M-METRİK GEOMETRİSİNDE KONİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sabiha ŞİMŞEK

DANIŞMAN

Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EYLÜL, 2013

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

M-METRİK GEOMETRİSİNDE KONİKLER

Sabiha ŞİMŞEK

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EYLÜL, 2013

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

10/Eylül/2013

Sabiha ŞİMŞEK

TEZ ONAY SAYFASI

Sabiha Şimşek tarafından hazırlanan "M-METRİK GEOMETRİSİNDE KONİKLER." adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 10/09/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** (Doç Dr. Nilgün SÖNMEZ)

Başkan **:** Prof.Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,

Üye **:** Doç.Dr. Derya SAĞLAM
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,

Üye **:** Doç.Dr Nilgün SÖNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

………….
Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

M-METRİK GEOMETRİSİNDE KONİKLER

Sabiha ŞİMŞEK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Öklid geometrisi ve uzaklık ile ilgili bilgiler verilmektedir. İkinci bölümde konikler, doğru ve metrik geometri ile ilgili tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde d_M uzaklık fonksiyonu , dördüncü bölümde bir noktanın bir doğruya olan d_M uzaklığı , beşinci bölümde M-merkezil konikleri incelenmiştir. Altıncı bölümde ise sonuç ve tartışmaya yer verilmiştir.

2013, ix + 72 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konik, Çember, Elips, Hiperbol, Parabol, Metrik

ABSTRACT

M.Sc Thesis

CONİCS İN M-METRİC GEOMETRY

Sabiha ŞİMŞEK
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

This thesis consist of sixth chapters. In the first chapter, there is some information about Euclidean Geometry and distance. In the second chapter, there is some information about conics, line and metric geometry. In the third chapter, d_{mj} distance function, in the fourth chapter, d_{mj} distance between a point and a line, in the fifth chapter, M-conics were analysed. Sixth chapter is about results and discussions.

2013, ix + 72 pages

Key Words: Conic, Circle, Ellipse, Hyperbola, Parabola, Metric

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimim, başlangıcından sonuna kadar ve tez çalışmamım her safhasında yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ' e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca tüm imkanları önüme seren babam Hakkı ŞİMŞEK'e, annem Zeynep ŞİMŞEK'e ve tezin yazılması aşamasında yardımlarını esirgemeyen yiğenim Ufuk ŞİMŞEK'e, kuzenim Bahattin ÇAYIR'a teşekkürlerimi sunarım.

Sabiha ŞİMŞEK

AFYONKARAHİSAR, 2013

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
TABLOLAR DİZİNİ ix
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
2.1 Konikler ile İlgili Temel Kavramlar 3
2.2 Doğru ile İlgili Temel Kavramlar 6
2.3 Metrik Kavramı ve Metrik Geometrisi 6
3. $d_{ɱ}$ UZAKLIK FONKSİYONU 8
3.1 $\boldsymbol{d_M}$ ve $\boldsymbol{d_E}$ Uzaklık Fonksiyonlarının Birlikte Geometrik Olarak Yorumlanması 8
3.2 $\boldsymbol{d}_{ɱ}$ Uzaklığının Geometrik Yorumu 9
3.3 $\boldsymbol{d}_{ɱ}$ Metriği 12
4. $\boldsymbol{d}_{ɱ}$UZAKLIĞINDA BİR NOKTANIN BİR DOĞRUYA UZAKLIĞI 20
4.1 Öklid Uzaklığına Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı 20
4.2 Maksimum Uzaklığına Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı 21
4.3 $\boldsymbol{d}_{ɱ}$ Metriğine Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı 23
5. KONİKLER 26
5.1 M-Merkezil Çemberi 26
5.2 M-Merkezil Elipsi 27
5.3 M-Merkezil Hiperbolü 45
5.4 M-Merkezil Parabolü 64
6. SONUÇ ve TARTIŞMA 70
KAYNAKLAR 71
ÖZGEÇMİŞ 72

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	
R^2	Kartezyen düzlem
d_M	Maksimum uzaklık
d_E	Öklid uzaklığı
$d_{ɱ}$	$d_{ɱ}$ uzaklığı
m_{AB}	AB doğrusunun eğimi
r	Yarıçap
d	Düzlemde bir doğru
$\in$	Elemanı
$\leq$	Büyük eşit
$\geq$	Küçük eşit
$\neq$	Eşit değil
$<$	Büyük
$>$	Küçük
a	Elips ve hiperbol için asal eksen uzunluğunun yarısı
c	Elips ve hiperbol için odaklar arası uzaklığın yarısı

Kısaltmalar	
max	maksimum
min	minimum

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1.1 Düzlemde maksimum uzaklık……………..…….………………………..8

Şekil 3.2.1 Pozitif eğimli doğru parçalarında d_{mj} uzaklığı………………...…………10

Şekil 3.2.2 Negatif eğimli doğru parçalarında d_{mj} uzaklığı ……………..…..………….10

Şekil 3.2.3 y-eksenine paralel doğru parçalarında d_{mj} uzaklığı ………….…………….11

Şekil 3.2.4 x-eksenine paralel doğru parçalarında d_{mj} uzaklığı …….….….……………11

Şekil 3.2.5 Çakışık noktalar arası d_{mj} uzaklığı ……………………..…..……………12

Şekil 3.3.1 $d_E(A,B) \leq d_M(A,C)+d_M(C,B)$ durumu ……………….……..…..……………14

Şekil 3.3.2 $d_E(A,B) \leq d_E(A,C)+d_M(C,B)$ durumu ……………...…………...…………15

Şekil 4.1.1 Bir noktanın bir doğruya olan d_E uzaklığı ………...……….….……………20

Şekil 4.2.1 Bir noktanın bir doğruya olan d_M uzaklığı ……..…………..…..……………21

Şekil 4.2.2 Bir noktanın x-eksenine paralel bir d doğrusuna uzaklığı ……………..….22

Şekil 4.3.1 $m_d > 0$ için bir noktanın bir doğruya olan d_{mj} uzaklığı ….…..…..……………23

Şekil 4.3.2 $m_d < 0$ için bir noktanın bir doğruya olan d_{mj} uzaklığı …………...……….24

Şekil 5.1.1 M-merkezil çemberi………..………………...…………..…..……………27

Şekil 5.2.1 M- merkezil elipsi ve M- merkezil hiperbolü için düzlemin bölgeleri ..….28

Şekil 5.2.2 1.bölgedeki M-merkezil elipsi ……………………...…...…..……………29

Şekil 5.2.3 $a < 2c$ için 2. bölgedeki M-merkezil elipsi ..………………...…..……………30

Şekil 5.2.4 $a = 2c$ için 2. bölgedeki M-merkezil elipsi ..…...…………..….……………31

Şekil 5.2.5 $a > 2c$ için 2. bölgedeki M-merkezil elipsi …….……………..…..…….……31

Şekil 5.2.6 $a < 2c$ için 3. bölgedeki M-merkezil elipsi……...…………..….……………34

Şekil 5.2.7 a = 2c için 3. bölgedeki M-merkezil elipsi…..…..…………..….…………34

Şekil 5.2.8 a > 2c için 3. bölgedeki M-merkezil elipsi………..…….…….……………35

Şekil 5.2.9 4. bölgedeki M-merkezil elipsi …..…………...………..….………………36

Şekil 5.2.10 a < 2c için 5. bölgedeki M-merkezil elipsi……..…...……….……………37

Şekil 5.2.11 a = 2c için 5. bölgedeki M-merkezil elipsi………..…..….…….…………38

Şekil 5.2.12 a > 2c için 5. bölgedeki M-merkezil elipsi…..………..…....……………38

Şekil 5.2.13 a < 2c için 6. bölgedeki M-merkezil elipsi…..………..……….....………41

Şekil 5.2.14 a = 2c için 6. bölgedeki M-merkezil elipsi………..…..….…….…………41

Şekil 5.2.15 a > 2c için 6. bölgedeki M-merkezil elipsi …..………..….……………....42

Şekil 5.2.16 a < 2c için M-merkezil elipsi……………………………..….……………42

Şekil 5.2.17 a = 2c için M-merkezil elipsi …..………..…………………………………43

Şekil 5.2.18 a > 2c için M-merkezil elipsi………………..…………….…..……………43

Şekil 5.3.1 $F_1 \neq F_2$ ve a =0 için 2. bölgedeki M-merkezil hiperbolü……………..……47

Şekil 5.3.2 $F_1 \neq F_2$ ve a =0 için 3. bölgedeki M-merkezil hiperbolü..…………..….......49

Şekil 5.3.3 $F_1 \neq F_2$ ve a =0 için 5. bölgedeki M-merkezil hiperbolü..…...………..…….50

Şekil 5.3.4 $F_1 \neq F_2$ ve a =0 için 6. bölgedeki M-merkezil hiperbolü.....…………..…….52

Şekil 5.3.5 $F_1 \neq F_2$ ve a =0 için M-merkezil hiperbolü…..………………...……………52

Şekil 5.3.6 $F_1 \neq F_2$ ve a ≠0 için 1. bölgedeki M-merkezil hiperbolü..…...……..……….53

Şekil 5.3.7 $F_1 \neq F_2$ ve a ≠0 için 2. bölgedeki M-merkezil hiperbolü..………..…..…….56

Şekil 5.3.8 $F_1 \neq F_2$ ve a ≠0 için 3. bölgedeki M-merkezil hiperbolü..…...……..…..….57

Şekil 5.3.9 $F_1 \neq F_2$ ve a ≠0 için 4. bölgedeki M-merkezil hiperbolü..……....…………58

Şekil 5.3.10 $F_1 \neq F_2$ ve a ≠0 için 5. bölgedeki M-merkezil hiperbolü..……...…………61

Şekil 5.3.11 $F_1 \neq F_2$ ve a $\neq 0$ için 6. bölgedeki M-merkezil hiperbolü.........................62

Şekil 5.3.12 $F_1 \neq F_2$ ve a $\neq 0$ için M-merkezil hiperbolü......................................63

Şekil 5.4.1 M-merkezil parabolü için düzlemin bölgeleri..65

Şekil 5.4.2 1.bölgedeki M-merkezil parabolü..66

Şekil 5.4.3 2.bölgedeki M-merkezil parabolü 67

Şekil 5.4.4 3.bölgedeki M-merkezil parabolü 68

Şekil 5.4.5 4.bölgedeki M-merkezil parabolü 69

Şekil 5.4.6 M-merkezil parabolü 69

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 5.2.1 Farklı durumlarda M-Merkezil Elipsi İncelemeleri.................................... 44

Tablo 5.3.1 Farklı durumlarda M-Merkezil Hiperbolü İncelemeleri............................. 64

1 GİRİŞ

Bu bölümde tezi anlaşılır kılmak için Öklid geometrisi hakkındaki bilgiler (Türk 2010, Çaputcu 2011) kaynaklarından yararlanılarak özetlenmiştir.

Günümüzde özellikle de orta öğretim boyunca öğretilen geometri Öklid'in geliştirdiği düzlem geometridir. Bu nedenle özel olarak matematik eğitimi alanlar hariç insanlarda geometri denilince sadece Öklid geometrisi algılanmaktadır. Öklid Antik Yunan'da en bilinen matematik ve geometri bilginidir. Öklid'den önce geometri oldukça gelişmiştir. Ancak Öklid'den önce geometri alanındaki gelişmelerde en çok dikkat çeken durum bilgilerin birbiriyle bağlantısının kurulamamasıydı. Öklid kendinden önce gelen Tales, Pisagor, Platon gibi ünlü matematik ve geometri alimlerinin çalışmalarını düzenleyerek buradaki bilgilerin birbiri ile bağlantısını kurmuştur. Bu bağıntılara kendine ait bilgileri de ekleyerek geometriyi ispat ve postulatlara dayalı olarak yeniden kurdu. Yaptığı bütün çalışmaları "Elemanlar" adlı eserinde topladı. Bu yapıt binlerce yıl geometri derslerinde kaynak olarak kullanıldı ve hala kullanılmaya devam edilmektedir. Bu eserde başlıca konular şunlardır:

1. Düzlem Geometrisi
2. Aritmetik
3. Sayılar Kuramı
4. İrrasyonel Sayılar
5. Katı Cisimler Geometrisi

Öklid geometrisi aşağıdaki beş aksiyomla ifade edilmiştir.

i) Aynı şeye eşit olan şeyler birbirine de eşittirler.
ii) Eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse eşitlik bozulmaz.
iii) Eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkarılırsa eşitlik bozulmaz.
iv) Birbirine çakışan şeyler birbirine eşittir.
v) Bütün parçadan büyüktür.

Ayrıca günümüz temel geometrisini oluşturan Öklid postulatları ise şunlardır:

1. Farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2. Bir doğru parçası kendisiyle aynı doğrultuda sınırsız bir şekilde uzatılabilir.

3. Merkezi ve yarıçapı belli bir tek çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar eşittir.
5. Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir tek paralel doğru çizilebilir.

Öklid'in "Elemanlar" adlı eserinde ele aldığı düzlem geometrisinde başka bir deyişle Öklid geometrisinde düzlemde bulunan koordinatları A(x_1, y_1) ve B(x_2, y_2) olan noktalar arası uzaklık

$$d_E(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu uzaklık üzerinde tanımlandığı düzlemle bir metrik geometrisi oluşturmaktadır. Bu uzaklığa aynı zamanda Öklid uzaklığı da denilmektedir.

Ancak bunun dışında farklı uzaklık fonksiyonları kullanılarak oluşan metrik geometriler de söz konusudur. Farklı uzaklıklardan bazıları şunlardır (Krause 1975, Turan 2004, Senlin, Donghai, Alonso 2005, Salihova 2006):

$$d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$d_M(A,B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$d_S(A,B) = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$d_C(A,B) = \max\left\{|x_1 - x_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right).|y_1 - y_2|, |y_1 - y_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right).|x_1 - x_2|\right\}$$

$$d_3(A,B) = \sqrt[3]{(x_1 - x_2)^3 + (y_1 - y_2)^3}$$

$$d_m(A,B) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, (x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \geq 0 \; ise, \\ \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, (x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \leq 0 \; ise. \end{cases}$$

Düzlemde tanımlanan farklı uzaklık fonksiyonlarından bazıları üzerinde tanımlı oldukları düzlemle birlikte bir metrik geometrisi oluşturur. Bu geometrilerde bilinen Öklid düzlemindeki uzaklık ile tanımlanan geometrik kavramlarda çok büyük şekilsel değişiklikler meydana gelmektedir. Özellikle çember, elips, hiperbol , parabol gibi uzaklığa dayalı kavramlar incelendiğinde farklı sonuçlar ortaya çıkmaktadır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Koniklerle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: Düzlemde verilen herhangi bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **çember** denir.

Düzlemde verilen M = (m, n) noktasından (çemberin merkezi) r birim (r ∊ R, r >0 çemberin yarıçapı) uzaklıkta bulunan değişken nokta X = (x,y) olsun. {X: |MX| = r } noktalar kümesi bir çember belirtir ve denklemi,

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.2: Düzlemde verilen iki noktaya uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların kümesine **elips** denir. Başka bir anlatımla düzlemde verilen iki noktaya uzaklıklarının ortalaması verilen bir sayı kadar olan noktaların kümesine elips denilmektedir.

Verilen noktalar F_1, F_2 (odak noktaları) ve verilen sayı a ∊ R^+ olmak üzere bunların belirlediği elips,

$$\left\{X: \frac{1}{2}(|XF_1|+|XF_2|)=a\right\}$$

kümesidir. 2a, elipsin büyük (asal) eksen uzunluğu; 2c, elipsin küçük (yedek) eksen uzunluğu iken $a^2 = b^2 + c^2$ dir. Elips üzerindeki değişken nokta X = (x, y) olsun, simetri merkezi (h,k) noktası ve eksenleri koordinat eksenlerine paralel olan elipsin denklemi,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.3: Düzlemde verilen iki noktaya uzaklıkları farkının mutlak değeri sabit olan noktaların kümesine **hiperbol** denir.

Elipste olduğu gibi hiperbolün geometrik tanımında gerekli olan sabit noktalara hiperbolün odak noktaları denir ve F_1, F_2 ile gösterilir. $a \in R^+$ olmak üzere bunların belirttiği hiperbol,

$$\{X: \big||XF_1| - |XF_2|\big| = 2a\}$$

kümesidir. 2a, hiperbolün büyük (asal) eksen uzunluğu; 2c, odaklar arası uzaklık ve 2b, elipsin küçük (yedek) eksen uzunluğu iken $c^2 = a^2 + b^2$ dir. Hiperbol üzerindeki değişken nokta X = (x, y) olsun. Simetri merkezi (h,k) noktası ve eksenleri koordinat eksenlerine paralel olan hiperbolün denklemi,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.4: Düzlemde verilen bir noktaya ve düzlemde verilen bir doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **parabol** denir.

Verilen (sabit) noktaya parabolün odak noktası, verilen doğruya parabolün doğrultmanı; odaktan geçen, doğrultmana dik olan doğruya parabolün ekseni, eksenin parabolü kestiği noktaya parabolün köşe (tepe) noktası ve odağın doğrultmana uzaklığına da parabolün parametresi denir. Genel olarak odak F, doğrultman d ve parametre p ile gösterilir.

Odağı $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ noktası ve doğrultmanının denklemi $x = -\frac{p}{2}$ olan parabolün denklemi , X = (x,y) olmak üzere,

$$|XF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

ve X in doğrultmana uzaklığı,

$$|Xd| = x + \frac{p}{2}$$

olduğundan parabol üzerindeki X noktaları için,

$$\left|x+\frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

bu denklemin her iki tarafının karesi alınır ve sadeleştirilirse,

$$y^2 = 2px$$

bulunur.

Tanım 2.1.5: Verilen bir F (odak) noktasına uzaklığının verilen bir d doğrultman doğrusuna olan uzaklığına oranı, verilen bir e (dış merkezlik) sayısı olan noktaların kümesine (geometrik yerine) bir **konik** denir. Başka bir anlatımla düzlemde,

$$\left\{X\colon \frac{|XF|}{|Xd|} = e\right\}$$

kümesine konik denir. (Turan 2004)

Tanım 2.1.6: Analitik düzlemde başlangıç noktasına O(0, 0) eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine (geometrik yerine) **merkezil çember** denir.

O(0, 0) başlangıç noktasından (çemberin merkezi) r birim (r ∊ R, r >0 çemberin yarıçapı) uzaklıkta bulunan değişken nokta X = (x,y) olsun. {X: |OX| = r } noktalar kümesi bir merkezil çember belirtir ve denklemi,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

şeklindendir.

Tanım 2.1.7: Odakları eksenler üzerinde ve orijine göre simetrik iki nokta olan elipse **merkezil elips** denir ve denklemi,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.8: Odakları eksenler üzerinde ve orijine göre simetrik iki nokta olan hiperbole **merkezil hiperbol** denir ve denklemi,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.9: Tepe noktası orijin olan ve doğrultman doğrusu eksenlere paralel olan parabole **merkezil parabol** denir ve denklemi,

$$y^2 = 2px$$

şeklindedir.

2.2 Doğru İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1: Bir doğrunun x ekseni ile pozitif yönlü yaptığı açıya **eğim açısı** denir.

Tanım 2.2.2: Bir doğrunun eğim açısının tanjantına doğrunun eğimi denir. Eğim m ile gösterilir. m eğim olmak üzere $b \in R$ için bir d doğrusunun denklemi $y = mx + b$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca d doğrusu üzerindeki tüm $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ nokta çiftleri için eğim,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

şeklinde yazılabilir.

2.3 Metrik Kavramı ve Metrik Geometrisi

Tanım 2.3.1: Elemanları noktalar olarak adlandırılan bir P kümesi, P nin noktalar olarak adlandırılan bazı alt kümelerinin topluluğu L, I da nokta ve doğrular arasında üzerinde olma (incidence) bağıntısı olmak üzere (P, L, I) sistemi aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa bu sistem bir soyut geometri olarak adlandırılır.

i) Her $A, B \in P$ için $A \in l$ ve $B \in l$ olacak şekilde bir tek $l \in L$ doğrusu vardır.
ii) Her doğru en az iki noktayı kapsar.

(P, L, I) soyut geometrisi S = (P, L, I) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.2: S = (P, L, I) soyut geometrisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa **incidence geometridir,** denir .

i) L de farklı iki noktayı üzerinde bulunduran bir tek doğru vardır.
ii) Doğrudaş olmayan üç A, B, C ∈ P noktası vardır.

Tanım 2.3.3: Bir d :$PXP \rightarrow R$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa bir **metriktir,** denir.

M_1: Her A, B∈P için d(A, B) ≥ 0 ve d(A, B) = 0 ⇔ A = B
M_2: Her A, B∈P için d(A, B) = d(B,A)
M_3: Her A, B, C∈P için d(A, B) ≤ d(A, C) + d(C, B)

Tanım 2.3.4. l , S = (P, L, I) incidence geometrisinin bir doğrusu l olsun. d, S üzerindeki uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa f :l→R fonksiyonu *l* için bir cetveldir, denir.

i) f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.
ii) *l* üzerindeki her P, Q nokta çifti için

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$$

dir. Bu denkleme **cetvel denklemi** denir.

Tanım 2.3.5. (P, L, I) incidence geometrisi d uzaklık fonksiyonu ile birlikte her l ∈ L için bir cetvele sahip ise cetvel postulatını sağlıyor, denir. Bu durumda M = (P, L, I, d) ye bir **metrik geometri** denir (Salihova 2006).

3 d_m UZAKLIK FONKSİYONU

Bu bölümde (Martin 1998, Salihova 2006) kaynaklarından yararlanılarak Öklid ve maksimum uzaklıklarının tanımı yapılmış ve Öklid ile maksimum uzaklık arasındaki ilişki incelenmiştir. Daha sonra d_m uzaklık fonksiyonunun tanımı yapılarak, bu fonksiyon geometrik olarak yorumlanmış ve bu fonksiyonun metrik olduğu gösterilmiştir.

Tanım 3.1: $d_E: R^2 x R^2 \rightarrow R$, A$\in R^2$, B$\in R^2$ ve $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ olmak üzere,

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_{1-}y_2)^2}$$

şeklinde tanımlı d_E uzaklık fonksiyonuna Öklid uzaklık fonksiyonu denir ve bu fonksiyon bir metrik belirtir.

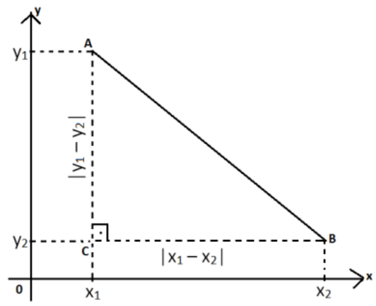
Tanım 3.2: $d_M: R^2 x R^2 \rightarrow R$, A$\in R^2$, B$\in R^2$ ve $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ olmak üzere,

$$d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlı d_M uzaklık fonksiyonuna maksimum uzaklık fonksiyonu denir ve bu fonksiyon bir metrik belirtir.

3.1 d_M ve d_E Uzaklık Fonksiyonlarının Birlikte Geometrik Olarak Yorumlanması

m_{AC} tanımsız, $m_{BC} = 0$ ve $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_1,y_2)$ olmak üzere analitik düzlemde A, B, C noktalarını işaretleyelim. Bu durumda AB doğru parçasının uzunluğuna $d_E(A, B)$ ve AC veya BC doğru parçalarından en büyük olanın uzunluğunu ise $d_M(A, B)$ ile gösterelim (Şekil 3.1.1).



Şekil 3.1.1 Düzlemde maksimum uzaklık

Büyük açının karşısında büyük kenar bulunduğundan $d_E(A,B) \geq |y_1 - y_2|$ ve $d_E(A,B) \geq |x_1 - x_2|$ dir.

a) $|x_1 - x_2| \leq |y_1 - y_2|$ ise, $d_E(A,B) \geq d_M(A,B)$

b) $|x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2|$ ise, $d_E(A,B) \geq d_M(A,B)$

Tanım 3.1.1: $d_{\text{ɱ}}: R^2 x R^2 \rightarrow R$, A$\in R^2$, B$\in R^2$ ve $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ olmak üzere, $d_{\text{ɱ}}$ uzaklık fonksiyonu,

$$d_{\text{ɱ}}(A,B) = \begin{cases} d_E(A,B), & (x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \geq 0 \; ise \\ d_M(A,B), & (x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \leq 0 \; ise \end{cases}$$

veya

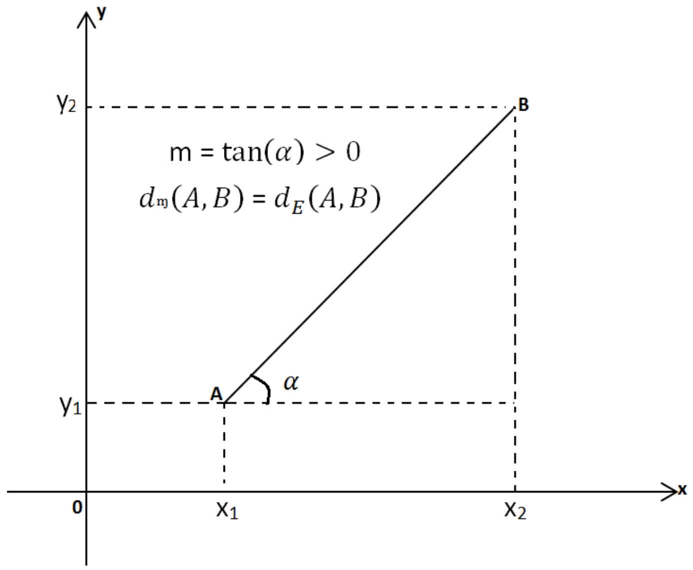
$$d_{\text{ɱ}}(A,B) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, & (x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \geq 0 \; ise \\ \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, & (x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \leq 0 \; ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır (Senlin, Donghai, Alonso 2005) .

3.2. $d_{\text{ɱ}}$ Uzaklığının Geometrik Yorumu

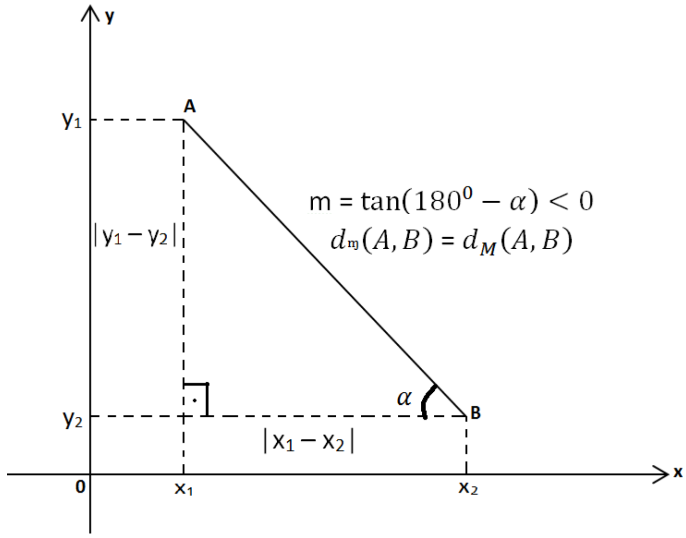
$d_{\text{ɱ}}$ uzaklık fonksiyonunda A noktası ile B noktası arasındaki uzaklığı hesaplarken $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2)$ çarpımının işaretine göre işlem yapılmaktadır. İki ifadenin çarpımı ile bölümünün işareti aynı olacağından $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2)$ ifadesi ile $\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$ ifadesinin işareti aynıdır. Bu bölüm ise aynı zamanda AB nin eğimidir. Bu durum göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar. Bu sonuçlar şunlardır:

A) $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2) > 0$ ise $m_{AB} > 0$ dır (Şekil 3.2.1).



Şekil 3.2.1 Pozitif eğimli doğru parçalarında $d_{ɱ}$ uzaklığı

B) $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2) < 0$ ise $m_{AB} < 0$ dır (Şekil 3.2.2).



Şekil 3.2.2 Negatif eğimli doğru parçalarında $d_{ɱ}$ uzaklığı

C) $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2) = 0$ ise aşağıdaki durumlar söz konusudur:

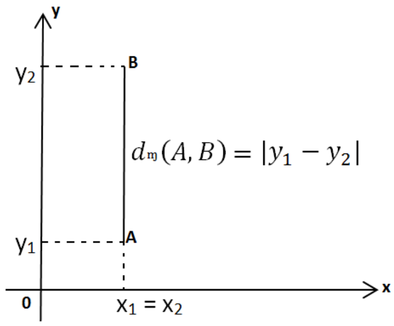
C_1) $x_1 - x_2 = 0$ ve $(y_1 - y_2) \neq 0$ ise m_{AB} tanımsızdır. Yani AB, y-eksenine paraleldir. Bu durumda $d_{ɱ}(A, B) = d_E(A, B)$,

$$d_{ɱ}(A, B) = \sqrt{(y_{1-}y_2)^2} = |y_1 - y_2|$$

$d_{ɱ}(A,B) = d_M(A,B)$,

$$d_{ɱ}(A,B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = |y_1 - y_2|$$

dir. Bunun sonucunda da $d_E(A,B) = d_M(A,B) = |y_1 - y_2|$ olduğu açıktır (Şekil 3.2.3).

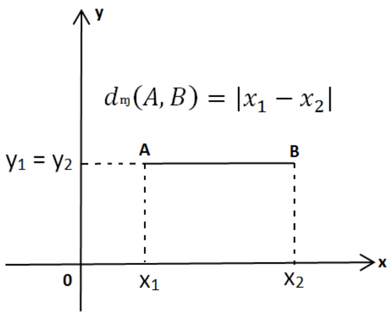


Şekil 3.2.3 y-eksenine paralel doğru parçalarında $d_{ɱ}$ uzaklığı

C2) $x_1 - x_2 \neq 0$ ve $(y_1 - y_2) = 0$ ise $m_{AB} = 0$ dır. Yani AB, x-eksenine paraleldir. Bu durumda C_1 seçeneğine benzer bir inceleme yapıldığında ,

$$d_{ɱ}(A,B) = d_M(A,B) = d_E(A,B) = |x_1 - x_2|$$

sonucu elde edilir (Şekil 3.2.4).

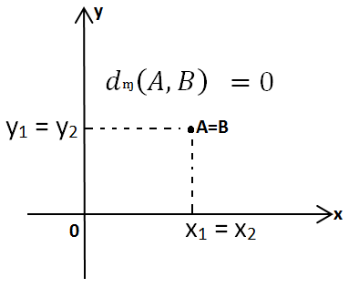


Şekil 3.2.4 x-eksenine paralel doğru parçalarında $d_{ɱ}$ uzaklığı

C3) $x_1 - x_2 = 0$ ve $(y_1 - y_2) = 0$ ise $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olduğundan A = B dir. Bu ise, geometrik olarak A ve B noktalarının üst üste çakışık olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla ,

$$d_{ɱ}(A,B) = d_M(A,B) = d_E(A,B) = 0$$

dır (Şekil 3.2.5).



Şekil 3.2.5 Çakışık noktalar arası $d_{\text{ɱ}}$ uzaklığı

C_1, C_2, C_3 seçeneklerinin incelenmesi sonucunda $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2) = 0$ ise $d_{\text{ɱ}}(A, B) = d_M(A, B) = d_E(A, B)$ olduğu açıktır.

3.3 $d_{\text{ɱ}}$ Metriği

Önerme 3.3.1 : $d_{\text{ɱ}}: R^2 x R^2 \to R$, A$\in R^2$, B$\in R^2$ ve $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ olmak üzere,

$$d_{\text{ɱ}}(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, & (x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \geq 0 \ ise \\ \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, & (x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \leq 0 \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $d_{\text{ɱ}}$ uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat: Aşağıda Tanım 2.3.3 de belirtilen M_1, M_2, M_3 şartlarının ispatı yapılmıştır.

R^2 den seçilmiş herhangi $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ noktaları için,

M_1 şartının ispatı:

a) $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \geq 0$ olsun.

$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ ve $(y_1 - y_2)^2 \geq 0$ olduğundan $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq 0$ dır. Bu durumda $d_E(A, B) \geq 0$ olduğundan $d_{\text{ɱ}}(A, B) \geq 0$ dır.

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \ ve \ y_1 = y_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2) = 0 \ ve \ (y_1 - y_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \ ve \ (y_1 - y_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow d_{ɱ}(A,B) = 0$$

b) $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \leq 0$ olsun.

$|x_1 - x_2| \geq 0$ ve $|y_1 - y_2| \geq 0$, mutlak değer pozitif tanımlı bir fonksiyon olduğundan $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \geq 0$ dır. Bu durumda $d_M(A,B) \geq 0$ olduğundan $d_{ɱ}(A,B) \geq 0$ dır.

$$A = B \Leftrightarrow x_1 = x_2 \; ve \; y_1 = y_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) = 0 \; ve \; (y_1 - y_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

$$\Leftrightarrow d_{ɱ}(A,B) = 0$$

M$_2$ şartının ispatı:

a) $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \geq 0$ olsun.

$$d_{ɱ}(A,B) = d_E(A,B) = d_E(B,A) = d_{ɱ}(B,A)$$

$$d_E(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d_E(B,A)$$

b) $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \leq 0$ olsun.

$$d_{ɱ}(A,B) = d_M(A,B) = d_M(B,A) = d_{ɱ}(B,A)$$

$$d_M(A,B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} = d_M(B,A)$$

M$_3$ Şartının İspatı:

A, B, C noktaları için $d_{ɱ}(A,B) \leq d_{ɱ}(A,C) + d_{ɱ}(C,B)$ olduğu göstermek için aşağıdaki sekiz ifadenin doğru olduğu kanıtlanmalıdır.

a) $d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + d_E(C,B)$
$b)\; d_E(A,B) \leq d_M(A,C) + d_M(C,B)$
c) $d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + d_M(C,B)$
d) $d_E(A,B) \leq d_M(A,C) + d_E(C,B)$
e)$d_M(A,B) \leq d_E(A,C) + d_E(C,B)$
f) $d_M(A,B) \leq d_M(A,C) + d_M(C,B)$

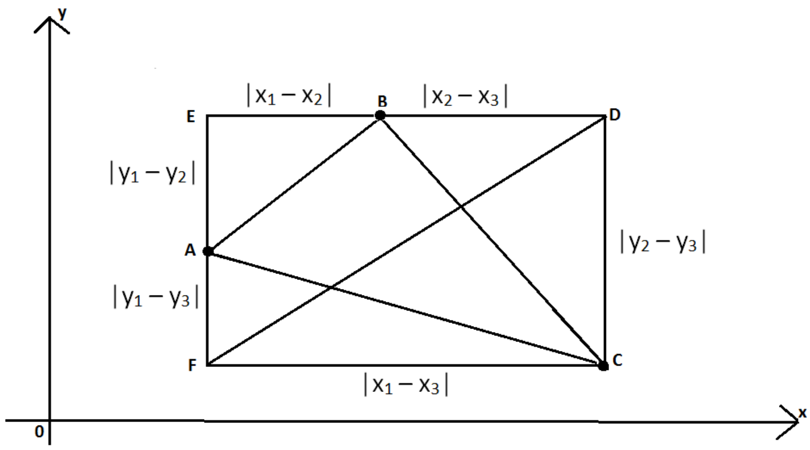
g) $d_M(A,B) \leq d_E(A,C) + d_M(C,B)$

h) $d_M(A,B) \leq d_M(A,C) + d_E(C,B)$

Herhangi bir şarta bağlı olmaksızın $d_M(A,B) \leq d_E(A,B)$ olduğundan ilk dört ifade kanıtlandığında son dört ifade de kanıtlanmış olur.

a) Üçgen eşitsizliğinden doğruluğu açıktır.

b) $m_{AB} \geq 0$, $m_{AC} \leq 0$, $m_{CB} \leq 0$ olması veya bu eğimlerden herhangi birisinin tanımsız olması durumunda $d_E(A,B) \leq d_M(A,C) + d_M(C,B)$ ifadesi yazılabilir. Bu durumu sağlayan noktaları analitik düzlemde işaretleyelim. Daha sonra bu noktaların belirttiği üçgenin etrafına bir dikdörtgen çizelim (Şekil 3.3.1).



Şekil 3.3.1 $d_E(A,B) \leq d_M(A,C) + d_M(C,B)$ durumu

Şekil dikdörtgen olduğundan DFC üçgeni dik üçgendir. Bu durumda pisagor teoreminden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$[d_E(F,D)]^2 = [d_E(F,C)]^2 + [d_E(C,D)]^2 \Longrightarrow$$

$[d_E(A,B)]^2 \leq [d_E(F,D)]^2 = |x_1 - x_3|^2 + |y_2 - y_3|^2 \leq (|x_1 - x_3| + |y_2 - y_3|)^2$ ise

$d_E(A,B) \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3|$ dir.

Şimdi maksimum uzaklık için incelemeye başlayalım.

b₁) $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

$$d_E(A,B) \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| \leq |y_1 - y_3| + |x_2 - x_3| = d_M(A,C) + d_M(C,B)$$

b₂) $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$ ve $|x_2 - x_3| \leq |y_2 - y_3|$ ise,

$$d_E(A,B) \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| \leq |y_1 - y_3| + |y_2 - y_3| = d_M(A,C) + d_M(C,B)$$

b₃) $|y_1 - y_3| \leq |x_1 - x_3|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3|$ ise,

$$d_E(A,B) \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| \leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| = d_M(A,C) + d_M(C,B)$$

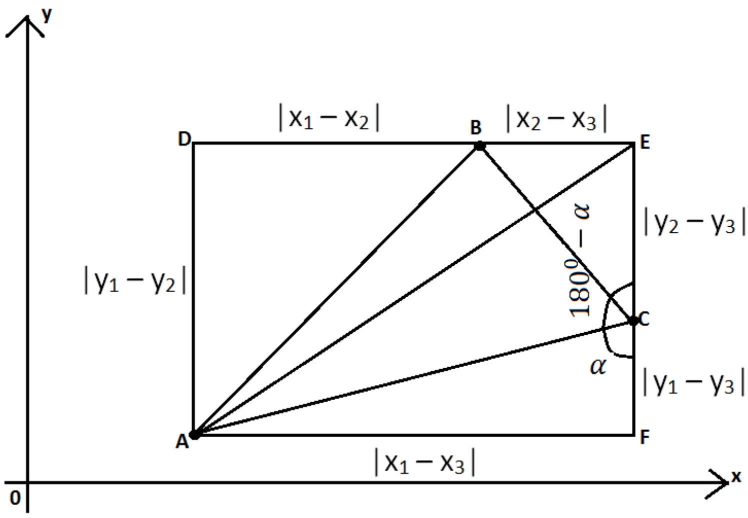
b₄) $|y_1 - y_3| \leq |x_1 - x_3|$ ve $|x_2 - x_3| \leq |y_2 - y_3|$ise,

$d_E(A,B) \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| = d_M(A,C) + d_M(C,B)$ olur ki sonuç olarak,

$$d_E(A,B) \leq d_M(A,C) + d_M(C,B)$$

olur.

c) $m_{AB} \geq 0$, $m_{AC} \geq 0$, $m_{CB} \leq 0$ olması veya bu eğimlerden herhangi birinin tanımsız olması durumunda $d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + d_M(C,B)$ yazılabilir. Bu durumu sağlayan noktaları analitik düzlemde işaretleyelim. Daha sonra bu noktaların belirttiği üçgenin etrafına bir dikdörtgen çizelim (Şekil 3.3.2).



Şekil 3.3.2 $d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + d_M(C,B)$ durumu

AEC üçgeni geniş açılı bir üçgendir. Bu üçgende kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$[d_E(A,E)]^2 = [d_E(A,C)]^2 + [d_E(C,E)]^2 + 2.d_E(A,C).d_E(C,E).cos\alpha$$
$$[d_E(A,B)]^2 \leq [d_E(A,E)]^2 = [d_E(A,C)]^2 + |y_2 - y_3|^2 + 2.d_E(A,C).|y_2 - y_3|cos\alpha$$

$0^0 \leq \alpha \leq 90^0 \Longrightarrow 0 \leq cos\alpha \leq 1$ olduğunda ,

$2.\,d_E(A,C).\,|y_2 - y_3|cos\alpha \leq 2.\,d_E(A,C).\,|y_2 - y_3|$ dir.

Bu durumda ,

$$\begin{aligned}[d_E(A,B)]^2 &\leq [d_E(A,C)]^2 + |y_2 - y_3|^2 + 2.\,d_E(A,C).\,|y_2 - y_3|cos\alpha \\ &\leq (d_E(A,C) + |y_2 - y_3|)^2\end{aligned}$$

$\Longrightarrow d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + |y_2 - y_3|$ dir. Şimdi maksimum uzaklık için incelemeye başlayalım.

c_1) $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ olsun.

$$d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + |y_2 - y_3| = d_E(A,C) + d_M(B,C)$$

c_2) $|y_2 - y_3| \leq |x_2 - x_3|$ olsun.

$d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + |y_2 - y_3| \leq d_E(A,C) + |x_2 - x_3| = d_E(A,C) + d_M(B,C)$ olur ki sonuç olarak,

$$d_E(A,B) \leq d_E(A,C) + d_M(B,C)$$

olur.

d) c şıkkında yapılan incelemede A noktası ile B noktasının yeri değiştirildiğinde,

$$d_E(A,B) \leq d_M(A,C) + d_E(B,C)$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç olarak $d_{ŋ}$ uzaklık fonksiyonu M_1, M_2, M_3 şartlarını sağladığından bir metriktir.

Teorem 3.3.1 Kartezyen düzlem $d_{ŋ}$ uzaklık fonksiyonu ile birlikte bir metrik geometri belirtir.

İspat: $d_{ŋ}$ uzaklık fonksiyonuna göre kartezyen düzlemin P ve Q noktaları arasındaki uzaklık için ya d_E ya da d_M uzaklığı söz konusudur (Tanım 3.3.1). Bu nedenle iki durum için ayrı ayrı ispat yapılmalıdır. Her iki durum içinde alınan her l doğrusu için bir f cetveli bulunduğunda ispat tamamlanmış olur (Tanım 2.3.5).

1. Durum: P ve Q noktaları arasında d_E uzaklığı söz konusu ise,

i) $l = L_a$ olacak şekilde bir P∈L_a noktası alalım. P(a,y) noktaları için $f: l \to R$,

$$f(P) = f\big((a, y)\big) = y$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyonun bire-bir ve örten olduğu açıktır. P(a , y_1), Q(a, y_2) noktaları için,

$$|f(P) - f(Q)| = |y_1 - y_2| = d_E(P, Q)$$

olduğundan f bir cetveldir (Tanım 2.3.4).

ii) $l = L_{m,b}$ olacak şekilde P∈$L_{m,b}$ noktası alalım. y= mx + b şartını sağlayan P(x ,y) noktaları için $f: l \to R$,

$$f(P) = f\big((x, y)\big) = x\sqrt{1 + m^2}$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlayalım. t∈R için P(x,y) ∈ $L_{m,b}$ olacak şekilde,

$$x = \frac{t}{\sqrt{1 + m^2}}, \qquad y = \frac{mt}{\sqrt{1 + m^2}} + b$$

alalım. Diğer taraftan,

$$f(P) = \frac{t}{\sqrt{1 + m^2}} . \sqrt{1 + m^2} = t$$

olduğundan f örtendir. Bire-bir olduğu da açık olduğundan f bire-bir, örten bir fonksiyondur.

Şimdi de P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) noktalarını alalım. Bu noktaların üzerinde bulunduğu $L_{m,b}$ doğrusu için,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

dir.

$$|f(P) - f(Q)| = \left|x_1\sqrt{1 + m^2} - x_2\sqrt{1 + m^2}\right| = \sqrt{1 + m^2}|x_1 - x_2|$$

Diğer taraftan

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2}$$

$$= \sqrt{1 + m^2}|x_1 - x_2|$$

olduğundan $|f(P) - f(Q)| = d_E(P,Q)$ dır. Bu nedenle f, bir cetveldir.

<u>2. Durum </u>: P ve Q noktaları arasında d_M uzaklığı söz konusu ise,

i) $l = L_a$ olacak şekilde bir P∈L_a noktası alalım. P(a,y) noktaları için $f: l \to R$,

$$f(P) = f\big((a,y)\big) = y$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyonun bire-bir ve örten olduğu açıktır. P(a , y_1), Q(a, y_2) noktaları için,

$$|f(P) - f(Q)| = |y_1 - y_2| = d_M(P,Q)$$

olduğundan f bir cetveldir (Tanım 2.3.4).

ii) $l = L_{m,b}$ olacak şekilde P∈$L_{m,b}$ noktası alalım. y= mx + b şartını sağlayan P(x ,y) noktaları için $f: l \to R$,

$$f(P) = f\big((x,y)\big) = \begin{cases} x, & |m| < 1 \; ise \\ |m|x, & |m| \geq 1 \; ise \end{cases}$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlayalım (Salihova 2006). m ≥ 1 ve t∈R için

P(x,y) ∈ $L_{m,b}$ olacak şekilde,

$$x = \frac{t}{|m|}, \qquad y = \frac{mt}{|m|} + b$$

alalım. Diğer taraftan,

$$f(P) = \frac{t}{|m|}.|m| = t$$

olduğundan f örtendir. Bire-bir olduğu da açık olduğundan f bire-bir, örten bir fonksiyondur.

Şimdi de P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) noktalarını alalım. Bu noktaların üzerinde bulunduğu $L_{m,b}$ doğrusu için,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

dir.

$$|f(P) - f(Q)| = ||m|x_1 - |m|x_2| = |m||x_1 - x_2|$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} d_M(P,Q) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_2|, |m||x_1 - x_2|\} \\ &= |x_1 - x_2|\max\{1, |m|\} = |m||x_1 - x_2| \end{aligned}$$

olduğundan $|f(P) - f(Q)| = d_E(P,Q)|$ dır. Bu nedenle f, bir cetveldir. $|m| < 1$ için de bu durumun sağlandığı açıktır.

Tanım 2.3.5 sağlandığından kartezyen düzlem d_m uzaklık fonksiyonu ile birlikte bir metrik geometri belirtir. Bu metrik geometriye M-Metrik Geometrisi diyelim.

4 $d_{ɱ}$ UZAKLIĞINDA BİR NOKTANIN BİR DOĞRUYA UZAKLIĞI

Bu bölümde öncelikle bir noktanın bir doğruya uzaklığının tanımı verilmiştir. $d_{ɱ}$ metriğinde bir noktanın bir doğruya uzaklığı maksimum ve Öklid uzaklıklarındaki bir noktanın bir doğruya uzaklığı ile yakından ilişkili olduğundan önce Öklid uzaklığına göre ve Maksimum uzaklığına göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı üzerinde durulmuş, daha sonra da $d_{ɱ}$ metriğinde bir noktanın bir doğruya uzaklığı ile ilgili sonuçlar ortaya konmuştur.

Tanım 4.1: Herhangi bir kartezyen düzlemdeki bir A(x_0, y_0) noktasının bir

d: ax+by+c = 0 doğrusuna olan uzaklığını $d_{ɱ}(A,d)$ ile gösterelim. P(x,y)∈ d olmak üzere,

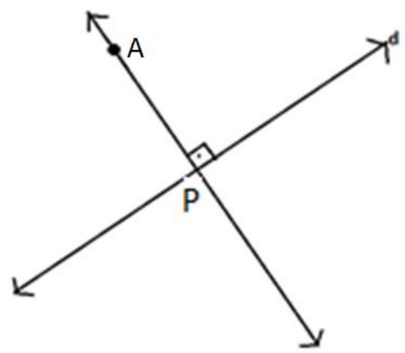
$$d_{ɱ}(A,d) = \min d_{ɱ}(A,P)$$

dir.

4.1 Öklid Uzaklığına Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Herhangi bir $A \in R^2$ olmak üzere A(x_0, y_0) noktasının d: ax + by + c = 0 doğrusuna olan Öklid uzaklığı, d doğrusuna dik olan ve A noktasından geçen doğru ile d doğrusunun kesim noktası P olmak üzere $d_E(A,P)$ dir (Şekil 4.1.1).

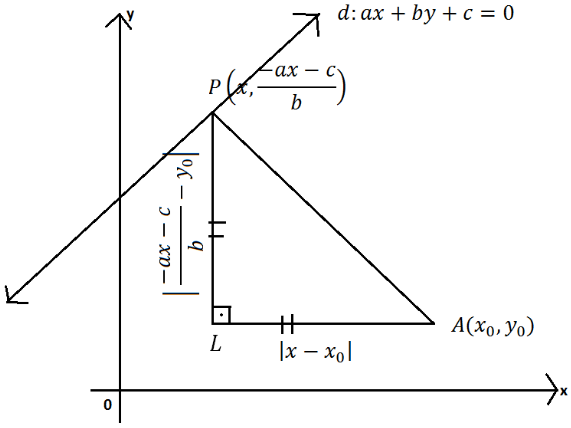
$$d_E(A,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Şekil 4.1.1 Bir noktanın bir doğruya olan d_E uzaklığı

4.2 Maksimum Uzaklığına Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Bir $A(x_0,y_0)$ noktasının maksimum metriğine göre herhangi bir d: ax + by + c = 0 doğrusuna olan uzaklığı; P∈d, m_{PL} tanımsız, $m_{LA} = 0$ (PL ⊥ LA) ve |LP| = |LA| olacak şekilde seçilen P noktaları için |AP| uzunluklarından en küçüğüdür (Şekil 4.2.1).



Şekil 4.2.1 Bir noktanın bir doğruya olan d_M uzaklığı

Bu durumda $P\left(x, \frac{-ax-c}{b}\right)$ ve $A(x_0, y_0)$ için $|x - x_0| = \left|\frac{-ax-c}{b} - y_0\right|$ şartını sağlayan P noktasının d doğrusuna maksimum metriğine göre uzaklığı, $|x - x_0|$ veya $\left|\frac{-ax-c}{b} - y_0\right|$ dır.

$|x - x_0| = \left|\frac{-ax-c}{b} - y_0\right|$ için ,

a) $x - x_0 = \frac{-ax-c}{b} - y_0$ ise P noktasının koordinatları aşağıdaki gibidir:

$$x = \frac{bx_0 - by_0 - c}{a+b}, y = \frac{-ax_0 + ay_0 - c}{a+b}$$

b) $x - x_0 = \frac{ax+c}{b} + y_0$ ise P noktasının koordinatları aşağıdaki gibidir:

$$x = \frac{bx_0 + by_0 + c}{b-a}, y = \frac{-ax_0 - ay_0 - c}{b-a}$$

a ve b şıkkındaki sonuçlara göre |PL| = |LA| olacak şekilde |PL| uzunlukları,

$$\left|\frac{bx_0 - by_0 - c}{a+b} - x_0\right| = \left|\frac{-ax_0 - by_0 - c}{a+b}\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{a+b}\right|$$

$$\left|\frac{-ax_0 + ay_0 - c}{a+b} - y_0\right| = \left|\frac{-ax_0 - by_0 - c}{a+b}\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{a+b}\right|$$

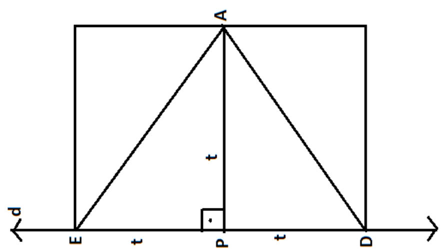
$$\left|\frac{bx_0 + by_0 + c}{b-a} - x_0\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{b-a}\right|$$

$$\left|\frac{-ax_0 - ay_0 - c}{b-a} - y_0\right| = \left|\frac{-ax_0 - by_0 - c}{b-a}\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{b-a}\right|$$

şeklinde yazılır. Buna göre karşımıza $\left|\frac{ax_0+by_0+c}{a+b}\right|$ ve $\left|\frac{ax_0+by_0+c}{b-a}\right|$ olmak üzere iki farklı maksimum uzaklığı çıkmaktadır. Bu uzaklıklardan küçük olanı seçilmelidir.

d: ax + by + c = 0 doğrusunda a ile b aynı işaretli ise yani doğrunun eğimi negatif ise, A noktasının d doğrusuna olan uzaklığı $\left|\frac{ax_0+by_0+c}{a+b}\right|$ dir. Eğer a ile b zıt işaretli ise yani doğrunun eğimi pozitif ise A noktasının d doğrusuna olan uzaklığı $\left|\frac{ax_0+by_0+c}{b-a}\right|$ dir.

a veya b den herhangi birinin sıfır olması durumunda doğrular koordinat eksenlerine paraleldir ve maksimum metriğine göre uzaklıkla Öklid metriğine göre uzaklık aynıdır (Şekil 4.2.2).



Şekil 4.2.2 Bir noktanın x-eksenine paralel bir d doğrusuna uzaklığı

Şekildeki gibi x-eksenine paralel bir d doğrusu alalım. d doğrusu üzerinde |EP|=|PD|=|AP|=t, $t \in R^+$ ve AP⊥d olacak şekilde P, E ve D noktaları seçelim. ED doğru parçası üzerinde seçilecek herhangi bir P'(x, y) noktası için maksimum metriğine göre A noktasının d doğrusuna olan uzaklığı $t \in R^+$ dır. Bu da aynı zamanda Öklid metriğine göre A noktasının d doğrusuna olan uzaklığıdır. Benzer durum y-eksenine paralel doğrular için de geçerlidir.

Buna göre maksimum metriğine göre bir $A(x_0, y_0)$ noktasının $d: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı,

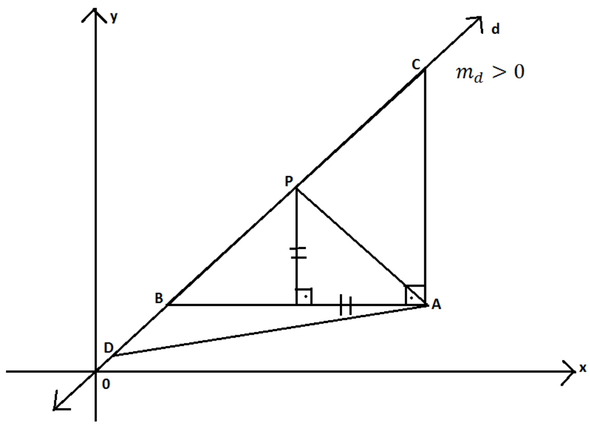
$$\begin{cases} \left|\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a + b}\right|, & m_d < 0 \; ise \\ \left|\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{b - a}\right|, & m_d > 0 \; ise \\ \left|x_0 + \dfrac{c}{a}\right|, & m_d \; tanımsız \; ise \\ \left|y_0 + \dfrac{c}{b}\right| & m_d = 0 \; ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir.

4.3 $d_{\text{ɱ}}$ Metriğine Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

$d_{\text{ɱ}}$ metriğine göre uzaklık hesabı eğimle yakından alakalı olduğundan pozitif ve negatif eğimli doğrular için bir noktanın doğruya olan uzaklığı ayrı ayrı incelenmelidir.

a) <u>Pozitif eğimli bir d doğrusu için $A(x_0, y_0)$ noktasının d doğrusuna olan uzaklığı</u>,

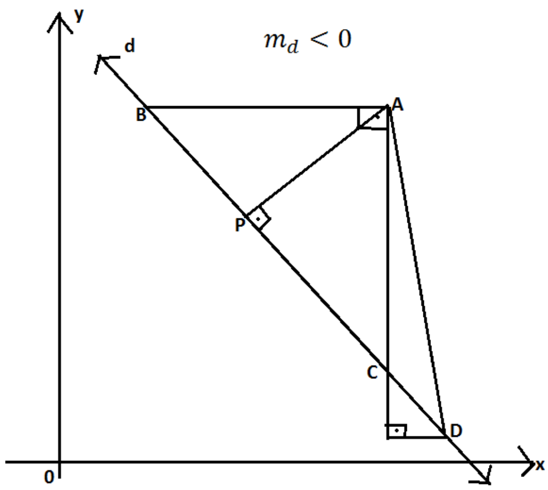


Şekil 4.3.1 $m_d > 0$ için bir noktanın bir doğruya olan $d_{\text{ɱ}}$ uzaklığı

Pozitif eğimli bir d doğrusu üzerinde [AB] ve [AC] eksenlere paralel ve AB $\perp$ AC olacak şekilde B ile C noktaları seçelim (Şekil 4.3.1). BC doğru parçası üzerinde seçilecek her P noktası için AP nin eğimi negatif, sıfır veya tanımsız olur. Bu durumda BC doğru parçası üzerinde seçilecek her nokta için maksimum metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı hesaplanmalıdır. BC doğru parçasının dışında alınacak herhangi bir D noktası için ise AD nin eğimi pozitif olacağından Öklid metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı hesaplanmalıdır. Bu uzaklıklar içerisinde minimum olanın maksimum metriği için hesaplanan uzaklık olduğu açıktır.

Doğrunun eğiminin pozitif olması durumunda d_{m} metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı ile d_M metriğine göre noktanın doğruya uzaklığı aynıdır.

b) <u>Negatif eğimli bir d doğrusu için $A(x_0, y_0)$ noktasının d doğrusuna olan uzaklığı</u>,



Şekil 4.3.2 $m_d < 0$ için bir noktanın bir doğruya olan d_{m} uzaklığı

Negatif eğimli bir d doğrusu üzerinde [AB] ve [AC] eksenlere paralel ve AB $\perp$ AC olacak şekilde B ve C noktaları seçelim (Şekil 4.3.2). BC doğru parçası üzerinde seçilecek her P noktası için AP nin eğimi pozitif, sıfır veya tanımsız olur. Bu durumda BC doğru parçası üzerinde seçilecek her nokta için Öklid metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı hesaplanmalıdır. BC doğru parçasının dışında alınacak herhangi bir D noktası için ise AD nin eğimi negatif olacağından maksimum metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı hesaplanmalıdır. Bu uzaklıklar içerisinde minimum olanın Öklid metriği için hesaplanan uzaklık olduğu açıktır.

Doğrunun eğiminin negatif olması durumunda $d_{ɱ}$ metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı ile d_E metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı aynıdır.

Sonuç olarak; $d_{ɱ}$ metriğine göre bir $A(x_0,y_0)$ noktasının bir d: ax + by + c = 0 doğrusuna olan uzaklığı,

$$\begin{cases} \left|\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{b - a}\right|, & m \geq 0 \; veya \; m \; tanımsız \; ise \\ \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & m \leq 0 \; veya \; m \; tanımsız \; ise \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

5 KONİKLER

5.1 M-Merkezil Çemberi

Bu bölümde Tanım 2.1.6 daki merkezil çember tanımı göz önünde bulundurularak $d_{ɱ}$ metriğine göre M-merkezil çemberi incelenmiştir.

Merkezi O(0,0) ve yarıçapı r olan çember üzerindeki P(x,y) noktaları için,

$$d_{ɱ}(O,P) = r$$

dir.

a) $x.y \geq 0$ ise $d_{ɱ}(O,P) = d_E(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = r \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$ dir.

b) $x.y \leq 0$ ise $d_{ɱ}(O,P) = d_M(O, P) = \max\{\, |x|, |y| \,\} = r$

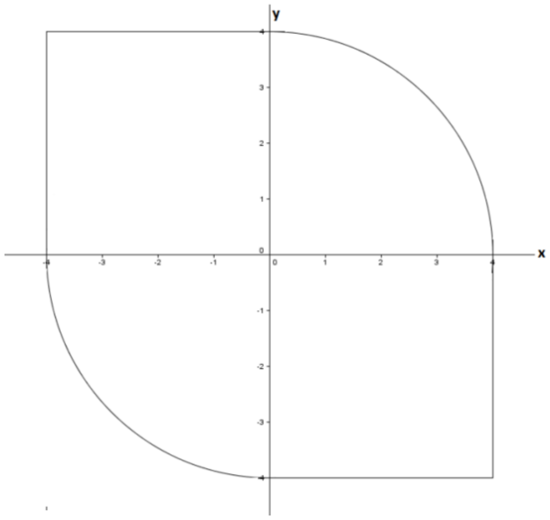
b_1) $x \leq 0,\ y \geq 0$ ve $|x| \geq |y|$ ise, $x + y \leq 0$ için $d_M(O,P) = |x| = -x = r$ dır.

b_2) $x \leq 0,\ y \geq 0$ ve $|y| \geq |x|$ ise, $x + y \geq 0$ için $d_M(O,P) = |y| = y = r$ dır.

b_3) $y \leq 0,\ x \geq 0$ ve $|x| \geq |y|$ ise, $x + y \geq 0$ için $d_M(O,P) = |x| = x = r$ dır.

b_4) $y \leq 0,\ x \geq 0$ ve $|y| \geq |x|$ ise, $x + y \leq 0$ için $d_M(O,P) = |y| = -y = r$ dır.

Sonuç olarak; bu durum yorumlandığında analitik düzlemin birinci ve üçüncü bölgelerinde yarıçapı r birim olan Öklid merkezil çemberi, analitik düzlemin ikinci ve dördüncü bölgelerinde ise merkezi orijin olan ve yarıçapı r birim olan maksimum çemberi (Salihova, 2006) çizilecektir (Şekil 5.1.1).



Şekil 5.1.1 M-merkezil çemberi

5.2 M-Merkezil Elipsi

Bu bölümde Tanım 2.1.7 deki merkezil elipsin tanımı göz önünde bulundurularak $d_{\mathfrak{m}}$ metriğine göre M-merkezil elipsler incelenmiştir.

F_1 ve F_2 noktaları ile pozitif bir a reel sayısı verilmiş olsun. $d_{\mathfrak{m}}$ metriğine göre $c > 0$ olmak üzere $F_1(c, 0)$ ve $F_2(-c, 0)$ noktalarına olan uzaklıkları toplamı 2a olan noktaların geometrik yerini yani $d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) + d_{\mathfrak{m}}(P,F_2) = 2a$ ifadesini F_1, F_2 ve a nın bazı özel durumları için inceleyelim.

A) $F_1 = F_2 = (0, 0)$ ve $a = 0$ olsun. Bu durumda P(x, y) noktaları için $d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) = 0$ dır. x.y nin farklı durumları için $d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) = 0$ şartını sağlayan noktaları bulalım.

a) $x.y \geq 0$ ise $d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) = d_E(P, F_1) = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ ve $y = 0$ dır.

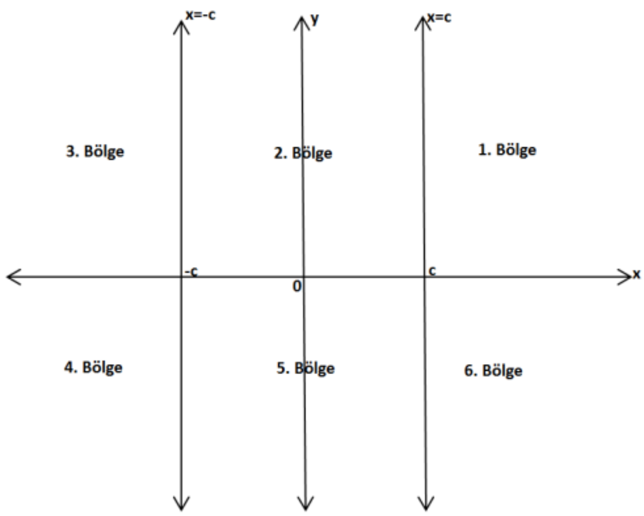
b) $x.y \leq 0$ ise $d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) = d_M(P, F_1) = \max\{ |x|, |y| \} = 0 \Longrightarrow x = 0$ ve $y = 0$ dır.

a ve b incelemelerinin sonucunda $F_1 = F_2 = (0, 0)$ ve $a = 0$ ise $d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) + d_{\mathfrak{m}}(P,F_2) = 2a$ şartını sağlayan noktaların geometrik yeri O(0, 0) noktasıdır.

B) $F_1 = F_2 = (0, 0)$ ve $a \neq 0$ olsun. Bu durumda $d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) + d_{\mathfrak{m}}(P,F_2) = 2a$ ifadesi $d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) = a$ şeklinde yazılabilir. x.y nin farklı durumları için $d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) = a$ şartını sağlayan noktalar M-merkezil çemberi belirtir.

C) $F_1 \neq F_2$ ve a = 0 için, $d_{ɱ}(P,F_1) + d_{ɱ}(P,F_2) = 0$ şartının sağlanabilmesi için $d_{ɱ}(P,F_1) = 0$ ve $d_{ɱ}(P,F_2) = 0$ olmalıdır. Bu ise $P = F_1$ ve $P = F_2$ demektir ki bu şartı sağlayan P noktası bulunamayacağından çözüm kümesi boş kümedir.

D) $F_1 \neq F_2$ ve $a \neq 0$ için, $d_{ɱ}(P,F_1) + d_{ɱ}(P,F_2) = 2a$ şartını sağlayan P noktalarının geometrik yerini bulmadan önce analitik düzlemi x = c,   x = -c ve y = 0 doğrularıyla sınırlanan altı bölgeye ayıralım (Şekil 5.2.1). Daha sonra her bir bölge için ayrı ayrı incelememizi tamamlayalım.



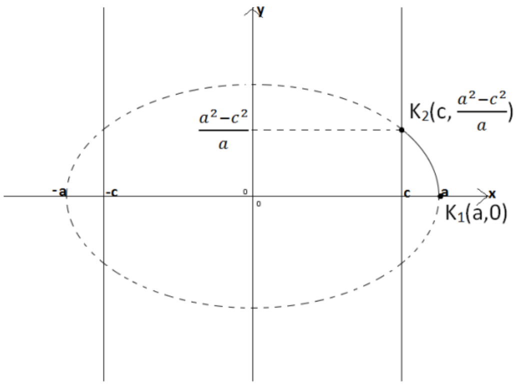
Şekil 5.2.1 M-merkezil elipsi ve M-merkezil hiperbolü için düzlemin bölgeleri

a) $x \geq c$, $y \geq 0$ (1.Bölge)

Bu durumda $(x - c).y \geq 0$ ve $(x + c).y \geq 0$ olduğundan,

$d_{ɱ}(P,F_1) + d_{ɱ}(P,F_2) = d_E(P,F_1) + d_E(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ dır.

Bu denklem düzenlendiğinde karşımıza denklemi, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$ olan Öklid merkezil elipsi çıkacaktır. Bu elipsin $K_1(a,0)$ ve $K_2(c, \frac{a^2-c^2}{a})$ noktalarından geçtiği açıktır (Şekil 5.2.2).



Şekil 5.2.2 1. bölgedeki M-merkezil elipsi

b) $-c \leq x \leq c$, $y \geq 0$ (2. Bölge)

Bu durumda $(x - c).y \leq 0$ ve $(x + c).y \geq 0$ olduğundan,

$d_{mj}(P,F_1) + d_{mj}(P,F_2) = d_M(P,F_1) + d_E(P,F_2) = \max\{|x-c|, |y|\} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ dır. Maksimum metriğine göre üç farklı durum karşımıza çıkmaktadır. Bu durumlar şunlardır :

b_1) $|x - c| < |y|$ ise $x + y > c$ olduğundan,

$$d_M(P,F_1) + d_E(P,F_2) = |y| + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\Rightarrow y + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}^{\,2}\right) = (2a - y)^2$$
$$\Rightarrow y = \frac{-x^2 - 2xc - c^2 + 4a^2}{4a}$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4a}(x+c)^2 + a$$

Bu ise $x + y = c$ doğrusunun belirtilen aralıkta üstte kalan kısmında $y = -\frac{1}{4a}(x+c)^2 + a$ Öklid parabolünün çizilmesi demektir. Bu parabolün tepe noktası $T_1(-c, a)$ noktasıdır. Bu parabol $x = c$ doğrusunu $K_3(c, \frac{a^2-c^2}{a})$ noktasında keser (Şekil 5.2.3, Şekil 5.2.4, Şekil 5.2.5).

b_2) $|x - c| > |y|$ ise $x + y < c$ olacağından,

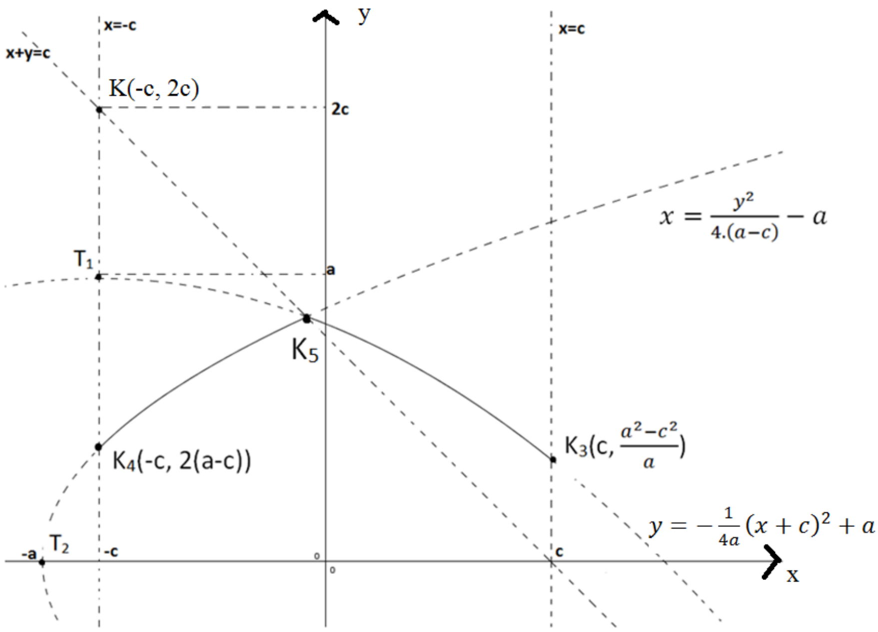
$$d_M(P,F_1) + d_E(P,F_2) = |x-c| + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow -x + c + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

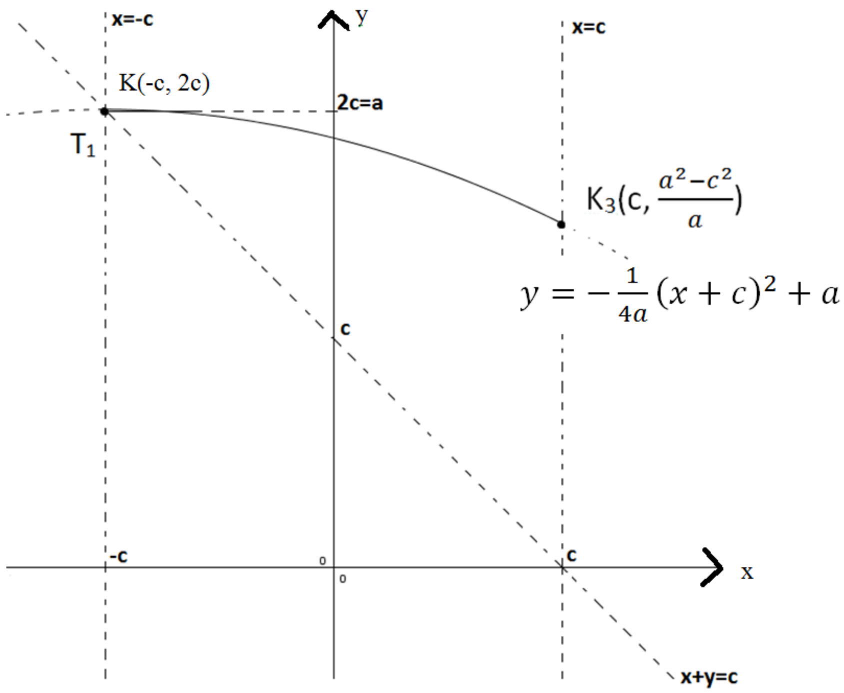
$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}^{\,2}\right) = (2a+x-c)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{y^2}{4.(a-c)} - a$$

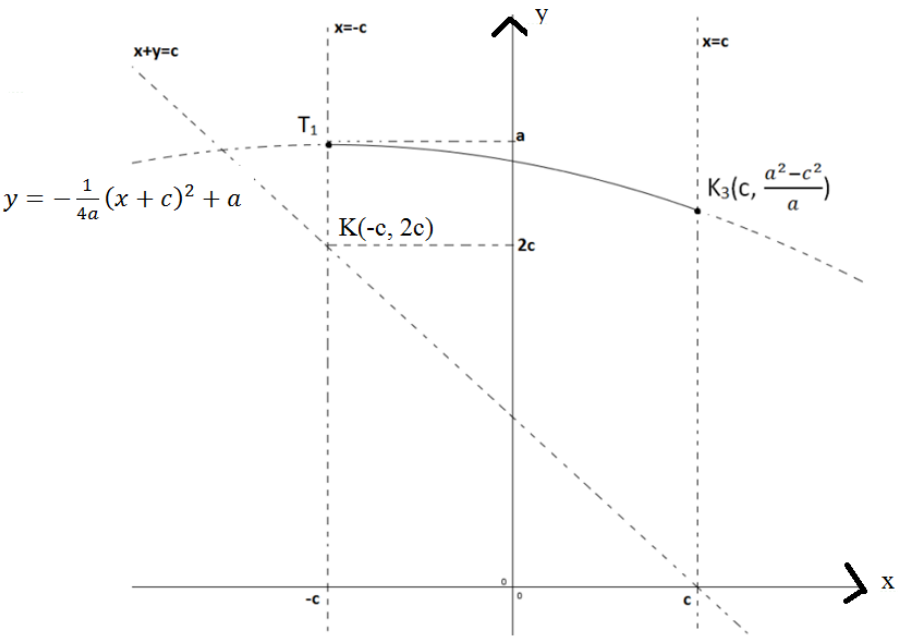
Bu ise $x + y = c$ doğrusunun belirtilen aralıkta altta kalan kısmında $x = \frac{y^2}{4.(a-c)} - a$ Öklid parabolünün çizilmesi demektir. Bu parabolün tepe noktası T_2(-a,0) noktasıdır. Ayrıca bu parabol x = -c doğrusunu K_4(-c, 2(a-c)) noktasında keser (Şekil 5.2.3).



Şekil 5.2.3 a < 2c için 2. bölgedeki M-merkezil elipsi



Şekil 5.2.4 a=2c için 2.bölgedeki M-merkezil elipsi



Şekil 5.2.5 a > 2c için 2. bölgedeki M-merkezil elipsi

$y = -\frac{1}{4a}(x-c)^2 + a$ Öklid parabolünün tepe noktası T_1(-c, a) dır. Bu nokta x = -c doğrusu üzerindedir. Aynı zamanda x = -c doğrusu ile x + y = c doğrusunun kesim noktası K(-c , 2c) dir. Bu durumda T_1 noktasının K noktasının altında, K noktası ile çakışık veya K noktasının üstünde olması durumunda yani a < 2c, a = 2c, a > 2c durumlarında farklı çizimler oluşacaktır (Şekil 5.2.3, Şekil 5.2.4, Şekil 5.2.5). a = 2c ve a > 2c durumlarında x +y = c doğrusunun altına geçilemeyeceğinden bu durumlarda $x = \frac{y^2}{4.(a-c)} - a$ Öklid parabolünün grafiği çizime dahil olmayacaktır (Şekil 5.2.4, Şekil 5.2.5). $x = \frac{y^2}{4.(a-c)} - a$ parabolünün grafiği sadece a < 2c olması durumunda x +y = c doğrusunun altında çizilebilir (Şekil 5.2.3).

b_3) |x – c| = |y| ise x + y = c olduğundan,

$$d_M(P,F_1) + d_E(P,F_2) = |y| + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

veya

$$d_M(P,F_1) + d_E(P,F_2) = |x-c| + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

yazılışlarının her ikisi de doğrudur. Bunların belirttiği $y = -\frac{1}{4a}(x-c)^2 + a$ veya $x = \frac{y^2}{4.(a-c)} - a$ Öklid parabollerinden herhangi biriyle x + y = c doğrusunun ortak noktası veya bu iki parabolün ortak noktası aynı noktadır. Bu nedenle bunlardan herhangi ikisini ortak çözmek yeterlidir.

$x = \frac{y^2}{4.(a-c)} - a$ parabolü ile x + y = c doğrusunu ortak çözelim.

$c - y = \frac{y^2}{4.(a-c)} - a$ olur ki buradan karşımıza $y^2 + 4(a-c) + 4(c^2 - a^2) = 0$ denklemi çıkar. Bu denklemin kökleri $y_{1,2} = 2c - 2a \pm 2\sqrt{2a(a-c)}$ dır. Çalışmamızı x- ekseninin üst tarafında yaptığımız için ,

$$K_5\left(2a - c - 2\sqrt{2a(a-c)}\,,2c - 2a + 2\sqrt{2a(a-c)}\right)$$

noktası aradığımız geometrik yerdir (Şekil 5.2.3).

c) x ≤ - c , y ≥ 0 (3. Bölge)

Bu durumda (x – c).y ≤ 0 ve (x + c).y ≤ 0 olduğundan,

$$
\begin{aligned}
d_{M}(P,F_1) + d_{M}(P,F_2) &= d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) \\
&= \max\{|x-c|,|y|\} + \max\{|x+c|,|y|\} \\
&= 2a
\end{aligned}
$$

dır. Maksimum metriğine göre dokuz farklı durum oluşur. Bu durumlar şunlardır :

c_1) $|x - c| < |y|$, $|x + c| < |y|$ için, $x + y > c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$$d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = |y| + |y| = 2a \Rightarrow y = a$$

c_2) $|x - c| < |y|$, $|x + c| > |y|$ için, $x + y > c$ ve $x + y <- c$ olacağından çözüm yoktur.

c_3) $|x - c| > |y|$, $|x + c| < |y|$ için, $x + y < c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$$d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = |x-c| + |y| = 2a \Rightarrow x - y = c - 2a$$

c_4) $|x - c| > |y|$, $|x + c| > |y|$ için, $x + y < c$ ve $x + y < -c$

$$d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = |x-c| + |x+c| = 2a \Rightarrow x = -a$$

c_5) $|x - c|= |y|$, $|x + c| < |y|$ için, $x + y = c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = |x-c| + |y| = |y| + |y| = 2a$ olacağından $y = a$ ve $x - y = c - 2a$ olur ki bu durumda aradığımız geometrik yer K_6 ($c - a$, a) noktasıdır. Bu nokta $a = 2c$ olması durumunda $x = -c$ doğrusunun üzerinde olur ki bu da $a = 2c$, $a > 2c$ ve $a < 2c$ durumlarında farklı çizimleri gerektirir.

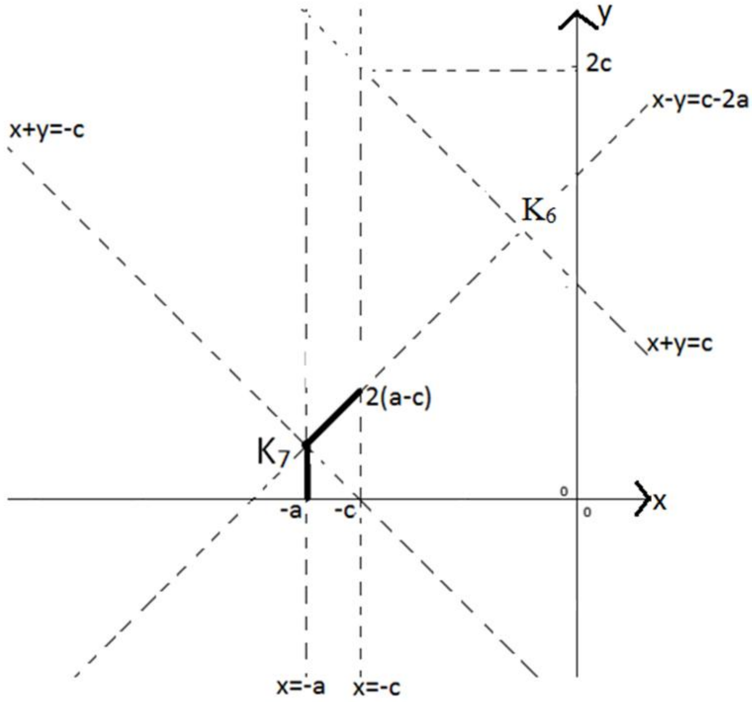
c_6) $|x - c|= |y|$, $|x + c| > |y|$ için, $x + y = c$ ve $x + y < -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

c_7) $|x - c| > |y|$, $|x + c|= |y|$ için, $x + y < c$ ve $x + y = -c$ olduğundan,

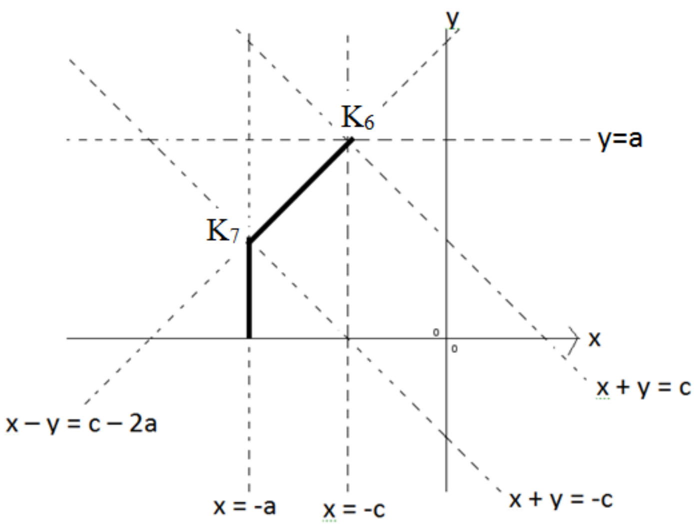
$d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = |x-c| + |y| = |x-c| + |x+c| = 2a$ olacağından $x = -a$ ve $x - y = c - 2a$ olur ki bu durumda aradığımız geometrik yer K_7 ($-a$, $a - c$) dir.

c_8) $|x - c| < |y|$, $|x + c|= |y|$ için; $x + y > c$ ve $x + y = -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

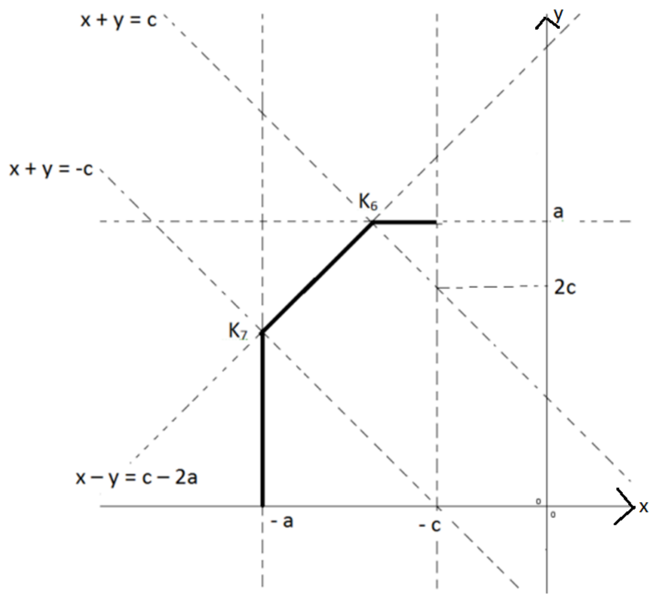
c_9) $|x + y | = |y|$, $|x - c | = |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y = -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.



Şekil 5.2.6 a < 2c için 3. bölgedeki M-merkezil elipsi



Şekil 5.2.7 a = 2c için 3. bölgedeki M-merkezil elipsi



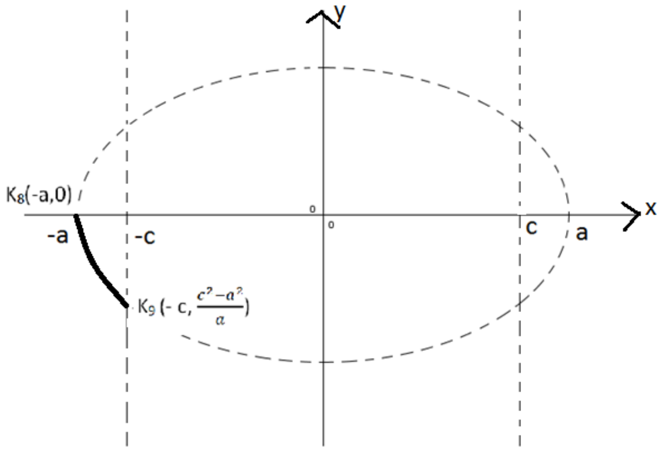
Şekil 5.2.8 a > 2c için 3. bölgedeki M-merkezil elipsi

d) x ≤ - c, y ≤ 0 (4. Bölge)

Bu durumda (x – c).y ≥ 0 ve (x + c).y ≥ 0 olduğundan,

$d_m(P,F_1) + d_m(P,F_2) = d_E(P,F_1) + d_E(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$ dır.

Bu denklem düzenlendiğinde karşımıza denklemi, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$ olan Öklid merkezil elipsi çıkacaktır. Bu elipsin K_8(-a,0) ve K_9 (- c, $\frac{c^2-a^2}{a}$) noktalarından geçtiği açıktır (Şekil 5.2.9).



Şekil 5.2.9 4.bölgedeki M-merkezil elipsi

e) $-c \leq x \leq c$, $y \leq 0$ (5. Bölge)

Bu durumda $(x-c).y \geq 0$ ve $(x+c).y \leq 0$ olduğundan,

$d_m(P,F_1) + d_m(P,F_2) = d_E(P,F_1) + d_M(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \max\{|x+c|,|y|\} = 2a$ dır. Maksimum metriğine göre üç farklı durum karşımıza çıkmaktadır. Bu durumlar şunlardır :

e_1) $|x+c| < |y|$ ise $x + y < -c$ olduğundan,

$$d_E(P,F_1) + d_M(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + |y| = 2a$$

$$\Longrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} - y = 2a$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}^{\,2}\right) = (2a+y)^2$$

$$\Longrightarrow y = \frac{x^2-2xc+c^2-4a^2}{4a}$$

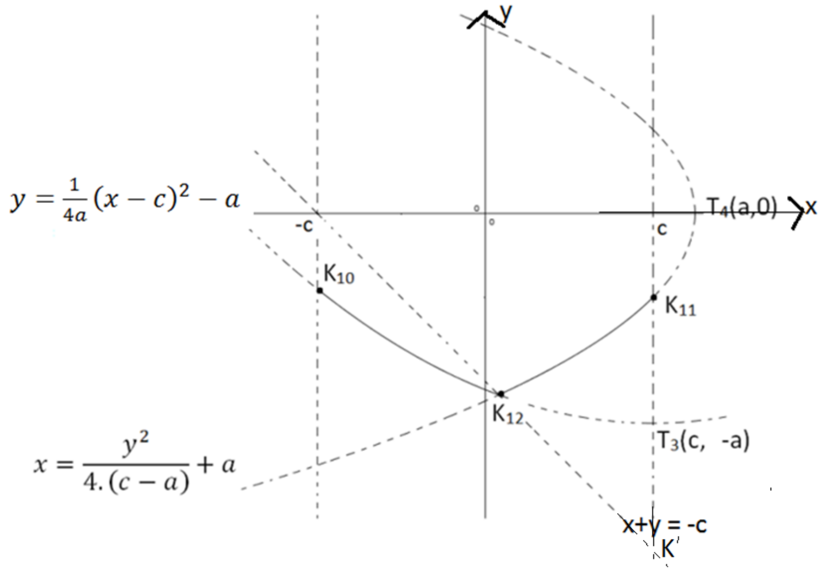
$$\Longrightarrow y = \frac{1}{4a}(x-c)^2 - a$$

Bu ise $x + y = -c$ doğrusunun belirtilen aralıkta altta kalan kısmında $y = \frac{1}{4a}(x-c)^2 - a$ Öklid parabolünün çizilmesi demektir. Bu parabolün tepe noktası $T_3(c, -a)$ noktasıdır. $y = \frac{1}{4a}(x-c)^2 - a$ Öklid parabolü $x = -c$ doğrusunu $K_{10}(-c, \frac{c^2-a^2}{a})$ noktasında keser (Şekil 5.2.10, Şekil 5.2.11, Şekil 5.2.12).

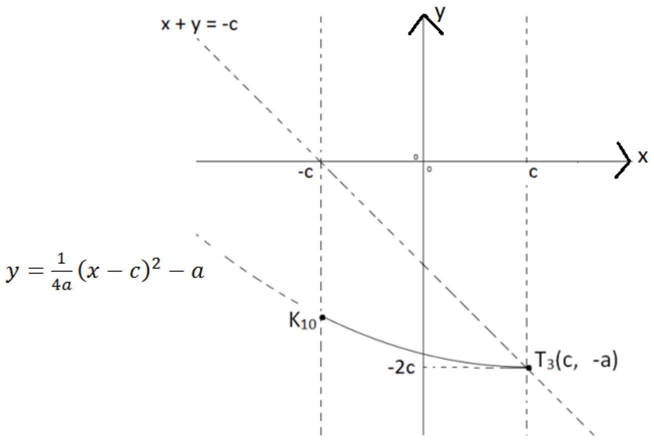
e_2) |x + c| > |y| ise x + y > -c olduğundan,

$$d_E(P,F_1) + d_M(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + |x+c| = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} + x + c = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}^{\,2}\right) = (2a-x-c)^2$$
$$\Rightarrow x = \frac{y^2}{4.(c-a)} + a$$

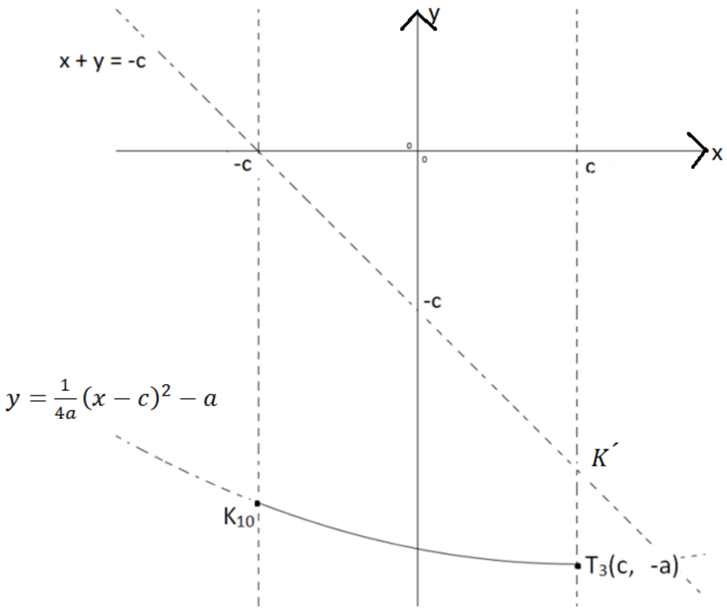
Bu ise x + y = - c doğrusunun belirtilen aralıkta üstte kalan kısmında $x = \frac{y^2}{4.(c-a)} + a$ Öklid parabolünün çizilmesi demektir. Bu parabolün tepe noktası $T_4(a,0)$ noktasıdır. Ayrıca bu parabol x = c doğrusunu K_{11}(c, 2(c-a)) noktasında keser (Şekil 5.2.10).



Şekil 5.2.10 a < 2c için 5. bölgedeki M-merkezil elipsi



Şekil 5.2.11 a=2c için 5. bölgedeki M-merkezil elipsi



Şekil 5.2.12 a > 2c için 5. bölgedeki M-merkezil elipsi

$y = \frac{1}{4a}(x-c)^2 - a$ Öklid parabolünün tepe noktası T_3(c, -a) dır. Bu nokta x = c doğrusu üzerindedir. Aynı zamanda x = c doğrusu ile x + y = -c doğrusunun kesim noktası K'(c , -2c) dir. Bu durumda T_3 noktasının K' noktasının altında, üzerinde veya üstünde olması durumunda yani a < 2c, a = 2c, a > 2c durumlarında farklı çizimler oluşacaktır (Şekil 5.2.10, Şekil 5.2.11, Şekil 5.2.12) . a = 2c ve a > 2c durumlarında x +y = - c doğrusunun üstüne geçilemeyeceğinden bu durumlarda $x = \frac{y^2}{4.(c-a)} + a$ Öklid parabolünün grafiği çizime dahil olmayacaktır (Şekil 5.2.11, Şekil 5.2.12). $x = \frac{y^2}{4.(c-a)} + a$ Öklid parabolünün grafiği sadece a < 2c olması durumunda x +y = - c doğrusunun üstünde çizilebilir (Şekil 5.2.10).

e_3) |x + c| = |y| ise x + y = - c olduğundan,

$$d_E(P,F_1) + d_M(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + |y| = 2a$$

veya

$$d_E(P,F_1) + d_M(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + |x+c| = 2a$$

yazılışlarının her ikisi de doğrudur. Bunların belirttiği $y = \frac{1}{4a}(x-c)^2 - a$ veya $x = \frac{y^2}{4.(c-a)} + a$ Öklid parabollerinden herhangi biriyle x + y = - c doğrusunun ortak noktası veya bu iki parabolün ortak noktası aynı noktadır. Bu nedenle bunlardan herhangi ikisini ortak çözmek yeterlidir.

$x = \frac{y^2}{4.(c-a)} + a$ parabolü ile x + y =- c doğrusunu ortak çözelim.

$-c - y = \frac{y^2}{4.(c-a)} + a$ olur ki buradan karşımıza $y^2 + 4(c-a) + 4(c^2 - a^2) = 0$ denklemi çıkar. Bu denklemin kökleri $y_{1,2} = 2a - 2c \pm 2\sqrt{2a(a-c)}$ dır. Çalışmamızı x- ekseninin alt tarafında yaptığımız için ,

$$K_{12}\left(c - 2a + 2\sqrt{2a(a-c)}\,, 2a - 2c - 2\sqrt{2a(a-c)}\right)$$

noktası aradığımız geometrik yerdir (Şekil 5.2.10).

f) x ≥ c , y ≤ 0 (6. Bölge)

Bu durumda (x – c).y ≤ 0 ve (x + c).y ≤ 0 olduğundan,

$d_{mj}(P,F_1) + d_{mj}(P,F_2) = d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = \max\{|x-c|, |y|\} + \max\{|x+c|, |y|\} = 2a$ dır. Maksimum metriğine göre uzaklık nedeni ile dokuz farklı durum oluşur. Bu durumlar şunlardır :

f_1) $|x – c| < |y|$, $|x + c| < |y|$ için, $x + y < c$ ve $x + y < -c$ olduğundan,

$$d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = |y| + |y| = 2a \Rightarrow y = -a$$

f_2) $|x – c| < |y|$, $|x + c| > |y|$ için, $x + y < c$ ve $x + y > - c$ olduğundan,

$$d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = |y| + |x + c| = 2a \Rightarrow x - y = 2a - c$$

f_3) $|x – c| > |y|$, $|x + c| < |y|$ için, $x + y > c$ ve $x + y < -c$ olduğundan çözüm yoktur.

f_4) $|x – c| > |y|$, $|x + c| > |y|$ için, $x + y > c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$$d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = |x - c| + |x + c| = 2a \Rightarrow x = a$$

f_5) $|x – c| = |y|$, $|x + c| < |y|$ için, $x + y = c$ ve $x + y < -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

f_6) $|x – c| = |y|$, $|x + c| > |y|$ için, $x + y = c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

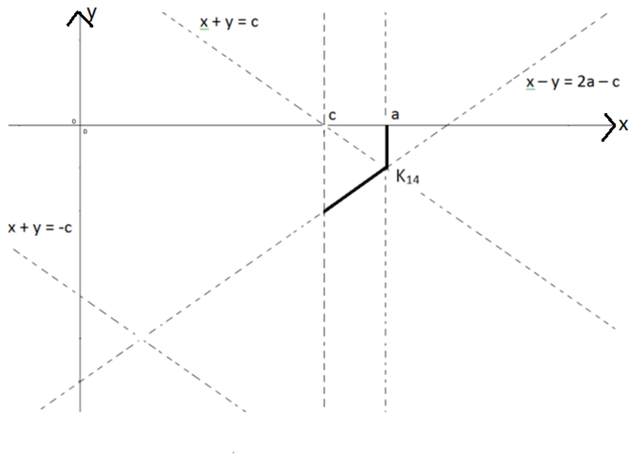
$d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = |x - c| + |x + c| = |y| + |x + c| = 2a$ olacağından $x = a$ ve $x – y = 2a – c$ olur ki bu durumda aradığımız geometrik yer K_{14} (a , c - a) noktasıdır.

f_7) $|x – c| > |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y > c$ ve $x + y = - c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

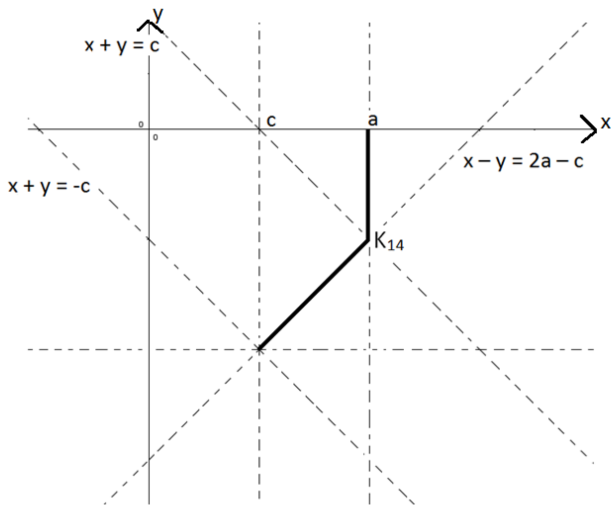
f_8) $|x – c| < |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y < c$ ve $x + y = -c$ olduğundan,

$d_M(P,F_1) + d_M(P,F_2) = |y| + |y| = |y| + |x + c| = 2a$ olacağından $y = -a$ ve $x – y = 2a – c$ olur ki bu durumda aradığımız geometrik yer K_{13} (a-c , -a) dir. Bu nokta $a = 2c$ olması durumunda $x = c$ doğrusunun üzerinde olur ki bu da $a = 2c$, $a > 2c$ ve $a < 2c$ durumlarında farklı çizimleri gerektirir (Şekil 5.2.13, Şekil 5.2.14, Şekil 5.2.15).

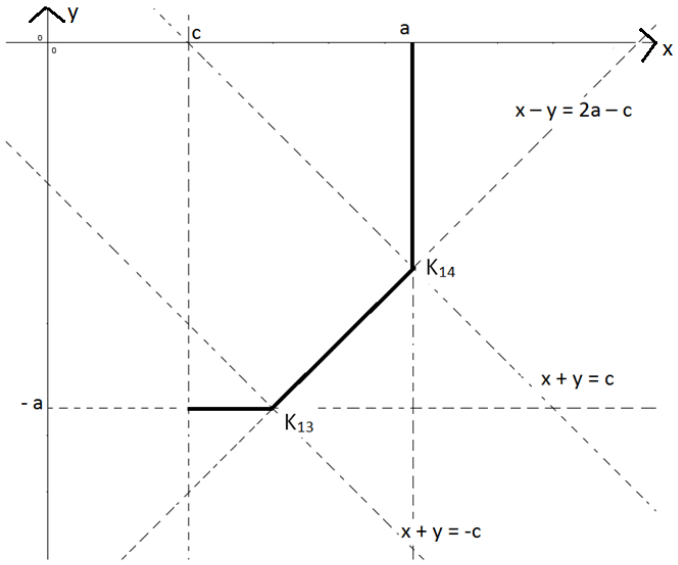
f_9) $|x – c| = |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y = - c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.



Şekil 5.2.13 a < 2c için 6. bölgedeki M-merkezil elipsi

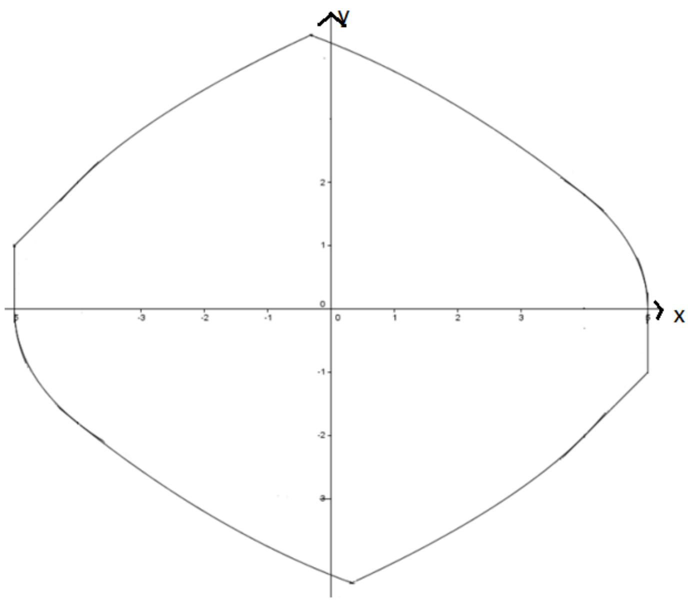


Şekil 5.2.14 a = 2c için 6. bölgedeki M-merkezil elipsi

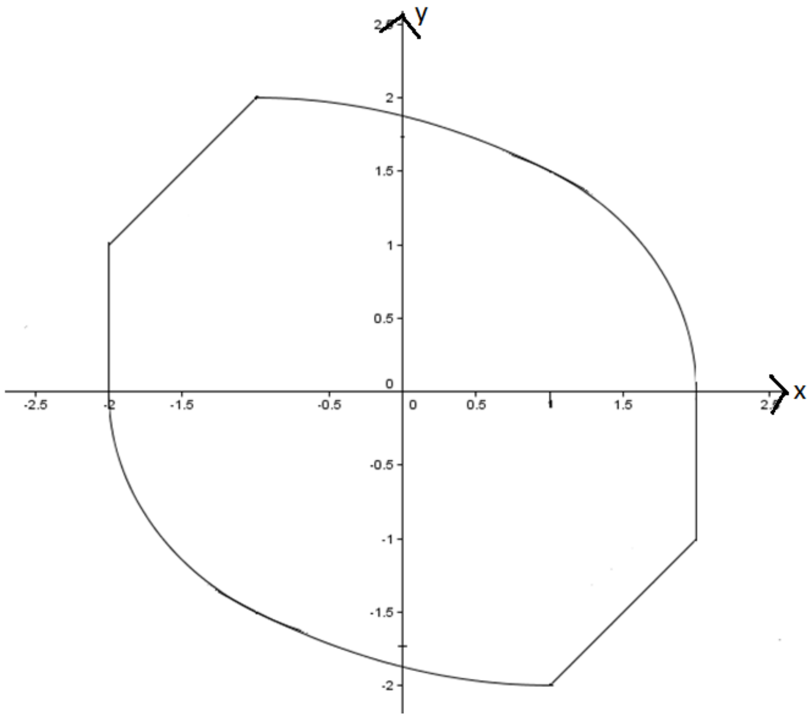


Şekil 5.2.15 a >2c için 6. bölgedeki M-merkezil elipsi

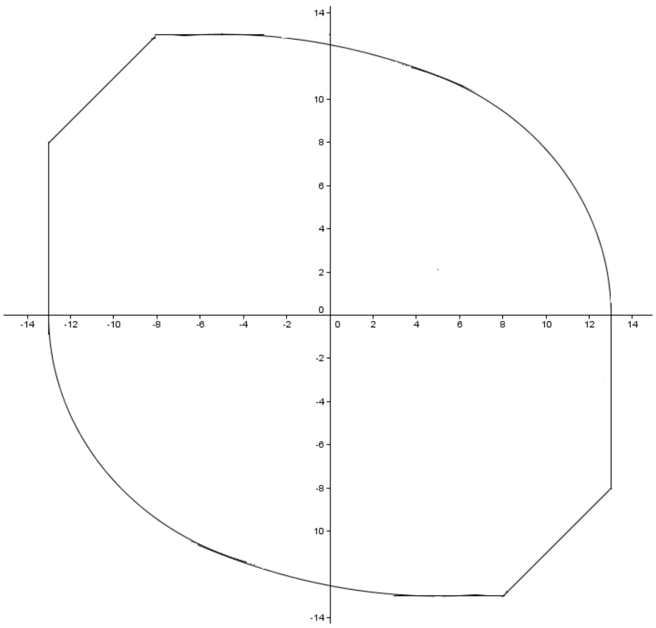
Tüm bölgelerdeki çizimler birleştirildiğinde aşağıdaki şekiller ortaya çıkar (Şekil 5.2.16, Şekil 5.2.17, Şekil 5.2.18).



Şekil 5.2.16 a < 2c için M-merkezil elipsi



Şekil 5.2.17 a =2c için M-merkezil elipsi



Şekil 5.2.18 a > 2c M-merkezil elipsi

Tablo 5.2.1 Farklı durumlarda M-merkezil elipsi incelemeleri

<table>
<tr><th colspan="4">Farklı Durumlarda M-Merkezil Elips İncelemeleri</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$F_1=F_2$</td><td colspan="2">$a = 0$</td><td>O(0,0) noktası.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a \neq 0$</td><td>Öklid koordinat sisteminin II. ve IV. bölgelerinde ikisi x-eksenine, ikisi y- eksenine paralel ve uzunlukları eşit dört doğru parçası ile Öklid koordinat sisteminin I. ve III. bölgelerinde iki çember yayından oluşan kapalı eğri.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$F_1 \neq F_2$</td><td colspan="2">$a = 0$</td><td>Boş küme.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a \neq 0$</td><td>$a < 2c$</td><td>Dört doğru parçası, dört Öklid parabol parçası ve iki Öklid elips parçasından oluşan kapalı eğri.</td></tr>
<tr><td>$a = 2c$</td><td>Dört doğru parçası, iki Öklid parabol parçası ve iki Öklid elips parçasından oluşan kapalı eğri.</td></tr>
<tr><td>$a > 2c$</td><td>Altı doğru parçası, iki Öklid parabol parçası ve iki Öklid elips parçasından oluşan kapalı eğri.</td></tr>
</table>

5.3 M-Merkezil Hiperbolü

Bu bölümde Tanım 2.1.8 deki merkezil hiperbolün tanımı göz önünde bulundurularak $d_{\text{ɱ}}$ metriğine göre M-merkezil hiperbolleri incelenmiştir.

F_1 ve F_2 noktaları ile pozitif bir a reel sayısı verilmiş olsun. $d_{\text{ɱ}}$ metriğine göre $c > 0$ olmak üzere $F_1(c, 0)$ ve $F_2(-c, 0)$ noktalarına olan uzaklıkları farkının mutlak değeri 2a olan noktaların geometrik yerini yani $| d_{\text{ɱ}}(P,F_1) - d_{\text{ɱ}}(P,F_2) | = 2a$ ifadesini F_1, F_2 ve a nın bazı özel durumları için inceleyelim.

A) $F_1 = F_2 = (0, 0)$ ve $a = 0$ olsun. $| d_{\text{ɱ}}(P,F_1) - d_{\text{ɱ}}(P,F_1) | = 0$ durumu $\forall P \in R^2$ için gerçekleşeceğinden bu şartı sağlayan noktaların kümesi R^2 düzlemidir.

B) $F_1 = F_2 = (0,0)$ ve $a \neq 0$ için ,

$$| d_{\text{ɱ}}(P,F_1) - d_{\text{ɱ}}(P,F_1) | = 2a$$

$$0 = 2a$$

ifadesi $a \neq 0$ olması ile çelişir. Bu durumda bu şartı sağlayan P noktaları olmadığından çözüm kümesi boş kümedir.

C) $F_1 \neq F_2$ ve $a = 0$ için,

$$| d_{\text{ɱ}}(P,F_1) - d_{\text{ɱ}}(P,F_2) | = 0$$

$$d_{\text{ɱ}}(P,F_1) = d_{\text{ɱ}}(P,F_2)$$

Bu son durumu altı bölge için ayrı ayrı inceleyelim.

a) $x \geq c$, $y \geq 0$ (1. Bölge)

$$d_{\text{ɱ}}(P,F_1) = d_{\text{ɱ}}(P,F_2)$$

$$d_E(P,F_1) = d_E(P,F_2)$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$|x - c| = |x + c|$$

$$x - c = x + c$$

$$c=0$$

$c > 0$ olduğundan bu durum için çözüm kümesi boş kümedir.

b) $-c \leq x \leq c$, $y \geq 0$ (2 . Bölge)

$$d_{\text{ɱ}}(P,F_1) = d_{\text{ɱ}}(P,F_2)$$

$$d_M(P,F_1) = d_E(P,F_2)$$

max { | x – c |, | y | } = $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ dir. Maksimum metriğine göre üç farklı durum ortaya çıkmaktadır.

b_1) | x – c | > |y| ⇒ - x + c > y ⇒ x + y < c olduğundan,

$$-x+c=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x=-\frac{y^2}{4c}$$

Öklid merkezil parabolü oluşur (Şekil 5.3.1).

b_2) | x – c | < |y| ⇒ - x + c < y ⇒ x + y > c olduğundan,

$$y=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Rightarrow x = -c$$

doğrusu çıkar (Şekil 5.3.1).

b_3) |x – c| = |y| ⇒ x + y = c olduğundan,

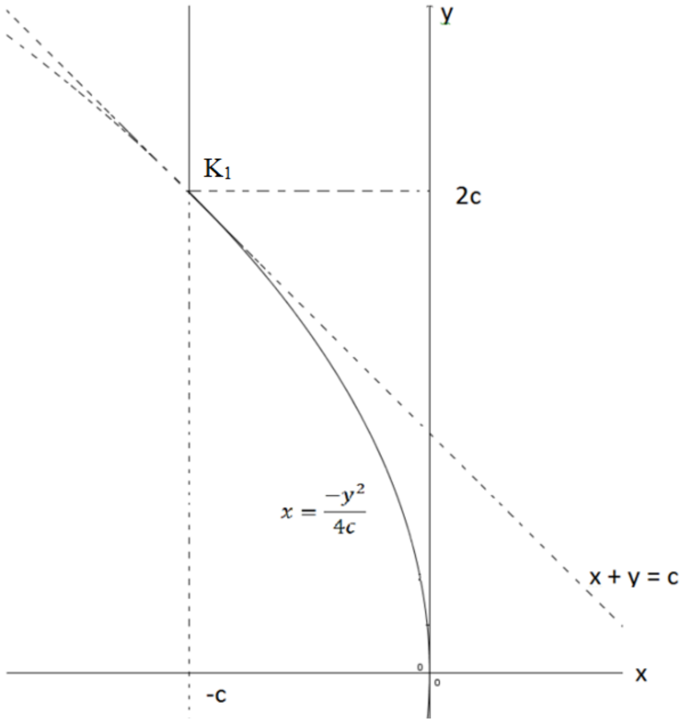
$$-x+c=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x=-\frac{y^2}{4c}$$

Öklid parabolü ile,

$$y=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \Rightarrow x = -c$$

doğrusunun ortak çözümü olan K_1(-c, 2c) noktası çözüm kümesini oluşturur (Şekil 5.3.1).



Şekil 5.3.1 $F_1 \neq F_2$ ve a = 0 için 2. bölgedeki M-merkezil hiperbolü

c) $x \leq -c$, $y \geq 0$ (3. Bölge)

$$d_M(P,F_1) = d_M(P,F_2)$$

$$d_M(P,F_1) = d_M(P,F_2)$$

$$\max \{ |x-c|, |y| \} = \max \{ |x+c|, |y| \}$$

Burada maksimum metriğine göre dokuz farklı durum ortaya çıkmaktadır.

c_1) $|x-c| > |y|$ ve $|x+c| > |y| \Rightarrow$ $x+y < c$ ve $x+y < -c$ olduğundan,

$$|x-c| = |x+c|$$
$$c = -c$$
$$c = 0$$

$c > 0$ olduğundan bu durum için çözüm kümesi boş kümedir.

c_2) $|x-c| > |y|$ ve $|x+c| < |y| \Rightarrow x+y < c$ ve $x+y > -c$ olduğundan,

$|x-c| = |y| \Rightarrow$ $y = -x+c$ $\Rightarrow x+y = c$ doğrusu çıkar. $x+y < c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

c_3) $|x - c| < |y|$ ve $|x + c| > |y| \Rightarrow x + y > c$ ve $x + y > -c$ bölgesini sağlayan noktalar olmadığından bu bölgedeki çözüm kümesi boş kümedir.

c_4) $|x - c| < |y|$ ve $|x + c| < |y| \Rightarrow x + y > c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$|y|=|y| \Rightarrow y = y$ durumu $x + y > c$ ve $x \leq - c$ bölgesindeki her P noktası için sağlanacaktır.

c_5) $|x - c| = |y|$, $|x + c| < |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$|x - c| = |y|$ ile $|y| = |y|$ denklemlerinin ortak çözümü olan $x + y = c$ doğrusu çözüm kümesidir.

c_6) $|x - c| = |y|$, $|x + c| > |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y < -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

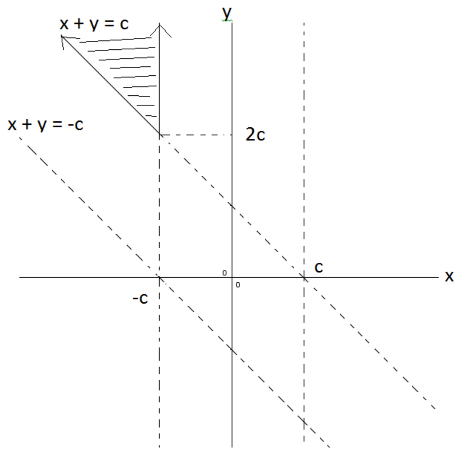
c_7) $|x - c| > |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y < c$ ve $x + y = -c$ olduğundan,

$|x - c| = |x + c|$ ile $|x - c| = |y|$ denklemlerinin ortak çözümü olmadığından çözüm kümesi boş kümedir.

c_8) $|x - c| < |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y > c$ ve $x + y = -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

c_9) $|x - c| = |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y = -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

3. bölge için çözüm kümesinin kartezyen düzlemdeki grafiği aşağıdaki gibidir (Şekil 5.3.2).



Şekil 5.3.2 $F_1 \neq F_2$ ve a = 0 için 3. bölgedeki M-merkezil hiperbolü

d) $x \leq -c$ ve $y \leq 0$ (4. Bölge)

$$d_M(P,F_1) = d_M(P,F_2)$$
$$d_E(P,F_1) = d_E(P,F_2)$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$|x-c| = |x+c|$$
$$-x + c = -x - c$$
$$c = 0$$

dır . Bu durum c > 0 olması ile çeliştiğinden çözüm kümesi boş kümedir.

e) $-c \leq x \leq c$ ve $y \leq 0$ (5. Bölge)

$\max\{|x+c|,|y|\} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ olur. Bu durumda maksimum metriğine göre üç durum ortaya çıkar.

e_1) $|x + c| > |y| \Rightarrow x + c > -y \Rightarrow x + y > -c$ olduğundan,

$$|x+c| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$x = \frac{y^2}{4c}$$

Öklid merkezil parabolü elde edilir.

e_2) $|x + c| < |y| \Rightarrow x + c < -y \Rightarrow x + y < -c$ olduğundan,

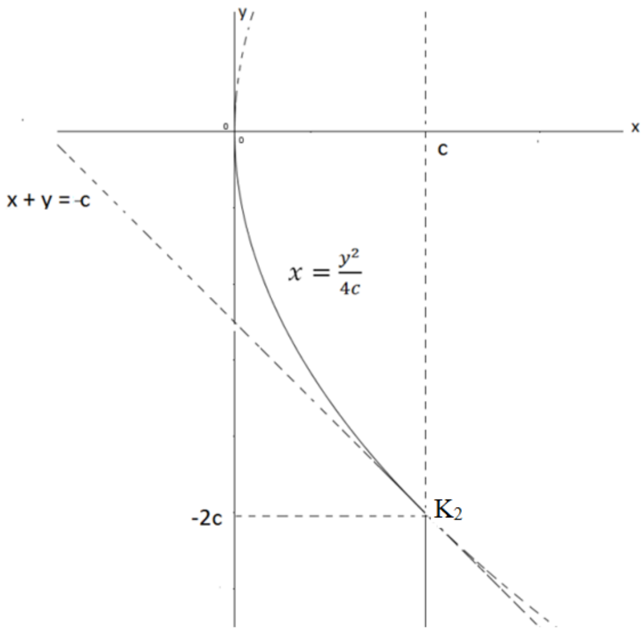
$$|y|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x=c$$

doğrusu oluşur.

e_3) $|x + c| = |y| \Rightarrow x + c = -y \Rightarrow x + y = -c$ olduğundan,

$|x+c| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ile $|y|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ denklemlerinin yani $x=\frac{y^2}{4c}$ Öklid parabolü ile x = c doğrusunun ortak çözümü olan K_2 (c, -2c) noktası çözüm kümesini oluşturur (Şekil 5.3.3).



Şekil 5.3.3 $F_1 \neq F_2$ ve a = 0 için 5. bölgedeki M-merkezil hiperbolü

f) $x \geq c$, $y \leq 0$ (6. Bölge)

max{|x + c|,|y|} = max{|x-c|,|y|} durumunda maksimum metriğine göre dokuz durum karşımıza çıkmaktadır.

f_1) $|x+c| > |y|$ ve $|x-c| > |y| \Rightarrow x+y > -c$ ve $x+y > c$ olduğundan,

$$|x+c|=|x-c|$$

$$c = -c$$

Bu durumda $c > 0$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

f_2) $|x + c| > |y|$ ve $|x-c| < |y| \Rightarrow x + y > -c$ ve $x + y < c$ olduğundan,

$|x + c| = |y| \Rightarrow x + y = -c$ olur. $x + y > -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

f_3) $|x + c| < |y|$ ve $|x-c| > |y| \Rightarrow x + y < -c$ ve $x + y > c$ bölgesini sağlayan noktalar olmadığından bu bölgede çözüm kümesi boş kümedir.

f_4) $|x + c| < |y|$ ve $|x-c| < |y| \Rightarrow x + y < -c$ ve $x+y < c$ olduğundan,

$|y|=|y| \Rightarrow -y=-y \Rightarrow y=y$ olur. Bu durum $x + y < -c$ ve $x \geq c$ bölgesindeki her P noktası için sağlanacaktır.

f_5) $|x - c| = |y|$, $|x + c| < |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y < -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

f_6) $|x - c| = |y|$, $|x + c| > |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$|x- c| = |x + c|$ ile $|y| = |x + c|$ denklemlerinin ortak çözümü olmadığından çözüm kümesi boş kümedir.

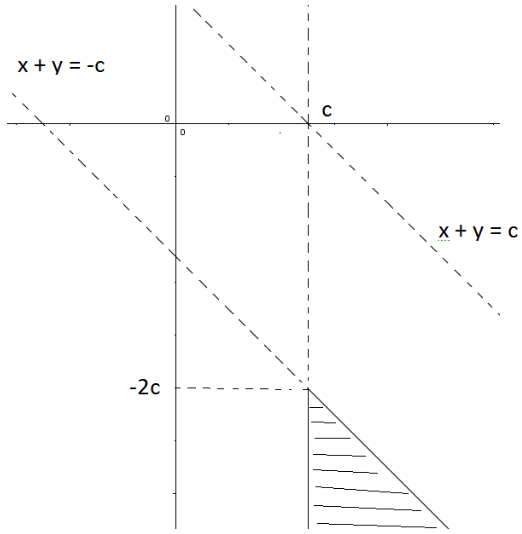
f_7) $|x - c| > |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y > c$ ve $x + y = -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

f_8) $|x - c| < |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y < c$ ve $x + y = -c$ olduğundan,

$|y| = |x + c|$ ile $|y| = |y|$ denklemlerinin ortak çözümü olan $x + y = -c$ doğrusu çözüm kümesidir.

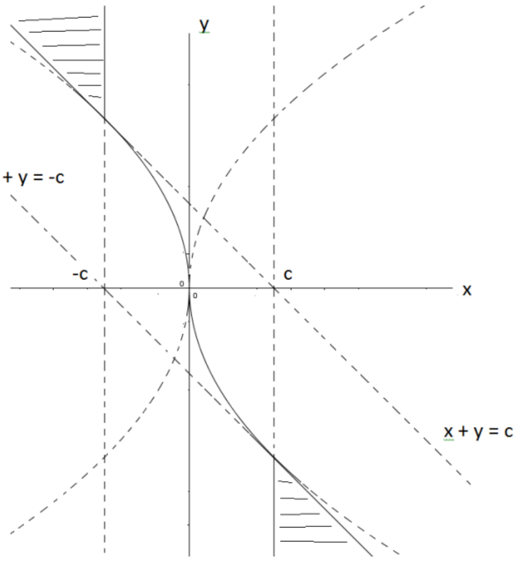
f_9) $|x - c| = |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y = -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

6. bölge için çözüm kümesinin kartezyen düzlemdeki grafiği aşağıdaki gibidir (Şekil 5.3.4).



Şekil 5.3.4 $F_1 \neq F_2$ ve a = 0 için 6. Bölgedeki M-Merkezil Hiperbolü

a,b,c,d,e,f seçeneklerinin tamamını değerlendirdiğimizde aşağıdaki şekil ortaya çıkar (Şekil 5.3.5).



Şekil 5.3.5 $F_1 \neq F_2$ ve a = 0 için M-merkezil hiperbolü

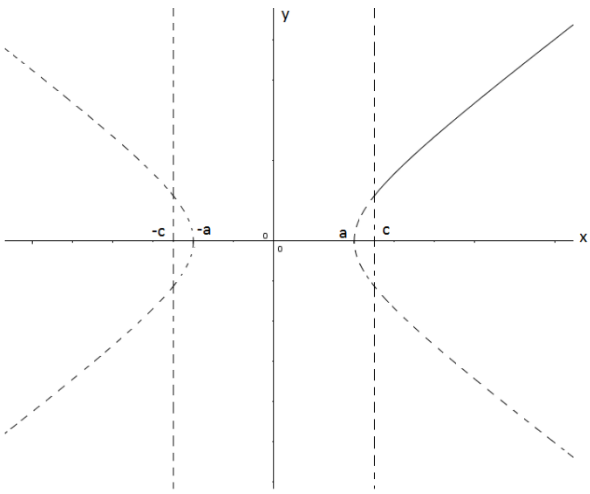
D) $F_1 \neq F_2$ ve a≠0 için,

$|d_m(P, F_1) - d_m(P, F_2)| = 2a$ durumunu mevcut altı bölge içinde inceleyelim.

a) x ≥ c , y ≥ 0 (1. Bölge)

$$|d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) - d_{\mathfrak{m}}(P,F_2)| = 2a$$
$$|d_E(P,F_1) - d_E(P,F_2)| = 2a$$
$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Bu ise Öklid düzlemindeki hiperbol denklemidir (Şekil 5.3.6).



Şekil 5.3.6 $F_1 \neq F_2$ ve $a \neq 0$ için 1. bölgedeki M-merkezil hiperbolü

b) –c ≤ x ≤ c, y ≥ 0 (2.Bölge)

$$|d_{\mathfrak{m}}(P,F_1) - d_{\mathfrak{m}}(P,F_2)| = 2a$$
$$|d_M(P,F_1) - d_E(P,F_2)| = 2a$$
$$\left|\max\{|x-c|,|y|\} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$$

Burada maksimum metriğine göre üç durum ortaya çıkmaktadır.

b_1) | x – c | > | y | ⇒ -x + c > y ⇒ x + y < c olduğundan,

$$\left||x-c| - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$$
$$\left|-x+c - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$$

Bu son mutlak değer için iki farklı durum oluşur:

i) $-x + c \ \geq \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ için,

$$-x + c \ \geq \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow x \leq -\frac{y^2}{4c}$$

dir. Bu durumda

$$-x + c - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\Rightarrow x = \frac{y^2}{4(a-c)} - a$$

denklemine sahip Öklid parabolü oluşur.

$ii)\ -x + c \ < \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ için,

$$-x + c \ < \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow x > -\frac{y^2}{4c}$$

dir. Bu durumda

$$-x + c - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a$$
$$\Rightarrow x = \frac{-y^2}{4(a+c)} + a$$

denklemine sahip Öklid parabolü oluşur.

b_2) | x – c | < | y | ⇒ -x + c < y ⇒ x + y > c için,

$$\left||y| - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a$$
$$\left|y - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Bu son mutlak değer için iki farklı durum oluşur:

i) $y \geq \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ için,

$$y \geq \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\Rightarrow (x+c)^2 \leq 0$$

Bu durum ise x = -c olması dışında sağlanamaz.

$ii)$ $y < \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ için,

$$y < \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\Rightarrow (x+c)^2 > 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - y = 2a$$
$$\Rightarrow y = \frac{x^2+2xc+c^2-4a^2}{4a}$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{4a}(x+c)^2 - a$$

b_3) | x – c | = | y | ⇒ -x + c = y ⇒ x + y = c olduğundan,

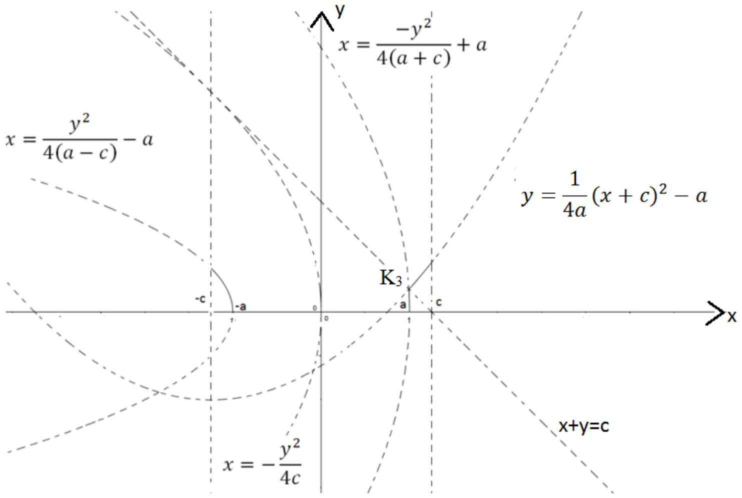
bu bölgede çözüm$\left||x-c| - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$, $\left||y| - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$ ile x + y = c denklemlerinin ortak çözümüdür. Bu nedenle bu denklemlerden herhangi ikisini ortak çözmek yeterlidir. $\left||y| - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$ ile x + y = c denkleminin yani

$y = \frac{1}{4a}(x+c)^2 - a$ Öklid parabolü ile x + y = 0 doğrusunun ortak çözülmesi ile elde edilen noktalardan x-eksenin üstünde kalan,

$$K_3(-2c-4a+4\sqrt{2a^2+2ac}, 3c+4a-4\sqrt{2a^2+2ac})$$

noktası çözümdür.

2.bölgede hiperbol aşağıdaki gibidir (Şekil 5.3.7).



Şekil 5.3.7 $F_1 \neq F_2$ ve $a \neq 0$ için 2. bölgedeki M-merkezil hiperbolü

c) $x \leq -c$, $y \geq 0$ (3.bölge)

$$|d_{m}(P,F_1) - d_{m}(P,F_2)| = 2a$$
$$|d_M(P,F_1) - d_M(P,F_2)| = 2a$$
$$|\max\{|x-c|,|y|\} - \max\{|x+c|,\}| = 2a$$

Burada maksimum metriğine göre dokuz durum ortaya çıkmaktadır. Bunlar:

c_1) $|x - c| < |y|$ ve $|x + c| < |y| \Rightarrow x + y > c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$$|y - y| = 2a$$
$$0 = 2a$$

$a > 0$ şartını sağlamadığından çözüm kümesi boş kümedir.

c_2) $|x - c| < |y|$ ve $|x + c| > |y| \Rightarrow x + y > c$ ve $x + y < -c$ olduğundan,

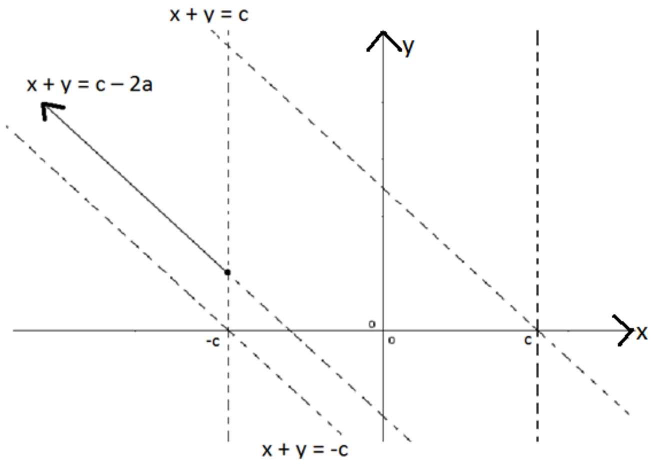
$x + y = c$ doğrusunun üstü ile $x + y = -c$ doğrusunun altında kalan bölgenin arakesiti boş küme olduğundan bu durum için inceleme yapılamaz.

c_3) $|x - c| > |y|$ ve $|x + c| < |y| \Rightarrow x + y < c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$$||x - c| - |y|| = 2a$$
$$|-x + c - y| = 2a$$

Bu durumda,

i) $-x + c - y \geq 0$ ise yani $x + y \leq c$ ise $x+y = c - 2a$ doğrusu çözümdür (Şekil 5.3.8).



Şekil 5.3.8 $F_1 \neq F_2$ ve $a \neq 0$ için 3. bölgedeki M-merkezil hiperbolü

ii) $-x + c - y < 0$ ise yani $x + y > c$ olur ancak bu durum c_3 seçeneğinin $x + y < c$ şartı ile çeliştiğinden çözüm kümesi boş kümedir.

c_4) $|x - c| > |y|$ ve $|x + c| > |y| \Rightarrow x + y < c$ ve $x + y < -c$ olduğundan,

$$||x - c| - |x + c|| = 2a$$
$$|-x+c+x+c| = 2a$$
$$c = a$$

Hiperbol için $c \neq a$ olduğundan bu durumu sağlayan noktaların kümesi de boş kümedir.

c_5) $|x - c| = |y|$, $|x + c| < |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$| |x - c| - |y| | = 2a$ ile $| |y| - |y| | = 2a$ denklemlerinin ortak çözülmesi gerekir. Ancak bu denklemlerin ortak çözümü olmadığından çözüm kümesi boş kümedir.

c_6) $|x - c| = |y|$, $|x + c| > |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y < -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

c_7) $|x - c| > |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

| |x – c| - |x + c| | = 2a ile | |x – c| - |y| | = 2a denklemlerinin ortak çözülmesi gerekir. Ancak bu denklemlerin ortak çözümü olmadığından çözüm kümesi boş kümedir.

c_8) |x – c| < |y|, |x + c| = |y| için x + y > c ve x + y = -c olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

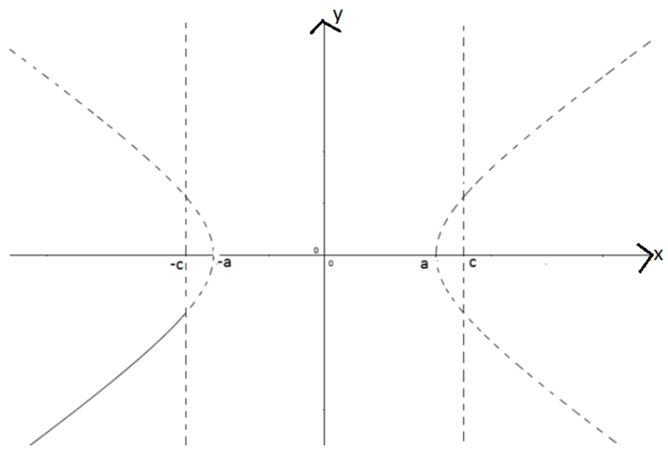
c_9) |x – c| = |y|, |x + c| = |y| için x + y = c ve x + y = -c olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

d) x ≤ -c , y ≤ 0 (4. Bölge)

Bu durumda (x – c) . y ≥ 0 ve (x +c) .y ≥ 0 olduğundan,

$$|d_M(P,F_1) - d_M(P,F_2)| = 2a$$
$$|d_E(P,F_1) - d_E(P,F_2)| = 2a$$
$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

dir. Bu ise Öklid düzlemindeki hiperbol denklemidir (Şekil 5.3.9).



Şekil 5.3.9 $F_1 \neq F_2$ ve a ≠ 0 için 4. bölgedeki M-merkezil hiperbolü

e) – c ≤ x ≤ c, y ≤ 0 (5. Bölge)

$$|d_M(P,F_1) - d_M(P,F_2)| = 2a$$

$$|d_E(P,F_1) - d_M(P,F_2)| = 2a$$

$$\left|\max\{|x+c|,|y|\} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

Burada maksimum metriğine göre üç farklı durum ortaya çıkar.

e_1) $|x + c| > |y| \Rightarrow x + y > -c$ olduğundan,

$$\left|\max\{|x+c|,|y|\} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$$\left||\mathrm{x}+\mathrm{c}| - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$$\left|\mathrm{x}+\mathrm{c} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

Mutlak değer tanımından,

i) $\mathrm{x}+\mathrm{c} \geq \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow x \geq \frac{y^2}{4c}$ için,

$$x + c - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$x = \frac{y^2}{4.(c-a)} + a$$

ii) $\mathrm{x}+\mathrm{c} < \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow x < \frac{y^2}{4c}$ için,

$$x + c - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = -2a$$

$$x = \frac{y^2}{4.(c+a)} - a$$

olur.

e_2) $|x + c| < |y| \Rightarrow x + y < -c$ için,

$$\left|\max\{|x+c|,|y|\} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$$\left||\mathrm{y}| - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$$\left|-\mathrm{y} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

olur. Mutlak değer tanımından,

i) $-y \geq \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow 0 \geq (x-c)^2$ için x = c durumunda,

$$-\mathrm{y}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$y=\frac{1}{4a}(x-c)^2-a$$

Öklid parabolü ile x = c doğrusunun ortak çözülmesi ile elde edilen K(c, -a) noktası x + y < - c şartını sağlamadığından çözüm kümesi boş kümedir.

ii) $-y<\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow 0<(x-c)^2$ için,

$$-y-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-2a$$

$$y=\frac{-x^2+2xc-c^2+4a^2}{4a}$$

$$y=-\frac{1}{4a}(x-c)^2+a$$

Öklid parabolü elde edilir.

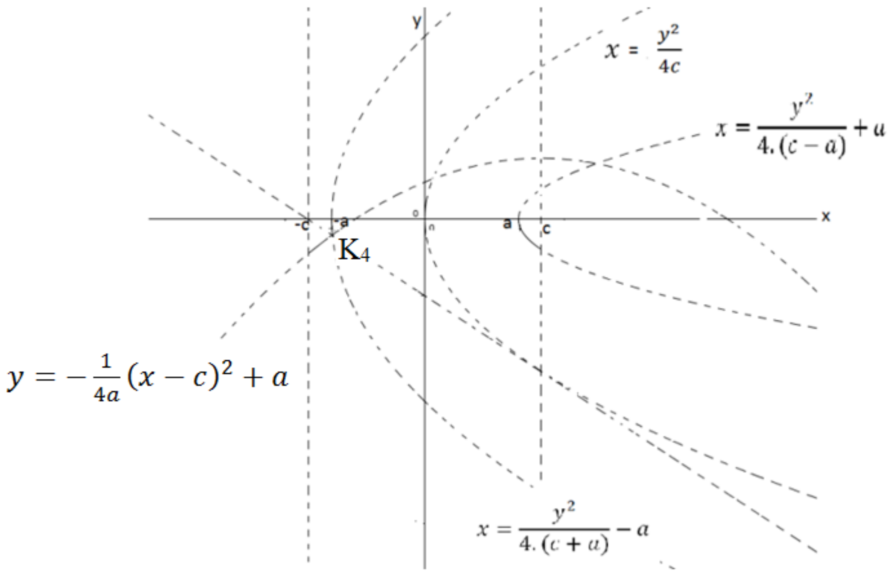
e_3) |x + c| = |y| $\Rightarrow$ x + y = -c olduğundan,

bu bölgede çözüm, $\left|\mathrm{x}+\mathrm{c}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$, $\left|-\mathrm{y}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$ ile x + y = -c denklemlerinin ortak çözümüdür. Bu denklemlerden herhangi ikisini ortak çözmek yeterlidir. $\left|-\mathrm{y}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$ ile x + y = -c denklemlerinin yani $y=-\frac{1}{4a}(x-c)^2+a$ Öklid parabolü ile x + y = - c doğrusunun ortak çözülmesi ile elde edilen noktalardan x-ekseninin altında kalan

$$K_4(2c+4a-4\sqrt{2a^2+2ac},-3c-4a+4\sqrt{2a^2+2ac})$$

noktası çözümdür.

5. Bölgede hiperbol çizimi aşağıdaki gibidir (Şekil 5.3.10).



Şekil 5.3.10 $F_1 \neq F_2$ ve a ≠ 0 için 5. bölgedeki M-merkezil hiperbolü

f) x ≥ c , y ≤ 0 (6. Bölge)

$$|d_m(P,F_1) - d_m(P,F_2)| = 2a$$
$$|d_M(P,F_1) - d_M(P,F_2)| = 2a$$
$$|\max\{|x-c|,|y|\} - \max\{|x+c|,|y|\}| = 2a$$

Maksimum metriğine göre dokuz durum ortaya çıkar. Bunlar:

f_1) |x – c| > |y| ve |x + c| > |y|⇒ x +y > c ve x +y > -c olduğundan,

$$||x-c| - |x+c|| = 2a$$
$$|x-c-x-c| = 2a$$
$$c=a$$

Hiperbolde c≠a olduğundan bu durumda çözüm yoktur.

f_2) |x – c| > |y| ve |x + c| < |y|⇒ x +y > c ve x +y > -c olduğundan,

Bu bölgeyi sağlayan noktalar bulunmadığından çözüm kümesi boş kümedir.

f_3) |x – c| < |y| ve |x + c| > |y|⇒ x +y < c ve x +y > -c olduğundan,

$$||y|- |x+c||=2a$$
$$|- y - x - c |=2a$$

Mutlak değer tanımından iki durum ortaya çıkar.

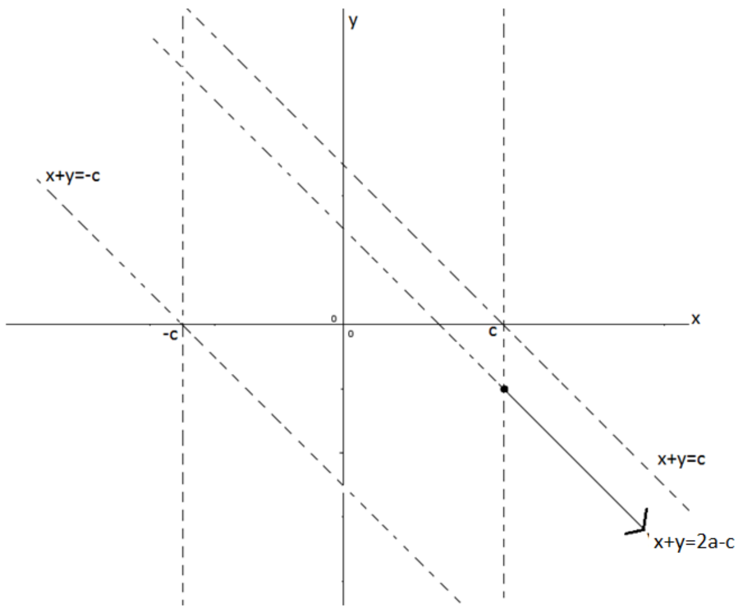
i) $-y \geq x + c \Rightarrow x+y \leq -c$ olduğundan,

Bu durum f_3 şartı ile çeliştiğinden çözüm kümesi boş kümedir.

ii) $-y < x + c \Rightarrow x + y > -c$ olduğundan,

$$|- y - x - c | = 2a$$
$$- y - x - c = -2a$$
$$x + y = 2a - c$$

dir (Şekil 5.3.11).



Şekil 5.3.11 $F_1 \neq F_2$ ve $a \neq 0$ için 6. bölgedeki M-merkezil hiperbolü

f_4) $|x - c| < |y|$ ve $|x + c| < |y| \Rightarrow x + y < c$ ve $x + y < -c$ için,

$$||y| - |y||= 2a$$
$$0 = 2a$$

$a > 0$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

f_5) $|x - c| = |y|$, $|x + c| < |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y < -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

f_6) $|x - c| = |y|$, $|x + c| > |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y > -c$ olduğundan,

$|\,|x - c| - |x + c|\,| = 2a$ ile $|\,|y| - |x + c|\,| = 2a$ denklemlerinin ortak çözümü yapılmalıdır. Bu denklemlerin ortak çözümü olmadığından bu bölge için çözüm kümesi boş kümedir.

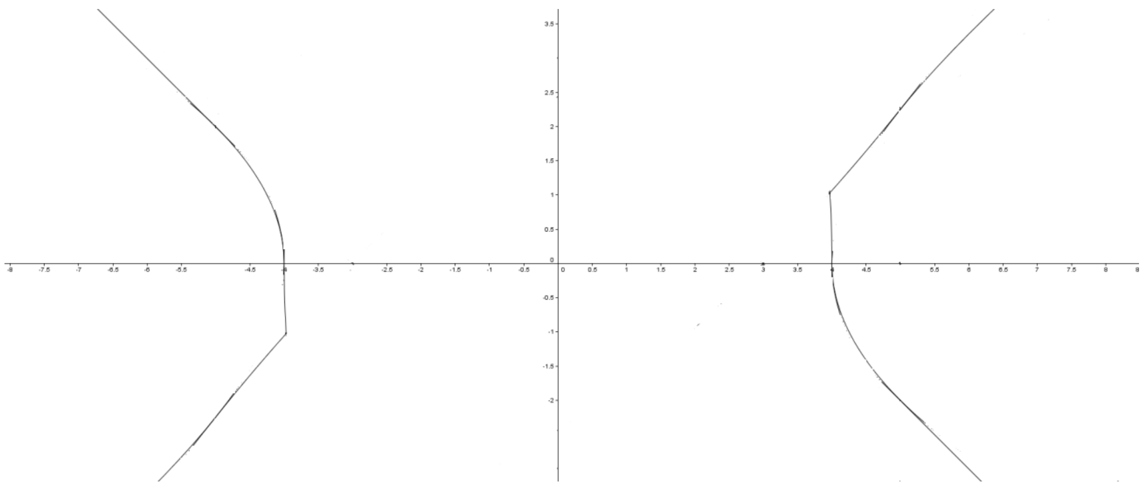
f_7) $|x - c| > |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y > c$ ve $x + y = -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

f_8) $|x - c| < |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y < c$ ve $x + y = -c$ olduğundan,

$|\,|y| - |x + c|\,| = 2a$ ile $|\,|y| - |y|\,| = 2a$ denklemlerinin ortak çözümü yapılmalıdır. Bu denklemlerin ortak çözümü olmadığından bu bölge için çözüm kümesi boş kümedir.

f_9) $|x - c| = |y|$, $|x + c| = |y|$ için $x + y = c$ ve $x + y = -c$ olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

Tüm bu durumların sonucunda a, b, c, d, e, f seçenekleri birleştirildiğinde aşağıdaki şekil ortaya çıkar (Şekil 5.3.12).



Şekil 5.3.12 $F_1 \neq F_2$ ve $a \neq 0$ için M-merkezil hiperbolü

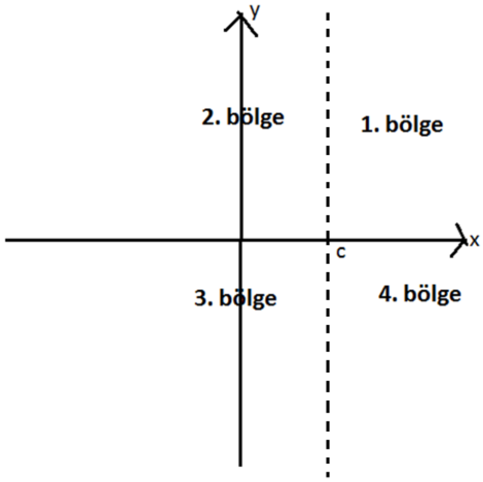
Tablo 5.3.1 Farklı durumlarda M-merkezil hiperbolü incelemeleri

Farklı Durumlarda M-Merkezil Hiperbolü İncelemeleri		
$F_1=F_2$	$a = 0$	R^2 düzlemi
	$a \neq 0$	Boş Küme
$F_1 \neq F_2$	$a = 0$	İki Öklid parabol parçası ve kesişen iki doğru arasında kalan iki bölge.
	$a \neq 0$	Altı Öklid parabol parçası, iki ışın ve iki Öklid hiperbol parçasından oluşan eğri.

5.4 M-Merkezil Parabolü

Bu bölümde Tanım 2.1.9 daki parabolün tanımı göz önünde bulundurularak d_m metriğine göre M-Merkezil parabolleri incelenmiştir.

$x = -c$ doğrusuna ve $F(c, 0)$ noktasına eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri kolları sağa doğru olan M-Merkezil parabolüdür. Bu parabolle ilgili incelemeler aşağıdaki şekilde belirtilen bölgeler için yapılmıştır (Şekil 5.4.1).



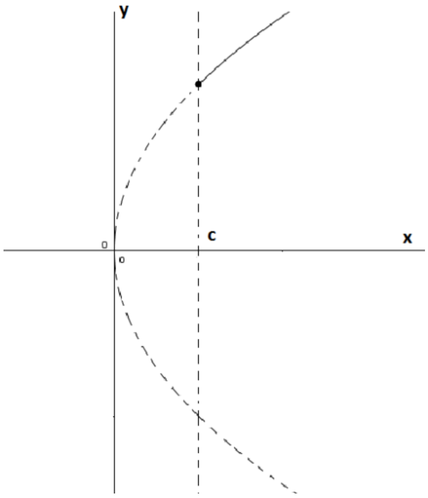
Şekil 5.4.1 M-merkezil parabolü için düzlemin bölgeleri

a) x ≥ c ve y ≥ 0 (1. Bölge)

1. bölgede x ≥ c ve y ≥ 0 için herhangi bir P(x, y) noktasının x = -c doğrusuna uzaklığı| |x + c| dir.

$$|x + c| = d_m(F, P)$$
$$|x + c| = d_E(F, P)$$
$$x + c = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$
$$y^2 = 4xc$$

Öklid merkezil parabolü çıkar.



Şekil 5.4.2 1. bölgedeki M-merkezil parabolü

b) $x \leq c$ ve $y \geq 0$ (2. Bölge)

2. bölgede $x \leq c$ ve $y \geq 0$ için herhangi bir P(x, y) noktasının x = -c doğrusuna uzaklığı,

$$| x + c|$$

dir.

$$|x + c| = d_{m}(F, P)$$
$$|x + c| = d_M(F, P)$$
$$x + c = \max\{|x - c|, |y|\}$$

Maksimum metriğinden dolayı buradan iki farklı durum ortaya çıkar.

b_1) $| x - c| > |y| \Rightarrow x + y < c$ olduğundan,

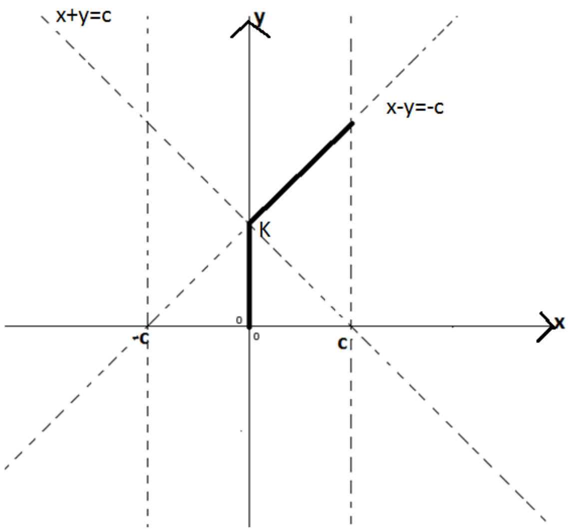
$$x + c = - x + c$$
$$x = 0$$

b_2) $| x - c| < |y| \Rightarrow x + y > c$ olduğundan,

$$x - y = -c$$

b_3) $| x - c| = |y| \Rightarrow x + y = c$ olduğundan,

Bu durumda x = 0 ile x – y = -c denklemlerinin ortak çözümü olan K (0 , c) noktası çözümdür (Şekil 5.4.3).



Şekil 5.4.3 2. bölgedeki M-merkezil parabolü

c) x ≤ c ve y ≤ 0 (3. Bölge)

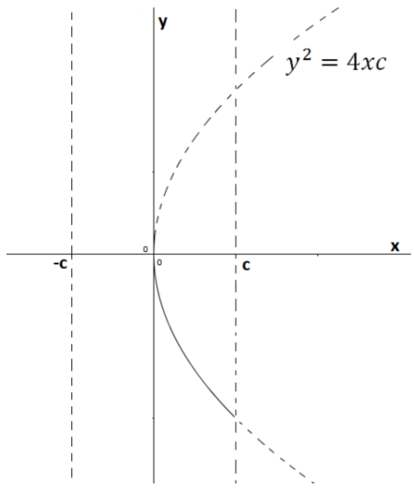
3. bölgede x ≤ c ve y ≤ 0 için herhangi bir P(x, y) noktasının x = -c doğrusuna uzaklığı,

$$| x + c|$$

dir.

$$|x + c| = d_m(F, P)$$
$$|x + c| = d_E(F, P)$$
$$x + c = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$
$$y^2 = 4xc$$

Öklid merkezil parabolü çıkar.



Şekil 5.4.4 3. bölgedeki M-merkezil parabolü

d) x ≥ c ve y ≤ 0 (4. Bölge)

4. bölgede x ≥ c ve y ≤ 0 için herhangi bir P(x, y) noktasının x = -c doğrusuna uzaklığı,

$$| x + c|$$

dir.

$$|x + c| = d_M(F, P)$$
$$|x + c| = d_M(F, P)$$
$$x + c = \max\{|x - c|, |y|\}$$

Buradan iki farklı durum ortaya çıkar.

d_1) | x – c| > |y| ⇒ x + y > c olduğundan,

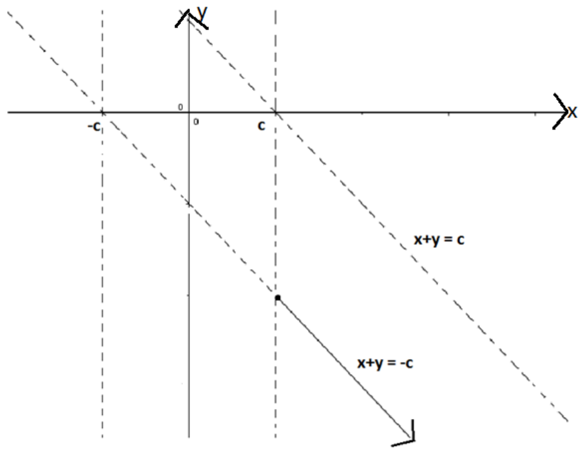
$$x + c = x - c$$
$$c = 0$$

c > 0 olduğundan çözüm kümesi boş kümedir.

d_2) | x – c| < |y| ⇒ x + y < c olduğundan,

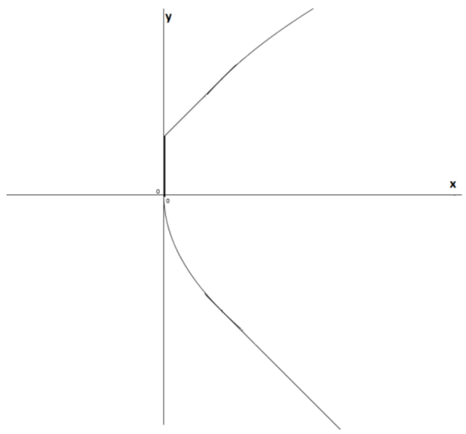
$$x + c = -y$$
$$x + y = -c$$

d_3) | x – c| = |y| ⇒ x + y = c olduğundan, x + c = |x – c| ile x + c = |y| denklemlerinin ortak çözülmesi gerekir. Bu denklemlerin ortak çözümü olmadığından bu durum için çözüm kümesi boş kümedir.



Şekil 5.4.5 4. bölgedeki M-merkezil parabolü

a, b, c, d seçenekleri değerlendirildiğinde aşağıdaki şekil ortaya çıkar (Şekil 5.4.6).



Şekil 5.4.6 M-merkezil parabolü

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde farklı bir metrikte bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı, M-merkezil çemberi, M-merkezil elipsi, M-merkezil hiperbolü, M-merkezil parabolü incelenmiştir. Bu incelemeler koniklere farklı bir bakış oluşturmuştur. Bu incelemelerin sonucunda M-merkezil koniklere ait oluşturulan şekillerin orijine göre simetrik parçalardan oluştuğu görülmüştür.

Ayrıca uygun öteleme ve dönme dönüşümleri kullanılarak M-merkezil olmayan çember, elips, hiperbol ve parabol çizimleri oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

Çaputcu, H. (2011). Maksimum Metriği Geometrisinde Bazı Öklid Problemlerinin Benzerleri. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Krause,E.F. (1975). Taxicab Geometry, Addison-Wesley, Menlo Park.

Martin, G.E. (1998). The Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane. Springer, New York, U.S.A.

Salihova, S. (2006). Maksimum Metriğinin Geometrisi Üzerine. Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Senlin, W. , Donghai, J. , Alonso, J. (2005). Metric Ellipses in Minkowski Planes. *Extracta Mathematicae*,**20**(3): 273-280

Turan, M. (2004). Çin Dama Konikleri Üzerine. Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Türk, R. (2010). Nötral ve Nötral Olmayan Öklid Geometrisi Üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sabiha ŞİMŞEK

Doğum Yeri ve Tarihi : Denizli, 17.10.1977

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Telefon/e-posta) : sabihasimsek@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Adıyaman Anadolu Öğretmen Lisesi, 1995

Lisans : 19 Mayıs Üniversitesi Matematik Öğretmenliği,1999

Yüksek Lisans :

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :Bolvadin Anadolu Öğretmen Lisesi(1999-2005)
Denizli Erbakır Fen Lisesi (2005-)

Yayınları (SCI ve diğer) :

Diğer konular