KONVEKS HİPERBOLİK DÖRTGENLERİN ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yasemin ATMACA

Danışman
Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONVEKS HİPERBOLİK DÖRTGENLERİN ÖZELLİKLERİ

Yasemin ATMACA

Danışman
Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2018

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

21/ 06/ 2018

Yasemin ATMACA

TEZ ONAY SAYFASI

Yasemin ATMACA tarafından hazırlanan “Konveks Hiperbolik Dörtgenlerin Özellikleri” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 21/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

İmza

Başkan **:** Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Temel ERMİŞ
Eskişehir Osmangazi Üniv., Fen Edebiyat Fak.

Üye **:** Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
........./......../........tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKS HİPERBOLİK DÖRTGENLERİN ÖZELLİKLERİ

Yasemin ATMACA

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Bu tez çalışmasının asıl amacı, hiperbolik düzlemde, konveks hiperbolik dörtgenlerin özelliklerini inceleyerek, hiperbolik geometrinin geliştirilmesine katkıda bulunmaktır.

Bu amaçla, ikinci bölümde tez çalışmamızın daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde konveks hiperbolik dörtgenlerle ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde hiperbolik dörtgenlerle ilgili kelebek teoremi anlatılmıştır.

2018, vi + 28 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konveks hiperbolik dörtgenler, hiperbolik geometri

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

THE PROPERTİES OF CONVEX HYPERBOLİC QUADRİLATERALS

Yasemin ATMACA

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Nilgün SÖNMEZ

The main purpose of this research is to investigate the properties of convex hyperbolic quadrilaterals in the hyperbolic plane and to contribute to the development of hyperbolic geometry.

For this purpose, in the second part we have mentioned the basic concepts necessary for better understanding of our thesis work. In the third chapter, definitions and theorems related to convex hyperbolic quadrilaterals are given. In the fourth chapter butterfly theorem related to hyperbolic quadrilaterals is explained.

2018, vi + 28 pages

Keywords: Convex hyperbolic quadrilaterals, hyperbolic geometry

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ ile her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Çalışmamda yardımını esirgemeyen arkadaşım Su Ürünleri Yük. Müh. Esra ACAR ile biricik kardeşim Döndü DEMİR' e teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Yasemin ATMACA
AFYONKARAHİSAR, 2018

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
T (z)	Kesirli doğrusal dönüşüm (mobius dönüşümü)
$\overleftrightarrow{AB}$	Doğru
$\overline{AB}$	Doğru parçası
int($\overline{AB}$)	Doğru parçasının içi
$\angle ABC$	ABC açısı
$int(\angle ABC)$	ABC açısının içi
$m(\angle ABC)$	ABC açısının ölçüsü
ΔABC	ABC üçgeni
$int(\Delta ABC)$	ABC üçgeninin içi
$\square ABCD$	ABCD dörtgeni
$\simeq$	Eşlik bağıntısı
$\boxed{S}$ ABCD	ABCD Saccheri dörtgeni
I	İnversiyon

Kısaltmalar

DAA	Düzlem ayırma aksiyomu
KAK	Kenar açı kenar eşliği
PP	Pasch postülatı
cr	Çifte oran

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Öklid, kendi geometrisine ait tüm bilgileri *Elements* adlı kitabında toplamıştır. On üç ciltten oluşan bu kitapta bir takım tanımlar, aksiyomlar ve postülatlar verilmiş ve teoremler bunlara dayanarak kanıtlanmıştır. *Aksiyom;* doğruluğu açık ve seçik olan önerme demektir. *Postülat;* ispat edilmeksizin doğru olarak benimsenen önerme demektir. Öklid'in postülatları aşağıdaki gibidir (Yılgör 2007).

Postülatlar:

1. İki nokta arasını birleştiren en kısa yol bir doğru parçasının uzunluğudur.
2. Bir doğru, doğru olarak sonsuza kadar uzatılabilir.
3. Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir çemberdir.
4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.
5. (EPP): İki doğru bir üçüncü doğru tarafından kesilirse içte meydana gelen açıların toplamının 180 dereceden küçük olduğu yönde bu iki doğru kesişir.

19. yy. dan itibaren matematikçiler 5. Postülatı değişik bir açıdan incelemeye çalışmışlar ve sonuçta aşağıdaki postülata ulaşmışlardır.

(HPP): Düzlemde bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel birden çok doğru vardır.

Bu postülat hiperbolik geometri veya Öklid olmayan (non-Öklidyen) geometrinin temelini oluşturur. Daha sonra Öklid olmayan geometrinin özellikleri matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Örneğin Öklid olmayan geometride bir üçgende iç açıların toplamı 180^0 değildir (Yakut 2004).

İtalyan matematikçi Girolamo Saccheri (1667-1733) iki açısı 90^0 olan dörtgenleri gözönüne almıştır. O bu dörtgenlerde iki düşey doğrunun eşit uzunluğa sahip olduğunu düşünerek geriye kalan iki açının 90^0 den küçük olabileceğinin mümkün olduğu (no non-Öklidyen hal) sonucuna varmıştır.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) benzer konuda ilerlemiş bunu daha da genişletmeye çalışmıştır (Yakut 2004).

Bu tez çalışmasının asıl amacı, hiperbolik düzlemde, konveks hiperbolik dörtgenlerin özelliklerini inceleyerek, hiperbolik geometrinin geliştirilmesine katkıda bulunmaktır.

Bu amaçla, ikinci bölümde tez çalışmamızın daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde konveks hiperbolik dörtgenlerle ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde hiperbolik dörtgenlerle ilgili kelebek teoremi anlatılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 (Soyut geometri) $\mathbb{P}$ elemanları noktalar olan bir küme; $\mathbb{L}$ de, $\mathbb{P}$ nin boş küme olmayan alt kümelerinden oluşan ve elemanları doğrular olan bir küme olmak üzere, aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan matematiksel sisteme *soyut geometri* denir ve $[\mathbb{P},\mathbb{L}]$ ile gösterilir.

(i) $\mathbb{P}$ deki her farklı iki noktadan geçen bir doğru vardır.
(ii) Her doğru en az iki noktaya sahiptir.

Tanım 2.2 (Incidence geometri) Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $[\mathbb{P},\mathbb{L}]$ soyut geometrisine *konum (incidence) geometrisi* denir.

(i) $\mathbb{P}$ deki her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.
(ii) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Tanım 2.3 (Metrik) $\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme olmak üzere, $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki (i) ve (ii) koşullarını sağlarsa, d ye $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir *uzaklık fonksiyonu* denir. Eğer üç koşulu da sağlarsa, d ye $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir *metriktir* denir.

(i) Her $P, Q \in \mathcal{X}$ için $d(P, Q) \geq 0$ ve $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ dir.
(ii) Her $P, Q \in \mathcal{X}$ için $d(P, Q) = d(Q, P)$ dir.
(iii) Her $P, Q, R \in \mathcal{X}$ için $d(P, Q) \leq d(P,R) + d(R, Q)$ dir.

Tanım 2.4 (Cetvel) l , $[\mathbb{P},\mathbb{L}]$ konum geometrisinin bir doğrusu, d de $\mathbb{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $f\colon\ l \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna l için *cetveldir* denir.

(i) f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.
(ii) l üzerindeki her P ve Q noktaları için $| f(P) - f(Q) | = d(P, Q)$ dir.

Burada, (ii) eşitliğine *cetvel denklemi*, $f(P)$ ye ise P nin f ye bağlı *koordinatı* denir.

Tanım 2.5 (Metrik geometri) [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}$] bir konum geometrisi ve d, $\mathbb{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, $\forall l \in L$ doğrusu bir cetvele sahipse, d ile birlikte [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}$] konum geometrisine *metrik geometri* denir ve [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}, d$] ile gösterilir (Çolakoğlu 2009).

Tanım 2.6 Bir metrik geometride l bir doğru ve ΔABC de bir üçgen olsun. $A-D-B$ şartını sağlayan $D \in l$ noktası için $l \cap \overline{AC} \neq \emptyset$ ya da $l \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ ise bu metrik geometri *Pasch Postulatını (PP*) sağlar denir (Bağcı 2017).

Tanım 2.7 (Düzlem Ayırma Aksiyomu (DAA)) [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}, d$] metrik geometrisinde, verilen her $l \in \mathbb{L}$ doğrusu için $\mathbb{P}$ nin aşağıdaki üç koşulu sağlayan $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ gibi iki alt kümesi varsa, [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}, d$] sistemi *düzlem ayırma aksiyomunu* sağlar denir. Bu durumda, $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ kümelerinin her birine bir *yarı düzlem*, l doğrusuna da bu *yarı düzlemlerin kenarı* denir.

(i) $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ konvekstir.
(ii) $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = \mathbb{P} - l$ ($\mathbb{P}$ den l nin çıkarılmasıyla elde edilen küme).
(iii) $A \in \mathcal{H}_1$ ve $B \in \mathcal{H}_2$ ise, $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$ dir.

Tanım 2.8 (Pasch geometri) Düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan bir metrik geometriye *Pasch geometri* denir.

Tanım 2.9 (Açı Ölçme Fonksiyonu) Bir [$\mathbb{P}$,$\mathbb{L}, d$] Pasch geometrisinde, $\mathcal{A}$ tüm açıların kümesi olmak üzere, aşağıdaki üç koşulu sağlayan $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna *açı ölçme fonksiyonu* denir.

(i) Eğer $\angle ABC \in \mathcal{A}$ ise, $0 < m(\angle ABC) < 180$ dir.

(ii) $\mathcal{H}$ yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m(\angle PAB) = r$ olacak sekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

(iii) Eğer D noktası $\angle ABC$ açısının *iç bölgesi*nde ise,

$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = m(\angle ABC) \text{ dir.}$$

Eğer $A-B-C$ ve $D \notin AC$ ise

$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = 180 \text{ dir.}$$

Tanım 2.10 (Açıölçer geometri) $[\mathbb{P},\mathbb{L},d\,]$ Pasch geometrisine, bu geometri üzerinde tanımlı bir m açıölçme fonksiyonuyla birlikte *açıölçer (protractor) geometri* denir ve $[\mathbb{P},\mathbb{L},d,m]$ ile gösterilir.

Tanım 2.11 $[\mathbb{P},\mathbb{L},d,m]$ açıölçer geometrisinde, iki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve bu kenarlar arasındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açısına eş iken bu üçgenler de eş ise, $[\mathbb{P},\mathbb{L},d,m]$ sistemi *kenar-açı-kenar (KAK) aksiyomunu* sağlıyor denir.

Tanım 2.12 KAK aksiyomunu sağlayan açıölçer geometriye *mutlak (absolute, neutral) geometri* denir (Çolakoğlu 2009).

Öklid geometrisi ile Hiperbolik geometri hem metrik geometri, Pasch geometri hem de açıölçer geometri ve *mutlak (absolute,neutral) geometri* özelliklerini sağlar (Millman and Parker 2000)

Tanım 2.13 Doğrusal Dönüşüm (Mobius Dönüşümü) $a,b,c,d \in$ □ , $ad - bc \neq 0$ olmak üzere;

$$T\,(\,z\,)\;=\;(\,az\;+\;b\,)\,/\,(\,cz\;+\;d\,)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, kesirli doğrusal dönüşüm (mobius dönüşümü) denir (Ertaş 1991, Yılgör 2007).

Tanım 2.14 C merkezli ve k yarıçaplı bir çember verilsin. Eğer

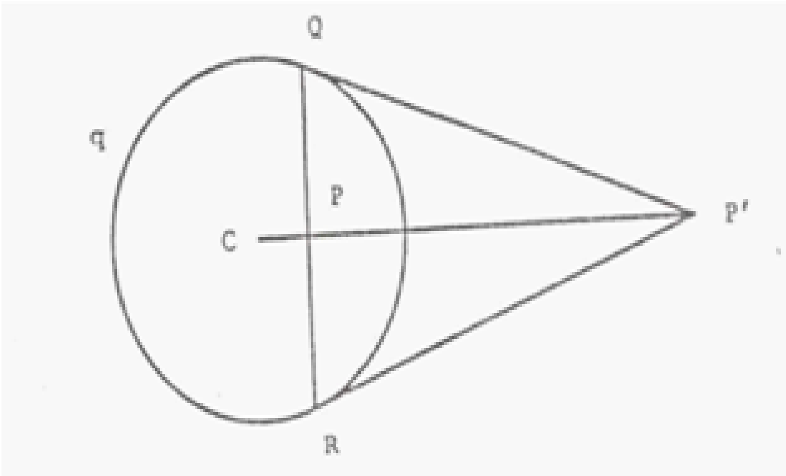
(i) C, PP'doğru parçasının dışında olacak şekilde, C, P , P' noktaları doğrudaşlarsa,
(ii) $CP.CP' = k^2$

ise P ve P' noktaları, C merkezli, k yarıçaplı çembere göre simetriktir, denir (Şekil 2.1).

Bu iki noktayı çembere göre simetrik yapan $I_{C,k}$ fonksiyonuna da inversiyon adı verilir ve

$$I_{C,k}(P) = \text{P'}$$

şeklinde gösterilir.



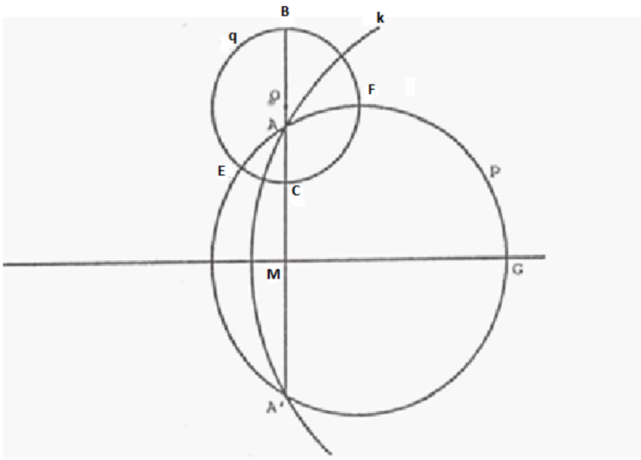
Şekil 2.1 İnversiyon

İnversiyonlar, yansımalara benzeyen involusyonlardır. $I_{C,k}$ inversiyonun sabit noktaları, C merkezli ve k yarıçaplı çemberi oluşturan noktalardır. İnversiyonlar çemberi, çembere dönüştüren dönüşümlerdir.

Teorem 2.1 Her Öklid çemberi aynı zamanda bir hiperbolik çemberdir.
İspat: q, O merkezli ve x-eksenine dik BC çaplı bir Öklid çember olsun (Şekil 2.2). Eğer q nun aynı zamanda hiperbolik çember olduğu ispatlanırsa, bu hiperbolik çemberin A hiperbolik merkezi , BC doğru parçasının hiperbolik orta noktası ve

$$MA = \sqrt{MB.MC} \tag{2.1}$$

biçimindedir. Şimdi A dan geçen her p jeodeziğinin, q nun içini iki hiperbolik eş parçaya böldüğünü gösterelim. Bu hiperbolik eşlik, I_p hiperbolik yansıması olup, yani p nin her noktasını sabit bırakan bir yansımadır.



Şekil 2.2 Öklid ve hiperbolik çember gösterimi

q merkezil çemberindeki hiperbolik yansımanın p çemberini sabit bırakması için gerek ve yeter şart p ve q nun dik olmasıdır. Bu nedenle k sı q nun öklid yarıçapı olan p yi sabit bırakan $\mathrm{I}_{0,\mathrm{k}}$ inversiyonunun olduğunu ispatlamak gerekir. $\mathrm{I}_{0,\mathrm{k}}$ inversiyonu p ve q nun E ve F kesişim noktalarını sabit bırakır. $I_{0,k}(p)$, E ve F yi kapsayan bir çember olması nedeniyle, şimdi $A' = I_{0,k}(A)$ nın p üzerinde olduğu gösterilsin. Bunun için A ve A' nün x- eksenine göre simetrik olduğunu göstermek yeterlidir.

$O = (.,b)$ ise bu taktirde $B = (.,b+k)$, $C = (.,b-k)$ ve (2.1) eşitliğinden,

$$A = (.,\sqrt{b^2-k^2})$$

olur. Buradan A' nün ordinatı, A nın ordinatının negatifi olan,

$$OM - OA^{\iota} = b - \frac{k^2}{OA}$$

$$= b - \frac{k^2}{b-\sqrt{b^2-k^2}}$$

$$= b - \frac{k^2}{b-\sqrt{b^2-k^2}} \cdot \frac{b+\sqrt{b^2-k^2}}{b+\sqrt{b^2-k^2}}$$

$$= b - \frac{k^2(b+\sqrt{b^2-k^2})}{b^2-(b^2-k^2)}$$

$$= b - \frac{k^2(b + \sqrt{b^2 - k^2})}{k^2}$$

$$= b - (b + \sqrt{b^2 - k^2})$$

$$= -\sqrt{b^2 - k^2}$$

ifadesine eşittir. Sonuç olarak A^{ι} , p= $I_{0,k}(p)$ olacak şekilde hem p hem de $I_{0,k}(p)$ nin üzerindedir. Bunun anlamı p ve q ortogonaldir ve bu nedenle , $q = I_{0,k}(q)$ dur. Diğer bir deyişle , A dan geçen her jeodezik , q yu iki hiperbolik eş parçaya ayırır.

Şimdi AE yayının hiperbolik uzunluğunun sabit olduğu ve A noktasından geçen p çemberinin durumundan bağımsız olduğu gösterilsin.

Bunun için AE yi AC üzerine dönüştüren hiperbolik yansımanın bulunması gereklidir. G noktası, x −ekseni ile p nin arakesiti ve n, G merkezli ve A dan geçen bir jeodezik olsun .

$I_n(A) = A$ ve $I_n(A^{\iota}) = A^{\iota}$ olduğundan dolayı $I_n(p) = BM$ olur.

Bununla birlikte, ispatın ilk kısmına bakarak $I_n(q) = q$ dur. Sonuç olarak I_n inversiyonunun q ve p nin kesişimi olan E noktasını, q ve BM nin kesişimi olan C noktasına dönüştürdüğü söylenebilir.

Bu durumda şu sonuca varılır: AE yayının hiperbolik uzunluğu sabittir ve bu nedenle q, A merkezli hiperbolik çemberdir (Çakan 2011).

3. KONVEKS HİPERBOLİK DÖRTGENLER

Hiperbolik geometri bir mutlak (absolute, neutral) geometridir (Millman and Parker 1991). Bu bölümde öncelikle hiperbolik geometride konveks dörtgenlere ait genel özelliklerden bahsedilecektir. Daha sonra hiperbolik geometride konveks dörtgenlere örnek olarak Saccheri ve Lambert dörtgenleri verilecektir.

Tanım 3.1 (Doğru parçası) Bir metrik geometride A ve B farklı iki nokta olmak üzere

$$AB = \{X \in P \ : X = A \ veya \ X = B \ veya \ A - X - B\}$$

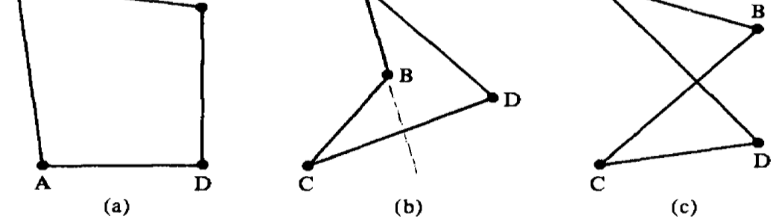
kümesine AB **doğru parçası** denir ve $\overline{AB}$ veya $[AB]$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2 (Doğru parçasının içi) $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ iki doğru parçası olmak üzere, eğer $d(A,B) = d(C,D)$ ise $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ doğru parçaları eştir, denir ve $\overline{AB} \sqcup \overline{CD}$
$\overline{AB}$ -$\{A,B\}$ kümesine ise $\overline{AB}$ *doğru parçasının içi* denir ve *int*($\overline{AB}$) ile gösterilir.

Tanım 3.3 Bir metrik geometride $\{A,B,C,D\}$ kümesi, herhangi üçü doğrudaş olmayan noktalar kümesi olsun. Eğer $int(\overline{AB}), int(\overline{BC}), int(\overline{CD})$ ve $int(\overline{DA})$ den herhangi ikisi kesişmiyorsa,

$$\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$$

ifadesine bir *dörtgen* denir.
Şekil 3.1' de (a) ve (b) bir dörtgeni temsil ederken (c) bir dörtgen değildir.



Şekil 3.1 Dörtgen ve dörtgen olmayan şekiller

Teorem 3.1 Bir metrik geometride $\square ABCD$ verilsin. Bu durumda,

$\square ABCD = \square BCDA = \square CDAB = \square DABC = \square ADCB = \square DCBA = \square CBAD = \square BADC$ dir. Ancak $\square ABCD$ ve $\square ABDC$ eş değildir.

İspat: Tanım 3.3 den,

$$\begin{aligned}\square ABCD &= \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} = \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} \cup \overline{AB} = \overline{CD} \cup \overline{DA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BC} \\ &= \overline{DA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} = \overline{AD} \cup \overline{DC} \cup \overline{CB} \cup \overline{BA} \\ &= \overline{DC} \cup \overline{CB} \cup \overline{BA} \cup \overline{AD} = \overline{CB} \cup \overline{BA} \cup \overline{AD} \cup \overline{DC} \\ &= \overline{BA} \cup \overline{AD} \cup \overline{DC} \cup \overline{CB}\end{aligned}$$

olup,

$\square ABCD = \square BCDA = \square CDAB = \square DABC = \square ADCB = \square DCBA = \square CBAD = \square BADC$

dir. Ancak,

$$\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} \neq \overline{AB} \cup \overline{BD} \cup \overline{DC} \cup \overline{CA} = \square ABDC$$

olur.

Tanım 3.4 $\square ABCD$ dörtgeninde $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ *kenarlar*; A, B, C, D *köşeler*; $\angle ABC$,$\angle BCD$,$\angle CDA$ ve $\angle DAB$ *açılar*; $\overline{AC}$ ve $\overline{BD}$ *köşegenler* olarak adlandırılır. Köşegenlerin bitim noktalarına *karşılıklı köşeler*, iki kenarın ortak bir köşesi varsa bu kenarlara *komşu kenarlar,* aksi halde *karşılıklı kenarlar* denir. Eğer iki açının ortak kenarı varsa bu açılara *komşu açılar* aksi halde *karşılıklı açılar* denir.

Teorem 3.2. Bir metrik geometride $\square ABCD = \square PQRS$ ise o zaman $\{A, B, C, D\} = \{P, Q, R, S\}$ dir. Ayrıca $A = P$ ise $C = R$ ve $B = Q$ veya $B = S$ dir. O halde, $\square ABCD$ dörtgeninin kenarları, açıları ve köşegenleri $\square PQRS$ dörtgeniyle aynıdır.

İspat: $\square ABCD = \square PQRS$ ise Tanım 3.3 den,

$$\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} = \overline{PQ} \cup \overline{QR} \cup \overline{RS} \cup \overline{SP} = \square PQRS$$

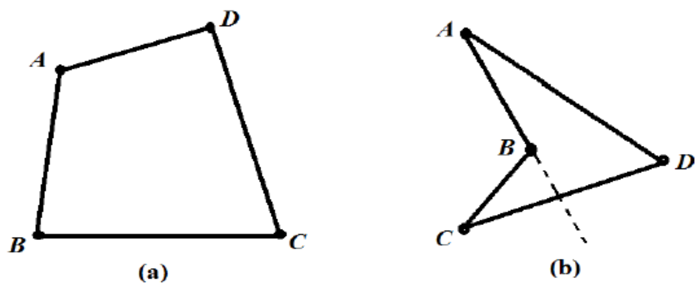
dir. $A = P$ ise Teorem 3.1 den,

$$\square ABCD = \square CBAD = \overline{CB} \cup \overline{BA} \cup \overline{AD} \cup \overline{DC}$$
$$\square PQRS = \square RQPS = \overline{RQ} \cup \overline{QP} \cup \overline{PS} \cup \overline{SR}$$

yazılabilir. $\square ABCD = \square PQRS$ olduğundan $\square CBAD = \square RQPS$ dir. Buradan $C = R$ ve $B = Q$ dur. Benzer şekilde $\square ABCD = \square PQRS = \square\ PSRQ$ dir. Buradan $C = R$ ve $B = S$ dir. Tanım 3.4 den, $\square ABCD$ dörtgeninin kenarları, açıları ve köşegenleri $\square PQRS$ dörtgeniyle aynıdır.

Tanım 3.5 Pasch geometride, bir $\square ABCD$ dörtgeninin her kenarı, tamamen karşı kenar tarafından belirlenen yarı düzlemdeyse, bu durumda $\square ABCD$ dörtgenine *konveks dörtgen* denir.

Şekil 3.2 (a) konveks dörtgendir fakat (b) konveks dörtgen değildir.



Şekil 3.2 Konveks ve konveks olmayan dörtgenler

Teorem 3.3 $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, d\}$ düzlem ayırma aksiyomunu (DAA) sağlayan bir metrik geometri olsun. l doğrusu üzerinde olmayan $\mathcal{P}$ nin A ve B noktaları için,

i) A ve B noktaları l nin zıt tarafındadır $\Leftrightarrow \overline{\mathrm{AB}} \cap l \neq \emptyset$
ii) A ve B noktaları l nin aynı tarafındadır $\Leftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}$ veya $\overline{\mathrm{AB}} \cap l = \emptyset$ dir.

İspat: i) A ve B noktaları l nin zıt tarafında ise, $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ (veya $A \in H_2$ ve $B \in H_1$) olur. Bu durumda DAA yı sağlayan bir metrik geometri olduğundan Tanım 2.7 (iii) den $\overline{\mathrm{AB}} \cap l \neq \emptyset$ olur.

Aksine $\overline{\mathrm{AB}} \cap l \neq \emptyset$ olsun. Eğer $A, B \in H_1$ (veya $A, B \in H_2$) olsaydı H_1 (veya H_2) konveks olduğundan $\overline{AB} \in H_1$ (veya H_2) olurdu. Bu ise $\overline{\mathrm{AB}} \cap l = \emptyset$ anlamına geleceğinden çelişki oluşurdu. O halde A ve B noktaları l doğrusunun zıt tarafında olmalıdırlar.

ii) A ve B noktaları l nin aynı tarafında olsunlar. Bu durumda $A, B \in H_1$ veya $A, B \in H_2$ dir. H_1 ve H_2 konveks olduğundan ya $A = B$ veya $\overline{AB} \in H_1$ $veya$ $\overline{AB} \in H_2$ olur. Dolayısıyla $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ dır.

Tersine $A = B$ veya $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ olsun. $A = B$ ise bu noktalar l nin aynı tarafındadır. $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ ise H_1 ve H_2 yarı düzlemleri konveks olduğundan A ve B noktaları ya H_1 ya da H_2 yarı düzlemindedirler. Yani l nin aynı tarafındaki yarı düzlemdedirler.

Teorem 3.4 Pasch geometride, bir dörtgenin konveks dörtgen olması için gerek ve yeter şart dörtgenin her bir açısının karşı köşesindeki açının iç kısmında bulunmasıdır.

İspat: *Gerek şart:* Bir Pasch geometride $\square ABCD$ bir konveks dörtgen olsun. Bu durumda Tanım 3.5 den, dörtgenin her bir kenarı karşı kenarın belirlediği yarı düzlemdedir. Bu durumda $\overline{DC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ nin ayırdığı bir yarı düzlemdedir ve $\overline{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ nin ayırdığı bir yarı düzlemdedir. $\overline{DC} \cap \overline{AD} = \{D\}$ olup D noktası, $\overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{AB}$ ışınının C noktasını içeren yarı düzleminde ve $\overrightarrow{BC} \subset \overleftrightarrow{BC}$ ışınının A noktasını içeren yarı düzlemindedir. Tanım 2.6 dan $D \in \text{int}(\angle ABC)$ olur.

Benzer şekilde $C \in int(\angle DAB)$, $B \in int(\angle ADC)$ ve $A \in int(\angle BCD)$ olduğu da gösterilebilir.

Yeter şart: Bir $\square ABCD$ dörtgeninin her bir açısı karşı köşesindeki açının iç kısmında olsun. Bu durumda $D \in int(\angle ABC)$, $C \in int(\angle DAB)$, $B \in int(\angle ADC)$ ve $A \in int(\angle DCB)$ olur.

$D \in int(\angle ABC)$ olduğundan D noktası $\overrightarrow{BA}$ nın C noktasını içeren tarafında ve $C \in int(\angle DAB)$ olduğundan C noktası da $\overrightarrow{AB}$ nin D noktasını içeren tarafındadır. C ve D noktaları $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$ nin aynı tarafındadır.

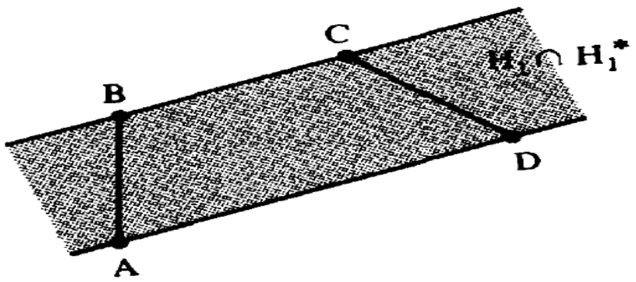
Benzer şekilde dörtgenin diğer kenarlarının da karşı kenarlarının ayırdığı yarı düzlemlerde olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla Tanım 3.5 den $\square ABCD$ bir konveks dörtgendir.

Teorem 3.5 Pasch geometride, $\square ABCD$ bir dörtgen olsun. Eğer $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ ise $\square ABCD$ bir konveks dörtgendir.

İspat: $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ ise $\overline{BC}$ doğru parçası $\overleftrightarrow{AD}$ doğrusunun bir tarafında ve $\overline{AD}$ doğru parçası $\overleftrightarrow{BC}$ doğrusunun bir tarafındadır (Şekil 3.3). $\overline{AB}$ doğru parçasının $\overleftrightarrow{CD}$ nin bir tarafında olduğu gösterilmelidir.

$\overline{AB}$ doğru parçasının $\overleftrightarrow{CD}$ nin bir tarafında olmadığı kabul edilsin. O zaman $int(\overline{AB}) \cap \overleftrightarrow{CD} \neq \emptyset$ olur. $\overleftrightarrow{BC}$ nin A yı içeren tarafı H_1 ve $\overleftrightarrow{AD}$ nin B yi içeren tarafı H_1^* olsun. O halde, $int(\overline{AB}) \subset H_1 \cap H_1^*$ $\emptyset \neq int(\overline{AB}) \cap \overleftrightarrow{CD} \subset H_1 \cap H_1^* \cap \overleftrightarrow{CD} = int(\overline{CD})$ olur. Buradan $int(\overline{AB}) \cap int(\overline{CD}) \neq \emptyset$ olur. Bu sonuç ise dörtgen tanımıyla çelişmektedir.

Sonuç olarak, $\overline{AB}$ doğru parçası tamamen $\overleftrightarrow{CD}$ nin bir tarafında ve benzer şekilde $\overline{CD}$ doğru parçası tamamen $\overleftrightarrow{AB}$ nin bir tarafındadır. Dolayısıyla $\square ABCD$ bir konveks dörtgendir.



Şekil 3.3 Pasch geometride $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ olan $\square ABCD$ konveks dörtgeni

Teorem 3.6 Pasch geometride, $\square ABCD$ dörtgeninin konveks dörtgen olması için gerek ve yeter şart dörtgenin her kenarının, karşı kenarın belirttiği doğruyla kesişmemesidir.
İspat: $\square ABCD$ bir dörtgen olsun.

<u>Gerek Şart:</u> $ABCD$ bir konveks dörtgen ise Tanım 3.5 den dörtgenin her kenarı, tamamen karşı kenarın belirttiği yarı düzlemdedir. Bu durumda Teorem 3.3 (ii)' den den her kenar karşı kenarın belirttiği doğruyla kesişmez.

<u>Yeter Şart:</u> $ABCD$ dörtgeninde her kenar, karşı kenarın belirttiği doğruyla kesişmesin. Bu durumda Teorem 3.3 (ii) den dörtgenin her kenarı karşı kenarın belirttiği yarı düzlemdedir. O halde $\square ABCD$ konvekstir.

Tanım 3.6 $\square ABCD$ konveks dörtgeninde $\overleftrightarrow{AB}$ kenarının C ve D noktalarını kapsayan kısmı, $\overleftrightarrow{BC}$ kenarının A ve D noktalarını kapsayan kısmı, $\overleftrightarrow{CD}$ kenarının A ve B noktalarını kapsayan kısmı ile $\overleftrightarrow{DA}$ kenarının B ve C noktalarını kapsayan kısmının

kesişimine $\square ABCD$ dörtgeninin içi denir ve $int(\square ABCD)$ ile gösterilir.

Teorem 3.7 $int(\square ABCD)$ konvekstir.

İspat: Pasch geometride, üçgenler ve üçgenlerin içi konvekstir. Dörtgenlerde üçgenlerden oluştuklarından $int(\square ABCD)$ konvekstir.

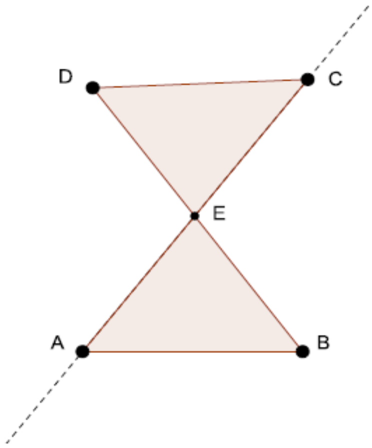
Teorem 3.8 Pasch geometride, bir dörtgenin köşegenleri kesişiyorsa dörtgen konveks dörtgendir.

İspat: $\square ABCD$ dörtgeninin köşegenleri $\overline{AC}$ ve $\overline{BD}$, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$ olsun. Bu durumda $\overrightarrow{AE} \cap int(\overline{BD}) \neq \emptyset$ olup $E \in int(\angle DAB)$ olur. $\overline{AC} \subset \overrightarrow{AE}$ olduğundan $C \in int(\angle DAB)$ olur. Benzer şekilde $\overrightarrow{BE} \cap int(\overline{AC}) \neq \emptyset$ olup $E \in int(\angle ABC)$ olur. $\overline{BD} \subset \overrightarrow{BE}$ olduğundan $D \in int(\angle ABC)$ olur ve bu şekilde $A \in int(\angle BCD)$, $B \in int(\angle ADC)$ olduğu gösterilir. Teorem 3.4 den $\square ABCD$ dörtgeni konvekstir.

Teorem 3.9 Pasch geometride, bir dörtgenin en az bir köşesi karşı açısının içindedir.

İspat: $\square ABCD$ bir dörtgen olsun. $\square ABCD$ dörtgeninin hiçbir köşesi karşı açısının içinde olmasın. Bu durumda $B \notin int(\angle DCA)$ (Şekil 3.4) ve B noktası ya $\overrightarrow{CD}$ ışınının A noktasını kapsayan tarafında ya da $\overrightarrow{CA}$ ışınının D noktasını kapsayan tarafında bulunur. B noktası $\overrightarrow{CD}$ ışınının A noktasını kapsayan tarafında olsun. Bu durumda $\overrightarrow{CD} \cap \overline{AB} = \emptyset$ olup D ve B noktaları $\overrightarrow{CA}$ nın zıt tarafında olurlar. O halde Teorem 3.3 (i) den $\overrightarrow{CA} \cap \overline{DB} = \{E\} \neq \emptyset$ olur. Eğer $E = D$ (veya $E = B$) olursa bu durumda C, D, A (veya C, B, A) doğrusal olur ki bu durumda Tanım 3.3 den $\square ABCD$ bir dörtgen olmaz. $D - E - B$ olması durumunda ise, $int(\overline{BD}) \cap \overleftrightarrow{CA} = int(\overline{BD}) \cap int(\overleftrightarrow{CA}) = int(\overline{BD}) \cap int(\overline{CA}) \neq \emptyset$ olur ki bu durumda da Tanım 3.5 den $\square ABCD$ bir dörtgen olmaz. Bu bir çelişkidir. O halde $\square ABCD$ nin en az bir köşesi karşı kenarının içindedir.

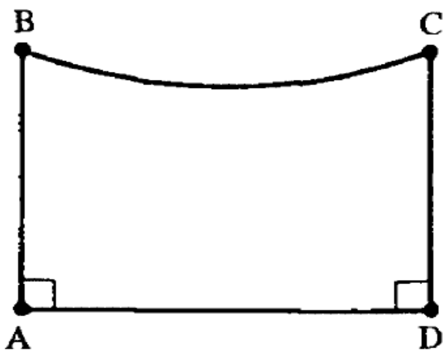
B noktasının $\overrightarrow{CA}$ ışınının D noktasını kapsayan tarafında olması durumu da aynı şekilde gösterilebilir.



Şekil 3.4 Hiçbir köşesi karşı açısının içinde olmayan dörtgen

Tanım 3.7 Açıölçer (protractor) geometrisinde, $\angle A$ ve $\angle D$ dik açılar, $\overline{AD} \simeq \overline{CD}$olacak şekildeki $ABCD$ dörtgenine Saccheri dörtgeni denir.

Saccheri dörtgeni $\ulcorner S \urcorner$ $ABCD$ şeklinde gösterilir. Bu dörtgenin alt tabanı $\overline{AD}$, üst tabanı $\overline{BC}$, alt taban açıları $\angle A$ ve $\angle D$, üst taban açıları $\angle B$ ve $\angle C$ dir (Şekil 3.5).



Şekil 3.5 Saccheri dörtgeni

Teorem 3.10 Neutral geometride , $\ulcorner S \urcorner$ $ABCD$ Saccheri dörtgeni, konveks dörtgendir.

İspat . Teorem 3.4 den $\ulcorner S \urcorner ABCD$ Saccheri dörtgeni, konveks dörtgendir.

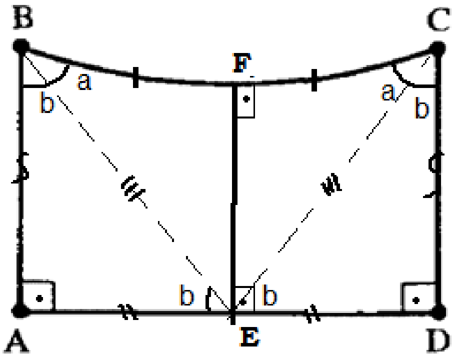
Teorem 3.11 Neutral geometride, $\overline{AD} \simeq \overline{PS}$ve $\overline{AB} \simeq \overline{PQ}$ise

$$\ulcorner S \urcorner ABCD \simeq \ulcorner S \urcorner PQRS \text{ dir.}$$

İspat: $\overline{AD} \simeq \overline{PS}$ ve $\overline{AB} \simeq \overline{PQ}$, Kenar-Açı-Kenar aksiyomundan $\Delta ABD = \Delta PQS$ dir. $\overline{AB} \simeq \overline{DC}$, $\overline{PQ} \simeq \overline{SR}$ ve Kenar-Açı- Kenar aksiyomundan $\Delta BDC = \Delta QSR$ dir. $\Delta ABD = \Delta PQS$ ve $\Delta BDC = \Delta QSR$ olduğundan $\ulcorner S \urcorner ABCD \simeq \ulcorner S \urcorner PQRS$ dir.

Teorem 3.12 Neutral geometride, Saccheri dörtgeninin tabanlarının orta noktalarını birleştiren doğru her iki tabana da diktir.

İspat:



Şekil 3.6 Saccheri dörtgeninin tabanlarının orta noktalarını birleştiren doğru

$\angle E$ açısı dik olsun. ABCD Saccheri dörtgeninde $\Delta BAE \simeq \Delta CDE$ (Kenar-Açı-Kenar) dir. Buradan $\overline{CE} \simeq \overline{BE}$ ve ΔBEC ikizkenar üçgendir. İkizkenar üçgende tepeden tabana inilen doğru tabana dik olduğundan $\angle F$ açısı da dik olur.

Teorem 3.13 Neutral geometride, Saccheri dörtgeni bir paralelkenardır.

İspat: Neutral geometride, iki doğru ortak bir dike sahiplerse bu iki doğru birbirlerine paraleldir. Teorem 3.12 den $\overline{BC}$ ve $\overline{AD}$ ortak bir dike sahip olduklarından

$\overline{BC} \mathbin{/\!/} \overline{AD}\ dir.$

Benzer şekilde $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{DC}$ dir. O halde Saccheri dörtgeni bir paralelkenardır.

Saccheri dörtgeninde üst tabanın uzunluğu alt tabanın uzunluğundan küçük değildir. Bunu ispatlamak için, önce çokgen eşitsizliğini ispatlamamız gerekir.

Teorem 3.14 (Çokgen eşitsizliği) $n \geq 3$olsun. Neutral geometride $P_1, P_2, \dots, P_n$ noktalar ise bu taktirde ,

$$d\,(P_1, P_2) \leq d\,(P_1, P_2) + d\,(P_2, P_3) + \dots + d\,(P_{n-1}, P_n)$$

dir.

İspat: İspat tümevarım yoluyla verilsin.

$n = 3$ için yukarıdaki eşitsizlik üçgen eşitsizliği olduğundan doğrudur. Yani,

$$d\,(P_1, P_3) \ \leq \ d\,(P_1, P_2) \ + \ d\,(P_2, P_3)$$

dür. Bu sonucun $n = k$ için doğru olduğu kabul edilsin.

$$d\,(P_1, P_k) \ \leq \ d\,(P_1, P_2) \ + \ d\,(P_2, P_3) \ + \cdots + \ d\,(P_{k-1}, P_k)$$

dir. Şimdi $n = k + 1$ için doğruluğu ispatlansın.

Üçgen eşitsizliğinden,

$$d\,(P_1, P_{k+1}) \ \leq \ d\,(P_1, P_k) \ + \ d\,(P_k, P_{k+1})$$

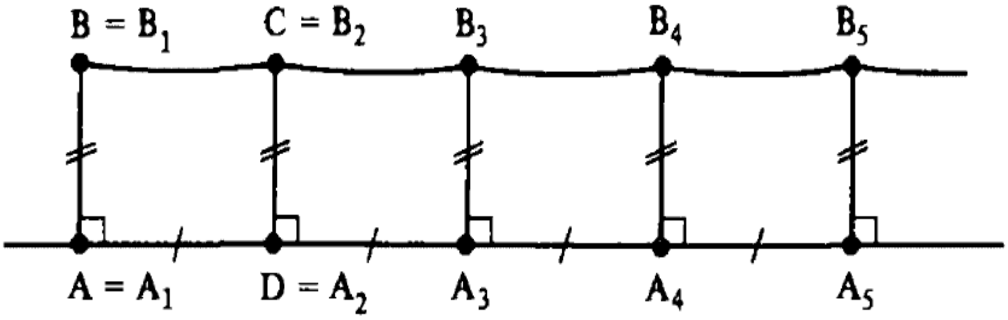
yazılır. Son iki eşitsizliğin birleşiminden,

$$d\,(P_1, P_{k+1}) \ \leq \ d\,(P_1, P_2) \ + \ d\,(P_2, P_3) \ + \cdots + \ d\,(P_{k-1}, P_k) \ + \ d\,(P_k, P_{k+1})$$

elde edilir.

Teorem 3.15 Neutral geometride , $\ulcorner S \urcorner ABCD$ Saccheri dörtgeni olsun. $\overline{BC} \geq \overline{AD}$ dir.

İspat: $\ulcorner S \urcorner ABCD$ Saccheri dörtgeninde $A_1 = A$, $A_2 = D$, $B_1 = B$ ve $B_2 = C$ olsun.



Şekil 3.7 Eş Saccheri dörtgenler zinciri

Eş Saccheri dörtgenler zinciri oluşturulsun.

$k \geq 3$ olmak üzere $\overleftrightarrow{AD}$ üzerinde $\overline{A_{k-1}A_k} \simeq \overline{AD}$ olacak şekilde A_k noktaları alınsın. Burada,

$$d(A_1, A_{k+1}) = n.d(A, D)$$

dır.

$\overline{B_k A_k} \perp \overleftrightarrow{AD}$ ve $\overline{B_k A_k} \simeq \overline{BA}$
olacak şekilde B_k noktaları alınsın.

Teorem 3.11 den $\boxed{S}\, A_i B_i C_{i+1} D_{i+1} \simeq \boxed{S}\, ABCD$ Çokgen eşitsizliğinden,
$d\,(A_1, A_{n+1}) \;\leq\; d\,(A_1,\, B_1) \;+\; d\,(B_1, B_2) + \;\ldots\; + \; d\,(B_n, B_{n+1}) \;+\; d\,(B_{n+1}, A_{n+1})$
dir.

$d\,(A, B) \;=\; d\,(A_1, B_1) \;=\; d\,(A_{n+1}, B_{n+1}),\; d\,(B_i, B_{i+1}) \;=\; d\,(B, C)$ ve

$d\,(A_1, A_{k+1}) \;=\; n.\,d\,(A, D)$ olduğundan çokgen eşitsizliği n $\geq$ 1 olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
n.\,d\,(A, D) \;&\leq\; 2.\,d\,(A, B) \;+\; n.\,d\,(B, C) \\
d\,(A, D) \;-\; d\,(B, C) \;&\leq\; \frac{2}{n}\, d\,(A, B)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

haline dönüşür. n $\geq$ 1 olduğundan (3.1) eşitsizliğinin sağ tarafı istenildiği kadar küçültülebilir. Bu durumda, $d\,(A, D) \;-\; d\,(B, C) \;\leq\; 0$ yazılabilir. Buradan,

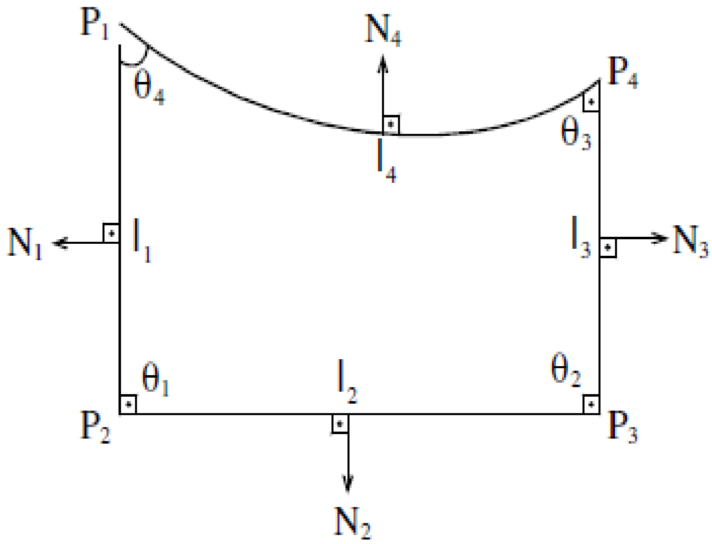
$$\overline{AD} \leq \overline{BC} \quad \text{dır.}$$

Teorem 3.16 Neutral geometride, $\boxed{S}\; ABCD$ Saccheri dörtgeni olsun. $<$ ABD $\leq <$ BDC dir.

İspat: Teorem 3.15 dan $\boxed{S}\, ABCD$ Saccheri dörtgeninde $\overline{AD} \leq \overline{BC}$ dir. Neutral geometride, küçük kenar karşısında küçük açı ve büyük kenar karşısında büyük kenar olduğundan $< ABD \leq < BDC$ dir (Millman and Parker 1991).

Tanım 3.8 Bir $ABCD$ dörtgeni için $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ kenarları eşit uzunlukta ve bu kenarlar $\overline{AD}$ alt tabanına dik olsun. $\angle B$ ve $\angle C$ üst taban açıları eş ve dar açılar ise bu dörtgene Hiperbolik Saccheri dörtgeni denir.

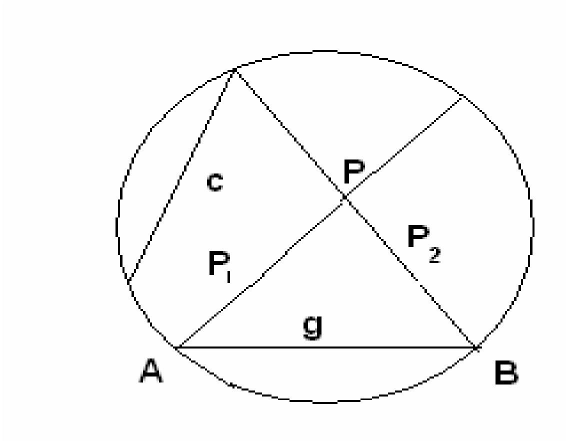
Tanım 3.9 Herhangi üç açısı dik açı ve dördüncü açısı dar açı olan dörtgene Hiperbolik Lambert dörtgeni denir (Ratcliffe 1994, Külük 2014).



Şekil 3.8. Hiperbolik Lambert dörtgeni

4. HİPERBOLİK GEOMETRİDE KELEBEK TEOEMİ

Öklid geometrisinde dikkat çeken teoremlerden birisi de kelebek teoremidir. Izmestıev, (Izmestıev 2014), kelebek teoremini hiperbolik geometri için incelemiştir. O, bu teoremi ispatlamak için Klein disk modelini kullanmıştır.



Şekil 4.1 Klein gösterimi

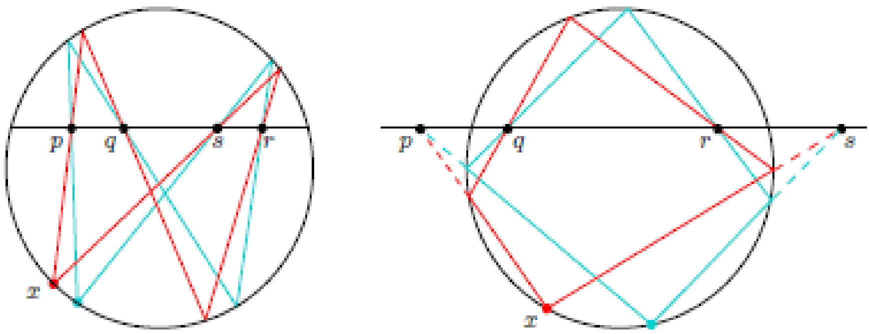
Bu model aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 4.1 Hiperbolik düzlem olarak herhangi bir çemberin iç bölgesi alınır.

Tanım 4.2 Çemberin içindeki noktalara hiperbolik noktalar denir.

Tanım 4.3 Hiperbolik doğrular verilen çemberlerin kirişleridir (Yılgör 2007).

Öklid düzlemindeki çemberler ile hiperbolik düzlemdeki çemberler aynıdır (Teorem 2.1). O halde hiperbolik düzlemde C, bir çember olsun ve C üzerinde olmayan dört doğrudaş p,q,r,s noktaları verilsin. $x \in C$, p,q,r,s ile doğrudaş olmayan bir nokta olmak üzere x den başlayıp sırasıyla p,q,r,s noktalarından geçen en az bir kirişler dörtgeni (Şekil 4.2) vardır.



Şekil 4.2 Kirişler dörtgeni

Tanım 4.4 Metrik geometride dört farklı *a,b,c,d* reel sayılarının çifte oranı,

$$cr(a,b;\ c,d) \ = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$$

dır.

Tanım 4.5 Bir x noktasında kesişen l_1, l_2, l_3, l_4 doğrularının çifte oranı,

$$cr\ (l_1, l_2;\ l_3, l_4) = \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)} : \frac{\sin(\alpha-\delta)}{\sin(\beta-\delta)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada sırasıyla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sırasıyla l_0 doğrusuyla l_1, l_2, l_3 ve l_4 doğrularının oluşturduğu açılardır.

Burada, α yerine $\pi+\alpha$ alınırsa çifte oran değişmez.

Önerme 4.1 l doğrusu x den geçmeyen ve l_1, l_2, l_3, l_4 doğrularını *a,b,c,d* noktalarında kesen bir doğru olsun. Bu durumda,

$$cr\ (l_1, l_2;\ l_3, l_4) \ = \ cr\ (a,b;\ c,d)$$

dir.

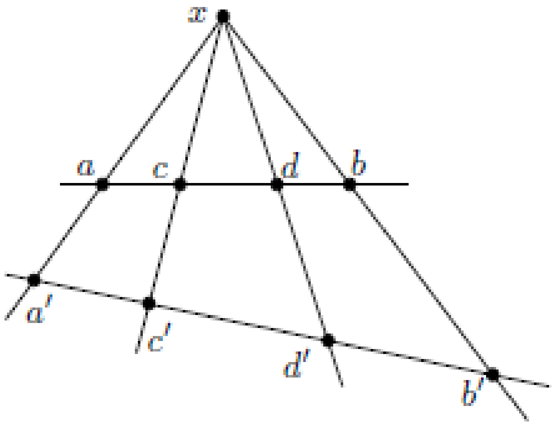
İspat: Sinüs kuralından, $\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{\sin\angle axc}{\sin\angle bxc} : \frac{\sin\angle axd}{\sin\angle bxd}$

dır ve

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{\sin\angle axc}{\sin\angle bxc} : \frac{\sin\angle axd}{\sin\angle bxd} = \frac{|a'c'|}{|b'c'|} : \frac{|a'd'|}{|b'd'|}$$

yazılır.

Buradan bir x noktasından noktadaş doğruların çifte oranı koruduğu söylenebilir (Şekil 4.3).



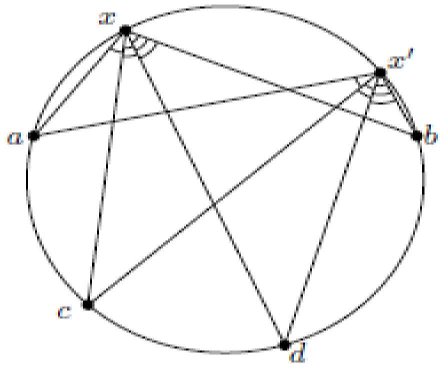
Şekil 4.3 Doğrular ve noktaların çifte oranı

Tanım 4.6 Bir C çemberinin üzerinde dört nokta alınsın. x noktası, bu dört noktadan farklı C çemberi üzerinde keyfi bir nokta olmak üzere, dört noktanın çifte oranı,

$$\text{cr}\,(a, b; c, d) = \text{cr}\,(xa, xb; xc, xd)$$

olarak tanımlanır (Şekil 4.4).

Çember üzerindeki noktaların çifte oranı korunur.



Şekil 4.4 Bir çember üzerindeki noktaların çifte oranı

Teorem 4.1 (Kelebek teoremi) Bir kirişler dörtgeninin ardışık kenarları ile bir l doğrusunun arakesit noktaları p,q,r,s ve çevrel çember C olsun. Eğer l doğrusu C çemberini a ve b gibi farklı iki noktada kesiyorsa,

(1) $cr\ (a,b;\ p,q) = cr\ (a,b;\ s,r)$

Eğer l doğrusu C çemberine a noktasında teğet ise,

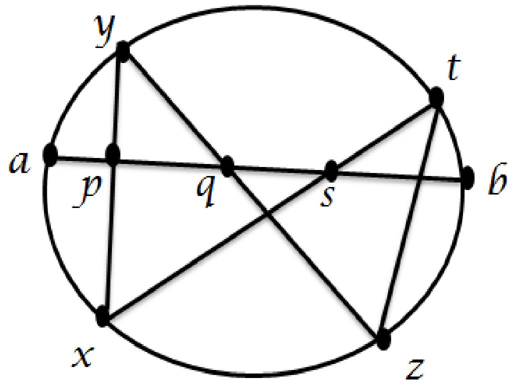
(2) $\dfrac{1}{a-p} - \dfrac{1}{a-q} = \dfrac{1}{a-s} - \dfrac{1}{a-r}$

Burada $a-p$ ifadesi ap yönlü doğru parçasının uzunluğunu gösterir.
Eğer l doğrusu C çemberini kesmiyorsa,

(3) $\angle paq = \angle sar$ dır.

Tersine eğer C çemberi ve (1),(2) veya (3) koşullarını sağlayan $p,q,r,s\ \epsilon\ l$ verilirse o zaman $\forall\ x\ \epsilon\ C$ için l doğrusunu sırasıyla verilen noktalarda kesen $xyzt$ kirişler dörtgeni vardır.

İspat: **(1)** l doğrusu C çemberini farklı iki noktada kessin (Şekil 4.5) .



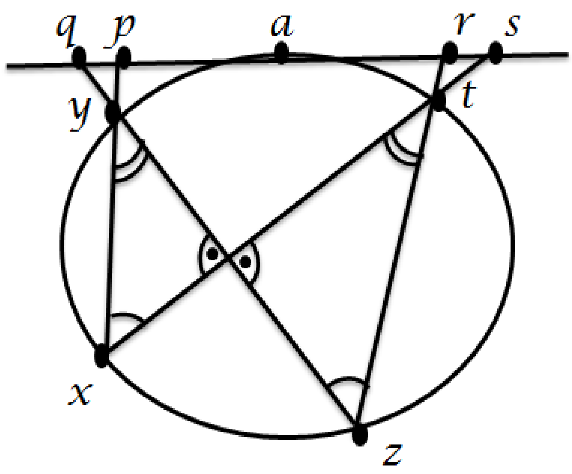
Şekil 4.5 l doğrusu C çemberini farklı iki noktada kesmesi durumundaki kelebek teoremi

Önerme 4.1 ve Tanım 4.6 iki kez uygulanırsa,

$$cr\ (a,b;\ p,q)\ =\ cr\ (ya,yb;\ yp,yq)\ =\ cr\ (a,b;\ x,z)$$

$$=\ cr\ (ta,tb;\ tx,tz)\ =\ cr\ (a,b;\ s,r).$$

(ii) l doğrusu C çemberine teğet olsun (Şekil 4.6).



Şekil 4.6 l doğrusunun C çemberine teğet olması durumundaki kelebek teoremi

$$\frac{\sin\angle pxs}{\sin\angle qzr} = \frac{yt}{ps} = \frac{yt}{qr}$$

olduğundan,

$$p - s = q - r \tag{4.1}$$

$$r - s = q - p$$

dir. (4.1) eşitliği yeniden düzenlenirse.

$$\alpha - s - (\alpha - r) = \alpha - p - (\alpha - q) \tag{4.2}$$

$a - p = A$, $a - q = B$, $a - s = C$, $a - r = D$ olsun. (4.2) eşitliğinden,

$$B - A = D - C$$

$$\frac{D - C}{CD} = \frac{B - A}{AB}$$

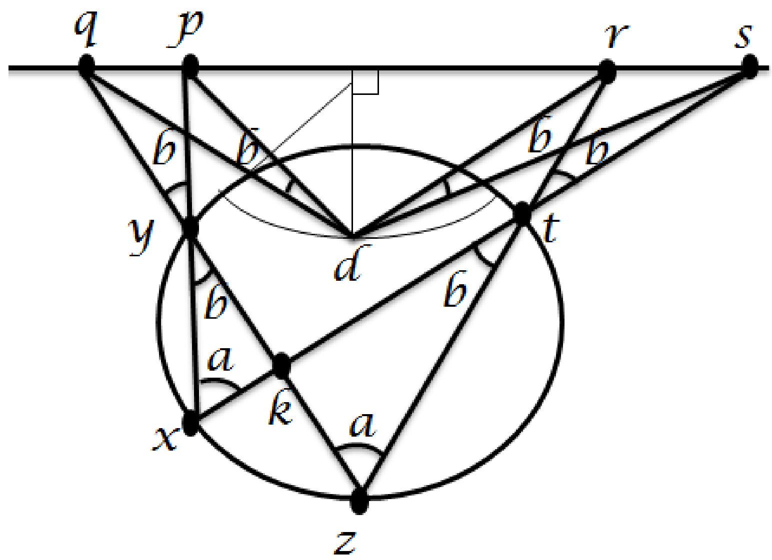
$$\frac{1}{C} - \frac{1}{D} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$$

olur. Bu eşitlikten,

$$\frac{1}{a-p} - \frac{1}{a-q} = \frac{1}{a-s} - \frac{1}{a-r}$$

dir.

(iii) l doğrusu C çemberini kesmesin (Şekil 4.7).



Şekil 4.7 l doğrusu C çemberini kesmemesi durumundaki kelebek teoremi

Aynı yayı gören açılar birbirlerine eş olduklarından aşağıda verilen açılar birbirlerine eştir.

$$\angle pxs \simeq \angle qzr \ , \angle xyz \simeq \angle xtz \ , \angle ykx \simeq \angle tkz$$

$$\angle pyq \simeq \angle xyz \ \text{ ve } \ \angle str \simeq \angle xtz$$

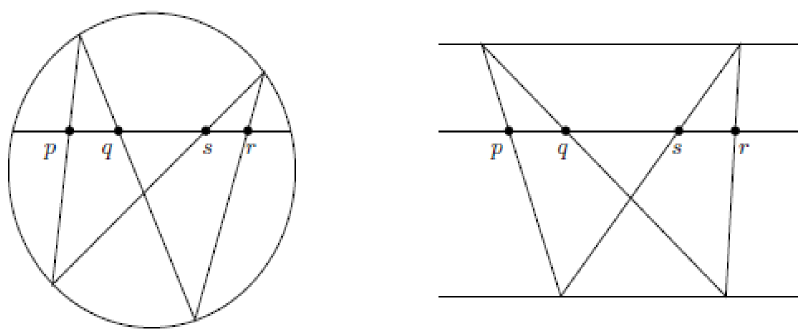
açılarıda ters açılar olduklarından birbirlerine eştirler.

Kelebek teoreminden aşağıdaki açılar eş açılardır.

$$\angle qyp \simeq \angle qdp \ , \angle str \simeq \angle sdr$$

olduğundan $\angle qdp \simeq \angle sdr$ olur.

Kelebek teoreminin diğer durumları aşağıdaki şekilde gösterilmiştir (Şekil 4.8).



Şekil 4.8 Kelebek teoreminin diğer durumları

5. KAYNAKLAR

Bağcı, N. (2017). Pasch Geometri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Çakan R. (2011). Hiperbolik Uzayın İzometrileri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Ertaş, P. (1991). Hiperbolik Geometri, Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Izmestiev, I. (2015). A Porism for Cyclic Quadrilaterals, Butterfly Theorems and Hyperbolic Geometry. The American Mathematical Monthly. **122:** 467-475.

Külük, F. (2014). Öklidyen, Küresel ve Hiperbolik Düzlemlerdeki Dörtgenlerin Gram Matrislerine Bağlı Sınıflandırılması, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Çolakoğlu, H. B. (2009). Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi. Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Millman, R. S. and Parker, G. D. (1991). Geometry: A Metric Approach with Models. Springer-Verlag, Second Edition, New York, USA.

Ratcliffe, J. G. (1994). Foundations of Hyperbolic Manifolds. Springer-Verlag, Berlin.

Yakut, A. T. (2004). Hiperbolik Uzayda Simplekslerin Tepe Açıları. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Yılgör, B. E. (2007). Euclid Geometri ve Hiperbolik Geometrinin Matematik Eğitimindeki Yeri ve Önemi. Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yasemin ATMACA

Doğum Yeri ve Tarihi : Çorum-1993

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Telefon/e-posta) : 0531 323 06 46 / yaseminatmaca03@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Yunus Emre Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, (2007-2011)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, (2011-2015)

Yüksek Lisans :

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

Özel Güven Anadolu Lisesi ve Özel Güven Anadolu Sağlık Meslek Lisesi (2017- Halen)

İnegöl Anadolu İmam Hatip Lisesi (2016-2017)

Afyonkarahisar İmam Hatip Sadık Bey Ortaokulu (2015-2016)