KOORDİNATLARDA $s-$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gözde BAYRAK

Danışman
Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2022

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOORDİNATLARDA $s-$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Gözde BAYRAK

Danışman
Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2022

TEZ ONAY SAYFASI

Gözde BAYRAK tarafından hazırlanan "Koordinatlarda $s-$Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizlikleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 13/06/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	: Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ	
Başkan	: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.	......
Üye	: Doç. Dr. Hüseyin BUDAK Düzce Üniv., Fen Edebiyat Fak.	......
Üye	: Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.	......

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../.......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

13/06/2022

......

Gözde BAYRAK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOORDİNATLARDA $s-$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKI TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Gözde BAYRAK

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş niteliğinde olup Eşitsizlik Teorisi ile Konveks Fonksiyonların tarihi üzerine bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde konveks fonksiyonlar, koordinatlarda konveks fonksiyonlar ve ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için temel tanım ve kavramlara değinilmiştir. Üçüncü bölümde ise fonksiyonların koordinatlarda konveksliğinden yararlanılarak elde edilmiş bazı ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizliklerle ilgili literatürde yer alan lemma ve teoremler verilmiştir. Bu bölümde verilen lemmalar kullanılarak elde edilen integral eşitsizlikleri tez çalışmasına temel oluşturmuştur. Dördüncü bölümde ise, ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlikler kullanılarak koordinatlarda $s-$konveks fonksiyonların $s-$konvesliği ile ilgili bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2022, v + 45 sayfa

Anahtar Kelimeler : Konveks fonksiyonlar, $s-$konveks fonksiyonlar, Koordinatlarda konveks fonksiyonlar, İntegral eşitsizlikleri, Ostrowski tipli eşitsizlikler.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

WEIGHTED OSTROWSKI TYPE INEQUALITIES
FOR CO-ORDINATED $s-$CONVEX FUNCTIONS

Gözde BAYRAK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Mehmet Eyüp KİRİŞ

This thesis study consists of five chapters.

The first chapter is an introduction and information on the Inequality Theory and the history of Convex Functions is presented. In the second chapter, basic definitions and concepts for convex functions, convex functions in co-ordinates and $s-$convex functions in the second sense are discussed. In the third chapter, lemmas and theorems in the literature about some weighted Ostrowski type inequalities obtained by using the convexity of functions in co-ordinates are given. The integral inequalities obtained by using the lemmas given in this section formed the basis for the thesis study. In the fourth chapter, by using weighted Ostrowski type inequalities, some new integral inequalities related to $s-$convexity of $s-$convex functions in co-ordinates are obtained.

In the fifth section, which is the last section, the sources in the literature used during the study are listed.

2022, v + 45 pages

Keywords : Convex functions, $s-$convex functions, Convex functions in coordinates, Integral inequalities, Ostrowski type inequalities.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam için konu belirlenmesi, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve tezimin yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ'e, araştırma ve yazım süresince yardımlarını ve desteğini hiç esirgemeyen Hasan KARA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan ve her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Gözde BAYRAK

Afyonkarahisar 2022

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
I	$\mathbb{R}$' de bir aralık
$\mathbb{R}_+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$.	Iki boyutlu Öklid uzayı
sup	supremum
$f\ '$	f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$\|f'\|_\infty$	f fonksiyonunun türevinin sonsuz normu
K_s^1	Birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon sınıfı
K_s^2	İkinci anlamda $s-$konveks fonksiyon sınıfı
$[a,b]\times[c,d]$	$[a,b]$ aralığı ile $[c,d]$ aralığının kartezyen çarpımı
$\int\int$	Çift katlı integral
$f''_{x,y}$	f fonksiyonunun x ve y'ye göre kısmi türevi
$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}$	f fonksiyonunun t ve s ye göre kısmi türevi
$\left\|f''_{x,y}\right\|_\infty$	f fonksiyonunun x ve y'ye göre kısmi türevinin sonsuz normu

1. GİRİŞ

Matematik düşünmek için bir araçtır. Her şeyin birbiriyle iç içe ve ilişkili olduğu, doğrusal olmayan bir dünyada oldukça gerekli bir araç olduğu aşikardır. Benzer şekilde, matematiğin her alanı da diğer bilimler için bir araç görevi görür. Topoloji, matematiksek fiziği; mantık, bilgisayar bilimini; ölçü teorisi, bölgesel ve teorik iktisatı; cebirsel geometri, fiziği etkiler. Bunların yanında matematik her an günlük hayatımızla etkileşim halindedir. Matematiğin modern kullanım alanları şu şekilde örneklendirilebilir: Diferansiyel denklemler ve nümerik analiz teknikleri, uçak modellemede, uydu yapımında kullanılır. Soyut mantık, bilgisayar dizaynında; cebirsel topolojinin alt alanlarından biri olan homoloji, uzak gezegenlerin fotoğraflarından gezegen yüzeyinin coğrafyasını anlamada; Fourier analizi iletişim ağında ve aynı zamanda resim, video ve müziğin dijital ortamda sıkıştırılmasında; fraktallar anten yapımında; Graf teorisi, veri tabanının topolojik olarak incelenmesinde; Stein uzayları tahminleme ve elektrik mühendisliğinde; Lie cebirleri filtreleme yöntemi olarak; Minkovsky lemma kodlama teorisinde kullanılır.

Verilen örnekler matematiğin kullanım alanlarının yalnızca bir bölümü olsa da gösteriyor ki matematiğin tamamen soyut olan, hayatın içinde uygulanmayan hiçbir parçası yoktur. Bu durum da uygulamalı matematik alanında yapılan çalışmaların son yıllarda fark edilir şekilde artmasına neden olmuştur. Uygulamalı matematik alanındaki artan uzmanlaşma ve çeşitlilik, matematik biliminin ve alt dallarının büyümesini, yeni dallar oluşmasını sağlarken aynı zamanda tamamen birbirinden farklı olduğu düşünülen dalların birbiriyle ilişkili olduğunu göstermesi açısından önem arz etmektedir. Ayrıca matematik, ilk bakışta oldukça parçalanmış gibi görünse de bu parçalar arasındaki daha derin ilişkileri bulmak, görmek ve kullanmak için üzerinde daha fazla çalışılmasına ihtiyaç duyar. Bunun için ise uygulamalı matematik alanı çalışanlarına oldukça iş düşmektedir.

Uygulamalı matematikte çalışmak için her türlü kombinasyona, cebire, olasılığa ihtiyaç duyulmasının yanı sıra geleneksel çalışmaların, analiz ve sayısal bilginin gerekliliği de yadsınamaz. Analiz çalışma alanı açısından çok kapsamlı olmakla birlikte önemli bir kısmını; diferansiyel, integral, diğer denklemlerde ortaya çıkan fonksiyonlar hakkındaki tahminler ve eşitsizlikler oluşturur. Bunlar içerisinden analitik eşitsizlikler, matematiğin çeşitli dallarının ve birçok uygulamalı bilim dalının gelişimindeki önemli güçlerden biri olarak kabul edildiğinden bir adım öne çıkmıştır.

Günümüzde hala aktif ve çekici bir araştırma alanı olan matematiksel eşitsizlikler, C. F. Gauss, A. L. Cauchy ve P. L. Cebysev' in yaklaşım teorisi için önemli teorik temelleri atmalarıyla birlikte gelişmeye başlamıştır. On dokuzuncu yüzyıl sonları ve yirminci yüzyıl başlarında, bazıları klasik haline gelen çok sayıda eşitsizlik kanıtlanmıştır. Bu eşitsizliklerin sistemli bir disiplin haline dönüşmesi ise G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya tarafından ortaya konulan "Inequalities" adlı kitapla olmuştur. 1934 yılında yayımlanan bu kitapla birlikte Eşitsizlik Teorisi'ne yönelik ilgi artmış ve bu alanda çok sayıda makale yazılmıştır. Bu makalelerle birlikte yeni eşitsizlikler keşfedilmiş, klasik eşitsizlikler genişletilmiş, bazı eşitsizlik çeşitleri birbirleriyle ilişkilendirilmiş ve bazı eşitsizlik çeşitlerinin uygulama alanlarına yer verilmiştir. 1934-1960 döneminde elde edilen eşitsizlikler ve sonuçları ise 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından "Inequalities" adlı kitapta kayıt altına alınmıştır. Ardından Mitrinovic tarafından yazılan "Analytic Inequalities" adlı kitap da klasik eşitsizliklerin yorumlanmasına sağladığı katkıyla literatürdeki yerini almıştır. Bu üç büyük kitap, eşitsizlikler konusunda oldukça önemli bir yere sahip olup hala son dönemdeki çalışmalara ışık olmaya devam etmektedir. Eşitsizlikler konusunda yeni sonuçlar içeren "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" (Mitrinovic vd. 1991), "Classical and New Inequalities in Analysis" (Mitrinovic vd. 1993), "Mathematical Inequalities" (Pachpatte 2005), "Convex Functions and Their Applications" (Niculescu ve Perssons 2006) isimli çalışmalar da literatüre katkıda bulunan önemli eserler arasındadır. Günümüzde ise eşitsizlik konusu ile ilgili, S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, J. Pecaric, M. Z. Sarıkaya, E. Set, M. E. Özdemir gibi araştırmacılar çok sayıda kitap, monografi ve makale yayımlamışlardır.

Diğer yandan tanımı eşitsizlik ile ifade edilen konveksliğin ve Konveks Fonksiyonlar Teorisi'nin eşitsizlikler içerisinde önemli bir yeri vardır. Konvekslik kavramının tanımı çok eskiye (M.Ö. 250 yılına) dayanmasına rağmen konveks fonksiyonlarla ilgili sistematik araştırmalara 19. yüzyılın sonlarında başlanmıştır. Konveks fonksiyonlar ile ilgili yapılan en kapsamlı araştırma ise Roberts ve Varbeg (1973) tarafından "Convex Function" adlı eserle ortaya konmuştur. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizliklerden bahseden ilk kaynak olma özelliğine sahip "Convex Function: Inequalities" adlı kitap ise Pecaric (1992) tarafından yayımlanmıştır. Bunun yanında klasik konvekslik tanımı yardımıyla daha genel olan konveks fonksiyon çeşitleri de oluşturulmaktadır. Bunlardan biri Breckner (1978) tarafından "Stetigkeitsaussagen Für Eine Klasse Verallgemeinerter Konvexer Funktionen In Topologischen Linearen Raumen" adlı çalışma ile literatüre giren $s-$konveks fonksiyonlardır. Bu çalışma geliştirilerek $s-$konvekslik ile ilgili özelliklere yer veren "Some Remarks On $s-$Convex Functions" adlı makale Hudzig ve Maligranda (1994) tarafından yayımlanmıştır.

Son yıllarda eşitsizlik konusu üzerine yapılan araştırmalar, yayımlanan makaleler ve monografiler bu alanda dikkate değer bir gelişme ve büyüme olduğunu göstermektedir. Özellikle Cebysev, Grüss, Yamuk (Trapezoid), Ostrowski, Hermite-Hadamard ve Jensen isimleriyle ilişkili eşitsizlikler çokça araştırmaya konu olmuştur.

Bu önemli eşitsizliklerden biri olan A. M. Ostrowski tarafından tanımlanan eşitsizlik aşağıdaki gibidir:

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ türev fonksiyonu üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ türev fonksiyonu $\|f'\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} |f'(t)| < \infty$ ise, yani (a, b) aralığında sınırlı ise, bu durumda her $x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] (b-a) \|f'\|_\infty$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki $\frac{1}{4}$ sabiti bu koşullar altındaki en iyi olasılıktır. Bu eşitsizlik, $x \in [a, b]$ noktasındaki $f(x)$ değeri ile,

$$\int_a^b f(t)dt$$

integral ortalaması arasındaki yaklaşım için bir üst sınır vermektedir.

Ostrowski eşitsizliği olarak bilinen bu eşitsizlik, 1938 yılında ortaya çıkmıştır. Matematiğin tüm alanlarında; özellikle Yaklaşım Teorisi'nde, Riemann integrali ile birlikte hem tek hem çok katlı integrallerin uygulamalarında, tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonların hata analizi uygulamalarında önemli bir rol oynamaktadır. Bir fonksiyonun değerine yaklaşmada fonksiyonun ortalama değerinin yardımı ile hata tahmini yapılmasını sağlamaktadır. Aynı zamanda Riemann integraline yaklaşmak için oluşturulmuş birçok quadrik kuralın sınırlarını sağladığından hata sınırlarını elde etmek için kullanılmaktadır. Bunun yanında Ostrowski tipli eşitsizlikler Nümerik Analiz'de, Bilişim Kuramı'nda, Olasılık Teorisi ve İstatistik gibi alanlarda geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu nedenle son yıllarda yapılan çalışmalarla sürekli ve ayrık durumlarda, Ostrowski tipli eşitsizliklerin çok sayıda genellemeleri, genişlemeleri ve varyantları yapılmıştır. Böylece, kökenleri Ostrowski eşitsizliğine dayanan eşitsizlikler literatürde daha geniş bir yer edinmiştir. Ostrowski tipli eşitsizliklerle ilgili çalışmaların büyük bir kısmı, Dragomir ve Rassias (2002) tarafından yazılmış olan "Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration" adlı kitapta bir araya getirilmiştir. Bu kitabın yanında, son yıllarda S. S. Dragomir, K. L. Tseng, N. S. Burnett, M. W. Alomari, G. S. Yang gibi araştırmacılar da yaptıkları çalışmalarla yayımlanan makale ve monografilerle literatüre büyük katkı sağlamışlardır.

Konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler üzerine yazılmış olan temel kitaplar ve yapılan çalışmalar haricinde literatürde birçok makale, yüksek lisans ve doktora tez çalışmaları bulunmaktadır. Bunlardan öne çıkan bazı çalışmalar şu şekilde sıralanabilir:

Set (2010) tarafından yazılan "Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı doktora tezinde $E-$konveks ve E–m konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden $E-$konveks ve E–m konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Bunun yanında bu tez çalışmasında

$m-$konveks, $(\alpha, m)-$konveks, $\log -$konveks, $quasi$-konveks, $s-$konveks, $r-$konveks ve $h-$konveks fonksiyonlarla ilgili bazı yeni integral eşitsizliklerine ve genelleştirmelere yer verilmiştir.

Tunç (2011) tarafından yazılan "Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları" başlıklı doktora tez çalışmasında farklı tip konveks fonksiyon sınıfları için Hermite- Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Akdemir (2012)'in, "Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Koordinatlarda İntegral Eşitsizlikler" adlı doktora tezinde; bazı konveks fonksiyonlar dikdörtgensel bölge üzerinde incelenerek bu fonksiyonlar için koordinatlarda çeşitli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Bununla birlikte $m-$konveks, $(\alpha, m)-$konveks, $s-$konveks, $h-$konveks, $p-$konveks ve $quasi$-konveks fonksiyonlar gibi farklı türden konveks fonksiyonların çarpımlarına dair koordinatlarda integral eşitsizlikleri oluşturulmuştur.

Kavurmacı (2012)'nın "Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite - Hadamard Tipli integral Eşitsizlikler" başlıklı doktora tezinde, $m-$konveks, $(\alpha, m)-$konveks, $s-$konveks, $r-$konveks gibi farklı türden fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni tanımlamalar ve örneklendirmeler yapılmıştır. Ayrıca bu konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni baskın konveks fonksiyon kavramları tanımlanmış ve yeni Hermite - Hadamard tipli; $s-$konveks ve $m-$konveks fonksiyonlar içinse yeni Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri literatüre kazandırılmıştır.

Ardıç (2013) tarafından, "Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları İçin İntegral Eşitsizlikler" adlı doktora tezinde $\varphi_{h,m}-$ konveks fonksiyon tanımı yapılarak bu konveks fonksiyon sınıfı için eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite - Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler ile konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler de elde edilmiştir.

Budak (2017) tarafından, "Sınırlı Varyasyonlu Fonksiyonlar İçin Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları" adlı doktora tez çalışması ile sınırlı varyasyona sahip tek değişkenli fonksiyonlar için bazı genelleştirilmiş Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri ispatlanmış ve özel durumları incelenmiştir. Bununla birlikte iki değişkenli sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için bazı Ostrowski tipli eşitsizlikler de bu çalışma ile elde edilmiştir.

Son yıllarda eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar üzerine çok sayıda makale ve monografi de yayımlanmıştır. Bunlardan bu tezde en çok yararlanılanlar şu şekilde sıralanabilir:

“Selected Topics on Hermite - Hadamard Inequalities and Applications” (Dragomir ve Pearce 2000).

“On the Hermite - Hadamard's and Ostrowski's Inequalities for The Co-ordinated Convex Functions” (Erden ve Sarıkaya 2017).

“Co-ordinated $s-$Convex Function in The First Sense with Some Hadamard - Type Inequalities” (Alomari ve Darus 2008).

“Some New Hadamard Type Inequalities For Co-ordinated $m-$Convex and $(\alpha, m)-$Convex Functions” (Özdemir vd. 2010).

“On Hadamard-type Inequalities for $h-$Convex Functions On The Co-ordinates” (Latif ve Alomari 2009).

“New Integral Inequalities For Co-ordinated Convex Functions” (Özdemir vd. 2011).

“New Some Hadamard's Type Inequalities For Co-ordinated Convex Functions” (Sarıkaya vd. 2010).

Bu teze referans olan esas çalışma ise koordinatlarda konveks fonksiyonlar için yeni ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizliklerin elde edildiği “Weighted Ostrowski type Inequalities For Co-Ordinated Convex Functions” (Budak 2022) isimli makaledir.

Bu tez çalışmasında ise koordinatlarda $s-$konveks fonksiyonlar yardımıyla bazı yeni Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölüm tezde yer alan bazı temel tanım, teorem ve teoremlerin ispatından oluşmaktadır.

2.1 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$(1-t)x + ty \in K$$

oluyorsa, $K \subseteq \mathbb{R}$ kümesine klasik anlamda *Konveks Küme* denir (Dragomir ve Pearce 2000).

Tanım 2.2 $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

oluyorsa, $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *Konveks Fonksiyon* denir (Dragomir ve Pearce 2000).

Tanım 2.3 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $0 < s \leq 1$ şartı altında *Birinci Anlamda $s-$Konveks Fonksiyon* ise; $\forall x, y \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere;

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Bu $s-$konveks fonksiyon sınıfı genellikle K_s^1 şeklinde gösterilmektedir (Matuszewska ve Orlicz 1961).

Tanım 2.4 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $0 < s \leq 1$ şartı altında *İkinci Anlamda $s-$Konveks Fonksiyon* ise; $\forall x, y \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere;

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Bu $s-$konveks fonksiyon sınıfı genellikle K_s^2 şeklinde gösterilmektedir (Breckner 1978).

Tanım 2.4 te, $s = 1$ için klasik konvekslik elde edilir (Maden vd. 2014).

2.2 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Önemli İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 2.5 $I, \mathbb{R}$ de bir aralık; $a, b \in I$ ile $a < b$ iken $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks bir fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Literatürde *Hermite-Hadamard Eşitsizliği* olarak adlandırılan bu eşitsizlik; birçok uygulama alanı ve geometrik yorumuyla konveks fonksiyonlar teorisinin en köklü eşitsizliklerinden biridir. Hermite - Hadamard eşitsizliği konveks fonksiyonların integralinin ortalama değeri için tahminler vermesi açısından önemlidir. Bunun yanında son yıllarda yeniden ilgi görmüş ve dikkate değer şekilde çeşitli araştırmalar ve genelleştirmelerde kullanılmıştır.

Bunlardan biri de $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir.

Teorem 2.6 $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $I \in [0,1]$ koşuluyla $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci anlamda $s-$konveks bir fonksiyon ise;

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik literatürde ikinci anlamda *$s-$Konveks Fonksiyonlar için Hermite - Hadamard Eşitsizliği* olarak adlandırılır (Dragomir ve Fitzpatrick 1999).

Teorem 2.7 f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|^q$ ile $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlarken $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulları altında;

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği *Hölder Eşitsizliği* olarak adlandırılır (Mitrinovic vd. 1993).

Çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği ise,

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\,dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|^p\,dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x,y)|^q\,dxdy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.8 f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|$ ile $|g|^q$, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olsun. $q \geq 1$ olmak şartıyla;

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\,dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. *Power-Mean Eşitsizliği* olarak bilinen bu eşitsizlik; Hölder Eşitsizliğinin doğal bir sonucudur.

Çift katlı integraller için Power- Mean eşitsizliği ise,

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\,dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|\,dxdy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|\,|g(x,y)|^q\,dxdy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.9 Herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x|+|y|, \\ ||x|-|y|| &\leq |x-y|, \\ ||x|-|y|| &\leq |x+y| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. *Üçgen Eşitsizliği* olarak adlandırılan bu eşitsizlikte tümevarım yöntemiyle,

$$|x_1+...+x_n| \leq |x_1|+...+|x_n|$$

eşitsizliği de sağlanır (Mitrinovic vd. 1993).

Teorem 2.10 f reel değerli ve $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $a<b$ iken;

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

sağlanan bu eşitsizlik *İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği* olarak adlandırılır.

Teorem 2.11 $a,b\in\mathbb{R}$ ve $a<b$ iken, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer, $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde sınırlı ise, yani $\|f'\|_\infty = \sup\limits_{x\in(a,b)}|f'(x)|<\infty$ ise, bu durumda her $x\in[a,b]$ için,

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\,\|f'\|_\infty$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki $\frac{1}{4}$ sabiti bu koşullar altındaki en iyi olasılıktır (Ostrowski 1938).

Ostrowski Eşitsizliği, sınırlı ve diferansiyellenebilir fonksiyonlar için $[a,b]$ aralığında bulunan bir x noktası için f(x) değeri ile,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

integral ortalaması arasındaki yaklaşıma bir üst sınır vermesi açısından önemlidir.

Ayrıca Ostrowski eşitsizliğinde, $x=\frac{a+b}{2}$ yazıldığında, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı elde edilmektedir.

İspat. : (a,b) aralığında diferansiyellenebilen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $x\in(a,b)$ için;

$$w(x,t)=\begin{cases} t-a & , \quad a\leq t\leq x \\ t-b & , \quad x\leq t\leq b \end{cases}$$

tanımlansın.

Böylece;

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b w(x,t)f'(t)dt &= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)f'(t)dt + \int_x^b (t-b)f'(t)dt\right] \\
&= f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt
\end{aligned}
$$

olur. Bu eşitlikte iki tarafın da mutlak değeri alınırsa;

$$
\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| = \left| \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)f'(t)dt + \int_x^b (t-b)f'(t)dt\right]\right|
$$

elde edilir. İntegraller için Üçgen Eşitsizliği kullanılırsa;

$$
\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x |t-a|\,|f'(t)|\,dt + \int_x^b |t-b|\,|f'(t)|\,dt\right]
$$

olur. $\|f'\|_\infty = \sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| < \infty$ olduğundan;

$$
\begin{aligned}
\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| &\leq \frac{\|f'\|_\infty}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)dt + \int_x^b (b-t)dt\right] \\
&= \frac{\|f'\|_\infty}{b-a}\left[\left.\frac{(t-a)^2}{2}\right|_a^x - \left.\frac{(b-t)^2}{2}\right|_x^b\right] \\
&= \frac{\|f'\|_\infty}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada;

$$
\begin{aligned}
(x-a)^2+(b-x)^2 &= \left(x-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}-a\right)^2 + \left(b-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}-x\right)^2 \\
&= \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-x\right) + \left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 \\
&= 2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$= \quad 2\left(b-a\right)^{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{2}}{(b-a)^{2}}\right]$$

kullanılarak ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 2.12 $f:\Delta\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde sürekli olsun. $f''_{x,y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $(a,b)\times(c,d)$ üzerinde var ve sınırlı olsun. Öyle ki;

$$\left\|f''_{x,y}\right\|_{\infty}=\sup_{(x,y)\in(a,b)\times(c,d)}\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|<\infty.$$

O halde, $(x,y)\in\Delta$ için;

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(t,s)dsdt-(b-a)\left(d-c\right)f(x,y)-\left[(b-a)\int_c^d f(x,s)ds+(d-c)\int_a^b f(t,y)dt\right]\right|$$

$$\leq\left[\tfrac{1}{4}\left(b-a\right)^{2}+\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^{2}\right]\left[\tfrac{1}{4}\left(d-c\right)^{2}+\left(y-\tfrac{c+d}{2}\right)^{2}\right]\left\|f''_{x,y}\right\|_{\infty}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik, *Çift Katlı İntegraller İçin Ostrowski Eşitsizliği* olarak bilinir.

2.3 Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Genel Kavramlar

Tanım 2.13 $\forall\left(x,y\right),\left(z,w\right)\in\Delta$ ve $\lambda\in[0,1]$ için, $f:\Delta\to\mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)z,\ \lambda y+(1-\lambda)w)\leq\lambda f(x,y)+(1-\lambda)f(z,w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa; f fonksiyonu Δ üzerinde *konveks bir fonksiyon*dur denir (Dragomir 2001).

Eğer $\forall x\in[a,b]$ ve $\forall y\in[c,d]$ için;

$$\begin{aligned} f_y &: [a,b]\to\mathbb{R} \quad , \quad f_y(u) &= f(u,y) \\ f_x &: [c,d]\to\mathbb{R} \quad , \quad f_x(v) &= f(x,v) \end{aligned}$$

kısmi dönüşümleri de konveks oluyorsa, $f:\Delta\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da *Koordinatlarda Konveks*tir denir.

Lemma 2.14 $f : \Delta \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise koordinatlada da konvekstir fakat koordinatlarda konveks her fonksiyon konveks değildir (Dragomir 2001). Gerçekten de $f(x, y) = xy$ şeklinde tanımlanan $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda konveks olmasına rağmen $[0, 1] \times [0, 1]$ için konveks değildir.

Tanım 2.15 $\forall (x, u), (y, v) \in \Delta$ için $f : \Delta \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall t, s \in [0, 1]$ şartları altında;

$$\begin{aligned} & f(tx + (1-t)\ y, su + (1-s)\ v) \\ & \leq ts\ f(x, u) + t(1-s)f(x, v) + s(1-t)f(y, u) + (1-t)(1-s)f(y, v) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu Δ üzerinde *Koordinatlarda Konvekstir* denir (Latif ve Alomari 2009).

Tanım 2.16 $f : \Delta \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, u), (y, v) \in \Delta$ ile $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve $\alpha, \beta \geq 0, s \in (0, 1]$ koşulları altında;

$$f(\alpha x + \beta y, \alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(x, u) + \beta^s f(y, v)$$

ise, f fonksiyonuna Δ üzerinde *Koordinatlarda Birinci Anlamda* $s-$*Konvekstir* denir (Alamori ve Darus 2008).

Tanım 2.17 $f : \Delta \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, u), (y, v) \in \Delta$ olmak üzere, $s \in (0, 1]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ koşulları altında;

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda^s f(x, u) + (1-\lambda)^s f(y, v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna Δ üzerinde *İkinci Anlamda* $s-$*Konveks Fonksiyondur* denir (Alamori ve Darus 2008).

Bu temel tanımların yanında $\mathbb{R}^2$ uzayında (dikdörtgende) koordinatlarda konveks fonksiyonlar için, Dragomir (2001) tarafından ispatlanan Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir:

Teorem 2.18 $f : \Delta \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun koordinatlarda konveks bir fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)dx+\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)dy\right]\\
&\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx\\
&\leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,c)dx+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,d)dx\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{d-c}\int_c^d f(a,y)dy+\frac{1}{d-c}\int_c^d f(b,y)dy\right]\\
&\leq \frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}
\end{aligned}$$

geçerli olan bu eşitsizlik *Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar için Hermite- Hadamard Eşitsizliği* olarak adlandırılır (Dragomir 2001).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Ağırlıklı Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

Lemma 3.1 $w : \Delta \to [0, \infty)$ fonksiyonu Δ üzerinde integrallenebilir ve $f : \Delta \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon olmak üzere; her $(t, s) \in \Delta$ için, $\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}$ şeklinde kısmi türevi var olsun. O halde aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
& \left(\int_a^b \int_c^d w(u,v)dvdu\right) f(x,y) - \int_a^b \int_c^d w(u,v)f(u,y)dvdu \\
& - \int_a^b \int_c^d w(u,v)f(x,v)dvdu + \int_a^b \int_c^d w(u,v)f(u,v)dvdu \\
= & \int_a^b \int_c^d P(x,\tau;y,\eta)\frac{\partial^2 f(\tau,\eta)}{\partial t \partial s} d\eta d\tau
\end{aligned}
$$

Burada,

$$
P(x,\tau;y,\eta) = \begin{cases}
\int_a^\tau \int_c^\eta w(u,v)dvdu, & a \le \tau < x, \quad c \le \eta < y \\
\int_a^\tau \int_d^\eta w(u,v)dvdu, & a \le \tau < x, \quad y \le \eta \le d \\
\int_b^\tau \int_c^\eta w(u,v)dvdu, & x \le \tau \le b, \quad c \le \eta < y \\
\int_b^\tau \int_d^\eta w(u,v)dvdu & x \le \tau \le b, \quad y \le \eta \le d.
\end{cases}
$$

şeklindedir.

Lemma 3.2 Lemma 3.1 in şartları sağlansın. Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
& \Theta(a,b,c,d;f,w) \qquad (3.1) \\
= \; & f(x,y) - \frac{1}{m(a,b;c,d)} \int_a^b \int_c^d w(u,v)f(u,y)dvdu \\
& - \frac{1}{m(a,b;c,d)} \int_a^b \int_c^d w(u,v)f(x,v)dvdu
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f(u,v)dvdu$$

ve

$$m(a,b;c,d)=\int_a^b\int_c^d w(u,v)dvdu.$$

olmak üzere,

$$\Theta(a,b,c,d;f,p) \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \frac{(x-a)(y-c)}{m(a,b;c,d)}\int_0^1\int_0^1\left[\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right]\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_1(t),V_1(s)\right)dsdt \\
& +\frac{(x-a)(d-y)}{m(a,b;c,d)}\int_0^1\int_0^1\left[\int_a^{U_1(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right]\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_1(t),V_2(s)\right)dsdt \\
& +\frac{(b-x)(y-c)}{m(a,b;c,d)}\int_0^1\int_0^1\left[\int_b^{U_2(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right]\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_2(t),V_1(s)\right)dsdt \\
& +\frac{(b-x)(d-y)}{m(a,b;c,d)}\int_0^1\int_0^1\left[\int_b^{U_2(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right]\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_2(t),V_2(s)\right)dsdt
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $U_1(t)=tx+(1-t)a$, $U_2(t)=tx+(1-t)b$, $V_1(s)=sy+(1-s)c$ ve $V_2(s)=sy+(1-s)d$ şeklindedir.

Teorem 3.3 w, Lemma 3.1 de tanımlandığı şartlarda olmak üzere Δ üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun. $\|w\|_\infty := \sup_{(x,y)\in\Delta}|w(x,y)|$ şeklinde ifade edilmek üzere; $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|$ ifadesi Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise her $(x,y)\in\Delta$ için, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|\Theta(a,b,c,d;f,p)| \tag{3.3}$$

$$\leq \frac{\|w\|_\infty}{36\times m(a,b;c,d)}$$

$$\times\left\{(x-a)^2(y-c)^2\right.$$

$$\left[4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|\right]$$
$$+(x-a)^2(d-y)^2$$
$$\left[4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|\right]$$
$$+(b-x)^2(y-c)^2$$
$$\left[4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|\right]$$
$$+(b-x)^2(d-y)^2$$
$$\left.\left[4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\right]\right\}$$

Burada Θ fonksiyonu (3.1) gibi tanımlanır.

İspat. (3.2) deki eşitliğin mutlak değeri (modülü) alınırsa;

$$\Theta(a,b,c,d;f,p) \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
= \; & \frac{(x-a)(y-c)}{m(a,b;c,d)}\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_1(t),V_1(s))\right|dsdt \\
& +\frac{(x-a)(d-y)}{m(a,b;c,d)}\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_1(t),V_2(s))\right|dsdt \\
& +\frac{(b-x)(y-c)}{m(a,b;c,d)}\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_2(t),V_1(s))\right|dsdt \\
& +\frac{(b-x)(d-y)}{m(a,b;c,d)}\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_2(t),V_2(s))\right|dsdt
\end{aligned}$$

$w(x,y)$ fonksiyonu Δ üzerinde sınırlı olduğundan ve $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|$nin Δ üzerinde koordinatlarda konveksliğinden,

$$\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_1(t),V_1(s))\right|dsdt \tag{3.5}$$
$$\leq \|w\|_\infty\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(s)} dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_1(t),V_1(s))\right|dsdt$$

$$\leq (x-a)(y-c)\|w\|_\infty$$
$$\int_0^1\int_0^1 ts\left[ts\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|+t(1-s)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|\right.$$
$$\left.+(1-t)s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|+(1-t)(1-s)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|\right]dsdt$$
$$= (x-a)(y-c)\|w\|_\infty$$
$$\left[\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|+\frac{1}{36}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|\right].$$

Benzer şekilde,

$$\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_1(t),V_2(s))\right|dsdt \tag{3.6}$$
$$\leq (x-a)(d-y)\|w\|_\infty$$
$$\left[\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|+\frac{1}{36}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|\right]$$

$$\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_2(t),V_1(s))\right|dsdt \tag{3.7}$$
$$\leq (b-x)(y-c)\|w\|_\infty$$
$$\left[\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|++\frac{1}{36}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|\right]$$

ve

$$\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_2(t),V_2(s))\right|dsdt \tag{3.8}$$
$$\leq (b-x)(d-y)\|w\|_\infty$$
$$\left[\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|+\frac{1}{36}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\right].$$

(3.5)-(3.8) ifadelerini (3.4) de yerine yazarsak (3.3) Teorem ifadesini elde ederiz ve ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.1.1 Teorem 3.3 koşulları ile $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right| \leq M$ ve $(x,y)\in\Delta$ olmak üzere, aşağıdaki ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlik elde edilir:

$$|\Theta(a,b,c,d;f,p)| \leq \frac{M\,(b-a)^2\,(d-c)^2}{m(a,b;c,d)}\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2}{(d-c)^2}\right]\|w\|_\infty .$$

Uyarı 3.1.2 Sonuç 3.1.1 de $w(x,y)=1$ seçilirse, Latif vd. (2012) tarafından verilen eşitsizlik sağlanır.

Sonuç 3.1.3 Teorem 3.3 ön koşulları altında, $x=\frac{a+b}{2}$ ve $y=\frac{c+d}{2}$ olarak seçilirse, aşağıdaki Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f(u,v)dvdu \right.\\
&-\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f\left(u,\frac{c+d}{2}\right)dvdu\\
&\left.-\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f\left(\frac{a+b}{2},v\right)dvdu\right]\\
\leq\ &\frac{(b-a)^2(d-c)^2}{576}\frac{\|w\|_\infty}{m(a,b;c,d)}\\
&\times\left\{16\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right|+4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{a+b}{2},c\right)\right|\right.\\
&+4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(a,\frac{c+d}{2}\right)\right|+4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right|\\
&+4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|\\
&\left.+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\right\}\\
\leq\ &\frac{(b-a)^2(d-c)^2}{64}\frac{\|w\|_\infty}{m(a,b;c,d)}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|\right.\\
&\left.+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\right].
\end{aligned}$$

Teorem 3.4 w fonksiyonu Lemma 3.1 deki şartlarla tanımlansın. Eğer $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|^q$ Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise her $(x,y)\in\Delta$ için, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|\Theta(a,b,c,d;f,p)| \tag{3.9}$$

$$\leq \frac{\|w\|_\infty}{m(a,b;c,d)(p+1)^{\frac{2}{p}}}$$

$$\times\left\{(x-a)^2(y-c)^2\left(\frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(x-a)^2(d-y)^2\left(\frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|^q\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(b-x)^2(y-c)^2\left(\frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|^q\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(b-x)^2(d-y)^2\left(\frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|^q\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Burada Θ fonksiyonu (3.1) deki gibi tanımlanır ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir.

İspat. (3.4) de iyi bilinen Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$|\Theta(a,b,c,d;f,p)| \tag{3.10}$$

$$\leq \frac{(x-a)(y-c)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right|^p dsdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_1(t),V_1(s))\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(x-a)(d-y)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right|^p dsdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_1(t),V_2(s))\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)(y-c)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right|^p dsdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_2(t),V_1(s)\right)\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)(d-y)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right|^p dsdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_2(t),V_2(s)\right)\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

w fonksiyonu Δ üzerinde sınırlı olduğundan,

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right|^p dsdt &\leq \|w\|_\infty^p\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(s)} dvdu\right|^p dsdt \qquad (3.11)\\ &= \|w\|_\infty^p (x-a)^p (y-c)^p\int_0^1\int_0^1 s^p t^p dsdt\\ &= \frac{(x-a)^p (y-c)^p}{(p+1)^2}\|w\|_\infty^p .\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right|^p dsdt \leq \frac{(x-a)^p (d-y)^p}{(p+1)^2}\|w\|_\infty^p , \qquad (3.12)$$

$$\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right|^p dsdt \leq \frac{(b-x)^p (y-c)^p}{(p+1)^2}\|w\|_\infty^p \qquad (3.13)$$

ve

$$\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right|^p dsdt \leq \frac{(b-x)^p (d-y)^p}{(p+1)^2}\|w\|_\infty^p . \qquad (3.14)$$

Diğer taraftan, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|^q$ ifadesinin Δ üzerinde koordinatlarda konveksliğinden,

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_1(t),V_1(s)\right)\right|^q dsdt \qquad (3.15)\\ \leq\ &\frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|^q\right],\end{aligned}$$

$$\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_1(t),V_2(s)\right)\right|^q dsdt \qquad (3.16)$$

$$\leq \frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|^q\right],$$

$$\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_2(t),V_1(s))\right|^q dsdt \tag{3.17}$$
$$\leq \frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|^q\right],$$

$$\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_2(t),V_2(s))\right|^q dsdt \tag{3.18}$$
$$\leq \frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|^q\right].$$

Eğer (3.11)-(3.18) eşitsizlikleri (3.10) da yerine yazılırsa, (3.9) elde edilir. □

Sonuç 3.1.4 Teorem 3.4 ön koşulları altında, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|\leq M$ alınırsa, her $(x,y)\in\Delta$ için aşağıdaki ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlik elde edilir:

$$|\Theta(a,b,c,d;f,p)|\leq\frac{4M\,(b-a)^2\,(d-c)^2}{m(a,b;c,d)(p+1)^{\frac{2}{p}}}\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2}{(d-c)^2}\right]\|w\|_\infty\,.$$

Uyarı 3.1.5 Eğer Sonuç 3.1.4 de $w(x,y)=1$ seçilirse, Latif vd. (2012) tarafından verilen eşitsizlik sağlanır.

Sonuç 3.1.6 Teorem 3.4. koşulları altında, $x=\frac{a+b}{2}$ ve $y=\frac{c+d}{2}$ olarak seçilirse, aşağıdaki Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f(u,v)dvdu\right.\\&-\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f\left(u,\frac{c+d}{2}\right)dvdu\\&\left.-\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f\left(\frac{a+b}{2},v\right)dvdu\right|\\=&\ \frac{\|w\|_\infty\,(b-a)^2\,(d-c)^2}{16\times m(a,b;c,d)(p+1)^{\frac{2}{p}}}\\&\times\left\{\left(\frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\left(\frac{a+b}{2},c\right)\right)\right|^q\right.\right.\right.\end{aligned}$$

$$+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(a,\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|^q\Bigg]\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right|^q\right.\right.$$
$$+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(a,\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|^q\Bigg]\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{a+b}{2},c\right)\right|^q\right.\right.$$
$$+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|^q\Bigg]\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right|^q\right.\right.$$
$$+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|^q\Bigg]\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorem 3.5 w fonksiyonu Teorem 3.3 deki şartlarla tanımlansın. Eğer $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|^q$ $q\geq 1$ şartıyla, Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve her $(x,y)\in\Delta$ için, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|\Theta(a,b,c,d;f,p)| \tag{3.19}$$

$$\leq \frac{(x-a)^2(y-c)^2\|w\|_\infty}{4\times m(a,b;c,d)}$$
$$\left(\frac{4}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\frac{2}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|^q+\frac{2}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|^q+\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(x-a)^2(d-y)^2\|w\|_\infty}{4\times m(a,b;c,d)}$$
$$\times\left(\frac{4}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\frac{2}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|^q+\frac{2}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|^q+\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b-x)^2(y-c)^2\|w\|_\infty}{4\times m(a,b;c,d)}$$
$$\times\left(\frac{4}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\frac{2}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|^q+\frac{2}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|^q+\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b-x)^2(d-y)^2\|w\|_\infty}{4\times m(a,b;c,d)}$$
$$\times\left(\frac{4}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\frac{2}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|^q+\frac{2}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|^q+\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada Θ fonksiyonu (3.1) deki şartlarda tanımlanır.

İspat. 3.4 te Power Mean eşitsizliği kullanılırsa;

$$|\Theta(a,b,c,d;f,p)| \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(x-a)(y-c)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right| dsdt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_1(t),V_1(s)\right)\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(x-a)(d-y)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right| dsdt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_1(t),V_2(s)\right)\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)(y-c)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right| dsdt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_c^{V_1(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_2(t),V_1(s)\right)\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)(d-y)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right| dsdt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_d^{V_2(s)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_2(t),V_2(s)\right)\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{(x-a)^2(y-c)^2\|w\|_\infty}{4^{1-\frac{1}{q}}\times m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1 ts\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_1(t),V_1(s)\right)\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(x-a)^2(d-y)^2\|w\|_\infty}{4^{1-\frac{1}{q}}\times m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_1(t),V_2(s)\right)\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^2(y-c)^2\|w\|_\infty}{4^{1-\frac{1}{q}}\times m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(U_2(t),V_1(s)\right)\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$+\frac{(b-x)^2(d-y)^2\|w\|_\infty}{4^{1-\frac{1}{q}}\times m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_2(t),V_2(s))\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|^q$ Δ üzerinde koordinatlarda konveks olduğundan;

$$\left(\int_0^1\int_0^1 ts\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_1(t),V_1(s))\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.21}$$
$$\leq \left(\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|^q+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|^q+\frac{1}{36}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_1(t),V_2(s))\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.22}$$
$$\leq \left(\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|^q+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,y)\right|^q+\frac{1}{36}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_2(t),V_1(s))\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.23}$$
$$\leq \left(\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,c)\right|^q+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|^q+\frac{1}{36}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(U_2(t),V_2(s))\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.24}$$
$$\leq \left(\frac{1}{9}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|^q+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,d)\right|^q+\frac{1}{18}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,y)\right|^q+\frac{1}{36}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Böylece (3.19) ifadesi bulunmuş ve ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.1.7 Teorem 3.5 koşulları altında, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(x,y)\right|\leq M$ ve $(x,y)\in\Delta$ olmak üzere, aşağıdaki ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlik elde edilir:

$$|\Theta(a,b,c,d;f,p)|\leq\frac{M(b-a)^2(d-c)^2}{m(a,b;c,d)}\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2}{(d-c)^2}\right]\|w\|_\infty.$$

Uyarı 3.1.8 Sonuç 3.1.7 de $w(x,y)=1$ seçilirse, Latif vd. (2012) tarafından verilen eşitsizlik sağlanır.

Sonuç 3.1.9 Teorem 3.5 koşulları altında, $x = \frac{a+b}{2}$ ve $y = \frac{c+d}{2}$ olarak seçilirse, aşağıdaki Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{1}{m(a,b;c,d)} \int_a^b \int_c^d w(u,v) f(u,v) dvdu \right. \\
&- \frac{1}{m(a,b;c,d)} \int_a^b \int_c^d w(u,v) f\left(u, \frac{c+d}{2}\right) dvdu \\
&\left. - \frac{1}{m(a,b;c,d)} \int_a^b \int_c^d w(u,v) f\left(\frac{a+b}{2}, v\right) dvdu \right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2 (y-c)^2 \|w\|_\infty}{4 \times m(a,b;c,d)} \\
&\times \left(\frac{4}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \frac{2}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right|^q \right. \\
&\left. + \frac{2}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a,c) \right|^q \right] \Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{(x-a)^2 (d-y)^2 \|w\|_\infty}{4 \times m(a,b;c,d)} \\
&\times \left(\frac{4}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \frac{2}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right|^q \right. \\
&\left. + \frac{2}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a,d) \right|^q \right] \Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{(b-x)^2 (y-c)^2 \|w\|_\infty}{4 \times m(a,b;c,d)} \\
&\times \left(\frac{4}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \frac{2}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right|^q \right. \\
&\left. + \frac{2}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b,c) \right|^q \right] \Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{(b-x)^2 (d-y)^2 \|w\|_\infty}{4 \times m(a,b;c,d)} \\
&\times \left(\frac{4}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \frac{2}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right|^q \right. \\
&\left. + \frac{2}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b,d) \right|^q \right] \Bigg)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

4. BULGULAR

4.1 Koordinatlarda s-konveks fonksiyonlara ilişkin bazı yeni Ostrowski eşitsizlikleri

Teorem 4.1 w fonksiyonu Lemma 3.1 deki şartlarda tanımlansın ve Δ üzerinde sınırlı olsun. $\|w\|_{\infty} := \sup\limits_{(x,y)\in\Delta} |w(x,y)|$ şeklinde ifade edilmek üzere; eğer $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\right|$ ifadesi Δ üzerinde koordinatlarda s-konveks ise her $(x,y) \in \Delta$ için, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
& |\Theta(a,b,c,d;f,w)| \qquad (4.1) \\
\leq\ & \frac{\|w\|_{\infty}}{m(a,b;c,d)} \frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)} \\
& \times \Big\{ (x-a)^2 (y-c)^2 \\
& \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right| + \frac{1}{s_2+1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,c) \right| \right. \\
& \left. + \frac{1}{s_1+1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,y) \right| + \frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c) \right| \right] \\
& + (x-a)^2 (d-y)^2 \\
& \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right| + \frac{1}{s_2+1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,d) \right| \right. \\
& \left. + \frac{1}{s_1+1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,y) \right| + \frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,d) \right| \right] \\
& + (b-x)^2 (y-c)^2 \\
& \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right| + \frac{1}{s_2+1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,c) \right| \right. \\
& \left. + \frac{1}{s_1+1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,y) \right| + \frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c) \right| \right] \\
& + (b-x)^2 (d-y)^2 \\
& \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right| + \frac{1}{s_2+1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,d) \right| \right. \\
& \left. + \frac{1}{s_1+1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,y) \right| + \frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,d) \right| \right] \Big\}.
\end{aligned}
$$

Burada Θ fonksiyonu Lemma 3.1 deki gibi tanımlanır.

İspat. (3.2) deki eşitliğin mutlak değeri (modülü) alınırsa;

$$
\begin{aligned}
& \left|\Theta(a,b,c,d;f,w)\right| \qquad (4.2) \\
= & \frac{(x-a)(y-c)}{m(a,b;c,d)} \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_a^{U_1(t)} \int_c^{V_1(\lambda)} w(u,v)dvdu \right| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(U_1(t),V_1(\lambda)) \right| d\lambda dt \\
& + \frac{(x-a)(d-y)}{m(a,b;c,d)} \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_a^{U_1(t)} \int_d^{V_2(\lambda)} w(u,v)dvdu \right| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(U_1(t),V_2(\lambda)) \right| d\lambda dt \\
& + \frac{(b-x)(y-c)}{m(a,b;c,d)} \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_b^{U_2(t)} \int_c^{V_1(\lambda)} w(u,v)dvdu \right| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(U_2(t),V_1(\lambda)) \right| d\lambda dt \\
& + \frac{(b-x)(d-y)}{m(a,b;c,d)} \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_b^{U_2(t)} \int_d^{V_2(\lambda)} w(u,v)dvdu \right| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(U_2(t),V_2(\lambda)) \right| d\lambda dt
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Burada, $w(x,y)$ fonksiyonu Δ üzerinde sınırlı olduğundan ve $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\right|$nin Δ üzerinde koordinatlarda $s-$konveksliğinden,

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_a^{U_1(t)} \int_c^{V_1(\lambda)} w(u,v)dvdu \right| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(U_1(t),V_1(\lambda)) \right| d\lambda dt \qquad (4.3) \\
\leq & \|w\|_\infty \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_a^{U_1(t)} \int_c^{V_1(\lambda)} dvdu \right| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(U_1(t),V_1(\lambda)) \right| d\lambda dt \\
\leq & (x-a)(y-c)\|w\|_\infty \\
& \int_0^1 \int_0^1 t\lambda \left[t^{s_1}\lambda^{s_2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right| + t^{s_1}(1-\lambda)^{s_2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,c) \right| \right. \\
& \left. + (1-t)^{s_1}\lambda^{s_2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,y) \right| + (1-t)^{s_1}(1-\lambda)^{s_2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c) \right| \right] d\lambda dt \\
= & (x-a)(y-c)\|w\|_\infty \\
& \left[\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right| \right. \\
& + \frac{1}{(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,c) \right| \\
& + \frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,y) \right| \\
& \left. + \frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c) \right| \right].
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde;

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \int_a^{U_1(t)} \int_d^{V_2(\lambda)} w(u,v)dvdu \right| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \left(U_1(t), V_2(\lambda) \right) \right| d\lambda dt \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \leq\ & (x-a)(d-y) \|w\|_\infty \\ & \left[\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right| \right. \\ & + \frac{1}{(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,d) \right| \\ & + \frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,y) \right| \\ & \left. + \frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,d) \right| \right], \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \int_b^{U_2(t)} \int_c^{V_1(\lambda)} w(u,v)dvdu \right| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \left(U_2(t), V_1(\lambda) \right) \right| d\lambda dt \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \leq\ & (b-x)(y-c) \|w\|_\infty \\ & \left[\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right| \right. \\ & + \frac{1}{(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,c) \right| \\ & + \frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,y) \right| \\ & \left. + \frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c) \right| \right] \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \int_b^{U_2(t)} \int_d^{V_2(\lambda)} w(u,v)dvdu \right| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \left(U_2(t), V_2(\lambda) \right) \right| d\lambda dt \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \leq\ & (b-x)(d-y) \|w\|_\infty \\ & \left[\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right| \right. \\ & + \frac{1}{(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,d) \right| \\ & + \frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+2)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,y) \right| \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|\Bigg]$$

elde edilir. Eğer (4.3)-(4.6) ifadeleri (4.2) de yerine yazılırsa (4.1) Teorem ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. $\square$

Uyarı 4.1.1 Eğer Teorem 4.1 de $s_1 = s_2 = 1$ olarak seçilirse, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&|\Theta(a,b,c,d;f,w)| \qquad (4.7)\\
\leq\ & \frac{\|w\|_\infty}{36\times m(a,b;c,d)}\\
&\times\Big\{(x-a)^2(y-c)^2\\
&\left[4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,c)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|\right]\\
&+(x-a)^2(d-y)^2\\
&\left[4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,d)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|\right]\\
&+(b-x)^2(y-c)^2\\
&\left[4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,c)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|\right]\\
&+(b-x)^2(d-y)^2\\
&\left[4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,d)\right|+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,y)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|\right]\Big\}.
\end{aligned}$$

Bulunan bu eşitsizlik Budak (2022) tarafından verilmiştir.

Sonuç 4.1.2 Teorem 4.1 in şartları altında, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right| \leq M$, $(x,y)\in\Delta$ olarak belirlenirse, aşağıdaki ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
|\Theta(a,b,c,d;f,w)| \leq\ & \frac{4M(b-a)^2(d-c)^2}{m(a,b;c,d)(s_1+1)(s_2+1)}\\
&\times\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2}{(d-c)^2}\right]\|w\|_\infty .
\end{aligned}$$

Uyarı 4.1.3 Eğer $w(x,y)=1$ ve $s_1 = s_2 = s$ seçilirse; Latif vd.(2012) tarafından verilen eşitsizlik sağlanır.

Sonuç 4.1.4 Teorem 4.1 de $x=\frac{a+b}{2}$ ve $y=\frac{c+d}{2}$ yazılırsa; aşağıdaki ağırlıklı orta nokta tipli eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f(u,v)dvdu\right.\\
&-\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f\left(u,\frac{c+d}{2}\right)dvdu\\
&\left.-\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f\left(\frac{a+b}{2},v\right)dvdu\right|\\
\leq\ &\frac{(b-a)^2(d-c)^2}{16(s_1+2)(s_2+2)}\frac{\|w\|_\infty}{m(a,b;c,d)}\left[2^{1-s_2}+\frac{1}{s_2+1}\right]\left[2^{1-s_1}+\frac{1}{s_1+1}\right]\\
&\times\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|\right].
\end{aligned}$$

İspat. $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{c+d}{2}$ seçilir ve $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\right|$ in $s-$ konveksliği kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. □

Uyarı 4.1.5 $w(x,y)=1$ ve $s_1=s_2=1$ yazılırsa; Latif vd. (2012) deki eşitsizlik sağlanır.

Teorem 4.2 w, Teorem 4.1 deki şartlarda verilsin. Θ fonksiyonu Lemma 3.1 de tanımlandığı gibi kabul edilsin. $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\right|^q$, Δ üzerinde koordinatlarda $s-$konveks fonksiyon ve her $(x,y)\in\Delta$ için; $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere, aşağıdaki ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlik elde edilir:

$$|\Theta(a,b,c,d;f,w)| \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ &\frac{\|w\|_\infty}{m(a,b;c,d)(p+1)^{\frac{2}{p}}}\left(\frac{4}{(s_1+1)(s_2+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\times\left\{(x-a)^2(y-c)^2\right.\\
&\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\\
&+(x-a)^2(d-y)^2\\
&\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,d)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$+(b-x)^2(y-c)^2$$
$$\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$+(b-x)^2(d-y)^2$$
$$\left.\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,d)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

İspat. (4.2) de Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$|\Theta(a,b,c,d;f,w)| \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \frac{(x-a)(y-c)}{m(a,b;c,d)} \\
& \times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(\lambda)} w(u,v)dvdu\right|^p d\lambda dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(U_1(t),V_1(\lambda))\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(x-a)(d-y)}{m(a,b;c,d)} \\
& \times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_d^{V_2(\lambda)} w(u,v)dvdu\right|^p d\lambda dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(U_1(t),V_2(\lambda))\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(b-x)(y-c)}{m(a,b;c,d)} \\
& \times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_c^{V_1(\lambda)} w(u,v)dvdu\right|^p d\lambda dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(U_2(t),V_1(\lambda))\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(b-x)(d-y)}{m(a,b;c,d)} \\
& \times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_d^{V_2(\lambda)} w(u,v)dvdu\right|^p d\lambda dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(U_2(t),V_2(\lambda))\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer w fonksiyonu Δ üzerinde sınırlandırılırsa;

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(\lambda)} w(u,v)dvdu\right|^p d\lambda dt &\leq \|w\|_\infty^p\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(\lambda)} dvdu\right|^p d\lambda dt \quad (4.10)\\
&= \|w\|_\infty^p(x-a)^p(y-c)^p\int_0^1\int_0^1 \lambda^p t^p d\lambda dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{(x-a)^p (y-c)^p}{(p+1)^2} \|w\|_\infty^p$$

bulunur. Benzer şekilde;

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \int_a^{U_1(t)} \int_d^{V_2(\lambda)} w(u,v) dv du \right|^p d\lambda dt \le \frac{(x-a)^p (d-y)^p}{(p+1)^2} \|w\|_\infty^p , \tag{4.11}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \int_b^{U_2(t)} \int_c^{V_1(\lambda)} w(u,v) dv du \right|^p d\lambda dt \le \frac{(b-x)^p (y-c)^p}{(p+1)^2} \|w\|_\infty^p , \tag{4.12}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \int_b^{U_2(t)} \int_d^{V_2(\lambda)} w(u,v) dv du \right|^p d\lambda dt \le \frac{(b-x)^p (d-y)^p}{(p+1)^2} \|w\|_\infty^p . \tag{4.13}$$

Diğer taraftan; $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\right|^q$, Δ üzerinde koordinatlarda s-konveks fonksiyon olduğundan,

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (U_1(t), V_1(\lambda)) \right|^q d\lambda dt \tag{4.14}$$

$$\le \frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)} \times \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (x,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (x,c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a,c) \right|^q \right],$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (U_1(t), V_2(\lambda)) \right|^q d\lambda dt \tag{4.15}$$

$$\le \frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)} \times \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (x,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (x,d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (a,d) \right|^q \right],$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (U_2(t), V_1(\lambda)) \right|^q d\lambda dt \tag{4.16}$$

$$\le \frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)} \times \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (x,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (x,c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (b,c) \right|^q \right],$$

ve

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} (U_2(t), V_2(\lambda)) \right|^q d\lambda dt \tag{4.17}$$

$$\leq \frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)} \times \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,d) \right|^q \right].$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eğer (4.10)-(4.17) eşitsizlikleri (4.9) da yerine yazılırsa, (4.8) bulunur. □

Uyarı 4.1.6 Teorem 4.1 de $s_1 = s_2 = 1$ yazılırsa, Budak (2022) tarafından verilen aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&|\Theta(a,b,c,d;f,w)| \\
&\leq \frac{\|w\|_\infty}{2^{\frac{2}{q}} m(a,b;c,d)(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\
&\times \Big\{ (x-a)^2 (y-c)^2 \\
&\left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ (x-a)^2 (d-y)^2 \\
&\left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ (b-x)^2 (y-c)^2 \\
&\left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,c) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ (b-x)^2 (d-y)^2 \\
&\left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,d) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Big\}.
\end{aligned}$$

Sonuç 4.1.7 Teorem 4.2 koşullarında, $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(x,y) \right| \leq M$, $(x,y) \in \Delta$, olmak üzere,

$$\begin{aligned}
|\Theta(a,b,c,d;f,w)| \leq\ & \frac{4M(b-a)^2(d-c)^2}{m(a,b;c,d)(p+1)^{\frac{2}{p}}} \left(\frac{4}{(s_1+1)(s_2+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(y - \frac{c+d}{2}\right)^2}{(d-c)^2} \right] \|w\|_\infty .
\end{aligned}$$

ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlik bulunur.

Uyarı 4.1.8 Eğer, Sonuç 4.1.7 de, $w(x,y) = 1$ ve $s_1 = s_2 = s$ yazılırsa, Latif vd. (2012) tarafından verilen eşitsizlik sağlanır.

Sonuç 4.1.9 Teorem 4.2 ön koşulları altında, $x = \frac{a+b}{2}$ ve $y = \frac{c+d}{2}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{1}{m(a,b;c,d)} \int_a^b \int_c^d w(u,v) f(u,v) dv du \right. \\
&- \frac{1}{m(a,b;c,d)} \int_a^b \int_c^d w(u,v) f\left(u, \frac{c+d}{2}\right) dv du \\
&\left. - \frac{1}{m(a,b;c,d)} \int_a^b \int_c^d w(u,v) f\left(\frac{a+b}{2}, v\right) dv du \right| \\
\leq\ & \frac{\|w\|_\infty (b-a)^2 (d-c)^2}{16 m(a,b;c,d)(p+1)^{\frac{2}{p}}} \left(\frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times \left\{ \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right|^q \right. \right. \\
&\left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right|^q \right. \\
&\left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(a, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,d) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \right|^q \right. \\
&\left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right|^q \right. \\
&\left. \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(b, \frac{c+d}{2}\right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,d) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

ağırlıklı orta nokta tip eşitsizlik bulunur.

Teorem 4.3 w, Teorem 4.1 deki şartlarda verilsin. Θ fonksiyonu Lemma 3.1 de tanımlandığı gibi kabul edilsin. $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\right|^q$, Δ üzerinde koordinatlarda $s-$konveks fonksiyon ve her $(x,y) \in \Delta$ için; $q \geq 1$ olmak üzere, aşağıdaki ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlik elde edilir:

$$|\Theta(a,b,c,d;f,w)| \tag{4.18}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{\|w\|_{\infty}}{2^{2-\frac{2}{q}}\times m(a,b;c,d)}\left(\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \times\left\{(x-a)^2(y-c)^2\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+\frac{1}{s_2+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,c)\right|^q\right.\right. \\
& \left.+\frac{1}{s_1+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,y)\right|^q+\frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +(x-a)^2(d-y)^2\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+\frac{1}{s_2+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,d)\right|^q\right. \\
& \left.+\frac{1}{s_1+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,y)\right|^q+\frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +(b-x)^2(y-c)^2\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+\frac{1}{s_2+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,c)\right|^q\right. \\
& \left.+\frac{1}{s_1+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,y)\right|^q+\frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +(b-x)^2(d-y)^2\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+\frac{1}{s_2+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,d)\right|^q\right. \\
& \left.\left.+\frac{1}{s_1+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,y)\right|^q+\frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}
$$

İspat. (4.2) de Power Mean eşitsizliği kullanılırsa;

$$
|\Theta(a,b,c,d;f,w)| \tag{4.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{(x-a)(y-c)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(\lambda)}w(u,v)dvdu\right|d\lambda dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_c^{V_1(\lambda)}w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(U_1(t),V_1(\lambda))\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(x-a)(d-y)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_d^{V_2(\lambda)}w(u,v)dvdu\right|d\lambda dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_a^{U_1(t)}\int_d^{V_2(\lambda)}w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(U_1(t),V_2(\lambda))\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{(b-x)(y-c)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_c^{V_1(\lambda)}w(u,v)dvdu\right|d\lambda dt\right)^{1-\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$\times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_c^{V_1(\lambda)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(U_2(t),V_1(\lambda)\right)\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)(d-y)}{m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_d^{V_2(\lambda)} w(u,v)dvdu\right| d\lambda dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\int_b^{U_2(t)}\int_d^{V_2(\lambda)} w(u,v)dvdu\right|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(U_2(t),V_2(\lambda)\right)\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{(x-a)^2(y-c)^2\|w\|_\infty}{4^{1-\frac{1}{q}}\times m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1 t\lambda\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(U_1(t),V_1(\lambda)\right)\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(x-a)^2(d-y)^2\|w\|_\infty}{4^{1-\frac{1}{q}}\times m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1 t\lambda\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(U_1(t),V_2(\lambda)\right)\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^2(y-c)^2\|w\|_\infty}{4^{1-\frac{1}{q}}\times m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1 t\lambda\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(U_2(t),V_1(\lambda)\right)\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^2(d-y)^2\|w\|_\infty}{4^{1-\frac{1}{q}}\times m(a,b;c,d)}\left(\int_0^1\int_0^1 t\lambda\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(U_2(t),V_2(\lambda)\right)\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\right|^q$, Δ üzerinde koordinatlarda s-konveks fonksiyon olduğundan,

$$\left(\int_0^1\int_0^1 t\lambda\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(U_1(t),V_1(\lambda)\right)\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.20}$$

$$\leq \left[\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q\right.$$

$$+\frac{1}{(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,c)\right|^q$$

$$+\frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,y)\right|^q$$

$$\left.+\frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1 t\lambda\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(U_1(t),V_2(\lambda)\right)\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.21}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \left[\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q\right. \\
& +\frac{1}{(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,d)\right|^q \\
& +\frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,y)\right|^q \\
& \left.+\frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left(\int_0^1\int_0^1 t^{s_1}\lambda^{s_2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(U_2(t),V_1(\lambda))\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.22)\\
\leq\ & \left[\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q\right. \\
& +\frac{1}{(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,c)\right|^q \\
& +\frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,y)\right|^q \\
& \left.+\frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \left(\int_0^1\int_0^1 t\lambda\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(U_2(t),V_2(\lambda))\right|^q d\lambda dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.23)\\
\leq\ & \left[\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q\right. \\
& +\frac{1}{(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,d)\right|^q \\
& +\frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,y)\right|^q \\
& \left.+\frac{1}{(s_1+1)(s_1+2)(s_2+1)(s_2+2)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Uyarı 4.1.10 Teorem 4.1 de $s_1 = s_2 = 1$ yazılırsa, Budak (2022) tarafından verilen aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|\Theta(a,b,c,d;f,w)|$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{\|w\|_{\infty}}{4\cdot 3^{\frac{2}{q}}\cdot m(a,b;c,d)} \\
& \Big\{(x-a)^2(y-c)^2 \\
& \left(4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,c)\right|^q+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +(x-a)^2(d-y)^2 \\
& \left(4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,d)\right|^q+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +(b-x)^2(y-c)^2 \\
& \left(4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,c)\right|^q+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,y)\right|^q+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +(b-x)^2(d-y)^2 \\
& \left(4\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|^q+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,d)\right|^q+2\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,y)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Sonuç 4.1.11 Teorem 4.3 te $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(x,y)\right|\leq M$, $(x,y)\in\Delta$ olmak üzere; aşağıdaki ağırlıklı Ostrowski tipli eşitsizlik bulunur:

$$
\begin{aligned}
|\Theta(a,b,c,d;f,w)| \ \leq\ & \frac{M(b-a)^2(d-c)^2}{m(a,b;c,d)}\left(\frac{4}{(s_1+1)(s_2+1)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \times\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(y-\frac{c+d}{2}\right)^2}{(d-c)^2}\right]\|w\|_{\infty}.
\end{aligned}
$$

Uyarı 4.1.12 Sonuç 4.1.11 de $w(x,y)=1$ ve $s_1=s_2=s$ seçilirse; Latif vd. (2012) tarafından ispatlanan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
& \Bigg|f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f(u,v)dvdu \\
& -\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f\left(u,\frac{c+d}{2}\right)dvdu \\
& -\frac{1}{m(a,b;c,d)}\int_a^b\int_c^d w(u,v)f\left(\frac{a+b}{2},v\right)dvdu\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2(d-c)^2\|w\|_{\infty}}{4^{1-\frac{1}{q}}\times m(a,b;c,d)}\left(\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \times\left\{\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{s_2+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(\frac{a+b}{2},c\right)\right|^q\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{s_1+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\Bigg(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{s_2+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right|^q\\
&+\frac{1}{s_1+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\Bigg(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{s_2+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(\frac{a+b}{2},c\right)\right|^q\\
&+\frac{1}{s_1+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\Bigg(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{s_2+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right|^q\\
&+\frac{1}{s_1+1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{(s_1+1)(s_2+1)}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

5. KAYNAKLAR

Akdemir A O, 2012, Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Koordinatlarda İntegral Eşitsizlikleri, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 183s, Erzurum.

Alomari M, Darus M, 2008, Co-ordinated Convex Function In The First Sense With Some Hadamard-type Inequalities, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 32, 1557–1567.

Ardıç M, 2013, Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları İçin İntegral Eşitsizlikler, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 116s, Erzurum.

Beckenbach E F, Bellman R, 1961, Inequalities, Springer-Verlag, 195p, Berlin.

Breckner W W, 1978, Stetigkeitsaussagen Für Eine Klasse Verallgemeinerter Konvexer Funktionen In Topologischen Linearen Räumen, Publications De L'institut Mathematique, 23, 13–20.

Budak H, 2017, Sınırlı Varyasyonlu Fonksiyonlar İçin Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları, Düzce Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 162s, Düzce.

Budak H, 2022, Weighted Ostrowski Type Inequalities For Co-Ordinated Convex Functions, Journal of Inequalities and Applications, 2022, 1–15.

Dragomir S S, Fitzpatrick S, 1999, The Hadamard's Inequality For Convex Functions In The Second Sense, Demonstratio Mathematica, 32, 687–696.

Dragomir S S, Pearce C E M, 2000, Selected Topics On Hermite-Hadamard Inequalities And Applications, Victoria University, Melbourne and Adelaide, 357s, Australia.

Dragomir S S, 2001, On The Hadamard's Inequality For Convex Functions On The Co-ordinates in a Rectangle From the Plane, Taiwanese Journal of Mathematics, 5, 775–788.

Dragomir S S, Rassias T M, 2002, Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration, Boston: Kluwer Academic, 404p, Melbourne-Athens.

Erden S, Sarıkaya M Z, 2017, On Hermite- Hadamard's and Ostrowski's Inequalities For The Co-Ordinated Convex Functions, New Trends in Mathematical Sciences, 5, 33–45.

Hardy G, Littlewood J, Polya G, 1934, Inequalities, Cambridge University Press, 314p, London.

Hudzig H, Maligranda L, 1994, Some Remarks On $s-$Convex Functions, Aequationes Mathematicae, 48, 100–111.

Kavurmacı H, 2012, Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 115s, Erzurum.

Latif M A, Alomari M, 2009, On Hadamard-Type Inequalities For Convex Functions On The Co-ordinates, International Journal of Mathematical Analysis, 3, 1645–1656.

Latif M A, Hussain S, Dragomir S S, 2012, New Ostrowki Type Inequalities For Co-ordinated Convex Functions, Transylvanian Journal of Mechanics and Mathematics, 4, 125–136.

Maden S, Tomar M, Set E, 2014, Hermite-Hadamard Type Inequalities For $s-$Convex Stochastic Processes in The First Sense, Pure and Applied Mathematics Letters, 2349, 1–7.

Matuszewska W, Orlicz W, 1961, A Note Of The Theory of S-Normed Spaces of Fiintegrable Functions, Studia Mathematica, 21, 107–115.

Mitrinović D S, 1970, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, 404p, Berlin.

Mitrinović D S, Pečarić J E, Fink A M, 1991, Inequalities Involving Function and Their Integrals and Derivatives, Kluwer Academic Publishers, 587p, Dordrecht, Boston, London.

Mitrinović D S, Pečarić J E, Fink A M, 1993, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

Niculescu C P, Persson L E, 2006, Convex Functions and Their Applications A Contemporary Approach, Springer Science Business Media Inc, 269p, New York.

Ostrowski A, 1938, Uber die Absolutabweichung Einer Differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert, Commentarii mathematici Helvetici, 10, 226–227.

Özdemir M E, Akdemir A O, Ekinci A, 2011, New Integral Inequalities For Co-ordinated Convex Functions, VI. Ufa International Mathematical Conference, Ufa Bashkir State University.

Özdemir M E, Set E, Sarıkaya M Z, 2011, Some New Hadamard's Type Inequalities For Co-ordinated Convex And Convex Functions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40, 219–229.

Pachpatte B G, 2005, Mathematical Inequalities, Elsevier B.V, 591p, Amsterdam.

Pečarić J, Proschan F, Tong Y L, 1992, Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, 467p, New York.

Roberts A W, Varberg D E, 1973, Convex Functions, Academic Press, 300p, New York.

Sarıkaya M Z, Set E, Özdemir M E, Dragomir S S, 2010, New Some Hadamard's Type Inequalities For Co-ordinated Convex Functions, Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences, 28, 137–152.

Tunç M, 2011, Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 130s, Erzurum.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Gözde BAYRAK
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bergama, 26.03.1992
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 5543882936/gozdebayrak92@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Bergama Yusuf Perin Anadolu Öğretmen Lisesi (2005–2009)
Lisans	: Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü (2009–2014)
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, (2019–2022)

Çalıştığı Kurumlar

: Ordu Gölköy Fen Lisesi (2014–2017)

: Sandıklı Türk Telekom Fen Lisesi (2017–Devam Ediyor)

Yayınları (SCI ve diğer)

: Bayrak G, Kiriş M E , Kara H, Budak H, 2021, On New Weighted Ostrowski Type Inequalities For Co-ordinated s-Convex Functions, Turkish Journal Inequalities, 5, 76–92.