınımlıdır.

Uyarı 4.9. Örnek 4.8 den görülmektedir ki, Guan, Shen 2007, Teorem 3.2 deki

$$r(t) + \int_{\beta t/\alpha}^{t} q(\eta)\, d\eta \equiv 1$$

şartı (4.2.3) denkleminin her çözümünün salınımlığını göstermek için gerekli değildir.

Örnek 4.10. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\alpha > \beta$ olmak üzere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$ için $\alpha(t) = t - \alpha$ ve $\beta(t) = t - \beta$ olsun. Bununla birlikte, yeterine büyük her t için

$$r(t) + \int_{t-\alpha+\beta}^{t} q(\eta)\, d\eta \leq 1, \quad r(t) + \int_{t-\alpha+\beta}^{t} p(\eta + \alpha - \beta)\, d\eta \geq 1$$

ve

$$\underline{p}(t) = p(t + \alpha - \beta) - q(t) \geq 0$$

sağlansın. Bu durumda,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\alpha}^{t} \underline{p}(\eta)\, d\eta > \frac{\max\{\gamma,\alpha\}}{4}$$

ise (4.2.2) denkleminin her çözümü $[t_0,\infty)_{\mathbb{R}}$ üzerinde salınımlıdır.

Çözüm. Her $t \geq s$ için,

$$\overline{g}_{\phi}(t,s) = \max\left\{ \int\limits_{\eta}^{\max\{\eta+\gamma,\eta+\alpha\}} 1 d\xi : \eta \in [s,t]_{\mathbb{R}} \right\} = \max\{\gamma, \alpha\}$$

bulunur. Burada, $t \geq t_0$ olmak üzere $\phi(t) \equiv 1$ alınmıstır. Sonuç 3.18 den dolayı her çözüm salınımlıdır.

Uyarı 4.11. Örnek 4.10 dan görülmektedir ki, Luo, Shen 2004, Teorem 3.2 deki

$$r(t) + \int\limits_{t-\alpha+\beta}^{t} q(\eta)\, d\eta \equiv 1$$

şartı (4.2.2) denkleminin her çözümünün salınımlığını göstermek için gerekli değildir.

5 KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., 1992, "Difference equations and inequalities, theory, methods, and applications", Marcel Dekker, New York.

Agarwal, R. P., **Grace, S. R.** ve **O'Regan, D.**, 2000, "Oscillation theory for difference and functional differential equations", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Ahmad, F., 2003. "Linear delay differential equation with a positive and a negative term", Electronic Journal of Differential Equations, vol. 92, pp. 1–6.

Berezansky, L., **Domshlak, Y.** ve **Braverman, E.**, 2002, "On oscillation properties of delay differential equations with positive and negative coefficients", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 274, pp. 81–101.

Berezansky, L. ve **Braverman, E.**, 2003, "Oscillation criteria for a linear neutral differential equation", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 286, pp. 601–617.

Bohner, M. ve **Peterson, A.**, 2001, "Dynamic equations on time scales: An introduction with applications", Birkhäuser Boston.

Bohner, M. ve **Peterson, A.**, 2003, "Advances in dynamic equations on time scales", Birkhäuser, Boston.

Bohner, M., 2005, "Some oscillation criteria for first order delay dynamic equations", Far East Journal of Applied Mathematics, vol. 18, no. (3), pp. 289–304.

Bohner, M., **Karpuz, B.** ve **Öcalan, Ö.**, 2008, "Iterated oscillation criteria for delay dynamic equations of first order", (gönderildi).

Chanturia, T. A., 1980, "Integral criteria for the oscillation of higher order differential equations", Differencialnye Uravnenija, vol. 16, pp. 470–482.

Chen, M.-P. and **Zhang, B.-G.**, 1994, "Oscillation and comparison theorems of difference equations with positive and negative coefficients, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, vol. 22, no. (4), pp. 295–306.

Cheng, S.-S., **Guan X.-P.** ve **Yang J.**, 2000, "Positive solutions of a nonlinear neutral equation with positive and negative coefficients", Acta Mathematica Hungarica, vol. 86, no. (3), pp. 169–192.

Das, P. ve **Misra, N.**, 1997, "A necessary and sufficient condition for the solution of a functional differential equation to be oscillatory or tend to zero", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 204, pp. 78–87.

Elabbasy, E. M. ve **Saker, S. H.**, 1999, "Oscillation of nonlinear delay differential equations with several positive and negative coefficients", Kyungpook Mathematical Journal, vol. 39, pp. 367–377.

Elabbasy, E. M., **Hegazi, A. S.** ve **Saker, S. H.**, 2000, "Oscillation of solutions to delay differential equations with positive and negative coefficients", Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2000, no. (13), pp. 1–13.

Farrell, K., **Grove, E. A.** ve **Ladas, G.**, 1988, "Neutral delay differential equations with positive and negative coefficients", Applicable Analysis, vol. 27, no. (1-3), pp. 181–197.

Erbe, L. H. ve **Zhang, B.-G.**, 1989, "Oscillation of discrete analogous of delay equations", Differential and Integral Equations, vol. 2, pp. 300–309.

Erbe, L. H., **Kong, Q.** ve **Zhang, B.-G.**, 1994, "Oscillation theory for functional difference equations", Marcel Dekker, New York.

Guan, K.-Z. and **Shen, J.-H.**, 2007, "Hille type oscillation criteria for a class of first order neutral pantograph differential equations of Euler type", Communications in Mathematical Analysis, vol. 3, no. (1), pp. 27–35.

Győri, I. ve **Ladas, G.**, 1991, "Oscillation theory of delay differential equations with applications", Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

Hale, J. K., 1977, "Theory of functional differential equations", Springer-Verlag, New York.

Hilger, S., 1998, "Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten", Ph.D. Thesis, Universität Würzburg.

Hille, E., 1948, "Non-oscillation theorems", Transactions of the American Mathematical Society, vol. 64, pp. 234–252.

Hunt, B. R. ve **Yorke J. A.**, 1948, "When all solutions of $x' = -\sum q_i(t)\, x(t - T_i(t))$ oscillate", Journal of Differential Equations, vol. 53, no. (2), pp. 139–145.

Karpuz, B., 2008, "Some oscillation and nonoscillation criteria for neutral delay difference equations with positive and negative coefficients", (gönderildi).

Karpuz, B., 2008, "Hille-type oscillation and nonoscillation criteria for second-order dynamic equations on time scales", (gönderildi).
Karpuz, B. ve **Öcalan, Ö.**, 2008, "Oscillation criteria for some classes of differential equations of first-order", Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, , vol. 3, no. 2, pp. 293–314.
Karpuz, B. ve **Öcalan, Ö.**, 2008, "Oscillation and nonoscillation of first-order dynamic equations with positive and negative coefficients", Dynamic Systems and Applications (kabul edildi).
Karpuz, B., **Öcalan, Ö.** ve **Shen, J.-H.**, 2008, "Oscillation criteria for a class of forced differential equations of first-order with impulses", (gönderildi).
Koplatadze, R. G. ve **Canturia, T. A.**, 1982, "On the oscillatory and monotone solutions of the first order differential equations with deviating arguments", Journal Difference Equations, vol. 18, pp. 1463–1465.
Lakshmikantham, V., **Sivasundaram, S.** ve **Kaymakçalan, B.**, 1996, "Dynamic Systems on Measure Chains", Kluwer Academic Publishers.
Ladas, G., 1979, "Sharp conditions for oscillations caused by delay", Applicable Analysis, vol. 9, pp. 93–98.
Ladas, G. ve **Sficas, Y. G.**, 1986, "Sharp conditions for oscillations of delay difference equations", Journal of Applied Mathematics and Simulation, vol. 2, pp. 101–112.
Ladas, G. ve **Sficas, Y. G.**, 1986, "Oscillations of neutral delay differential equations", Canadian Mathematical Bulletin, vol. 29, pp. 438–445.
Ladas, G., 1990, "Explicit conditions for the oscillation of difference equations", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 153, pp. 276–287.
Ladas, G. ve **Qian, C.**, 1990, "Oscillation in differential equations with positive and negative coefficients", Canadian Mathematical Bulletin, vol. 33, pp. 442–451.
Ladas, G. ve **Qian, C.**, 1989, "Oscillatory behavior of difference equations with positive and negative coefficients", Matematiche (Catania), vol. 44, no. (2), pp. 293–310.
Ladde, G. S., **Lakshmikantham, V.** ve **Zhang, B.-G.**, 1987, "Oscillation theory of differential equations with deviating arguments", Marcel Dekker, New York.

Li, B.-T., 1996, "Oscillation of first order delay differential equations", Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 124, no. (12), pp. 3729–3737.

Li, B.-T., 1998, "Multiple integral average conditions for oscillation of delay differential equations", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 219, pp. 165–178.

Luo, Z.-G., **Shen, J.-H.** ve **Liu, X.-Z.**, 2000, "Oscillation criteria for a class of forced neutral equations", Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, vol. 7, no. (4), pp. 489–501.

Luo, Z.-G. ve **Shen, J.-H.**, 2004, "Oscillation and nonoscillation of neutral differential equations with positive and negative coefficients", Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 54, no. (129), pp. 79–93.

Öcalan, Ö., 2007, "Oscillation of forced neutral differential equations with positive and negative coefficients", Computers & Mathematics with Applications, vol. 54, no. (11-12), pp. 1411–1421.

Öcalan, Ö., 2007, "Oscillation of neutral differential equations with positive and negative coefficients", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 331, pp. 644–654.

Parhi, N. ve **Chand, S.**, 2000, "On forced first order neutral differential equations with positive and negative coefficients", Math. Slovaca, vol. 50, pp. 81–94.

Parhi, N. ve **Rath, R.**, 2001, "Oscillation criteria for forced first order neutral differential equations with variable coefficients", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 256, pp. 525–541.

Rath, R. ve **Misra, N.**, 2004, "Necessary and sufficient conditions for oscillatory behaviour of solutions of a forced nonlinear neutral equation of first order with positive and negative coefficients", Math. Slovaca, vol. 54, pp. 255–266.

Rath, R., **Mishra P. P.** ve **Padhy L. N.**, 2007, "On oscillation and asymptotic behaviour of a neutral differential equation of first order with positive and negative coefficients", Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2007, no. (1), pp. 1–7.

Shen, J.-H. ve **Debnath L.**, 2001, "Oscillations of solutions of neutral differential equations with positive and negative coefficients", Applied Mathematics Letters, vol. 14, no. (6), pp. 775–781.

Şahiner, Y. ve **Stavroulakis, I. P.**, 2006, "Oscillations of first order delay dynamic equations", Dynamic Systems and Applications, vol. 15, pp. 645–656.

Tang, X.-H., **Shen, J.-H.** ve **Peng, D.**, 2000, "Oscillation and nonoscillation of neutral difference equations with positive and negative coefficients", Computers & Mathematics with Applications, vol. 39, no. (7 -8), pp. 169–181.

Tang, X.-H. ve **Shen, J.-H.**, 2000, "Oscillation of first order delay differential equations", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 248, no. (1), pp. 247–259.

Tang, X.-H., 2001, "Oscillation for first-order nonlinear delay differential equations", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 264, no. (2), pp. 510–521.

Tao, Y.-S. ve **Gao, G.-Z.**, 1998, "Oscillation of forced neutral differential equations with positive and negative coefficients", Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B 13 (1998), no. (3), pp. 271–280.

Tian, C.-J. ve **Cheng, S.-S.**, 2003, "Oscillation criteria for delay neutral difference equations with positive and negative coefficients", Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, vol. 21(3), no. (1-2), pp. 19–30.

Yu, J.-S. ve **Wang, Z.-C.**, 1991, "Neutral differential equations with positive and negative coefficients", Acta Math. Sinica, vol. 34, pp. 517–523.

Yu, J.-S. ve **Wang, Z.-C.**, 1992, "Some further results on oscillation of neutral differential equations", Bull. Austral. Math. Soc., vol. 46, pp. 149–157.

Yu, J.-S., **Chen, M.-P.** ve **Zhang, H.**, 1998, "Oscillation and nonoscillation in neutral equations with integrable coefficients", Computers & Mathematics with Applications, vol. 35, no. (6), pp. 65–71.

Zhang, B.-G. ve **Deng, X.-H.**, 2002, "Oscillation of delay differential equations on time scales", Mathematical and Computer Modelling, vol. 36, no. (11-13), pp. 1307–1318.

Zhang, B.-G., **Yan, X.-Z.** ve **Liu, X.-Y.**, 2005, "Oscillation criteria of delay dynamic equations on time scales", Journal of Difference certain Equations and Applications, vol. 11, no. (10), pp. 933–946.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgileri:

Ad Soyad:	Başak KARPUZ
Doğum Yeri ve Tarihi:	Kolonya/B. ALMANYA 01.08.1984
Ünvan:	Araştırma Görevlisi
Medeni Hal:	Bekar
Yabancı Dil:	İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise:	Soma Rıfat Dağdelen Anadolu Lisesi	1999–2002
Lisans:	Afyon Kocatepe Üniversitesi	2002–2006
Yüksek lisans:	Afyon Kocatepe Üniversitesi	2006–
Çalıştığı Kurum:		
Afyon Kocatepe Üniversitesi	Matematik Bölümü	2007–

Katıldığı Kongre, Konferans ve Seminerler:

Kuşadası,	Dynamical Systems and Applications(Uluslararası),	2007
ODTÜ,	6th ISAAC(Uluslararası),	2007
Pamukkale Ünv.,	Differential Equations and Applications,	2008
Yeditepe Ünv.,	Diferensiyel Denklemler Çalıştayı,	2008
ODTÜ,	Ankara Diferansiyel Denklem Seminerleri,	2007, 2008
AKÜ, SÜ, TOBB,	Fark Denklem Seminerleri,	2007, 2008

İletişim Bilgileri:

Adres: Afyon Kocatepe Üniversitesi
Ahmet Nejdet Sezer Kampüsü
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
email: bkarpuz@aku.edu.tr, bkarpuz@gmail.com