YARIDEĞİŞMELİ HALKALAR ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Begüm YENER (HİÇYILMAZ)

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2017

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

YARIDEĞİŞMELİ HALKALAR ÜZERİNE

Begüm YENER (HİÇYILMAZ)

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2017

TEZ ONAY SAYFASI

Begüm YENER (HİÇYILMAZ)tarafından hazırlanan "Yarıdeğişmeli Halkalar Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca ../../.. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği/oy çokluğu** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Başkan : Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN

Üye : Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ

Üye : Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/06/2017

Begüm YENER (HİÇYILMAZ)

ÖZET

Doktora Tezi

YARIDEĞİŞMELİ HALKALAR ÜZERİNE

Begüm YENER (HİÇYILMAZ)

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramların tanımları ve bazı teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümünde yarıdeğişmeli halkalar tanıtılarak özellikleri incelenmiş, diğer halka sınıfları ile ilişkileri araştırılmış ve bir halkanın yarıdeğişmeli olması için bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Dördüncü kısmında bazı genişletilmiş yarıdeğişmeli halka sınıfları tanımlanarak özellikleri incelenmiştir. Son olarak beşinci kısımda, Skew polinom halkasının yarıdeğişmeliliği incelenmiş ve skew polinom halkası yarıdeğişmeli olan halka örneklerine yer verilmiştir.

2017, v+94 sayfa

Anahtar Kelimeler : Yarıdeğişmeli halka, Güçlü yarıdeğişmeli halka, Güçlü α-yarıdeğişmeli halka, α-yarıdeğişmeli halka, Matris halkası, Polinom halkası, Skew polinom halkası, Laurent polinom halkası.

ABSTRACT

PhD Thesis

ON SEMICOMMUTATIVE RINGS

Begum YENER (HICYILMAZ)

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Fatma KAYNARCA

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter introduces with the preliminaries, definitions and necessary theorems that will be required for later use. In the third chapter, semicommutative rings are introduced and properties of semicommutaive rings and the relationships between other rings are investigated. In the fourth chapter some extended semicommutative ring classes are introduced and properties of extended rings are investigated. Finally, the semicommutative property of skew polynomial ring is investigated and give examples rings whose skew polynomial ring is semicommutative.

2017, v+94 pages

Key Words : Semicommutative ring, Strongly semicommutative ring, , Strongly α-semicommutative ring, α-semicommutative ring, Matrix ring, Polynomial ring, Skew polynomial ring, Laurent polynomial ring,

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA'ya, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Muhittin BAŞER'e, Sayın Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ'ye, Sayın Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN'a, Sayın Doç. Dr. Pınar AYDOĞDU'ya ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU'ya, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca bana olan desteklerinden dolayı aileme ve eşime teşekkür ederim.

Begüm YENER (HİÇYILMAZ)

AFYONKARAHİSAR, 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

α	R'nin bir endomorfizması
$\bar{\alpha}$	R'nin bir α endomorfizmasının genişletilmişi
$D = R \times S$	R ile S'nin Dorroh genişlemesi
E_{ij}	Matris birimleri
$l_R(X)$	X'in sol sıfırlayanı
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası
M_R	Sağ R modül
$nil(R)$	R'nin sıfırüslü elemanlarının kümesi
$r_R(X)$	X'in sağ sıfırlayanı
R	Herhangi bir halka
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[\mid x \mid]$	R üzerindeki formal kuvvet seriler halkası
$R[x;\alpha]$	R'nin skew polinom halkası
$R[\mid x;\alpha \mid]$	R üzerindeki skew kuvvet seriler halkası
$R[x;x^{-1}]$	R üzerindeki Laurent polinomlar halkası
$T(R,M) = R(+)M$	R halkasının M modülü ile aşikar genişlemesi
$UTM_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası

1 GİRİŞ

Yarıdeğişmeli halka kavramı ilk olarak Shin (1973) tarafından halka teori alanına kazandırılmıştır. Genel olarak bir halkanın sağ sıfırlayanı o halkanın bir sağ idealidir fakat sol ideali olmak zorunda değildir. Benzer durum sol sıfırlayan için de geçerlidir. Dolayısıyla bir halkanın sağ/sol sıfırlayanı o halkanın bir ideali olmak zorunda değildir. Bu nedenle yarıdeğişmeli halka sınıfının tanımlanması doğal olarak ortaya çıkmıştır.

Yarıdeğişmeli halka kavramı farklı yazarlar tarafından farklı isimler adı altında çalışılmıştır. İlk olarak Bell (1970); I bir R halkasının bir ideali ve $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in I$ iken $aRb \subseteq I$ oluyorsa I idealinin IFP'ye (Insertion-of-Factors-Principle) sahip olduğunu söylemiştir. R halkasının sıfır ideali IFP'ye sahipse R halkası IFP halka olarak adlandırılmıştır. IFP halka sınıfını başka bir isim altında Shin (1973) incelemiştir. Shin (1973); bir R halkasının her bir a elemanının sağ sıfırlayanı R'nin iki yanlı bir ideali oluyorsa R halkasını SI özelliğine sahip olarak adlandırmıştır. Ancak Narbonne (1982) IFP'ye (SI özelliğine) sahip halkaları yarıdeğişmeli (semicommutative) olarak adlandırmıştır. Bu halkaları Habep (1990) zero insertive (zi) adı altında incelemiştir.

Shin (1973); bir R halkasının yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşulun $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $aRb = 0$ olması ve bunun için gerek ve yeter koşulun R üzerindeki herhangi bir sağ sıfırlayanın bir ideal olması ve bunun için gerek ve yeter koşulun R üzerindeki herhangi bir sol sıfırlayanın bir ideal olması gerektiğini ifade etmiştir. Yarıdeğişmeli olan ve olmayan halka örnekleri Shin (1973), Kim ve Lee (2003), Huh vd. (2002), Başer ve Agayev (2006) tarafından yapılan çalışmalarda yer almıştır.

Yarıdeğişmeli halkalarla ilişkili olan bazı halka sınıfları farklı yazarlar tarafından tanımlanıp aralarındaki bağlantılar araştırılmıştır. Cohn (1999); $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa R halkasını terslenebilir (reversible) olarak adlandırmıştır. Yarıdeğişmeli halkalar terslenebilir halkaları kapsar fakat terslenebilir olup yarıdeğişmeli olmayan halka örnekleri mevcuttur. Bu iki halka sınıfının kapsadığı bir diğer halka sınıfı ise simetrik halkalardır. Lambek (1971) $a, b, c \in R$ olmak üzere $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa R halkasını simetrik (symmetric) olarak adlandırmıştır. Açık olarak simetrik halkalar terslenebilir ve böylece yarıdeğişmelidirler. Fakat bu ifadenin karşıtı doğru değildir. Sıfırdan farklı sıfırüslü eleman bulundurmayan halkalar ise inmiş olarak adlandırılır. İnmiş halkalar; simetrik, terslenebilir ve yarıdeğişmeli halkalar tarafından kapsanan bir halka sınıfıdır. Diğer taraftan Abelyan (yani; her eşkaresi merkezi olan) halkalar ise yarıdeğişmeli halkaları kapsar.

Tez çalışmasının 3. bölümünde Bell (1970), Shin (1973), Huh vd. (2002), Kim ve Lee (2003), Gang (2007) ve Wang (2008) tarafından yapılan çalışmalar temel alınarak yarıdeğişmeli halka sınıfının bazı özelliklerine yer verilmiştir.

Tez çalışmasının 4. bölümünde yarıdeğişmeli halkaların bazı genişlemeleri tanıtılmıştır. İlk olarak Liang vd. (2007), yarıdeğişmeli halkaların bir genişlemesi olan zayıf yarıdeğişmeli halkaları tanımlamışlardır. Bu çalışmada; $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken herhangi bir $r \in R$ için arb; R'nin bir sıfırüslü elemanı oluyorsa R halkası zayıf yarıdeğişmeli (weakly semicommutative) olarak adlandırılmıştır. Yarıdeğişmeli halkaların zayıf yarıdeğişmeli olduğu açıktır. Ayrıca zayıf yarıdeğişmeli bir halka üzerinde bazı özel tipteki matris halkalarının zayıf yarıdeğişmeli olduğu gösterilmiş ve bu halka sınıfının özellikleri incelenmiştir.

α-katı halkaların bir genellemesi ve yarıdeğişmeli halkaların bir genişlemesi olan diğer bir halka sınıfını Başer vd. (2008) bir R halkasının bir α endomorfizmasını kullanarak tanımlamışlar ve bu halkaları α-yarıdeğişmeli halka olarak adlandırmışlardır. Bu çalışmada: $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $aR\alpha(b) = 0$ oluyorsa R halkası α-yarıdeğişmeli (α-semicommutative) olarak adlandırılmıştır. R yarıdeğişmeli iken I_R; R'nin birim endomorfizması olmak üzere R'nin I_R-yarıdeğişmeli olduğu açıktır. Ayrıca Başer vd. (2008) α-yarıdeğişmeli halka karakterizasyonlarını ve özelliklerini incelemişler ve genişletilmiş Armendariz halkalarla arasındaki ilişkileri araştırmışlardır. Başer ve Kwak (2010) bir halkanın α-yarıdeğişmeli olma özelliğinin halkanın bazı genişlemelerine taşınıp taşınmadığını araştırmışlardır.

Tez çalışmasının 4. bölümünün 3. kısmında halkanın sıfırüslü elemanlarının kümesi yardımıyla tanımlanan nil-yarıdeğişmeli halkalar tanıtılacaktır. Bu kısımda Chen

(2011), Mohammadi vd. (2012), Qu ve Wei (2014) tarafından yapılan çalışmalar temel alınacaktır. Chen (2011); $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in nil(R)$ iken $aRb \subseteq nil(R)$ oluyorsa R halkasını nil-yarıdeğişmeli (nil-semicommutative) olarak adlandırmış ve özelliklerini incelemiştir. Mohammadi vd. (2012) her $a, b \in nil(R)$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ oluyorsa R halkasını nil-yarıdeğişmeli (nil-semicommutative) olarak adlandırmışlar ve özelliklerini incelemişlerdir. Qu ve Wei (2014) ise Chen (2011)'in tanımladığı nil-yarıdeğişmeli halkaların bazı özelliklerini ve diğer halka sınıflarıya ilişkilerini incelemişlerdir.

Yarıdeğişmeli halkaların bir başka genişlemesi olan ve Wang ve Wei (2014)'nin çalışmalarında tanımlanan merkezil yarıdeğişmeli halkalar 4. bölümün 5. kısmında sunulacaktır. Wang ve Wei (2014) $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken herhangi $r \in R$ için arb; R'nin merkezinde oluyor ise R halkasını merkezil yarıdeğişmeli (central semicommutative) olarak adlandırmışlardır. Bu kısımda merkezil yarıdeğişmeli halkaların özellikleri ve diğer halka sınıflarıyla ilişkileri incelenmiştir.

Huh vd. (2002) tarafından yapılan çalışmalar gereğince bir R halkası yarıdeğişmeli iken $R[x]$ polinom halkası yarıdeğişmeli olmak zorunda değildir. Fakat Armendariz olma koşulu altında R'nin yarıdeğişmeli olma özelliği $R[x]$ polinom halkasına taşınmaktadır. Bundan dolayı Kwak vd. (2012) polinom halkası yarıdeğişmeli olan bir halkayı kuvvetli yarıdeğişmeli (strongly IFP) olarak adlandırmışlardır ve özelliklerini incelemişlerdir. 4. bölümün son kısmında bu halka sınıfı tanıtılarak özelliklerine yer verilecektir.

5. bölüm tez çalışmasının orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde Başer vd. (2015) tarafından elde edilen sonuçlar ayrıntılı biçimde sunulacaktır. Bir halka yarıdeğişmeli iken onun skew polinom halkasının yarıdeğişmeli olmadığını gösteren örnekler bulunmaktadır. α; bir R halkasının herhangi bir endomorfizması olmak üzere $R[x; \alpha]$ skew polinom halkası yarıdeğişmeli olan R halkası güçlü α-yarıdeğişmeli (strongly α-IFP) olarak adlandırılır. Güçlü α-yarıdeğişmeli halkaların; yarıdeğişmeli, α-yarıdeğişmeli, güçlü α-terslenebilir, α-skew McCoy ve genişletilmiş Armendariz halkalarla ilişkileri incelenmiştir. Bundan başka bu bölümde güçlü α-yarıdeğişmeli halka örneklerine yer verilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilecek ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan bazı halka sınıfları tanıtılacaktır. Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe R birimli bir halkayı gösterecektir. Halkanın toplamaya göre etkisiz elemanı 0 ve çarpımsal birimi 1 ile gösterilecektir. Bu bölümdeki temel kaynakları Hungerford (1974), Anderson ve Fuller (1974) ve Lam (2001) tarafından yapılan çalışmalar oluşturacaktır.

2.1 Genel Tanımlar

Tanım 2.1.1 Bir R halkasında sıfırdan farklı bir a elemanına; $ab = 0$ (sırasıyla $ba = 0$) olacak şekilde sıfırdan farklı bir b elemanı varsa sırasıyla bir *sol* (sırasıyla *sağ*) *sıfır bölen* denir. R'nin bir elemanı hem sol hem de sağ sıfır bölen ise bu eleman *sıfır bölen* olarak adlandırılır. Sıfır bölen içermeyen birimli bir halkaya *bölge* (domain) denir. $1_R \neq 0_R$ olmak üzere değişmeli olan bir bölge, *tamlık bölgesi* (integral domain) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2 M bir sol R-modül, $X \subseteq M$ ve $A \subseteq R$ olsun.

$$l_R(X) = \{r \in R : rx = 0 \ \ (x \in X)\}$$

kümesine R'de X'in sol sıfırlayanı (left annihilator) denir.

$$r_M(A) = \{x \in M : ax = 0 \ \ (a \in A)\}$$

kümesine M'de A'nın sağ sıfırlayanı (right annihilator) denir (Anderson and Fuller 1974).

2.2 Halka Genişlemeleri

Tanım 2.2.1 R bir halka ve I, R'nin bir ideali olmak üzere $R/I = \{r + I : r \in R\}$ kümesi

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

$$(a + I)(b + I) = (ab) + I$$

işlemleriyle bir halkadır. Bu halkaya R'nin I idealine göre *bölüm halkası* denir. $r \in R$ olmak üzere $\pi(r) = r + I$ ile tanımlı $\pi : R \to R/I$ dönüşümü bir homomorfizmadır. π'ye *kanonik epimorfizma* (projeksiyon) denir. Bundan dolayı R/I bölüm halkası R'nin bir homomorfik görüntüsüdür. I; R'nin $\alpha(I) \subseteq I$ olacak şekilde bir ideali ve $a \in R$ olmak üzere R halkasının bir α endomorfizması; $\bar{\alpha}(a + I) = \alpha(a) + I$ ile tanımlanarak bir R/I homomorfik görüntüsünün bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.2.2 $\{R_i : i \in I\}$ halkaların boştan farklı bir ailesi olmak üzere; $\{a_i\}_{i\in I}, \{b_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} R_i$ için;

$$\{a_i\}_{i\in I} + \{b_i\}_{i\in I} = \{a_i + b_i\}_{i\in I}$$

$$\{a_i\}_{i\in I}\{b_i\}_{i\in I} = \{a_i b_i\}_{i\in I}$$

işlemleri tanımlansın. Bu işlemlerle birlikte $\prod_{i\in I} R_i$ kümesine R_i'lerin *dış direkt çarpımı* denir. Her bir $i \in I$ için $a_i \in R_i$ olmak üzere, R_i halkalarının α_i endomorfizmaları; $\bar{\alpha}(\{a_i\}_{i\in I}) = \{\alpha_i(a_i)\}_{i\in I}$ biçiminde tanımlanarak $\prod_{i\in I} R_i$'nin bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.2.3 R bir halka ve ${}_RM_R$ bir bimodül olsun. R'nin M ile *aşikar genişlemesi* (trivial extension) olarak adlandırılan $R \oplus M$ kümesi;

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

ile tanımlanan işlemlerle birlikte bir halkadır. Bu halka $T(R, M)$ (ya da $R(+)M$) ile gösterilir. Bu halka aynı zamanda $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ formundaki tüm matrislerin halkasına izomorftur. Yani

$$T(R, M) \cong \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R, m \in M \right\}$$

olur. $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \in T(R, M)$ olmak üzere R'nin bir α endomorfizması

$$\bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(r) & m \\ 0 & \alpha(r) \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanarak $T(R, M)$'nin bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.2.4 R, değişmeli bir S halkası üzerinde bir cebir olsun. $r_i \in R$ ve $s_i \in S$ olmak üzere $R \oplus S$ kümesi;

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1, s_1 s_2)$$

işlemleriyle birlikte bir halkadır. Bu kümeye *R'nin S ile Dorroh genişlemesi* (Dorroh extension) denir ve D ile gösterilir. R'nin bir α S-endomorfizması; $(r, s) \in D$ olmak üzere $\bar{\alpha}(r, s) = (\alpha(r), s)$ biçiminde tanımlanarak D'nin bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilir.

Tanım 2.2.5 R bir halka olmak üzere sonlu sayıdaki i dışında $a_i = 0$ olacak şekildeki tüm $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ elemanlarının kümesi $R[x]$ olsun. $R[x]$'in elemanlarına polinom denir. $R[x]$ kümesi

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) + (b_0, b_1, \ldots, b_n) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} = a_{n-i} b_i = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j$$

olmak üzere

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n)(b_0, b_1, \ldots, b_n) = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$$

işlemleriyle birlikte bir halkadır. Bu halkaya R'nin *polinomlar halkası* denir. R halkasının $(0, 1, 0, \ldots)$ elemanı x ile gösterilmek üzere R'de bir $(a_0, a_1, \ldots)$ elemanı $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ biçiminde de gösterilebilir. R halkası birimli ise, $x^0 = 1_R$ olup $R[x]$'de bir f polinomu

$$f = (a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

ile gösterilir. $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ olmak üzere R halkasının bir α endomorfizması,

$$\bar{\alpha}(f(x)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(a_i) x^i$$

biçiminde tanımlanarak $R[x]$ polinom halkasının bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.2.6 R bir halka olmak üzere tüm $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ dizilerinin kümesi $R[[x]]$ olsun. $R[[x]]$ kümesi; polinomların toplamı ve çarpımı işlemleriyle birlikte bir halkadır. Bu halkaya R'nin *formal kuvvet seriler halkası* denir. $R[[x]]$'in bir $(a_0, a_1, \ldots)$ kuvvet serisi $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ formal toplamı ile gösterilir. R halkasının bir α endomorfizması; $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$ olmak üzere

$$\bar{\alpha}(f(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(a_i) x^i$$

biçiminde tanımlanarak $R[[x]]$ formal kuvvet seriler halkasının bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.2.7 R bir halka olmak üzere

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i : a_i \in R \;\; : \;\; k, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır ve bu halka *Laurent polinomlar halkası* olarak adlandırılır. $f(x) = \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \in R[x; x^{-1}]$ olmak üzere R halkasının bir α endomorfizması

$$\bar{\alpha}(f(x)) = \sum_{i=k}^{n} \alpha(a_i) x^i$$

biçiminde tanımlanarak $R[x; x^{-1}]$ Laurent polinom halkasının bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

Tanım 2.2.8 R bir halka α, R'nin bir monomorfizması olsun.$R[x, x^{-1}; \alpha]$ skew Laurent polinomlar halkasının bir altkümesi

$$A(R, \alpha) = \{x^{-i} r x^i \quad : \quad r \in R \;\text{ ve }\; i \geq 0\}$$

olsun. $j \geq 0$ için $x^j r = \alpha^j(r) x^j$ iken $r \in R$ için $r x^{-j} = x^{-j} \alpha^j(r)$ olduğu gözönüne alınarak her bir $j \geq 0$ için $x^{-i} r x^i = x^{-(i+j)} \alpha^j(r) x^{i+j}$ olur. $A(R, \alpha)$ kümesi $r, s \in R$ ve $i, j \geq 0$ olmak üzere,

$$x^{-i} r x^i + x^{-j} s x^j = x^{-(i+j)} (\alpha^j(r) + \alpha^i(s)) x^{i+j}$$

$$(x^{-i} r x^i)(x^{-j} s x^j) = x^{-(i+j)} (\alpha^j(r) \alpha^i(s)) x^{i+j}$$

ile tanımlanan işlemlerle birlikte $R[x, x^{-1}; \alpha]$'nın bir alt halkası formundadır. $A(R, \alpha)$ kümesi R'nin bir üst halkasıdır ve $\alpha(x^{-i}rx^i) = x^{-i}\alpha(r)x^i$ olmak üzere α, $A(R, \alpha)$'nın bir otomorfizmasıdır. Jordan (1982) $R[x; \alpha]$ skew polinom halkasının x'in kuvvetlerinin kümesine göre sol lokalizasyonunun kullanılarak herhangi bir (R, α) çifti için böyle bir $A(R, \alpha)$ genişlemesinin her zaman var olduğunu göstermiştir. Bu $A(R, \alpha)$ halkasına *R'nin α ile Jordan genişlemesi* (Jordan extension) denir. α'nın $A(R, \alpha)$'ya genişletilmişi α'nın kendisidir (Jordan 1982).

Tanım 2.2.9 R bir halka ve α, R'nin bir endomorfizması olsun. Bir $\delta : R \longrightarrow R$ toplamsal dönüşümü; her $a, b \in R$ için

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$$

özelliğini sağlarsa, δ'ya R'nin bir *α-türevi* (α-derivation) denir.

Tanım 2.2.10 R bir halka; α, R'nin bir endomorfizması ve δ, R'nin bir α-türevi olsun. $R[x; \alpha, \delta]$ kümesi polinomlardaki bilinen toplama işlemi ve $a \in R$ olmak üzere

$$xa = \alpha(a)x + \delta(a)$$

ile tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte R üzerindeki polinomların bir halkasıdır. Bu halkaya *R'nin Ore genişlemesi* denir. Eğer δ, R'nin sıfır endomorfizması ise, $R[x; \alpha, 0]$ yerine $R[x; \alpha]$ yazılır ve bu halka *endomorfizma tipinin bir Ore genişlemesi* (ya da *skew polinom halkası*) olarak adlandırılır. Diğer bir ifadeyle $R[x; \alpha]$ kümesi polinomlardaki bilinen toplama işlemi ve

$$xa = \alpha(a)x$$

ile tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte R üzerindeki polinomların bir halkasıdır. $R[[x; \alpha]]$ halkası ise *skew kuvvet seriler halkası* olarak adlandırılır. Özel olarak α, R'nin birim endomorfizması ve δ, R'nin sıfır endomorfizması olarak alınırsa $R[x; I_R, 0] = R[x]$ olacağı açıktır.

R halkasının bir α endomorfizması; $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x; \alpha, \delta]$ olmak üzere

$$\bar{\alpha}(f(x)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(a_i)x^i$$

biçiminde tanımlanarak $R[x;\alpha,\delta]$ Ore genişlemesinin bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir. Benzer olarak R'nin bir α endomorfizması $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x;\alpha]$ olmak üzere

$$\bar{\alpha}(f(x)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(a_i)x^i$$

biçiminde tanımlanarak $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

2.3 Matris Halkaları

Bu bölümde bir R halkası yardımıyla tanımlanan bazı özel tipteki matris halkalarının tanıtımına yer verilecektir.

Tanım 2.3.1 R bir halka olmak üzere R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi, matrislerdeki toplama ve çarpma işlemlerine göre toplamsal birimi

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

sıfır matrisi, çarpımsal birimi ise

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

birim matris olan bir halkadır. R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası

$$M_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \; : \; a_{ij} \in R \right\} = \{[a_{ij}] \; : \; a_{ij} \in R\}$$

ile gösterilecektir. R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm üst üçgensel matrislerin halkası ise

$$UTM_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \ : \ a_{ij} \in R \right\}$$
$$= \{[a_{ij}] \ : \ a_{ij} \in R \ \text{ ve } \ i > j \ \text{ iken } \ a_{ij} = 0\}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.2 Herhangi bir R halkası üzerinde i. satır j. sütunundaki bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan matrislere *matris birimleri* (matrix units) denir ve E_{ij} ile gösterilir. Örneğin herhangi bir R halkası üzerindeki tüm 2×2 tipindeki matris birimleri

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

Tanım 2.3.3 Üst üçgensel matrisler halkasının bir alt halkası olan $S_n(R)$ halkası ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \ : \ a, a_{ij} \in R \right\}$$

Tanım 2.3.4 Pozitif bir $n \geq 2$ tam sayısı için ;

$$U_n(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} RE_{i,j} + \sum_{j=k+2}^{n} RE_{k+1,j} + RI_n$$

olarak tanımlanır. Burada $k = [n/2]$' dir. Örneğin ;

$$U_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in R \right\}$$

$$U_4(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & b & c\\ 0 & a & d & e\\ 0 & 0 & a & f\\ 0 & 0 & 0 & a\end{pmatrix} : a,b,c,d,e,f\in R\right\}$$

$$U_5(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & a & b & c\\ 0 & a & d & e & f\\ 0 & 0 & a & g & h\\ 0 & 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a\end{pmatrix} : a,b,c,d,e,f,g,h\in R\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $n=3$ ise $U_3(R)=S_3(R)$ olduğu açıkça görülmektedir.

Tanım 2.3.5 R herhangi bir halka ve $a_h,\bar{a}_g,a_{i,j}\in R$ olmak üzere

$$S_n^k(R)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n}\\ 0 & a_1 & \ddots & & a_{k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 & a_{k-1,k+1} & \dots & a_{k-1,n-1} & a_{k-1,n}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 & \bar{a}_2 & \dots & \bar{a}_{n-k} & \bar{a}_{n-k+1}\\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & \ddots & & \bar{a}_{n-k}\\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & a_1 & \bar{a}_2\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1\end{pmatrix}$$

biçiminde farklı bir matris halkasıda tanımlanabilir.

Tanım 2.3.6 R herhangi bir halka olmak üzere

$$V_n(R)=\left(\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1}\\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2}\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0\end{pmatrix} : a_i\in R\right)$$

ile tanımlanan $V_n(R)$ halkası $UTM_n(R)$'nin özel bir alt halkasıdır.

Tanım 2.3.7 R herhangi bir halka olmak üzere

$$V(R) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} : a_{ij} \in R, 0 \leq i,j \leq 4 \right)$$

ve

$$S(R) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} : a_{ij} \in R, 0 \leq i,j \leq 4 \right)$$

halkaları ise $UTM_4(R)$'nin alt halkaları olarak tanımlanabilir.

Uyarı 2.3.8 R halkasının bir α endomorfizması; $a_{ij} \in R$ olmak üzere

$$\bar{\alpha}([a_{ij}]) = [\alpha(a_{ij})]$$

biçiminde tanımlanarak $M_n(R)$ (ya da $UTM_n(R)$, $S_n(R)$, $U_n(R)$, $S_n^k(R)$) halkalarının bir $\bar{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

2.4 Klasik Sağ Kesirler Halkası

Tanım 2.4.1 R bir halka olsun. $s \in R$ olmak üzere her $0 \neq r \in R$ için $rs \neq 0$ ve $sr \neq 0$ ise s'ye *düzenli* (*regular*) eleman denir. Başka bir ifadeyle bir $r \in R$ için $rs = 0$ veya $sr = 0$ iken $r = 0$ oluyorsa s'ye *düzenli* (*regular*) eleman denir.

Bir halkanın birimi düzenli eleman iken sıfırı düzenli eleman değildir. Ayrıca bir R halkasının tersinir elemanları düzenlidir. Gerçekten; $s \in R$ tersinir olsun. $r \in R$ olmak üzere $rs = 0$ olduğunu kabul edelim. s tersinir olduğundan $rss^{-1} = 0s^{-1}$ olur. Buradan $r = 0$ olup s düzenlidir. Fakat bu ifadenin karşıtı her zaman doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}$ halkasında 2 düzenli eleman fakat tersinir değildir. Bundan başka bir tamlık bölgesinde sıfırdan farklı her eleman düzenlidir.

Tanım 2.4.2 S, R'nin çarpımsal alt monoidi (birimli ve birleşmeli cebirsel yapı) olmak üzere

(i) $\nu : R \to Q$ homomorfizması her $s \in S$ için $\nu(s)$ tersinir olacak şekilde vardır.

(ii) Q'nun her elemanı $s \in S$ ve $r \in R$ için $[\nu(s)]^{-1}\nu(r)$ formundadır.

özellikleri sağlanırsa Q halkasına *R'nin S'ye göre kesirlerinin bir sol halkası* (*left quotient ring*) denir.

Tanım 2.4.3 Aşağıdaki özellikleri sağlayan birimli bir $Q(R)$ halkasına bir R halkasının bir sol kesir halkası denir.

(i) $R \subseteq Q(R)$

(ii) R'nin her düzenli elemanı $Q(R)$'de tersinir bir elemandır.

(iii) $a, b \in R$ ve a düzenli eleman olmak üzere $Q(R)$'nin her c elemanı $c = a^{-1}b$ formundadır.

Lemma 2.4.4 $S = \{r \in R : r \text{ düzenli eleman}\}$ kümesi R'nin bir çarpımsal alt monoididir.

İspat: $r_1, r_2 \in S$ alalım. $r_1r_2 \in S$ yani r_1r_2 düzenli olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $r(r_1r_2) = 0$ olsun. R halkası birleşmeli olduğundan $(rr_1)r_2 = 0$ olup r_2 düzenli eleman olduğundan $rr_1 = 0$'dır. r_1 düzenli eleman olduğundan $r = 0$ bulunur. Benzer olarak $(r_1r_2)r = 0$ olsun. R halkası birleşmeli olduğundan $r_1(r_2r) = 0$ olup r_1 düzenli olduğundan $r_2r = 0$ olur. r_2 düzenli eleman olduğundan $r = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $r_1r_2 \in S$ bulunur. $1_R \in S$ ve S'de birleşme özelliği var olduğundan S, R'nin çarpımsal monoididir.

Tanım 2.4.5 $S = \{r \in R \mid r \text{ düzenli eleman}\}$ olmak üzere birebir olan $\varphi : R \to Q$ dönüşümü varsa Q'ya R'nin *klasik sağ kesirler halkası* (*classical right quotient ring*) denir.

Tanım 2.4.6 S, R'nin bir alt monoidi olsun. Bu durumda

(i) Herhangi $s_1 \in S$ ve $r_1 \in R$ için $s_2 r_1 = r_2 s_1$ olacak şekilde $s_2 \in S$ ve $r_2 \in R$ vardır.

(ii) $r \in R$ ve $s \in S$ için $rs = 0$ ise $s'r = 0$ olacak şekilde $s' \in S$ vardır.

özellikleri sağlanırsa S'ye bir *Dominator* (ya da *Ore*) küme denir.

Önerme 2.4.7 R, S'ye göre kesir halkasına sahipse S bir Ore kümedir.

2.5 Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda yarıdeğişmeli halkalarla ilişkileri olan bazı halka sınıflarının tanımları verilecek ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 2.5.1 Krempa (1996) α bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa α endomorfizmasını *katı* olarak adlandırmıştır. Hong vd. (2000) R halkasının böyle bir α-katı endomorfizması var ise R halkasını *α-katı* olarak adlandırmışlardır.

Tanım 2.5.2 Bir R halkasının bir a elemanı için $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa a elemanı *sıfırüslü* (nilpotent) olarak adlandırılır. Bu özelliği sağlayan en küçük n doğal sayısına da a elemanının *sıfırüslülük indeksi* (nilpotency index) denir. Bir R halkasının her bir elemanı sıfırüslü olan bir N idealine *nil ideal* denir (Lam 2001).

Tanım 2.5.3 Bir R halkasının sıfırdan farklı sıfırüslü elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için $a^2 = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R'ye *inmiş* (reduced) halka denir. İnmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğu açıktır (Lam 2001).

Uyarı 2.5.4 Hong vd. (2000) her α-katı halkanın inmiş olduğunu ifade etmişlerdir. Kabul edelim ki R α-katı ve $a \in R$ olmak üzere $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $0 = a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a))$ olup R α-katı olduğundan $a\alpha(a) = 0$ ve buradan $a = 0$ bulunur. Böylece R inmiştir.

Tanım 2.5.5 $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa R halkası *simetrik* (symetric) olarak adlandırılır (Lambek 1971). Ayrıca Anderson ve Camillo (1999) simetrik halkalar için ZC_3 notasyonunu kullanarak bu halka sınıfının özelliklerini incelemişlerdir.

Uyarı 2.5.6 Shin (1973) her inmiş halkanın simetrik olduğunu ifade etmiştir. $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Bu eşitlik sağdan b ile çarpılırsa $abcb = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $bcba = 0$ bulunur. Son eşitlik sağdan c ile çarpılırsa $bcbac = 0$ elde edilir. R terslenebilir olduğundan $cbacb = 0$ olur. Bu durumda $(cba)^2 = cbacba = 0$ ve R inmiş olduğundan $cba = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $acb = 0$ bulunur. Böylece R simetriktir. Fakat Anderson ve Camillo (1999) simetrik olup, inmiş olmayan halka sınıflarının var olduğunu ifade etmişlerdir. Değişmeli halkaların simetrik olduğu açıktır.

Tanım 2.5.7 Habeb (1990); $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa R halkasını *sıfır değişmeli* (zero commutative) olarak adlandırmıştır. Cohn (1999) bu özelliği sağlayan halkaları *terslenebilir* (reversible) adı altında incelemiştir. Terslenebilir halkalar aynı zamanda Anderson ve Camillo (1999) tarafından *sıfır çarpımlar değişir* (zero products commute) özelliğine sahip halkalar olarak ZC_2 adı altında çalışılmıştır. Ayrıca Krempa ve Niewieczerzal (1977) bu özelliği sağlayan halkalara C_0 *halka* adını vermişlerdir.

Uyarı 2.5.8 Birimli simetrik bir halka terslenebilirdir. Gerçekten; $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $1ab = 0$ olup R simetrik olduğundan $1ba = ba = 0$ elde edilir. Fakat Anderson ve Camillo (1999) ve Marks (2002) bu gerektirmenin karşıtının doğru olmadığını ifade etmişlerdir. Ayrıca halka birimli değil ise bu gerektirme doğru değildir.

Uyarı 2.5.9 Uyarı 2.5.6 ve Uyarı 2.5.8 gereğince R halkası inmiş ise terslenebilirdir.

Tanım 2.5.10 Bir R halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir e elemanına *eşkare* (idempotent) denir. Birimli bir halka her zaman 0 ve 1 eşkare elemanlarına sahiptir. R halkasının bir e eşkare elemanı R'nin merkezinde ise, yani her $a \in R$ için $ae = ea$ oluyorsa e eşkare elemanı *merkezil eşkare* (central idempotent) olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.11 Bir R halkasının tüm eşkare elemanları merkezil ise R halkası *Abelyan* olarak adlandırılır. Terslenebilir halkaların abelyan olduğu açıktır.

Tanım 2.5.12 Bir R halkasının asal radikali R'nin tüm sıfırüslü elemanlarını içeriyorsa R halkası *2-primal* halka olarak adlandırılır (Marks 2003).

Tanım 2.5.13 $a \in R$ için $aRa = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa R halkası *yarıasal* (semiprime) olarak adlandırılır. Yarıasal halkalar sınıfının inmiş halkaların sınıfını kapsadığı açıktır.

Uyarı 2.5.14 Yukarıda tanımları verilen halka sınıfları için aşağıdaki gerektirmeler vardır. Fakat bu gerektirmelerin her birinin karşıtının genelde doğru olmadığını gösteren örnekler mevcuttur.

$$\alpha\text{-katı} \;\Rightarrow\; \text{inmiş} \;\Rightarrow\; \text{simetrik} \;\Rightarrow\; \text{terslenebilir} \;\Rightarrow\; \text{Abelyan}$$

Tanım 2.5.15 R bir halka olmak üzere $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ iken her bir i, j için $a_i b_j = 0$ oluyorsa R halkası *Armendariz* olarak adlandırılır (Rege and Chhawchharia 1997).

Tanım 2.5.16 R bir halka olmak üzere; R halkası Armendariz ve yarıdeğişmeli ise *ideal-Armendariz* olarak adlandırılır. Açık olarak inmiş halkalar ideal-Armendarizdir.

Tanım 2.5.17 Bir R halkası için $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ iken her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_i \alpha^i b_j = 0$ oluyorsa R halkası *α-skew Armendariz* olarak adlandırılır (Hong *et al.* 2003).

Tanım 2.5.18 R bir halka olmak üzere $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ için $f(x)R[x]g(x) = 0$ iken her bir i, j için $a_i R b_j = 0$ oluyorsa R halkası *quasi-Armendariz* olarak adlandırılır (Hirano 2002).

Tanım 2.5.19 R bir halka olmak üzere $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} \in R[x;\alpha]$ için $f(x)R[x;\alpha]g(x) = 0$ iken her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_i R \alpha^i(b_j) = 0$ oluyorsa R halkası *α-skew quasi-Armendariz* olarak adlandırılır (Hong *et al.* 2010).

Tanım 2.5.20 R bir halka olmak üzere R'nin boştan farklı her alt kümesinin sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretiliyorsa, yani her bir $\emptyset \neq X \subseteq R$ alt kümesi için $r_R(X) = eR$ (ya da $l_R(X) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası *Baer* olarak adlandırılır (Kaplansky 1968).

Tanım 2.5.21 R bir halka olmak üzere R'nin her bir temel sağ ideali projektif ya da denk olarak R'nin her bir elemanının sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretiliyorsa, yani her bir $a \in R$ elemanı için $r_R(a) = eR$ (ya da $l_R(a) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası *sağ* $p.p$ (ya da *sol* $p.p$) olarak adlandırılır. R halkası hem sağ $p.p$ hem de sol $p.p$ ise kısaca $p.p$-*halka* olarak adlandırılır.

Baer halkaların $p.p$-halka olduğu açıktır. Bundan başka Abelyan sağ (sol) $p.p$-halkalar inmiş halkalardır.

Tanım 2.5.22 R bir halka olmak üzere $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa $a \in R$ elemanına *von Neumann düzenli* denir. R halkasının her elemanı von Neumann düzenli ise R halkası *von Neumann düzenli* olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.23 McCoy (1942)'un çalışmasında yer alan "değişmeli bir halka üzerinde iki polinom birbirini sıfırlarsa her bir polinom aynı halkada sıfırdan farklı bir sıfırlayana sahiptir " ifadesine dayanarak Nielsen (2006) ve Rege ve Chhawchharia (1997) R değişmeli olmayan bir halka olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı $f(x), g(x) \in R[x]$ polinomları için $f(x)c = 0$ (sırasıyla $cg(x) = 0$) olacak şekilde sıfırdan farklı $c \in R$ varsa R halkasını *sağ McCoy* (sırasıyla *sol McCoy*) olarak adlandırmışlardır. Bir halka hem sağ hem de sol McCoy ise *McCoy* olarak adlandırılır.

3 YARIDEĞİŞMELİ HALKALAR

Genel olarak bir halkanın herhangi bir sağ sıfırlayanı bir sağ idealdir, fakat bir sol ideal olmak zorunda değildir. Benzer durum herhangi bir sol sıfırlayan için de geçerlidir. Bundan dolayı bir halkanın sağ/sol sıfırlayanı o halkanın bir ideali olmak zorunda değildir. Bu özelliğe sahip olan halkaların sınıfına özel bir isim verilmesi sebebiyle yarıdeğişmeli halkaların sınıfı doğal olarak tanımlanmıştır. Yarıdeğişmeli halkalar aşağıda belirtildiği gibi farklı yazarlar tarafından farklı isimler altında çalışılmıştır.

- Bell (1970); I bir R halkasının bir ideali ve $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in I$ iken $aRb \subseteq I$ oluyorsa I idealini *IFP(Insertion of Factors Property)'ye sahip* olarak adlandırmıştır. R halkasının sıfır ideali IFP'ye sahipse R halkası *IFP halka* olarak adlandırılmıştır.

- Shin (1973); R halkasının her a elemanı için a'nın R deki sağ (sol) sıfırlayanı R'nin bir ideali oluyorsa bu halkayı *SI halka* olarak adlandırmıştır.

- Narbonne (1982); IFP halkalar için *yarıdeğişmeli* ifadesini kullanmıştır.

- Habep (1990) ise bu halka sınıfını *zero insertive(zi)* adı altında incelemiştir.

3.1 Yarıdeğişmeli Halkaların Diğer Halka Sınıflarıyla İlişkileri

Bu bölümde yarıdeğişmeli halkaların özellikleri incelenecek ve diğer bilinen halka sınıflarıyla ilişkileri araştırılarak bazı karakterizasyonlar ve örnekler verilecektir.
İlk olarak yarıdeğişmeli halkaları karakterize eden aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1.1 Herhangi bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) R yarıdeğişmelidir.

(2) R'nin herhangi bir sağ sıfırlayanı R'nin bir idealidir.

(3) R'nin herhangi bir sol sıfırlayanı R'nin bir idealidir (Shin 1973).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) R yarıdeğişmeli olsun. R'nin herhangi bir sağ sıfırlayanı $r_R(a)$ olmak üzere $r_R(a)$ her zaman R'nin sağ idealidir. Şimdi ise sol ideali olduğunu gösterelim. Bunun için her $r \in R$ ve her $b \in r_R(a)$ için $rb \in r_R(a)$ olduğunu gösterelim. $b \in r_R(a)$ olduğundan $ab = 0$ olup kabulden $arb = 0$ bulunur. Böylece $rb \in r_R(a)$ ve buradan $r_R(a)$; R'nin bir idealidir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Kabul edelim ki R'nin herhangi bir sağ sıfırlayanı R'nin bir ideali olsun. R'nin herhangi bir $l_R(a)$ sol sıfırlayanının bir ideal olduğunu gösterelim. $l_R(a)$'nın her zaman sol ideal olduğu açıktır. Her $r \in R$ ve her $b \in l_R(a)$ için $br \in l_R(a)$ olduğunu gösterelim. $b \in l_R(a)$ olduğundan $ba = 0$'dır. Bu durumda $a \in r_R(b)$ bulunur. Kabulden $r_R(b)$ (sol) ideal olduğundan her $r \in R$ için $ra \in r_R(b)$'dir. Böylece $bra = 0$ olup $br \in l_R(a)$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) R'nin herhangi bir sol sıfırlayanı R'nin bir ideali olsun. R'nin yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a \in l_R(b)$'dir. Kabulden $l_R(b)$ (sağ) ideal olduğundan her $r \in R$ için $ar \in l_R(b)$ yani $arb = 0$ olup R yarıdeğişmelidir.

Lemma 3.1.1; bize Bell (1970) ve Shin (1973) tarafından çalışılan halka sınıflarının aynı olduğunu ifade etmektedir. Bu açıdan; tez çalışmasında yarıdeğişmeli halkalar için aşağıdaki tanım esas alınacaktır.

Tanım 3.1.2 Bell (1970) ve Shin (1973) tarafından yapılan çalışmalar gereğince $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $aRb = 0$ oluyorsa R halkası *yarıdeğişmeli* (semi-commutative) olarak adlandırılır.

Önerme 3.1.3 İnmiş halkalar yarıdeğişmelidir (Lambek 1971).

İspat: R'nin inmiş bir halka olduğunu kabul edelim. $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Her $r \in R$ için $abr = 0$ olup, Uyarı 2.5.6 gereğince $arb = 0$'dır. Dolayısıyla $aRb = 0$ olup R yarıdeğişmelidir. □

Önerme 3.1.4 Simetrik halkalar yarıdeğişmelidir (Shin 1973).

İspat: $ab = 0$ olsun. Her $r \in R$ için $abr = 0$'dır. Halka simetrik olduğundan dolayı $arb = 0$ olup buradan $aRb = 0$'dır. Böylece R halkası yarıdeğişmelidir. Fakat bu önermenin karşıtı doğru değildir (Shin 1973). □

Önerme 3.1.5 Terslenebilir halkalar yarıdeğişmelidir (Kim and Lee 2003).

İspat: $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğu için $ba = 0$'dır. Buradan her $r \in R$ için $bar = 0$ olur. R terslenebilir oldugundan $arb = 0$ olup buradan $aRb = 0$'dır. Böylece R yarıdeğişmelidir. Fakat bu önermenin karşıtı doğru değildir (Kim and Lee 2003). □

Önerme 3.1.6 Yarıdeğişmeli halkalar Abelyandır.

İspat: R halkasının herhangi bir e eşkare elemanı için $e(1-e) = 0$'dır. Buradan R halkası yarıdeğişmeli olduğundan $er(1-e) = 0$ olup $er - ere = 0$'dır. Yani $er = ere$'dir. Benzer olarak $(1-e)e = 0$'dır. Buradan $(1-e)re = 0$ olup $re = ere$'dir. Her iki durumdan sonuç olarak $er = re$ olup R halkası Abelyandır. □

Uyarı 3.1.7 Yukarıda belirtilen ilişkiler gözönüne alındığında Uyarı 2.5.14'de verilen gerektirmeler aşağıdaki biçimde yeniden ifade edilebilir.

α-katı $\Rightarrow$ inmiş $\Rightarrow$ simetrik $\Rightarrow$ terslenebilir $\Rightarrow$ yarıdeğişmeli $\Rightarrow$ Abelyan

Şimdi yarıdeğişmeli halkaların Armendariz halka sınıfı ile ilişkisini ortaya koyalım. Aşağıda Huh vd. (2002) tarafından ifade edilen hem Armendariz hem de yarıdeğişmeli olan bir halka örneği verilmiştir.

Sonuç 3.1.8 R Armendariz bir halka ve $Z(R)$, R'nin merkezi olsun. Eğer N, R'nin tek taraflı Nil ideali ise $Z(R) + N$ hem Armendariz hem de yarıdeğişmelidir.

İspat: $S = Z(R) + N \leq R$ olsun. Armendariz halkaların alt halkaları da Armendariz olduğundan açık olarak S alt halkası Armendarizdir. Huh vd. (2002) tarafından yapılan çalışmalar gereğince $a, b \in R$ için R Armendariz olduğundan;

$$ab = 0 \Rightarrow acb = 0 (c \in Z(R))$$

$$ab = 0 \Rightarrow akb = 0 (k \in N)$$

özellikleri geçerlidir. $a, b \in Z(R)$ ve $m, n \in N$ olmak üzere $a + m,\ b + n \in S$ için $(a + m)(b + n) = 0$ olduğunu varsayalım. S Armendariz olduğundan $c \in Z(R)$ ve $k \in N$ için yukarıdaki özelliklerden dolayı $(a+m)c(b+n) = 0$ ve $(a+m)k(b+n) = 0$ olur. Böylece her $c + k \in S$ için $(a + m)(c + k)(b + n) = 0$ 'dır. Sonuç olarak S yarıdeğişmelidir. □

Yukarıdaki örnek gözönüne alındığında Armendariz halkalar ve yarıdeğişmeli halkalar arasında ilişki olduğu düşünülebilir. Fakat sırasıyla Rege ve Chhawchharia (1997) ve Huh vd. (2002) tarafından verilen aşağıdaki iki örnek bunun doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.1.9 $R = T(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ halkası değişmeli olduğu için yarıdeğişmelidir. Diğer yandan, $f(x) = (\bar{4}, \bar{0}) + (\bar{4}, \bar{1})x = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} x \in R[x]$ için $f(x)f(x) = 0$ ancak $\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan dolayı R halkası Armendariz değildir (Rege and Chhawchharia 1997).

Örnek 3.1.10 F bir cisim ve $A = F[a, b, c]$, F üzerindeki sıfırdan farklı değişmeli olmayan a, b, c bilinmeyenli sıfır sabit terimli polinomlarının serbest cebiri olsun. A birimsiz halkasını ve $F + A$'nın her $r \in A$ için cc, ac ve crc tarafından üretilen I idealini düşünelim. $R = (F + A)/I$ olsun. $a + I, c + I \in R$ olmak üzere $ac \in I$ olduğundan $(a + I)(c + I) = 0$ fakat $abc \notin I$ olduğundan $(a + I)(b + I)(c + I) \neq 0$ olup R yarıdeğişmeli değildir. Fakat R Armendarizdir (Huh *et al.* 2002).

3.2 Yarıdeğişmeli Halkaların Özellikleri

Huh vd. (2002) yarıdeğişmeli halkaların alt halkalarının da yarıdeğişmeli olduğunu açıkça ifade etmişlerdir. Buna dayanarak Bir R halkasının $R[x]$ polinom halkası yarıdeğişmeli iken R' nin yarıdeğişmeli olduğu açıktır. Fakat R yarıdeğişmeli iken $R[x]$'in yarıdeğişmeli olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.2.1 $\mathbb{Z}_2$ üzerinde değişmeli olmayan $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ bilinmeyenli sıfır sabit terimli polinomlarının serbest cebiri $A = \mathbb{Z}_2[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c]$ olsun. Birimsiz olan A halkasını ve $r \in A$ olmak üzere $\mathbb{Z}_2 + A$'nın,

$$a_0b_0, a_1b_2{+}a_2b_1, a_0b_1{+}a_1b_0, a_0b_2{+}a_1b_1{+}a_2b_0, a_2b_2, a_0rb_0, a_2rb_2, (a_0{+}a_1{+}a_2)r(b_0{+}b_1{+}b_2)$$

elemanları tarafından üretilen bir I idealini düşünelim. Bu durumda $A^4 \in I$ olduğu açıktır. $R = (\mathbb{Z}_2 + A)/I$ olsun. $(a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) \in I[x]$ tir. Fakat $a_0cb_1 + a_1cb_0 \notin I$ olduğu için $(a_0 + a_1x + a_2x^2)c(b_0 + b_1x + b_2x^2) \notin I[x]$'tir. Böylece

$R[x]$ yarıdeğişmeli değildir. Şimdi R'nin yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için bazı kavramları tanıtalım: $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ bilinmeyenlerinin her bir çarpımı bir *monomial* olarak adlandırılır. Tam olarak n tane üretecin bir çarpımı olan α'ya *n.dereceden bir monomial* denir. H_n; $\mathbb{Z}_2$ üzerinde n. dereceden monomiallerin tüm lineer kombinasyonlarının kümesi olsun. Herhangi bir n için H_n sonludur ve R'nin I ideali homojendir (yani $r_i \in H_i$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{s} r_i \in I$ ise $r_i \in I$'dır).

İddia 1: $f_1, g_1 \in H_1$ olmak üzere, eğer $f_1 g_1 \in I$ ise herhangi bir $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $f_1 r g_1 \in I$'dır.

İspat: I'nın tanımından aşağıdaki durumları elde ederiz.

$$(f_1 = a_0, g_1 = b_0), (f_1 = a_2, g_1 = b_2) \text{ veya } (f_1 = a_0 + a_1 + a_2, g_1 = b_0 + b_1 + b_2)$$

I'nın tanımını kullanılarak iddianın doğru olduğu görülür. □

İddia 2: $f, g \in A$ olmak üzere, eğer $fg \in I$ ise her $r \in A$ için $frg \in I$'dır.

İspat: Uygun $f_1, g_1, r_1 \in H_1, f_2, g_2, r_2 \in H_2, f_3, g_3, r_3 \in H_3$ ve $f_4, g_4, r_4 \in I$ için $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$, $g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$ ve $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ olduğu görülür. $i \geqslant 4$ için $H_i \subseteq I$'dır. Böylece uygun bir $h \in I$ için $frg = f_1 r_1 g_1 + h$'tır. I homojen olduğundan $fg \in I$ olması $f_1 g_1 \in I$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $f_1 r_1 g_1 \in I$ olup $frg \in I$'dır.

R'nin yarıdeğişmeli olduğunu görmek için; $y, z \in \mathbb{Z}_2 + A$ olmak üzere eğer $yz \in I$ ise her $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $yrz \in I$ olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle uygun $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ ve uygun $y', z' \in A$ için $y = \alpha + y'$ ve $z = \beta + z'$ olsun. Bundan dolayı $\alpha\beta + \alpha z' + y'\beta + y'z' = yz \in I$'dır. Böylece $\alpha = 0$ veya $\beta = 0$ olmalıdır. Varsayalım ki $\alpha = 0$ olsun. O halde $y'\beta + y'z' \in I$'dır. Eğer $\beta \neq 0$ ise I homojen ve $\beta \in \mathbb{Z}_2$ olduğundan $y' \in I$'dır. Sonuç olarak her $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $yrz = y'rz \in I$'dır. Eğer $\beta = 0$ ise o halde $y'z' \in I$'dır ve böylece her $r \in \mathbb{Z}_2 + A$ için $yrz = y'rz' \in I$'dır. İkinci durum için $\beta = 0$ iken ispat benzer şekilde yapılabilir. Sonuç olarak R halkası yarıdeğişmelidir. □

Aşağıdaki önermede; Armendarizlik koşulu altında yarıdeğişmeli olma özelliğinin polinom halkasına taşınabildiği ifade edilmiştir.

Önerme 3.2.2 R Armendariz olan yarıdeğişmeli bir halka ise, $R[x]$ polinom halkası yarıdeğişmelidir (Rege and Chhawcharria 1997).

İspat: Kabul edelim ki R yarıdeğişmeli ve Armendariz olsun. $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x), g(x) \in R[x]$ alalım. R halkası Armendariz olduğu için her bir i, j için $a_i b_j = 0$'dır. Ayrıca R yarıdeğişmeli olduğundan her bir i, j, k için $a_i c_k b_j = 0$ olur. Böylece $h(x) = \sum_{k=0}^{i} c_k x^k \in R[x]$ olmak üzere $f(x)h(x)g(x) = 0$ olup $R[x]$ polinom halkası yarıdeğişmelidir. □

Yarıdeğişmeli halkalara bir örnek olarak aşagıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.2.3 R bir halka ve M, R'nin merkezil düzenli elemanlarını içeren çarpmaya göre kapalı bir alt kümesi olsun. R'nin yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart $M^{-1}R = \{u^{-1}r \mid u \in M, r \in R\}$'nin yarıdeğişmeli olmasıdır (Huh *et al.* 2002).

İspat: ($\Leftarrow$) R; $M^{-1}R$'nin bir alt halkası olarak düşünüldüğünde yarıdeğişmeli halkaların alt halkaları da yarıdeğişmeli olduğundan, R'nin yarıdeğişmeli olduğu açıktır.

($\Rightarrow$) R'nin yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. $u, v \in M$, $a, b \in R$ için $\alpha = u^{-1}a$, $\beta = v^{-1}b$ olmak üzere $\alpha, \beta \in M^{-1}R$ için $\alpha\beta = 0$ olsun. M, R'nin merkezinde kapsandığından $\alpha\beta = u^{-1}av^{-1}b = (u^{-1}v^{-1})ab = 0$ olup u, v düzenli olduğundan $ab = 0$ bulunur. R yarıdeğişmeli olduğundan her $r \in R$ için $arb = 0$ olur. Bununla birlikte $r \in R$ ve $w \in M$ olmak üzere $\gamma = w^{-1}r \in M^{-1}R$ için

$$\alpha\gamma\beta = (uvw)^{-1}arb = (uvw)^{-1}0 = 0$$

olup $M^{-1}R$'nin yarıdeğişmeli olduğu görülür. □

Bu önermenin bir sonucu olarak $R[x]$ polinom halkasının yarıdeğişmeli olması için aşağıdaki karakterizasyon ifade edilir.

Sonuç 3.2.4 R bir halka olmak üzere $R[x]$'in yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x; x^{-1}]$'in yarıdeğişmeli olmasıdır (Huh *et al.* 2002).

İspat: Kabul edelim ki $R[x]$ yarıdeğişmeli olsun. $M = \{1, x, x^2, \ldots\}$ kümesinin $R[x]$'in çarpımsal kapalı bir alt kümesi olduğu açıktır. $M^{-1}R[x] = R[x; x^{-1}]$ olduğu gözönüne alınarak Önerme 3.2.3 gereğince $R[x]$ yarıdeğişmeli iken $R[x; x^{-1}]$ yarıdeğişmelidir. Diğer yandan $R[x; x^{-1}]$ yarıdeğişmeli olsun. $R[x]$; $R[x; x^{-1}]$'in alt halkası olarak düşünüldüğünde $R[x]$'in yarıdeğişmeli olduğu açıktır. □

Şimdi bölüm halkasının yarıdeğişmeli olmasıyla ilgili bazı karakterizasyonlar verelim. Bir R halkasının herhangi sıfırdan farklı bir I öz ideali için I ve R/I yarıdeğişmeli iken R'nin yarıdeğişmeli olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnekte bu ifadenin doğru olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 3.2.5 Huh vd. (2002) tarafından yapılan çalışmada ifade edilen F bölümlü bir halka olmak üzere F üzerinde 2×2 tipindeki matrislerin $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ üst üçgensel halkasını göz önüne alalım. F bölümlü halka olduğundan yarıdeğişmeli olduğu açıktır. Önerme 3.1.6 gereğince R Abelyan olmadığından yarıdeğişmeli değildir. Şimdi R'nin uygun sıfırdan farklı bir I ideali için R/I ve I'nın yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. R'nin sıfırdan farklı öz idealleri

$$\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix} ve \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

İlk olarak $I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. O halde $R/I \cong F$ olup R/I yarıdeğişmelidir.

Şimdi I'nın yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olsun. Bu durumda $\begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ olup buradan $ac = 0 = ad$ bulunur.

Eğer $a = 0$ ise, $e, f \in F$ olmak üzere $\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ için;

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

olur. Eğer $a \neq 0$ ise, F bölümlü halka olduğundan $c = d = 0$ olup bu durumda

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak I yarıdeğişmelidir.

$J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ olmak üzere R/J ve J'nin yarıdeğişmeli olduğu da benzer şekilde gösterilir. Son olarak $K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. O halde $R/K \cong F \oplus F$ ve böylece R/K yarıdeğişmelidir. Aynı zamanda $K^2 = 0$ olması K'nın yarıdeğişmeli olmasını gerektirir.

I ideali üzerindeki koşul güçlendirilerek aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.6 Bir R halkasının uygun bir I ideali için R/I yarıdeğişmeli olsun. Eğer I inmiş ise, R yarıdeğişmelidir (Huh *et al.* 2002).

İspat: R/I yarıdeğişmeli ve I inmiş olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olduğunu kabul edelim. I, R'nin bir ideali olduğundan $bIa \subseteq I$ olup kabulden $(bIa)^2 = 0$ ve I inmiş olduğu için $bIa = 0$ olur. Diğer yandan $aRbI \subseteq I$ olup

$$((aRb)I)^2 = aRbIaRbI = aR(bIa)RbI = aR0RbI = 0$$

ve I inmiş olduğundan $aRbI = 0$ bulunur. Böylece $(aRb)^2 \subseteq aRbI = 0$ ve $aRb \subseteq I$ olup I inmiş olduğundan $aRb = 0$ elde edilir. Böylece R yarıdeğişmelidir. □

Bir R halkasının bazı özel tipteki matris halkalarının hangi koşullar altında yarıdeğişmeli olduğu farklı yazarlar tarafından incelenmiştir. $n = 3$ için $S_3(R)$ halkasının yarıdeğişmeli olması için aşağıdaki karakterizasyon verilmiştir.

Önerme 3.2.7 R inmiş bir halka olmak üzere;

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

yarıdeğişmelidir (Kim and Lee 2003).

İspat: Kabul edelim ki R inmiş ve $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S_3(R)$ için $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = 0$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$a_1a_2 = 0 \tag{3.1}$$

$$a_1b_2 + b_1a_2 = 0 \tag{3.2}$$

$$a_1c_2 + b_1d_2 + c_1a_2 = 0 \tag{3.3}$$

$$a_1d_2 + d_1a_2 = 0 \tag{3.4}$$

Önerme 3.1.3 gereğince inmiş halkaların yarıdeğişmeli olduğu kullanılarak aşağıdaki hesaplamalar yapılır. (3.1) eşitliğinden $a_1Ra_2 = 0$ bulunur. (3.2) eşitliği sağdan a_2 ile çarpılırsa $a_1b_2a_2 + b_1a_2a_2 = 0$ olup $b_1a_2a_2 = 0$ ve buradan $b_1a_2 = 0$ elde edilir. Bu durumda $b_1Ra_2 = 0$ olur. (3.2)'den $a_1b_2 = 0$ olur. Bundan dolayı $a_1Rb_2 = 0$ bulunur. (3.4) eşitliği sağdan a_2 ile çarpılırsa benzer şekilde $d_1Ra_2 = 0$ ve $a_1Rd_2 = 0$ olur. (3.3) eşitliği sağdan a_2 ile çarpılırsa

$$0 = a_1c_2a_2 + b_1d_2a_2 + c_1a_2a_2 = c_1a_2a_2$$

olup buradan $c_1a_2 = 0$ bulunur. Bu durumda $c_1Ra_2 = 0$ olup aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$a_1c_2 + b_1d_2 = 0 \tag{3.5}$$

(3.5) eşitliği sağdan a_1 ile çarpılırsa $a_1d_2 = 0$ olduğundan Uyarı 2.5.9 gereğince $d_2a_1 = 0$ bulunur. Bu ifade (3.5)'te yerine yazılırsa $a_1c_2a_1 = 0$ elde edilir. $a_1Rc_2 = 0$ ve $b_1d_2 = 0$ olduğu için $b_1Rd_2 = 0$ dır. Önceki sonuçlar kullanılarak, r, s, t ve $u \in R$ olmak üzere, herhangi bir $\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in S_3(R)$ için;

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = 0\text{'dır.}$$ Sonuçta $S_3(R)$ yarıdeğişmelidir. □

$n \geq 4$ için $S_n(R)$ halkasının yarıdeğişmeli olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıda verilen örnek bu ihtimali ortadan kaldırır.

Örnek 3.2.8 Kim ve Lee (2003)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_4(R) \text{ için } AB = 0\text{'dır fakat}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_4(R) \text{ için } ACB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0\text{'dır.}$$

Böylece $S_4(R)$ yarıdeğişmeli değildir. $n \geq 5$ için de $S_n(R)$'nin yarıdeğişmeli olmadığı benzer şekilde gösterilebilir.

Aşağıdaki teoremde $UTM_n(R)$'nin başka bir özel alt halkası olan $U_n(R)$'nin yarıdeğişmeli olması için bir karakterizasyon verilmiştir.

Teorem 3.2.9 *R inmiş bir halka olmak üzere, aşağıdaki durumlar sağlanır.*

(1) *Her $n = 2k + 1 \geq 3$ için $U_n(R)$ yarıdeğişmelidir.*

(2) *Her $n = 2k \geq 2$ için $U_n(R)$ yarıdeğişmelidir (Gang 2007).*

İspat:

(1) $n = 2k + 1 \geq 3$ olmak üzere;

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,2k+1} \\ & a & \cdots & 0 & a_{2,k+1} & a_{2,k+2} & \cdots & a_{2,2k+1} \\ & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a & a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \cdots & a_{k,2k+1} \\ & & & & a & a_{k+1,k+2} & \cdots & a_{k+1,2k+1} \\ & & & & & a & \cdots & 0 \\ & & & & & & a & 0 \\ & & & & & & & a \end{pmatrix}$$

ve

$$\beta = \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & b_{1,k+1} & b_{1,k+2} & \cdots & b_{1,2k+1} \\ & b & \cdots & 0 & a_{2,k+1} & b_{2,k+2} & \cdots & b_{2,2k+1} \\ & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & b & b_{k,k+1} & b_{k,k+2} & \cdots & b_{k,2k+1} \\ & & & & b & b_{k+1,k+2} & \cdots & b_{k+1,2k+1} \\ & & & & & b & \cdots & 0 \\ & & & & & & b & 0 \\ & & & & & & & b \end{pmatrix} \in U_n(R) \text{ için}$$

$p, q \in \{1, 2, \ldots, k\}$ olmak üzere $\alpha\beta = (c_{p,q}) = 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$c_{p,p} = ab = 0 \tag{3.6}$$

$$c_{p,k+1} = ab_{p,k+1} + a_{p,k+1}b = 0 \tag{3.7}$$

$$c_{p,k+1+q} = ab_{p,k+1+q} + a_{p,k+1}b_{k+1,k+1+q} + a_{p,k+1+q}b = 0 \tag{3.8}$$

$$c_{k+1,k+1+q} = ab_{k+1,k+1+q} + a_{k+1,k+1+q}b = 0 \tag{3.9}$$

R inmiş olduğundan (3.6) eşitliğinden $ba = 0$ olur. (3.7) eşitliği soldan b ile çarpılırsa $p = \{1, 2, \ldots, k\}$ için $bab_{p,k+1} + ba_{p,k+1}b = 0$ bulunur. Buradan $ba_{p,k+1}b = 0$ olup $a_{p,k+1}b = 0$ olur. (3.7) eşitliğinde yerine yazılırsa $ab_{p,k+1} = 0$ olur. (3.9) eşitliği kullanılarak benzer şekilde $q = 1, 2, \ldots, k$ için $ab_{k+1,k+1+q} = a_{k+1,k+1+q}b = 0$ bulunur. (3.8) eşitliği soldan b ile çarpıldığında

$0 = bab_{p,k+1+q} + ba_{p,k+1}b_{k+1,k+1+q} + ba_{p,k+1+q}b = ba_{p,k+1+q}$ olur. Böylece herhangi bir $p, q \in 1, 2, \ldots, k$ için $a_{p,k+1+q}b = 0$ olarak bulunur. Herhangi bir $p, q \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için;

$$ab_{p,k+1+q} + a_{p,k+1}b_{k+1,k+1+q} = 0 \tag{3.10}$$

olup (3.10) eşitliği sağdan a ile çarpılırsa, herhangi bir $p, q \in 1, 2, \ldots, k$ için $0 = ab_{p,k+1+q}a + a_{p,k+1}b_{k+1,k+1+q}a = ab_{p,k+1+q}a$ elde edilir. Böylece herhangi bir $p, q \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $ab_{p,k+1+q} = 0$ olarak bulunur. (3.10) eşitliği kullanılarak $a_{p,k+1}b_{k+1,k+1+q} = 0$ bulunur. Her bir ;

$$\gamma = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & c_{1,k+1} & c_{1,k+2} & \cdots & c_{1,2k+1} \\ & c & \cdots & 0 & c_{2,k+1} & c_{2,k+2} & \cdots & c_{2,2k+1} \\ & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & c & b_{k,k+1} & c_{k,k+2} & \cdots & c_{k,2k+1} \\ & & & & c & c_{k+1,k+2} & \cdots & c_{k+1,2k+1} \\ & & & & & c & \cdots & 0 \\ & & & & & & c & 0 \\ & & & & & & & c \end{pmatrix} \in U_n(R) \text{ için}$$

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere , her bir $(i, j) \in N \times N$ için $(\alpha\gamma\beta)_{ij} = d_{ij} = 0$ olduğunu ispatlamamız yeterlidir. R inmiş olduğundan dolayı yarıdeğişmelidir. Böylece $p = 1, 2, \ldots, k$ ve $q = 1, 2, \ldots, k$ için

$$\begin{aligned} d_{p,p} &= acb = 0 \\ d_{p,k+1} &= (ac)b_{p,k+1} + (ac_{p,k+1} + a_{p,k+1}c)b = 0 \\ d_{k+1,k+1+q} &= (ac)b_{k+1,k+1+q} + (ac_{k+1,k+1+q} + a_{k+1,k+1+q}c)b = 0 \end{aligned}$$

ve

$$d_{p,k+1+q} = (ac)b_{p,k+1+q} + (ac_{p,k+1} + a_{p,k+1}c)b_{k+1,k+1+q} +$$
$$(ac_{p,k+1+q} + a_{p,k+1}c_{k+1,k+1+q} + a_{p,k+1+q}c)b = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Her bir $(i, j) \in N \times N$ için $(\alpha\gamma\beta)_{ij} = d_{ij} = 0$'dır. Sonuç olarak $\alpha\gamma\beta = 0$ olup $n = 2k + 1 \geq 3$ için $U_n(R)$ yarıdeğişmelidir.

(2) Benzer olarak ispatlanır. $\square$

Teorem 3.2.9'un bir sonucu olarak $n = 2$ alınırsa $U_2(R) = T(R, R)$ olup aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.10 R inmiş halka olsun. O halde $T(R, R)$ halkası yarıdeğişmelidir (Gang 2007).

Yukarıdaki sonuç doğrultusunda R yarıdeğişmeli iken $T(R, R)$'nin yarıdeğişmeli olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bu ihtimali ortadan kaldırır.

Örnek 3.2.11 Kim ve Lee (2003) tarafından yapılan çalışma gereğince $\mathbb{H}$; reel sayılar cismi üzerindeki Hamilton kuaterniyonları ve $R = T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ olmak üzere R'nin kendisi ile aşikar genişlemesi S ile gösterilsin. Aynı çalışmada R inmiş iken $S = T(R, R)$'nin terslenebilir (ve bundan dolayı yarıdeğişmeli) olduğu ifade edilmiştir. Fakat

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0$$

iken

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğundan $S = T(R, R)$ yarıdeğişmeli değildir.

İnmiş bir R halkası üzerinde $S_3(R)$ halkasının yarıdeğişmeli olduğu Önerme 3.2.7'de ifade edilmiştir. Fakat Örnek 3.2.8 gereğince $n \geq 4$ için $S_n(R)$'nin yarıdeğişmeli olmadığı bilinmektedir. Bundan hareketle Wang (2008) R'nin inmiş olması durumunda her $2 \leq k \leq n-1$ için $S_n^k(R)$ halkasının $UTM_n(R)$'nin maksimal yarıdeğişmeli alt halkası olduğunu göstermiştir. Böylece Önerme 3.2.7 ve Örnek 3.2.8'de elde edilen sonuçlar genişletilmiştir.

R halkasının inmiş olması durumunda $S_n^k(R)$'nin yarıdeğişmeli olduğunu göstermek için öncelikle aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 3.2.12 R inmiş olsun. Eğer $S_n^k(R)$'de $AB = 0$ ise, her i, j ve $2 \leq k \leq n$ için $[A.B]_{ij} = 0$'dır (Wang 2008).

İspat: Varsayalım ki $A, B \in S_n^k(R)$ için $AB = 0$ olsun. n üzerinde tümevarım ile her i, j ve $2 \leq k \leq n$ için $[AB]_{ij} = 0$ olduğunu ispatlayacağız. $n = 2$ için; $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $AB = 0$'dan;

$$a_1 b_1 = 0 \tag{3.11}$$

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0 \tag{3.12}$$

eşitlikleri elde edilir. R inmiş olduğundan dolayı $b_1 a_1 = 0$'dır. (3.12) eşitliği sağdan a_1 ile çarpılırsa $a_1 b_2 a_1 + a_2 b_1 a_1 = 0$ olur. Bu durumda $a_1 b_2 a_1 = 0$ olup buradan $a_1 b_2 = a_2 b_1 = 0$ bulunur. O halde; $i, j = 1, 2.$ olmak üzere $[A.B]_{i,j} = 0$'dır.
$A_{n-1}, B_{n-1} \in S_{n-1}^{k-1}(R)$ olmak üzere her i, j ve $2 \leq k \leq n$ için $A = \begin{pmatrix} a_1 & \alpha \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} b_1 & \beta \\ 0 & B_{n-1} \end{pmatrix} \in S_n^k(R)$ olmak üzere $AB = 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $A_{n-1} B_{n-1} = 0$ olup tümevarım hipotezinden her $2 \leq i, j \leq n$ için $[A.B]_{i,j} = 0$ olduğu görülür. $A = \begin{pmatrix} \bar{A}_{n-1} & \bar{\alpha} \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} \bar{B}_{n-1} & \bar{\beta} \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \in S_n^k(R)$ olsun. Benzer şekilde her $1 \leq i, j \leq n-1$ için $[A.B]_{i,j} = 0$ elde edilir. $AB = 0$'dan

$$a_1 b_{1,n} + \ldots + a_{k-1} b_{k-1}, n + a_k \bar{b}_{n-k+1} + a_{1,k+1} \bar{b}_{n-k} + \ldots + a_{1,n} \bar{b}_1 = 0 \tag{3.13}$$

dır. $[A.B]_{i,j} = 0$ yardımıyla sağdan çarpma metodu kullanılarak (3.13) eşitliğinin sol tarafındaki toplamın her bir terimin sıfır olduğu elde edilir. Tümevarım yöntemiyle her i, j ve $2 \leq k \leq n$ için $[A.B]_{i,j} = 0$ olduğu ispatlanmış olur. □

Teorem 3.2.13 R inmiş bir halka olsun. Her $2 \leq k \leq n$ için $S_n^k(R)$ yarıdeğişmelidir (Wang 2008).

İspat: Kabul edelim ki $A, B \in S_n^k(R)$ için $AB = 0$ olsun. Her $2 \leq k \leq n$ için, n üzerinde tümevarım yöntemi ile $S_n^k(R)$'nin yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. $n = 2$ için $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \in S_2^2(R)$ olsun. $AB = 0$'dan ve Teorem 3.2.12'den $a_1b_1 = 0$, $a_1b_2 = 0$ ve $a_2b_1 = 0$ olarak bulunur. Herhangi bir $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in S_2^2(R)$ için R yarıdeğişmeli olduğundan

$$a_1c_1b_1 = 0, a_1c_1b_2 = 0, a_1c_2b_1 = 0, a_2c_1b_1 = 0$$

olur. Bu da $ACB = 0$ olduğunu gösterir. $n \geq 3$ olmak üzere $S_{k-1}^{n-1}(R)$'nin yarıdeğişmeli olduğunu varsayalım. Her $2 \leq k \leq n$ ve $A_{n-1}, B_{n-1} \in S_{n-1}^{k-1}(R)$ için $A = \begin{pmatrix} a_1 & \alpha \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & \beta \\ 0 & B_{n-1} \end{pmatrix} \in S_n^k(R)$ olmak üzere $AB = 0$'dan;

$$a_1b_1 = 0 \tag{3.14}$$

$$a_1\beta + \alpha B_{n-1} = 0 \tag{3.15}$$

$$A_{n-1}B_{n-1} = 0 \tag{3.16}$$

elde edilir. O halde Teorem 3.2.12'den, $a_1\beta = 0$, $\alpha\beta_{n-1} = 0$ ve $a_1B_{n-1} = 0$ bulunur. Böylece R yarıdeğişmeli olduğundan $C_{n-1} \in S_{n-1}^{k-1}(R)$ olmak üzere herhangi bir $C = \begin{pmatrix} c_1 & \gamma \\ 0 & C_{n-1} \end{pmatrix} \in S_n^k(R)$ için $a_1c_1b_1 = 0$, $a_1c_1\beta = 0$, $\alpha C_{n-1}B_{n-1} = 0$ ve $a_1\gamma B_{n-1} = 0$'dır. Tümevarım hipotezinden $A_{n-1}C_{n-1}B_{n-1} = 0$ olup $ACB = 0$ ispatlanmış olur. Sonuç olarak $S_n^k(R)$'in yarıdeğişmeli olduğu ispatlanır. □

Sonuç 3.2.14 R inmiş bir halka olsun. Her $n = 2k \geq 2$ ve $n = 2k + 1 \geq 3$ için $A_n(R) + RE_{1,k}$ yarıdeğişmelidir (Wang 2008).

Teorem 3.2.15 R inmiş bir halka olsun. Her $2 \leq k \leq n - 1$ için $S_n^k(R)$, $UTM_n(R)$'nin maksimal yarıdeğişmeli alt halkasıdır (Wang 2008).

İspat: Varsayalım ki T bazı uygun $2 \leq k \leq n-1$ için $S_n^k(R)$'yi içeren $UTM_n(R)$'nin maksimal yarıdeğişmeli başka bir alt halkası olsun. $D = (a_{i,j}) \in T \setminus S_n^k(R)$ vardır. T'nin yarıdeğişmeli olmadığını göstermek yeterlidir.
Aşağıda belirtilen iki durum söz konusudur:

1.Durum: Varsayalım ki $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ arasında birbirinden farklı iki eleman olsun.

- $2 \leq i \leq k$ için $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{i-1,i-1} \neq a_{ii}$ olduğunu kabul edelim. O halde; $a_{11} - a_{ii} \neq 0$'dır. $A = D - a_{ii}I_n = \sum_{t=1}^{i-1} a_{i-t,t}V^t \in T$, $B = E_{i,n}$, $C = V^{i-1}$ olsun. O halde $AB = 0$ fakat ACB'nin $(1, n)$. girdisinden dolayı $ACB \neq 0$'dır. Bu bir çelişkidir.

- $k \leq i \leq n-1$ için $a_{nn} = a_{n-1,n-1} = \ldots = a_{i+1,i+1} \neq a_{ii}$ olduğunu kabul edelim. O halde $a_{nn} - a_{ii} \neq 0$'dır. $A = D - a_{ii}I_n = \sum_{t=1}^{n-i} a_{i,i+t}V^t \in T$, $B = E_{1,i}$, $C = V^{n-i}$ olsun. O halde $BA = 0$ fakat BCA'nın $(1, n)$. girdisinden dolayı $BCA \neq 0$'dır. Bu bir çelişkidir.

2.Durum: Varsayalım ki $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$ olsun.

- $0 \leq t \leq j-i-1$ için $a_{1,j-i-t} = a_{2,j-i-t+1} = \ldots = a_{i-j+k+1+t,k}$ ve $2 \leq i \leq j \leq k$ için $a_{1,j-i+1} = a_{2,j-t+2} = \ldots = a_{i-1,j-1} \neq a_{i,j}$ olduğunu kabul edelim. O halde $a_{1,j-i+1} - a_{i,j} \neq 0$ dır. $A = D - a_{11}I_n - \sum_{t=1}^{j-i-1} a_{1,1+t}V^t - \sum_{t=0}^{i-1} a_{i-t,j}V^{j-i+t} \in T$ ve $B = E_{j,n}$ ve $C = V^{i-t}$ olsun. O halde $AB = 0$'dır. Fakat $ACB \neq 0$'dır. Bu bir çelişkidir.

- $0 \leq t \leq j-i-1$ için $a_{k,k+t} = a_{k+1,k+t+1} = \ldots = a_{n-t,n}$ ve $k \leq i < j \leq n-1$ için $a_{n-j+i,n} = a_{n-j+i-1,n-1} = \ldots = a_{i+1,j+1} \neq a_{i,j}$ olduğunu kabul edelim. O halde $a_{n-j+i,n} - a_{i,j} \neq 0$'dır. $A = D - a_{k,k}I_n - \sum_{t=1}^{j-i-1} a_{k+1,k+1+t}V^t - \sum_{t=0}^{n-j} a_{i,j+t}V^{j-i+t} \in T$, $B = E_{1,i}$ ve $C = V^{n-j}$ olsun. O halde BCA'nın $(1, n)$. girdisinden dolayı $BA = 0$'dır. Fakat $BCA \neq 0$'dır. Bu bir çelişkidir. □

Sonuç olarak $S_n^k(R)$'yi kapsayan ve yarıdeğişmeli olan $UTM_n(R)$'nin başka bir alt halkası yoktur.

Sonuç 3.2.16 R inmiş bir halka olsun. O halde;

$$S_2^1(R) = T(R,R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$$

$UTM_2(R)$'nin maksimal yarıdeğişmeli alt halkasıdır.

4 BAZI GENİŞLETİLMİŞ YARIDEĞİŞMELİ HALKA SINIFLARI

Bir halkanın herhangi bir endomorfizması, sıfırüslü elemanlarının kümesi, merkezi veya polinom halkası kullanılarak yarıdeğişmelilik tanımı genişletilmiş ve bu sayede pek çok farklı halka sınıfı inşa edilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde bir takım genişletilmiş yarıdeğişmeli halka sınıfları tanıtılacaktır. İlk olarak bir halkanın tüm sıfırüslü elemanlarının kümesi kullanılarak Liang vd. (2007) tarafından tanımlanan zayıf yarıdeğişmeli halka sınıfı ele alınacaktır.

4.1 Zayıf Yarıdeğişmeli Halkalar

Tanım 4.1.1 Liang vd. (2007) herhangi $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken herhangi bir $r \in R$ için $arb \in nil(R)$ oluyorsa R halkasını *zayıf yarıdeğişmeli halka* olarak adlandırmışlardır. Herhangi yarıdeğişmeli bir halkanın zayıf yarıdeğişmeli olduğu açıktır. Aşağıdaki örnekte ise bu ifadenin karşıtının doğru olmadığı gösterilmektedir.

Önerme 4.1.2 Liang vd. (2007) R inmiş bir halka olsun.

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \; : \; a, a_{ij} \in R \right\}$$

olmak üzere Örnek 3.2.8'de ifade edildiği gibi $n \geq 4$ için $S_n(R)$ yarıdeğişmeli değildir fakat zayıf yarıdeğişmelidir. Bunu göstermek için öncelikle aşağıdaki iddiayı ispatlayalım.

İddia1: Bir R halkasının zayıf yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart herhangi bir n için $UTM_n(R)$ üst üçgensel matris halkasının zayıf yarıdeğişmeli olmasıdır.

Zayıf yarıdeğişmeli bir halkanın herhangi bir alt halkasının da zayıf yarıdeğişmeli olduğu kolayca görülebilir. Böylece $UTM_n(R)$ zayıf yarıdeğişmeli iken R'nin zayıf yarıdeğişmeli olduğu açıktır. Aksine R zayıf yarıdeğişmeli olsun. $AB = 0$ olacak şekilde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} \in UTM_n(R)$$

alalım.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} & \dots & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

olduğundan herhangi $1 \leq i \leq n$ için $a_{ii}b_{ii} = 0$ elde edilir. R zayıf yarıdeğişmeli olduğundan herhangi bir $c_{ii} \in R$ için $(a_{ii}c_{ii}b_{ii})^{k_i} = 0$ olacak şekilde $k_i \in \mathbb{N}$ vardır. $k = max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ olsun. Bu durumda her bir i için $(a_{ii}c_{ii}b_{ii})^k = 0$ olur.

Herhangi $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} \in UTM_n(R)$ elemanı için

$$(ACB)^k = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11}b_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22}c_{22}b_{22} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{33}c_{33}b_{33} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}c_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve buradan $(ACB)^{kn} = 0$ olup $ACB \in nil(UTM_n(R))$ olduğundan $UTM_n(R)$ zayıf yarıdeğişmelidir. R inmiş olduğundan yarıdeğişmelidir. İddia1 gereğince $UTM_n(R)$ zayıf yarıdeğişmeli olup $S_n(R)$; $UTM_n(R)$'nin bir alt halkası olduğundan zayıf yarıdeğişmelidir.

İddia1'den aşağıdaki sonuca kolayca ulaşılabilir.

İddia2: Eğer R inmiş ise $UTM_n(R)$ üst üçgensel matris halkası zayıf yarıdeğişmelidir.

Örnek 4.1.3 Örnek 3.2.5'deki $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkası abelyen olmadığından dolayı yarıdeğişmeli değildir. Fakat yukarıdaki önermede ifade edilen *İddia2* gereğince R zayıf yarıdeğişmelidir.

Önerme 4.1.2'de $n = 2$ durumu için aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 4.1.4 Bir R halkasının zayıf yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $T(R, R)$ halkasının zayıf yarıdeğişmeli olmasıdır (Liang *et al.* 2007).

Huh vd. (2002) bir R halkası ve herhangi pozitif n tamsayısı için R inmiş ise $R[x]/(x^n)$'in terslenebilir olduğunu ifade etmişlerdir. Bundan dolayı yarıdeğişmelidir. Buna dayanarak R terslenebilir ya da yarıdeğişmeli iken, $n \geq 2$ için $R[x]/(x^n)$'in yarıdeğişmeli olmasından şüphe edilebilir. Gerçekten aşağıdaki örnek bunun doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.1.5 $\mathbb{H}$, reel sayılar cismi üzerinde Hamilton kuaterniyonları, $R = T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ ve $S = T(R, R)$ olsun. Bu durumda R halkası terslenebilirdir.

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\mathbb{H} = \{a1 + bi + cj + dk : a, b, c, d \in R\}$'dir. $\mathbb{H}$ değişmeli olmayan bölümlü bir halkadır. Bu durumda $R = T(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ terslenebilirdir. Dolayısıyla R yarıdeğişmelidir. Fakat Kim ve Lee (2003) gereğince

$$S = T(R, R) \cong \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix} : r, s \in R \right\}$$

yarıdeğişmeli değildir. Ayrıca $R[x]/(x^2) \cong T(R, R)$ olduğunu göz önüne alalım. Böylece herhangi $n \geq 2$ için,

$$R[x]/(x^n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix} : a_i \in R \right\}$$

yarıdeğişmeli değildir (Liang *et al.* 2007).

Fakat aşağıdaki sonuçta R yarıdeğişmeli iken $R[x]/(x^n)$'in zayıf yarıdeğişmeli olduğu ifade edilmiştir.

Sonuç 4.1.6 R halka ve n pozitif tam sayı olmak üzere R'nin zayıf yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart $R[x]/(x^n)$'in zayıf yarıdeğişmeli olmasıdır (Liang *et al.* 2007).

Yukarıdaki Önerme 4.1.2'de *İddia1*'den, $n \geq 2$ olmak üzere R zayıf yarıdeğişmeli iken $M_n(R)$ halkasının zayıf yarıdeğişmeli olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bunun doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.1.7 Zayıf yarıdeğişmeli olan $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasını ve $M_2(\mathbb{Z})$ halkasını ele alalım.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin nil(M_2(\mathbb{Z}))$$

olduğundan dolayı $M_2(\mathbb{Z})$ zayıf yarıdeğişmeli değildir (Liang *et al.* 2007).

Huh vd. (2002)'de elde edilen sonuçlarda R yarıdeğişmeli iken $R[x]$ polinom halkasının yarıdeğişmeli olmadığı ifade edilmiştir. Ancak R yarıdeğişmeli iken $R[x]$ polinom halkasının zayıf yarıdeğişmeli olduğu ileride gösterilecektir.

Tanım 4.1.8 R halkasının bir α endomorfizması için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0 \Leftrightarrow a\alpha(b) = 0$ oluyorsa R'ye *α-şartını sağlayan* bir halka denir.

R'nin α-şartını sağlayan yarıdeğişmeli bir halka olması durumunda $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının zayıf yarıdeğişmeli olduğu gösterilecektir.

Lemma 4.1.9 R, α-şartını sağlasın. O halde $a, b \in R$ için $ab \in nil(R)$ ise $a\alpha(b) \in nil(R)$'dir (Liang *et al.* 2007).

İspat: R α-şartını sağlasın ve $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in nil(R)$ olsun. Bu durumda $(ab)^k = 0$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Yani; $(ab)^k = 0$ iken $a(bab \ldots ab) = 0$'dır. R, α-şartını sağladığından $a\alpha(bab \ldots ab) = 0$ olur. α endomorfizma olduğundan $a\alpha(b)\alpha(ab \ldots ab) = 0$ olup tekrar α-şartı kullanılarak $a\alpha(b)ab \ldots ab = 0$ bulunur. Aynı şekilde devam edilerek $(a\alpha(b))^k = 0$ bulunur. Böylece $a\alpha(b) \in nil(R)$ elde edilir. □

Lemma 4.1.10 R yarıdeğişmeli bir halka olsun. O halde $nil(R)$, R'nin bir idealidir (Liu 2006).

İspat: Kabul edelim ki R yarıdeğişmeli bir halka olsun. $a, b \in nil(R)$ alalım. Bu durumda $a^m = 0$ ve $b^n = 0$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ vardır. $k = m + n + 1$ olsun. Bu durumda $(a + b)^k = \sum a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2} \ldots a^{i_s}b^{j_s}$ olur. $0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_s, j_1, j_2, \ldots, j_s \leq k$ ve $i_1 + i_2 + \ldots + i_s + j_1 + j_2 + \ldots + j_s = k$ olduğu açıktır. $i_1 + i_2 + \ldots + i_s \geq m$ ise $a^{i_1}a^{i_2} \ldots a^{i_s} = a^{i_1+i_2+\ldots+i_s}$ olur. Böylece R yarıdeğişmeli olduğundan $a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2} \ldots a^{i_s}b^{j_s} = 0$ yani $(a + b)^k = 0$ elde edilir. $i_1 + i_2 + \ldots + i_s < m$ ise; $j_1, j_2, \ldots, j_s \geq n$ olup $b^{j_1+j_2+\ldots+j_s} = 0$ bulunur. R yarıdeğişmeli olduğundan $a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2} \ldots a^{i_s}b^{j_s} = 0$ yani $(a + b)^k = 0$ elde edilir. Böylece $a + b \in nil(R)$ olur. Ayrıca $a \in nil(R)$ ve $r \in R$ için $a^m = 0$ eşitliği ve R'nin yarıdeğişmeli olduğu kullanılarak $(ar)^m = 0$ ve $(ra)^m = 0$ olur. Böylece $ar \in nil(R)$ ve $ra \in nil(R)$ olduğundan $nil(R)$; R'nin idealidir.

Lemma 4.1.11 R, α-şartını sağlayan yarıdeğişmeli bir halka olsun. $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$, $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \in R[x;\alpha]$, $f(x)g(x) = 0$ olacak şekildeki polinomlar ise her bir i, j için $a_i\alpha^i(b_j) \in nil(R)$'dir (Liang *et al.* 2007).

İspat: R, α-şartını sağlayan yarıdeğişmeli bir halka ve $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j \in R[x;\alpha]$ polinomları için;

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i \alpha^i(b_j) \right) x^k = 0$$

olsun. Polinomların eşitliğinden x^k'lı terimlerin katsayıları 0'a eşitlenirse;

$$\sum_{i+j=k} a_i \alpha^i(b_j) = 0$$

bulunur. Her bir i, j için $a_i \alpha^i(b_j) \in nil(R)$ olduğunu göstermek için $i + j$ üzerinde tümevarım uygulayalım. $i = j = 0$ olmak üzere $i + j = 0$ için $a_0 b_0 = 0 \in nil(R)$ olduğu (x^0'lı terimin katsayısından) açıktır. Kabul edelim ki $1 \leq p \leq m + n$ olmak üzere $i + j < p$ için $a_i \alpha^i(b_j) \in nil(R)$ olsun. Lemma 4.1.9 gereğince herhangi $w \in \mathbb{N}$ için $a_i \alpha^{i+w}(b_j) \in nil(R)$ ve buradan $\alpha^{i+w}(b_j) a_i \in nil(R)$ bulunur. x^p'li terimin katsayısı olan;

$$\sum_{i+j=p} a_i \alpha^i(b_j) = 0 \tag{4.1}$$

eşitliği sağdan a_0 ile çarpılırsa $a_0 b_p a_0 + a_1 \alpha(b_{p-1}) a_0 + \ldots + a_p \alpha^p(b_0) a_0 = 0$ olup $a_0 b_p a_0 = -\sum_{i=1}^{p} a_i \alpha^i(b_{p-i}) a_0 \in nil(R)$ ve buradan $a_0 b_p \in nil(R)$ bulunur. (4.1) eşitliği sağdan a_1 ile çarpılırsa $a_0 b_p a_1 + a_1 \alpha(b_{p-1}) a_1 + \ldots + a_p \alpha^p(b_0) a_1 = 0$ olup $a_0 b_p a_1 + a_1 \alpha(b_{p-1}) a_1 = -\sum_{i=2}^{p} a_i \alpha^i(b_{p-i}) a_1 \in nil(R)$ ve buradan $a_1 \alpha(b_{p-1}) \in nil(R)$ bulunur. Bu şekilde devam edilerek $i+j = p$ için $a_i \alpha^i(b_j) \in nil(R)$ elde edilir. Sonuç olarak her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_i \alpha^i(b_j) \in nil(R)$ olduğu görülür.

Lemma 4.1.12 R, α-şartını sağlayan yarıdeğişmeli bir halka ve $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R[x; \alpha]$ olsun. $a_0, a_1, \ldots, a_n \in nil(R)$ ise; $f(x) \in nil(R[x; \alpha])$'dır (Liang *et al.* 2007).

İspat: R, α-şartını sağlayan yarıdeğişmeli bir halka, $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in R[x; \alpha]$ için $a_0, a_1, \ldots, a_n \in nil(R)$ olsun. O halde $a_i^{mi} = 0$ olacak şekilde $m_0, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ vardır. $k = m_0 + m_1 + \ldots + m_n + 1$ olsun. Bu durumda; $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \in \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ olmak üzere;

$$(f(x))^k = \sum_{s=0}^{kn} \left(\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=s} a_{i_1} \alpha^{i_1}(a_{i_2}) \alpha^{i_1+i_2}(a_{i_3}) \ldots \alpha^{i_1+i_2+\ldots+i_{k-1}}(a_{i_k}) \right) x^s$$

biçimindedir.

$$a_{i_1}\alpha^{i_1}(a_{i_2})\alpha^{i_1+i_2}(a_{i_3})\dots\alpha^{i_1+i_2+\dots+i_{k-1}}(a_{i_k}) \tag{4.2}$$

çarpımını ele alalım. Kolayca kontrol edilebilir ki (4.2) ifadesindeki a_t'ler m_t'lerden daha fazla olacak şekilde $a_t \in \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ vardır. (4.2)'de a_t'nin $s > m_t$ defa göründüğünü kabul edebiliriz. $b_i \in R$, $j_1, j_2, \dots, j_s \in \mathbb{N}$ olmak üzere (4.2) ifadesi yeniden düzenlenirse;

$$b_0\alpha^{j_1}(a_t)b_1\alpha^{j_1+j_2}(a_t)\dots b_{s-1}\alpha^{j_1+j_2+\dots+j_s}(a_t)b_s$$

olur. $a_t^s = 0$ ve R,α şartını sağlayan yarıdeğişmeli halka olduğundan,

$$b_0\alpha^{j_1}(a_t)b_1\alpha^{j_1+j_2}(a_t)\dots b_{s-1}\alpha^{j_1+j_2+\dots+j_s}(a_t)b_s = 0$$

elde edilir. Böylece (4.2) eşitliği 0'a eşit olur. Sonuç olarak

$$\sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=s} a_{i_1}\alpha^{i_1}(a_{i_2})\alpha^{i_1+i_2}(a_{i_3})\dots\alpha^{i_1+i_2+\dots+i_{k-1}}(a_{i_k})) = 0$$

olması $f(x) \in nil(R[x;\alpha])$ olmasını gerektirir. □

Teorem 4.1.13 *R, α-şartını sağlayan yarıdeğişmeli bir halka olsun. Bu durumda $R[x;\alpha]$ zayıf yarıdeğişmelidir (Liang et al. 2007).*

İspat: R'nin, α-şartını sağlayan yarıdeğişmeli bir halka olduğunu kabul edelim. $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ alalım. R yarıdeğişmeli olduğundan Lemma 4.1.11'den herhangi i, j için $(a_i\alpha^i(b_j))^{n_{i_j}} = 0$ olacak şekilde $n_{i_j} \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece Lemma 4.1.9'dan herhangi $t \in \mathbb{N}$ için $(a_i\alpha^{i+t}(b_j))^{n_{i_j}} = 0$'dır. O halde $h(x) = \sum_{s=0}^{k} c_s x^s \in R[x;\alpha]$ olmak üzere $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$ ve $0 \le s \le k$ için $a_i\alpha^i(c_s)\alpha^{i+s}(b_j) \in nil(R)$ olur. Buradan;

$$f(x)h(x)g(x) = \sum_{t=0}^{m+n+k}\left(\sum_{i+j+s=t} a_i\alpha^i(c_s)\alpha^{i+s}(b_j)\right)x^t$$

elde edilir. Lemma 4.1.10'dan herhangi t için $\sum_{i+j+s} a_i\alpha^i(c_s)\alpha^{i+s}(b_j) \in nil(R)$ olup Lemma 4.1.12'den $f(x)h(x)g(x) \in nil(R[x;\alpha])$ bulunur. Sonuç olarak $R[x;\alpha]$ zayıf yarıdeğişmelidir. □

Teorem 4.1.14 R yarıdeğişmeli bir halka olsun. Bu durumda $R[x]$ zayıf yarıdeğişmelidir (Liang *et al.* 2007).

İspat: R yarıdeğişmeli olduğundan Teorem 4.1.13'den $R[x;\alpha]$ zayıf yarıdeğişmelidir. Özel olarak $\alpha = 1_R$ alınırsa $R[x;1_R] = R[x]$ zayıf yarıdeğişmelidir. □

Aşağıdaki önermede zayıf yarıdeğişmeli halkalara bir örnek verilmiştir.

Önerme 4.1.15 Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) R zayıf yarıdeğişmelidir.

(2) $M^{-1}(R)$ zayıf yarıdeğişmelidir (Liang *et al.* 2007).

İspat: R; $M^{-1}(R)$'nin alt halkası olduğu için $M^{-1}(R)$ zayıf yarıdeğişmeli iken R'nin zayıf yarıdeğişmeli olduğu açıktır. Şimdi R'nin zayıf yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. $u, v, w \in M$ ve $a, b, c \in R$ ve $\gamma = w^{-1}c \in M^{-1}(R)$ olmak üzere $\alpha = u^{-1}a$, $\beta = v^{-1}b \in M^{-1}(R)$ için $\alpha\beta = 0$ olsun. M; R'nin merkezinde olduğundan $0 = \alpha\beta = u^{-1}av^{-1}b = (u^{-1}v^{-1})ab$ olup $ab = 0$ bulunur. R zayıf yarıdeğişmeli olduğu için $(acb)^n = 0$ olacak şekilde $n \in N$ vardır. Böylece

$$(\alpha\gamma\beta)^n = (u^{-1}aw^{-1}cv^{-1}b)^n = ((vwu)^{-1}acb)^n = ((vwu)^{-1})^n(acb)^n = 0$$

olduğundan $M^{-1}(R)$ zayıf yarıdeğişmelidir. □

Sonuç 4.1.16 Bir R halkası için $R[x]$'in zayıf yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart $R[x;x^{-1}]$'in zayıf yarıdeğişmeli olmasıdır (Liang *et al.* 2007).

İspat: $R[x]$; $R[x;x^{-1}]$'in alt halkası olduğu için $R[x;x^{-1}]$ zayıf yarıdeğişmeli iken $R[x]$'te zayıf yarıdeğişmeli olur. Şimdi $R[x]$'in zayıf yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. $M = \{1, x, x^2, \ldots\}$, $R[x]$'in çarpımsal kapalı bir alt kümesidir. $M^{-1}R[x] = R[x, x^{-1}]$ olduğu kullanılarak Önerme 4.1.15 gereğince $R[x;x^{-1}]$ zayıf yarıdeğişmeli bulunur. □

Sonuç 4.1.17 R yarıdeğişmeli bir halka ise $R[x;x^{-1}]$ zayıf yarıdeğişmelidir. (Liang *et al.* 2007).

İspat: R halkası yarıdeğişmeli iken $R[x]$ polinom halkası zayıf yarıdeğişmeli olup sonuç 4.1.16'dan $R[x, x^{-1}]$ zayıf yarıdeğişmeli bulunur.

Teorem 3.2.6 gereğince R/I yarıdeğişmeli olacak şekilde I; R'nin inmiş bir ideali ise; R'nin yarıdeğişmeli olduğu bilinir. Fakat Örnek 3.2.5'te I ve R/I yarıdeğişmeli iken R'nin yarıdeğişmeli olmadığı gösterilmiştir. Aşağıdaki teoremde zayıf yarıdeğişmeli R/I halkası için I yarıdeğişmeli iken R'nin zayıf yarıdeğişmeli olduğu ifade edilmiştir. Daha önce elde edilen sonuçlar bu teoremin bir sonucu olarak basitçe ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.18 Bir R halkası ve uygun bir I ideali için R/I zayıf yarıdeğişmeli olsun. Eğer I yarıdeğişmeli ise R zayıf yarıdeğişmelidir (Liang *et al.* 2007).

Sonuç 4.1.19 Bir R halkası ve uygun bir I ideali için R/I yarıdeğişmeli olsun. Eğer I yarıdeğişmeli ise R zayıf yarıdeğişmelidir (Liang *et al.* 2007).

Sonuç 4.1.20 Bir R halkası için eğer I, R'nin R/I zayıf yarıdeğişmeli olacak şekildeki inmiş bir ideali ise R zayıf yarıdeğişmelidir (Liang *et al.* 2007).

Sonuç 4.1.21 Bir R halkası için eğer I, R'nin R/I yarıdeğişmeli olacak şekildeki inmiş bir ideali ise R yarıdeğişmelidir (Huh *et al.* 2002).

Önerme 4.1.22 R bir halka ve I, R'nin R/I zayıf yarıdeğişmeli olacak şekilde bir ideali olsun. Eğer $I \subseteq nil(R)$ ise R zayıf yarıdeğişmelidir (Liang *et al.* 2007).

4.2 α-Yarıdeğişmeli Halkalar

Bu bölümde Başer ve Kwak (2010) tarafından bir halkanın bir endomorfizması yardımıyla tanımlanan yarıdeğişmeli halkaların bir genişlemesi olan α-yarıdeğişmeli halkalar tanıtılacak ve bazı özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 4.2.1 Bir R halkasının α endomorfizması için, $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $aR\alpha(b) = 0$ oluyorsa α'ya *yarıdeğişmeli endomorfizma* denir. Eğer bir R halkasının yarıdeğişmeli bir α endomorfizması varsa R'ye *α-yarıdeğişmeli halka* denir (Başer and Kwak 2010).

Uyarı 4.2.2 Eğer R, 1_R-yarıdeğişmeli ise yarıdeğişmelidir. α-yarıdeğişmeli bir R halkasının $\alpha(S) \subseteq S$ şartını sağlayan her S alt halkası da aynı şekilde α-yarıdeğişmeli olur. Eğer R bölge ise R'nin herhangi bir α endomorfizması için R α-yarıdeğişmelidir. Her bölgenin inmiş ve böylece yarıdeğişmeli aynı zamanda α-yarıdeğişmeli olduğu gözönünde bulundurularak aşağıdaki örnekte α-yarıdeğişmeli olmayacak şekilde değişmeli ve inmiş bir halkanın bir endomorfizmasının var olduğu gösterilmiştir.

Örnek 4.2.3 Bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını gözönüne alalım. R değişmeli ve inmiş olduğundan yarıdeğişmelidir. $\alpha : R \to R$ olmak üzere $\alpha((a,b)) = (b,a)$ şeklinde tanımlanan α, R'nin bir otomorfizmasıdır. $a = (1,0)$, $b = (0,1) \in R$ için $ab = 0$'dır. Fakat $(1,1) \in R$ için $(0,0) \neq (1,0) = (1,0)(1,1)(1,0) = (1,0)(1,1)\alpha(0,1) = a(1,1)\alpha(b) \in aR\alpha(b)$ olduğundan dolayı R, α-yarıdeğişmeli değildir.

Aşağıdaki örnekte R'nin sıfırdan farklı uygun bir I öz ideali için R/I, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli ve I, α-yarıdeğişmeli iken R,α-yarıdeğişmeli olmayacak şekilde R'nin birimden farklı bir α otomorfizmasının var olduğu gösterilmiştir.

Örnek 4.2.4 Başer ve Kwak (2010) tarafından belirttiği gibi F bir cisim olmak üzere $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ ve $\alpha : R \to R$ endomorfizması

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

ile tanımlı olsun. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için $AB = 0$'dır. Fakat $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ için $0 \neq A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha(B) \in AR\alpha(B)$ olduğu için R α-yarıdeğişmeli değildir. R'nin sıfırdan farklı;

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

öz ideallerinin α-yarıdeğişmeli olduğu kolayca görülür. $R/I \cong F$ ve $R/J \cong F$ olduğu için, R/I ve R/J'de $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir. Son olarak $K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ideali için $R/K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + K \ : \ a, c \in F \right\}$ bölüm halkası inmiştir ve $\bar{\alpha}$, R/K üzerinde birim dönüşümdür. Dolayısıyla R/K halkası $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir.

Başer ve Kwak (2010) ideal üzerindeki koşulu güçlendirerek; ideal α-katı ve buna karşılık gelen bölüm halkası $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli iken halkanın α-yarıdeğişmeli olduğunu aşağıda yer alan önermedeki gibi göstermişlerdir.

Önerme 4.2.5 Bir R halkasının $\alpha(I) \subseteq I$ olacak şekildeki uygun bir I ideali için R/I, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olsun. Eğer I, birimsiz bir halka olarak α-katı ise R, α-yarıdeğişmelidir (Başer and Kwak 2010).

İspat: $a, b \in R$ için $ab = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $a + I, b + I \in R/I$ olup $(a + I)(b + I) = ab + I = I$ ve R/I $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olduğundan $(a + I)(R/I)\bar{\alpha}(b + I) = (a + I)(R/I)(\alpha(b) + I) = I$ olur. Buradan her $r + I \in R/I$ için $(a + I)(r + I)(\alpha(b) + I) = I$ olup $ar\alpha(b) + I = I$'dır. Yani $ar\alpha(b) \in I$ olur. Dolayısıyla $aR\alpha(b) \subseteq I$'dır. Diğer yandan $(\alpha(b)I\alpha(a))^2 = \alpha(b)I\alpha(a)\alpha(b)I\alpha(a) = \alpha(b)I\alpha(ab)I\alpha(a) = 0$'dır. $\alpha(b)I\alpha(a) \in I$ ve I, α-katı ve böylece inmiş olduğu için $\alpha(b)I\alpha(a) = 0$'dır. I α-katı olduğundan $aR\alpha(b)I\alpha(aR\alpha(b)I) = 0$ olup $aR\alpha(b)I = 0$ bulunur. $aR\alpha(b)\alpha(aR\alpha(b)) \subseteq aR\alpha(b)I = 0$'dan $aR\alpha(b) = 0$ olup R, α-yarıdeğişmeli dir. □

Huh vd. (2002) tarafından yapılan çalışmada yer alan Teorem 3.2.6; Önerme 4.2.5'in bir sonucu olarak aşağıdaki biçimde verilebilir.

Sonuç 4.2.6 Teorem 3.2.6'dan R/I yarıdeğişmeli olacak şekildeki bir I ideali için I inmiş ise R yarıdeğişmelidir (Huh *et al.* 2002).

Aşağıdaki önermede α-yarıdeğişmeli halkaların bazı özelliklerine yer verilmiştir.

Önerme 4.2.7 α-yarıdeğişmeli bir R halkası için;

(1) Eğer α, R'nin bir monomorfizması ise $\alpha(1) = 1$'dir.

(2) $\alpha(1) = 1$ olması için gerek ve yeter şart R halkasının herhangi bir e özüslü elemanı için $\alpha(e) = e$ olmasıdır (Başer and Kwak 2010).

İspat:

(1) R α-yarıdeğişmeli bir halka olmak üzere α'nın monomorfizma olduğunu kabul edelim. $\alpha(1)(1-\alpha(1)) = 0$ olup kabülden $\alpha(1)R\alpha(1-\alpha(1)) = 0$ olur. O halde $0 = \alpha(1)\alpha(1-\alpha(1)) = \alpha(1)(\alpha(1) - \alpha(\alpha(1))$ ve buradan $\alpha(1) = \alpha(\alpha(1))$ elde edilir. α monomorfizma olduğu için $\alpha(1) = 1$'dir.

(2) $\alpha(1) = 1$ ve $e^2 = e \in R$ olsun. O halde $e(1-e) = 0$ ve $(1-e)e = 0$'dır. Böylece $eR\alpha(1-e) = 0$ ve $(1-e)R\alpha(e) = 0$'dır. Dolayısıyla $e\alpha(1-e) = 0$ olup $e(1-\alpha(e)) = 0$ ve buradan $e\alpha(e) = e$'dir. Diğer yandan $(1-e)\alpha(e) = 0$ olduğu için $\alpha(e) = e\alpha(e)$ bulunur. Böylece $\alpha(e) = e$ elde edilir. Karşıt ispat ise açıktır. $\square$

Önerme 4.2.7'de (1)'in karşıtının doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.2.8 F bir cisim ve $R = F[x]$ olsun. R bölge olduğundan α-yarıdeğişmeli bir halkadır. $f(x) \in R$ için $\alpha : R \to R$ endomorfizması $\alpha(f(x)) = f(0)$ ile tanımlansın. $\alpha(1) = 1$'dir. Fakat α monomorfizma değildir (Başer and Kwak 2010).

Aşağıdaki önerme α-yarıdeğişmeli halkalara bir örnek teşkil eder.

Önerme 4.2.9 $\alpha(1) = 1$ olmak üzere R, α-yarıdeğişmeli halka ve S bölge ise R ile S'nin Dorroh genişlemesi $D = R \times S$, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir (Başer and Kwak 2010).

İspat: $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in D$ için $(r_1, s_1)(r_2, s_2) = 0$ olsun. O halde $r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1 = 0$ ve $s_1s_2 = 0$'dır. S bölge olduğundan $s_1 = 0$ veya $s_2 = 0$'dır. Eğer $s_1 = 0$ ise $0 = r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1 = r_1r_2 + s_2r_1$ ve buradan $r_1(r_2 + s_2) = 0$'dır. R, α-yarıdeğişmeli bir halka ve $\alpha(1) = 1$ olduğundan her $t \in R$ için $0 = r_1t\alpha(r_2 + s_2) = r_1t\alpha(r_2) + r_1ts_2$'dir. Herhangi $(r, s) \in D$ için $(r_1, s_1)(r, s)\bar{\alpha}((r_2, s_2)) = ((r_1r + sr_1)\alpha(r_2) + (r_1r + sr_1)s_2, 0) = 0$ olup $(r_1, s_1)D\bar{\alpha}((r_2, s_2)) = 0$'dır. Eğer $s_2 = 0$ ise $(r_1 + s_1)r_2 = 0$ ve $0 = (r_1 + s_1)R\alpha(r_2) = 0$'dır. Buradan benzer şekilde $(r_1, s_1)D\bar{\alpha}((r_2, s_2)) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $D = R \times S$, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir. $\square$

Sonuç 4.2.10 Eğer R yarıdeğişmeli bir halka ve S bölge ise $D = R \times S$, yarıdeğişmelidir (Başer and Kwak 2010).

Önerme 4.2.9'da ifade edilen $\alpha(1) = 1$ koşulunun kaldırılamayacağı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.2.11 Başer ve Kwak (2010) tarafından ifade edilen $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını, $\alpha((a,b)) = (0,b)$ ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını ve R'nin $\mathbb{Z}$ ile Dorroh genişlemesi olan D'yi gözönüne alalım. D'de $((1,0),0)((1,0),-1) = 0$'dır. Fakat $((1,0),0) \in D$ için $((1,0),0)((1,0),0)\bar{\alpha}((1,0),-1) = (-(1,0),0) \neq 0$'dır. Böylece D, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli değildir.

Aşağıdaki önermede bir halkanın polinom halkasının α-yarıdeğişmeli olması için bir karakterizasyon verilmiştir.

Önerme 4.2.12 $\alpha(1) = 1$ olmak üzere $R[x]$'in α-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart $R[x; x^{-1}]$'in α-yarıdeğişmeli olmasıdır (Başer and Kwak 2010).

İspat: $R[x]$'in α-yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. $f(x), g(x) \in R[x; x^{-1}]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. $f_1(x) = f(x)x^n$, $g_1(x) = g(x)x^n \in R[x]$ ve $f_1(x)g_1(x) = 0$ olacak şekilde pozitif bir n tam sayısı vardır. $R[x]$, α-yarıdeğişmeli olduğundan $f_1(x)R[x]\alpha(g_1(x)) = 0$'dır. Herhangi $h(x) \in R[x; x^{-1}]$ için $h_1(x) = h(x)x^m \in R[x]$ olacak şekilde pozitif bir m tamsayısı vardır. $f_1(x)R[x]\alpha(g_1(x)) = 0$ ve $\alpha(1) = 1$ olduğundan $f(x)h(x)\alpha(g(x)) = f_1(x)h_1(x)\alpha(g_1(x))x^{-2n-m} = 0$ olur. Böylece $f(x)R[x; x^{-1}]\alpha(g(x))$'tir. Sonuç olarak; $R[x; x^{-1}]$, α-yarıdeğişmelidir. □

Önerme 4.2.12'de α yerine birim endomorfizma alınarak Önerme 3.2.4'de ifade edilen aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.13 Bir R halkası için, $R[x]$'in yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart $R[x; x^{-1}]$'in yarıdeğişmeli olmasıdır (Huh *et al.* 2002).

Teorem 4.2.14 n bir pozitif tamsayı ve R inmiş bir halka olsun. $\alpha(1) = 1$ olmak üzere R α-yarıdeğişmeli halka ise, $R[x]/(x^n)$ $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir. (Başer and Kwak 2010).

İspat: $S = R[x]/(x^n)$ olsun. $n = 1$ ise $S \cong R$ olup ispat açıktır. Eğer $n = 2$ ise $S \cong T(R, R)$'dir. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R, R)$ için $AB = 0$ olsun. O halde $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$'dır. Bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter şartın $a, b \in R$ için $ab^2 = 0$ iken $ab = 0$ olması gerektiği kullanılarak $0 = ad + bc = (ad + bc)c = bc^2$'den $bc = 0$ olur. Buradan $ad = 0$ bulunur. O halde $aR\alpha(c) = 0$, $bR\alpha(c) = 0$ ve $aR\alpha(d) = 0$'dır. Böylece; $C = \begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix} \in T(R, R)$ için $AC\bar{\alpha}(B) = \begin{pmatrix} ah\alpha(c) & ah\alpha(d) + ak\alpha(c) + bh\alpha(c) \\ 0 & ah\alpha(c) \end{pmatrix} = 0$'dır. Sonuç olarak $AT(R, R)\bar{\alpha}B = 0$ olup $S \cong T(R, R)$, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir. Varsayalım ki $n \geq 3$ olsun. $\bar{x} = x + (x^n)$ olmak üzere $f = a_0 + a_1\bar{x} + \ldots + a_{n-1}\bar{x}^{n-1}$, $g = b_0 + b_1\bar{x} + \ldots + b_{n-1}\bar{x}^{n-1} \in S$ için $fg = 0$ olsun. Eğer her i, j için $i + j \geq n$ ise $a_i b_j \bar{x}^{i+j} = 0$'dır. $fg = 0$ olmasından aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$a_0 b_0 = 0 \tag{4.3}$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \tag{4.4}$$

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \tag{4.5}$$

$$\vdots$$

$$a_0 b_{n-2} + a_1 b_{n-3} + \ldots + a_{n-3} b_1 + a_{n-2} b_0 = 0 \tag{4.6}$$

$$a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \ldots + a_{n-2} b_1 + a_{n-1} b_0 = 0 \tag{4.7}$$

Buradan $i + j$ üzerinde tümevarım uygulanır. (4.3) ve (4.4) eşitliği sağdan b_0 ile çarpılırsa; $0 = a_0 b_1 b_0 + a_1 b_0 b_0 = a_1 b_0^2$ olur. Böylece;

$$a_1 b_0 = 0 \qquad ve \qquad a_0 b_1 = 0 \tag{4.8}$$

olur. Benzer şekilde (4.3), (4.8), (4.5) eşitliği sağdan b_0 ile ve (4.5) eşitliği sağdan b_1 ile çarpılırsa $0 = a_0 b_2 = a_1 b_1 = a_2 b_0$ olduğu görülür. $i + j = 0, 1, \ldots, (n-2)$ için $a_i b_j = 0$ olduğunu varsayalım. (4.7) eşitliği sağdan b_0 ile çarpıldığında $0 = a_{n-1} b_0 b_0$ ve buradan $a_{n-1} b_0 = 0$ olup sonuç olarak (4.7) eşitliğinden

$$a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \ldots + a_{n-2} b_1 = 0 \tag{4.9}$$

bulunur. (4.9) eşitliği sağdan b_1 ile çarpıldığında $a_{n-2}b_1b_1 = 0$ ve böylece $a_{n-2}b_1 = 0$ olur. Buradan $a_0b_{n-1} + a_1b_{n-2} + \ldots + a_{n-3}b_2 = 0$ olduğu elde edilir. Aynı yolla devam edildiğinde $i + j = n - 1$ olmak üzere her i, j için $a_ib_j = 0$ olarak bulunur. Sonuç olarak $i + j \leq n - 1$ olacak şekildeki her i, j için $a_ib_j = 0$'dır. Ve böylece R, α-yarıdeğişmeli olduğundan herhangi bir pozitif t tam sayısı için $a_iR\alpha^t(b_j) = 0$ olur. Sonuçta $fR\bar{\alpha}(g) = 0$ olup Hirano (2002)'den $fS\bar{\alpha}(g) = 0$'dır. O halde S, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir. □

Önerme 4.2.15 Başer ve Kwak (2010)

(1) R'nin α-katı halka olması için gerek ve yeter koşul R'nin inmiş, α-yarıdeğişmeli bir halka ve α'nın momomorfizma olmasıdır.

(2) Eğer R terslenebilir α-Armendariz halka ise R, α-yarıdeğişmelidir.

İspat:

(1) Öncelikle R'nin α-katı olduğunu kabul edelim. Hong vd. (2000) tarafından yapılan çalışma gereğince herhangi bir α-katı halkanın inmiş ve α'nın monomorfizma olduğu bilinmektedir. Varsayalım ki $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. O halde $ba = 0$'dır. $ar\alpha(b)\alpha(ar\alpha(b)) = ar\alpha(ba)\alpha(r)\alpha^2(b) = 0$'dır. R, α-katı halka olduğundan $ar\alpha(b) = 0$'dır. Böylece $aR\alpha(b) = 0$ olup R, α-yarıdeğişmelidir.

Diğer yandan R'nin inmiş, α-yarıdeğişmeli bir halka ve α'nın momomorfizma olduğunu varsayalım. $a\alpha(a) = 0$ olsun. O halde $\alpha(a)a = 0$'dır. R'nin inmiş ve α-yarıdeğişmeli olmasından dolayı $\alpha(a)R\alpha(a) = 0$ 'dır. Böylece $\alpha(a^2) = 0$ olup α inmiş R halkasının monomorfizması olduğundan $a = 0$ bulunur. Sonuç olarak R, α-katı halkadır.

(2) $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ olur. Hong vd. (2006) tarafından yapılan çalışmadan $\alpha(b)a = 0$ olduğu elde edilir ve böylece her $r \in R$ için $\alpha(b)ar = 0$'dır. R terslenebilir olduğundan $ar\alpha(b) = 0$'dır. Böylece $aR\alpha(b) = 0$ olup R α-yarıdeğişmelidir.

Bu önermede (2) durumunun tersi genelde doğru değildir. Örnek 4.2.8'de $\alpha(f(x)) = f(a)$ endomorfizması ile tanımlı olan $R = F[x]$ halkası değişmeli bölgedir. Böylece

R, α-yarıdeğişmelidir. Fakat Hong vd. (2006) tarafından yapılan çalışma gereğince α-Armendariz değildir. $\square$

Lemma 4.2.16 Başer ve Kwak (2010)

(1) Eğer R'nin skew polinom halkası $R[x;\alpha]$ yarıdeğişmeli ise R α-yarıdeğişmelidir.

(2) R, α-Armendariz halka olsun. Eğer R, α-yarıdeğişmeli ise R yarıdeğişmelidir.

İspat:

(1) $R[x;\alpha]$ yarıdeğişmeli olsun. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. O halde $aR[x;\alpha]b = 0$ olur. Böylece herhangi bir $r \in R$ için $arxb = ar\alpha(b)x = 0$'dır. Sonuç olarak $ar\alpha(b) = 0$ olup R α-yarıdeğişmelidir.

(2) ab=0 olduğunu varsayalım. R, α-yarıdeğişmeli olduğundan $aR\alpha(b) = 0$'dır. $p = arx, q = b \in R[x;\alpha]$ için $pq = arxb = ar\alpha(b)x = 0$'dır. R, α-Armendariz olduğundan $arb = 0$'dır. Böylece $aRb = 0$ olup R yarıdeğişmelidir. $\square$

Teorem 4.2.17 Başer ve Kwak (2010)

(1) Eğer R, α-Armendariz ise; R'nin α-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x;\alpha]$'nın yarıdeğişmeli olmasıdır.

(2) Eğer R, Armendariz ise; R'nin α-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in α-yarıdeğişmeli olmasıdır.

Sonuç 4.2.18 Rege ve Chhawchharria (1997) gereğince; R; Armendariz olmak üzere, eğer R yarıdeğişmeli ise $R[x]$ yarıdeğişmelidir.

Teorem 4.2.19 $\alpha(1) = 1$ olmak üzere, eğer R, α-yarıdeğişmeli halka ise $R[x;\alpha]$'daki tüm özüslü elemanların kümesi R'nin tüm özüslü elemanlarının kümesi ile kesişir ve $R[x;\alpha]$ abelyandır (Başer and Kwak 2010).

İspat: İlk olarak R'nin abelyan olduğunu gösterelim. e, R'de keyfi bir özüslü eleman olsun. O halde $e(1-e) = 0$ ve $(1-e)e = 0$'dır. R, α-yarıdeğişmeli olduğu için $eR\alpha(1-e) = 0$ ve $(1-e)R\alpha(e) = 0$ olur. Önerme 4.2.7 gereğince $eR(1-e) = 0$

ve $(1-e)Re = 0$ bulunur. Böylece $er(1-e) = 0$ ve $(1-e)re = 0$'dır. Buradan $er = ere = re$ ve böylece R abelyandır. $f^2 = f = e_0 + e_1x + \ldots + e_nx^n \in R[x;\alpha]$ olsun. $f^2 = f$ olmasından aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$e_0^2 = e_0 \tag{4.10}$$

$$e_0e_1 + e_1\alpha(e_0) = e_1 \tag{4.11}$$

$$e_0e_2 + e_1\alpha(e_1) + e_2\alpha^2(e_0) = e_2 \tag{4.12}$$

$$\vdots$$

$$e_0e_n + e_1\alpha(e_{n-1}) + \ldots + e_{n-1}\alpha^{n-1}(e_1) + e_n\alpha^n(e_0) = e_n \tag{4.13}$$

(4.10) eşitiğinden e_0, R'nin merkezinde ve özüslüsü elemanıdır. Buradan $\alpha(e_0) = e_0$ olduğu kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$2e_1e_0 = e_1 \tag{4.14}$$

$$e_0e_2 + e_1\alpha(e_1) + e_2e_0 = e_2 \tag{4.15}$$

$$\vdots$$

$$e_0e_n + e_1\alpha(e_{n-1}) + \ldots + e_{n-1}\alpha^{n-1}(e_1) + e_ne_0 = e_n \tag{4.16}$$

(4.14) eşitliği $(1-e_0)$ ile çarpılırsa $e_1(1-e_0) = 0$ ve böylece $e_1 = 0$ bulunur. (4.15) eşitliğinden $2e_0e_2 = e_2$'dir. Benzer şekilde $2e_0e_2(1-e_0) = e_2(1-e_0)$ olduğundan $e_2 = 0$ olur. Bu şekilde devam edildiğinde $i \geq 1$ için $e_i = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $f = e_0 = (e_0)^2 \in R$ ve böylece $R[x;\alpha]$ abelyandır. $\square$

Sonuç 4.2.20 Eğer R yarıdeğişmeli ise $R[x]$ abelyandır (Başer and Kwak 2010).

Uyarı 4.2.21 R, α-yarıdeğişmeli halka ise $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aR\alpha(b) = 0$ olduğunu biliyoruz. Buradan $a\alpha(b) = 0$'dır. R, α-yarıdeğişmeli halka olduğu için $aR\alpha^2(b) = 0$'dır. Tümevarım hipotezi yardımıyla $aR\alpha^k(b) = 0$ ve $a\alpha^k(b) = 0$ bulunur.

Teorem 4.2.22 Bir R halkasının α-katı olması için gerek ve yeter şart R'nin inmiş, α-yarıdeğişmeli bir halka ve α'nın monomorfizma olmasıdır (Başer *et al.* 2008).

İspat: R, α-katı halka olsun. O halde Hong vd. (2000) tarafından yapılan çalışma gereğince R inmiş ve α monomorfizmadır. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan $ba = 0$ olup keyfi bir $r \in R$ için $ar\alpha(b)\alpha(ar\alpha(b)) = ar\alpha(ba)\alpha(r)\alpha^2(b) = 0$'dır. R, α-katı olduğu için $ar\alpha(b) = 0$ ve böylece $aR\alpha(b) = 0$ olarak bulunur. Sonuç olarak R, α-yarıdeğişmelidir. Aksine $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olduğunu varsayalım. R inmiş ve α-yarıdeğişmeli halka olduğu için $\alpha(a)a = 0$ ve böylece $\alpha(a)R\alpha(a) = 0$'dır. Sonuç olarak α inmiş R halkasının monomorfizması olduğu için $\alpha(a^2) = 0$ ve buradan $a = 0$'dır. Sonuç olarak R halkası α-katıdır. $\square$

Yukarıdaki teoremde yer alan R halkasının inmiş olması ve α'nın monomorfizma olması şartının indirgenemeyeceği aşağıdaki örmekte gösterilmiştir.

Örnek 4.2.23

(1) $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ halkasını ve $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan endomorfizmasını ele alalım. Burada α otomorfizmadır. R'nin inmiş olmadığı ve böylece α-katı olmadığı açıktır.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$$

için $AB = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$'dır. Herhangi bir $\begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix} \in R$ elemanı için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix} \alpha\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ahc & -ahd + akc + bhc \\ 0 & ahc \end{pmatrix}$$

bulunur. $ac = 0$ olduğundan $a = 0$ veya $c = 0$'dır. $a = 0$ ise $bc = 0$ olur. Böylece $AR\alpha(B) = 0$ bulunur. $c = 0$ ise $ad = 0$ olur. Buradan tekrar $AR\alpha(B) = 0$ elde edilir. Böylece R, α-yarıdeğişmelidir.

(2) F bir cisim ve $R = F[x]$ olmak üzere $\alpha : R \to R$, $\alpha(f(x)) = f(0)$ ile tanımlı olsun. O halde R değişmeli bölge olduğundan inmiştir. Fakat α'nın monomorfizma olmadığı açıktır. $f(x), g(x) \in R$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ ise $f(x) = 0$ veya $g(x) = 0$'dır. Ve böylece $f(x) = 0$ veya $\alpha(g(x)) = 0$ olur. Dolayısıyla $f(x)R\alpha(g(x)) = 0$ ve R α-yarıdeğişmelidir. $0 \neq x \in R$ için $x\alpha(x) = 0$ olduğundan R α-katı değildir (Başer *et al.* 2008).

Uyarı 4.2.24 R bölge ise, herhangi bir α endomorfizması için R yarıdeğişmeli ve α-yarıdeğişmelidir. Fakat bölge olmayan α-yarıdeğişmeli bir R halkası vardır.

Önerme 4.2.25 R α-yarıdeğişmeli bir halka olsun. O zaman;

(1) $\alpha(1) = 1$ olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $e \in R$ özüslüsü elemanı için $\alpha(e) = e$ olmasıdır.

(2) Eğer $\alpha(1) = 1$ ise, R Abelyandır (Başer *et al.* 2008).

İspat:

(1) $\alpha(1) = 1$ olsun. Eğer $e^2 = e \in R$ ise $e(1-e) = 0$ ve $(1-e)e = 0$'dır. Buradan R α-yarıdeğişmeli olduğu için $eR\alpha(1-e) = 0$ ve $(1-e)R\alpha(e) = 0$'dır. $eR\alpha(1-e) = 0$'dan $e\alpha(1-e) = 0$ olup $e(1-\alpha(e)) = 0$'dır. Sonuç olarak $e\alpha(e) = e$'dir. Benzer şekilde $(1-e)\alpha(e) = 0$'dan $e\alpha(e) = \alpha(e)$'dir. $e\alpha(e) = e$ olduğundan $\alpha(e) = e$ olarak bulunur. Karşıtı açıktır.

(2) $\alpha(1) = 1$ olduğunu varsayalım. (1)'dekine benzer şekilde $eR\alpha(1-e) = 0$ ve $(1-e)R\alpha(e) = 0$'dır. Böylece (1)'den $eR(1-e) = 0$ ve $(1-e)Re = 0$ olur. Buradan her $r \in R$ için $er(1-e) = 0$ ve $(1-e)re = 0$'dır. Böylece $er = ere = re$'dir. Sonuç olarak R abelyandır. □

Önerme 4.2.25'teki $\alpha(1) = 1$ şartının fazladan olmadığı aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek 4.2.26 Başer vd. (2008) tarafından yapılan çalışmada yer alan

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasını ve

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlı α endomorfizmasını ele alalım. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in R$ için eğer $AB = 0$ ise $aa' = 0$ ve böylece $a = 0$ yada $a' = 0$'dır. Buradan $AR\alpha(B) = 0$'dır. Yani R α-yarıdeğişmelidir. $\alpha(1) \neq 1$ ise R abelyan değildir.

Yarıdeğişmeli bir R halkasının aşikar genişlemesi olan $T(R,R)$ halkası yarıdeğişmeli değildir. Buradan hareketle α-yarıdeğişmeli bir R halkasının $T(R,R)$ aşikar genişlemesinin $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bu ifadenin doğru olmadığını gösteririr.

Örnek 4.2.27 Başer vd. (2008) tarafından yapılan çalışmada yer alan

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad ve \quad R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

olmak üzere R halkası α-yarıdeğişmelidir.

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T(R,R)$$

için $AB = 0$'dır. Fakat $C = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için

$$0 \neq \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = AC\bar{\alpha}(B) \in AT(R,R)\bar{\alpha}B$$

olduğundan $T(R,R)$, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli değildir.

Önerme 4.2.28 R inmiş bir halka olsun. Eğer R α-yarıdeğişmeli halka ise $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli halkadır (Başer *et al.* 2008).

İspat: R halkasının inmiş ve α-yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. İnmiş halkaların yarıdeğişmeli olduğunu ve bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter şart $a, b \in R$ için $ab^2 = 0$ iken $ab = 0$ olması gerektiğini göz önünde bulunduralım.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R,R)$$

için $AB = 0$ olsun. O halde $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$'dır. Böylece

$$0 = ad + bc = (ad + bc)c = bc^2$$

olduğundan $bc = 0$ olur. Buradan $ad = 0$'dır. O zaman $aR\alpha(c) = 0, bR\alpha(c) = 0$ ve $aR\alpha(d) = 0$'dır. Dolayısıyla $C = \begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için

$$AC\bar{\alpha}(B) = \begin{pmatrix} ah\alpha(c) & ah\alpha(d) + ak\alpha(c) + bh\alpha(c) \\ 0 & ah\alpha(c) \end{pmatrix} = 0$$

bulunur. Sonuç olarak $AT(R,R)\bar{\alpha}(B) = 0$ olup $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli halkadır.□

Sonuç 4.2.29 Eğer R, α-katı halka ise $T(R,R)$ $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli halkadır.

Şimdi α-yarıdeğişmeli halkaların matris halkalarıyla ilişkilerinden söz edelim. $S_3(R)$ $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olmayacak şekilde inmiş bir R halkasının var olduğu aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.2.30 Başer vd. (2008) tarafından yapılan çalışmada yer alan değişmeli inmiş $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını ve $\alpha(a,b) = (b,a)$ ile tanımlı otomorfizmasını düşünelim.

$$A = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \in S_3(R)$$

için $AB = 0$ fakat $AA\bar{\alpha}(B) = A \neq 0$ olup $S_3(R)$ $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli değildir.

Bununla birlikte inmiş ve α-yarıdeğişmeli bir R halkası için $S_3(R)$'nin $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olduğu aşağıdaki önermede ifade edilmiştir.

Önerme 4.2.31 R inmiş bir halka olsun. Eğer R, α-yarıdeğişmeli ise $S_3(R)$, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir (Başer *et al.* 2008).

İspat: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & a' & d' \\ 0 & 0 & a' \end{pmatrix} \in S_3(R)$ için $AB = 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$aa' = 0 \tag{4.17}$$

$$ab' + ba' = 0 \tag{4.18}$$

$$ac' + bd' + ca' = 0 \tag{4.19}$$

$$ad' + da' = 0 \tag{4.20}$$

(4.17)'den $aR\alpha(a') = 0$ olur. (4.18) eşitliğinde $(ab' + ba')a' = ba'^2 = 0$ ve böylece $ba' = 0$ ve $ab' = 0$'dır. Benzer şekilde (4.20) eşitliğinden $da' = 0$ ve $ad' = 0$'dır. Ayrıca (4.19) eşitliğinde $0 = (ac' + bd' + ca')a' = ca'^2$ olması $ca' = 0$ ve $ac' + bd' = 0$ olmasını gerektirir. O halde $0 = a(ac' + bd' = a^2c'$ ve böylece $ac' = 0$ ve $bd' = 0$'dır. Sonuç olarak $aR\alpha(a') = 0$, $aR\alpha(b') = 0$, $bR\alpha(a') = 0$, $aR\alpha(c') = 0$, $aR\alpha(d') = 0$, $bR\alpha(d') = 0$, $cR\alpha(a') = 0$ ve $dR\alpha(a') = 0$'dır. Böylece $AS_3(R)\bar{\alpha}(B) = 0$ olup $S_3(R)$, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir. □

Sonuç 4.2.32 R inmiş bir halka ise, $S_3(R)$ yarıdeğişmelidir (Kim and Lee 2003).

Önerme 4.2.31'den $n \geq 4$ için $S_n(R)$ halkasının $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bunun doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.2.33 R α-katı bir halka olmak üzere $\alpha(1) = 1$ olduğu kullanılarak $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_4(R)$ için $AB = 0$'dır. Fakat

$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_4(R)$ için $0 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = AC\bar{\alpha}(B) \in S_4(R)$'dir.

Böylece $AS_4(R)\bar{\alpha}(B) \neq 0$ ve $S_4(R)$, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli değildir. Benzer olarak $n \geq 5$ için $S_n(R)$, $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli değildir.

4.3 Nil Yarıdeğişmeli Halkalar

Bu bölümde iki farklı tanımı yapılan nil-yarıdeğişmeli halka sınıfı tanıtılacaktır. İlk tanım Chen (2011) tarafından yapılmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Qu ve Wei (2014) aynı şekilde tanımlanan nil-yarıdeğişmeli halkaların diğer halka sınıflarıyla ilişkilerini araştırmışlardır. Ayrıca Mohammadi (2012) nil-yarıdeğişmeli halka sınıfının farklı bir tanımını yapmış ve buna bağlı olarak özelliklerini incelemiştir.

Tanım 4.3.1 Chen (2011) bir R halkası; $a, b \in R$ olmak üzere herhangi $r \in R$ için $ab \in nil(R)$ iken $aRb \subseteq nil(R)$ şartını sağlıyorsa bu halkayı *nil-yarıdeğişmeli* olarak adlandırmıştır. Eğer R'nin bir I ideali bu şartı sağlıyorsa bu ideale *nil-yarıdeğişmeli ideal* denir.

Bu halka sınıfı için farklı yazarlar tarafından iki farklı tanım yapıldığından dolayı elde edilen sonuçlar ispatsız olarak kısaca ifade edilecektir. Chen (2011) nil-yarıdeğişmeli halkaların aşağıda ispatsız olarak verilen özelliklerini ifade etmiştir.

(1) Nil-yarıdeğişmeli olmayan, zayıf yarıdeğişmeli bir R halkası vardır. Ayrıca R halkası Armendariz fakat nil-yarıdeğişmeli olmayan bir S homomorfik görüntüsüne sahiptir.

(2) R bir halka ve I, R'nin bir ideali olmak üzere, eğer I ve R/I nil-yarıdeğişmeli ise R nil-yarıdeğişmelidir.

(3) R bir halka ve I, R'nin $nil(R)$'de kapsanan bir ideali olmak üzere, R'nin nil-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart R/I'nin nil-yarıdeğişmeli olmasıdır.

(4) Bir R halkasının nil-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart $UTM_n(R)$ halkasının nil-yarıdeğişmeli olması; ve bunun için gerek ve yeter şart ise $n \geq 2$ için $R[x]/(x^n)$'in nil-yarıdeğişmeli olmasıdır.

(5) $R[x]$ polinom halkası nil-yarıdeğişmeli olmayan bir R halkası vardır.

(6) R nil-yarıdeğişmeli bir halka olsun. Eğer R Armendariz ise $R[x]$ nil-yarıdeğişmelidir.

(7) Nil-yarıdeğişmeli bir R halkası açık olarak sonludur.

(8) R, bir α endomorfizması için α-şartını sağlayan bir halka olsun. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ negatif olmayan tam sayılar ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ R'deki sabit elemanlar olmak üzere $a_1a_2a_3 \ldots a_n = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2) \ldots \alpha^{k_n}(a_n)$ $= 0$ olmasıdır.

(9) R, α-şartını sağlayan bir halka olsun. $a_1a_2a_3 \ldots a_n \in nil(R)$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2) \ldots \alpha^{k_n}(a_n) \in nil(R)$ olmasıdır. Herhangi $a, b \in R$ için $ab \in nil(R)$ olması için gerek ve yeter şart $a\alpha(b) \in nil(R)$ olmasıdır.

(10) R yarıdeğişmeli bir halka ve α R'nin bir endomorfizması olsun. Eğer R, α-şartını sağlıyorsa $nil(R[x; \alpha]) = nil(R)[x; \alpha]$'dır.

(11) R yarıdeğişmeli bir halka olsun. Eğer R, α-şartını sağlıyorsa $R[x; \alpha]$ nil-yarıdeğişmelidir.

(12) R yarıdeğişmeli bir halka ve α bir endomorfizması olsun. Eğer R, α-şartını sağlıyorsa $R[x; \alpha]$ zayıf yarıdeğişmelidir.

Tanım 4.3.2 Qu ve Wei (2011) ise bir R halkasının nil-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şartın herhangi $n \geq 2$ için $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ için $a_1a_2 \ldots a_n \in nil(R)$ iken herhangi $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1} \in R$ için $a_1r_1a_2r_2 \ldots a_{n-1}r_{n-1}a_n \in nil(R)$ olması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Qu ve Wei (2011) nil-yarıdeğişmeli halkalar ile ilgili aşağıda ispatsız olarak ifade edilen özellikleri elde etmişlerdir.

(1) Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

  (a) R nil-yarıdeğişmeli halkadır.

  (b) Herhangi $a \in nil(R)$ için $aR \subseteq nil(R)$'dir.

  (c) Herhangi $a \in nil(R)$ için $Ra \subseteq nil(R)$'dir.

(2) Nil-yarıdeğişmeli halkalar açık olarak sonludur. Ayrıca hem nil-yarıdeğişmeli halkalar hem de 2-primal halkalar açık olarak sonludur.

(3) Eğer R zayıf-yarıdeğişmeli halka ve $e \in E(R)$ ise;

(a) $eR(1-e) \subseteq J(R)$.

(b) Eğer $ReR = R$ ise $e = 1$'dir.

(c) Eğer $M \in M_{ax_r}(R)$ ve $e \in E(R)$ ise ya $e \in M$ yada $1 - e \in M$'dir.

(4) Nil-yarıdeğişmeli bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) $b \in nil(R)$ ve $a \in R$ için $(ba-1)R = R$'dir.

(b) Her bir $e \in E(R)$ için eRe nil-yarıdeğişmelidir.

(c) Eğer R yarıasal halka ise R inmiştir.

(d) Eğer $x, z \in R$ için $x + z \in nil(R)xz$ ise $Rx = Rz$'dir.

(5) Bir R halkasının nil-yarıdeğişmeli halka olması için gerek ve yeter şart herhangi $a, b, c \in R$ için $abc \in nil(R)$ iken herhangi $r_1, r_2 \in R$ için $ar_1cr_2b \in nil(R)$ olmasıdır.

(6) Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) R nil-yarıdeğişmelidir.

(b) Herhangi $n \geq 2$ için $UTM_n(R)$ nil-yarıdeğişmelidir.

(c) $L_3(R)$ nil-yarıdeğişmelidir.

(7) R bir halka ve $e \in E(R)$, R'de sol merkezil eleman olsun. eRe ve $(1-e)R(1-e)$ nil-yarıdeğişmeli ise R nil-yarıdeğişmelidir.

(8) R değişmeli inmiş bir S halkası üzerinde bir cebir ve D, S ile R nin Dorroh genişlemesi olmak üzere, eğer R nil-yarıdeğişmeli ise D'de nil-yarıdeğişmelidir.

(9) Eğer R, nil-yarıdeğişmeli halkaların sonlu ailesinin çarpımsal alt kümesi ise R nil-yarıdeğişmelidir.

Tanım 4.3.3 Mohammadi vd. (2012) $a, b \in Nil(R)$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ oluyorsa R halkasını nil-yarıdeğişmeli olarak adlandırmışlardır.

Aşağıda Mohammadi vd. (2012) tarafından yapılan çalışmada yer alan sonuçlar yer almaktadır.

(1) Her inmiş R halkası için $T_3(R)$ nil-yarıdeğişmelidir fakat yarıdeğişmeli değildir.

(2) Her inmiş R halkası için $V(R)$ nil-yarıdeğişmelidir fakat yarıdeğişmeli değildir.

(3) Her inmiş R halkası için $S(R)$ nil-yarıdeğişmeli fakat yarıdeğişmeli değildir

(4) Eğer R nil-yarıdeğişmeli halka ise $nil(R)$, R'nin idealidir.

(5) Eğer R yarıdeğişmeli bir halka ise $nil(R)$, R'nin idealidir.

(6) Nil-yarıdeğişmeli halkalar 2-primaldir.

(7) Nil-yarıdeğişmeli halkalar nil-Armendarizdir.

(8) Nil-yarıdeğişmeli halkalar zayıf-Armendarizdir.

(9) Nil-yarıdeğişmeli halkaların sonlu çarpımları da nil-yarıdeğişmelidir.

(10) R'nin nil-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $M^{-1}R$'nin nil-yarıdeğişmeli olmasıdır.

(11) Bir R halkası için $R[x]$'in nil-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x; x^{-1}]$'in nil-yarıdeğişmeli olmasıdır.

(12) R yarıasal sağ Goldie halkası için aşağıdakiler denktir:

 (a) R inmiştir.

 (b) R yarıdeğişmelidir.

 (c) R nil-yarıdeğişmelidir.

 (d) Q inmiştir.

 (e) Q yarıdeğişmelidir.

 (f) Q bölümlü halkaların sonlu direkt çarpımıdır.

(13) Yarıasal bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

 (a) R inmiştir.

(b) R simetriktir.

(c) R terslenebilirdir.

(d) R yarıdeğişmelidir.

(e) R nil-yarıdeğişmelidir.

(f) R 2-primaldir.

(14) Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(a) R nil-yarıdeğişmelidir.

(b) Her bir $U \subseteq nil(R)$ için $r_{nil(R)}(U)$, R'nin idealidir.

(c) Her bir $V \subseteq nil(R)$ için $l_{nil(R)}(V)$, R'nin idealidir.

(15) R nil-yarıdeğişmeli halka olsun. O halde

(a) Her bir $U \subseteq nil(R)$ için $R/r_{nil(R)}(U)$ nil-yarıdeğişmelidir.

(b) Her bir $V \subseteq nil(R)$ için $R/l_{nil(R)}(V)$ nil-yarıdeğişmelidir.

(16) Eğer R nil-yarıdeğişmeli ise $nil(R[x]) \subseteq nil(R)[x]$'tir.

(17) Eğer R nil-yarıdeğişmeli ise $nil(R[x]) = nil(R)[x]$'tir.

(18) Eğer R yarıdeğişmeli ise $nil(R[x]) = nil(R)[x]$'tir.

(19) Eğer R nil-yarıdeğişmeli ve Armendariz ise $R[x]$ nil-yarıdeğişmelidir.

4.4 Merkezil Yarıdeğişmeli Halkalar

Bu bölümde Wang ve Wei (2014) tarafından yapılan çalışmada, halkanın merkezi kullanılarak tanımlanan yarıdeğişmeli halkaların bir başka genişlemesi olan merkezil yarıdeğişmeli halka sınıfı tanıtılacak ve kısaca özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 4.4.1 Herhangi $a, b, r \in R$ için $ab = 0$ iken $arb \in Z(R)$ oluyorsa R halkası *merkezil yarıdeğişmeli* olarak adlandırılır.

Wang ve Wei (2014) tarafından yapılan çalışmada elde edilen sonuçlar ispatsız olarak aşağıda verilmiştir.

(1) Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(a) Herhangi $0 \neq a \in nil(R)$ için $aR \subseteq nil(R)$

(b) Herhangi $0 \neq a \in nil(R)$ ve $r_1, r_2 \in R$ için $r_1 a r_2 \in nil(R)$

(c) R nil-yarıdeğişmelidir.

(2) Merkezil yarıdeğişmeli halkalar nil-yarıdeğişmelidir.

(3) R nil-yarıdeğişmeli olsun. O zaman;

$$V_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad : \ a_{ij} \in R, 1 \leq i \leq j \leq n \right\}$$

halkasıda nil-yarıdeğişmelidir.

(4) R halkasının merkezil yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart R'nin abelyan ve herhangi $e \in R$ eşkaresi için er ve $(1-e)R$'nin her ikisinin de merkezil yarıdeğişmeli olmasıdır.

(5) Eğer R inmiş ise merkezil yarıdeğişmelidir. Tersi ise R aşağıdaki şartlardan herhangi birini sağladığında geçerlidir.

(a) R yarıasal halkadır.

(b) R sağ(sol) projektif halkadır.

(c) R sağ(sol) quasi-Baer halkadır.

(6) I bir R halkasının ideali olsun. Eğer I inmiş ise ve R/I merkezil yarıdeğişmeli bir halka ise R merkezil yarıdeğişmelidir.

(7) R Armendariz halka olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(a) R merkezil yarıdeğişmelidir.

(b) $R[x]$ merkezil yarıdeğişmelidir.

4.5 Güçlü Yarıdeğişmeli Halkalar

R halkası yarıdeğişmeli iken $R[x]$'in yarıdeğişmeli olmadığı Huh vd. (2002)'nin çalışmalarında gösterilmiştir. Rege ve Chhawcharria (1998)'nın çalışmalarında ise R yarıdeğişmeli iken R'nin Armendariz olması durumunda $R[x]$'in yarıdeğişmeli olduğu gösterilmiştir.

Bu bölümde Kwak vd. (2012) tarafından tanımlanan polinom halkası yarıdeğişmeli olan halka sınıfı, yani güçlü yarıdeğişmeli halka sınıfı tanıtılarak özellikleri ayrıntılı olarak incelenecektir.

Tanım 4.5.1 Kwak vd. (2012) bir R halkasının $R[x]$ polinom halkası yarıdeğişmeli ise R halkasını *güçlü yarıdeğişmeli halka* olarak adlandırmışlardır. Yani $f(x), g(x) \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ iken $f(x)R[x]g(x) = 0$ oluyorsa R halkasına *güçlü yarıdeğişmeli halka* denir.

Uyarı 4.5.2

(1) Güçlü yarıdeğişmeli halkaların sınıfı alt halkalar ve direk çarpımlar altında kapalıdır.

(2) İnmiş halkalar Armendariz ve yarıdeğişmeli olduğu için polinom halkaları yarıdeğişmelidir. Böylece inmiş halkalar güçlü yarıdeğişmelidir. Fakat Kim ve Lee (2003) tarafından verilen bir örnekten dolayı terslenebilir olan bir halka güçlü yarıdeğişmeli olmayabilir.

R güçlü yarıdeğişmeli iken $R[x]$ yarıdeğişmelidir. Yarıdeğişmeli halkaların alt halkaları da yarıdeğişmeli olduğundan R yarıdeğişmeli olur. Fakat Huh vd. (2002) tarafından yapılan çalışma gereğince bu ifadenin karşıtı doğru değildir.

(3) İnmiş halkalar hem simetrik hem de güçlü yarıdeğişmelidir. Güçlü yarıdeğişmeli halkalar ve simetrik halkalar da yarıdeğişmelidir. Fakat simetrik halkalar ve güçlü yarıdeğişmeli halkaların bağımsız olduğu aşağıdaki iki örnekte ifade edilmiştir.

Örnek 4.5.3

(1) D basit bir bölge ve $F = D[a,b,c]$ K üzerindeki değişmeli olmayan a,b,c bilinmeyenleri tarafından üretilen serbest cebir olsun.

$$I = (FaF)^2 + (FbF)^2 + (FcF)^2 + FabcF + FbcaF + FcabF \subseteq F$$

ve $R = F/I$ olsun. R simetrik değildir fakat güçlü terslenebilirdir. O zaman R güçlü yarıdeğişmelidir.

(2) $A = Z_2[a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,c]$, Z_2 üzerindeki değişmeli olmayan $a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,$ b_2,c bilinmeyenleri ile polinomların serbest cebiri olsun. $r,r_1,r_2,r_3,r_4 \in A$ olmak üzere I, $(Z_2 + A)$'nın;
$a_0b_0, a_0b_1+a_1b_0, a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0, a_1b_2+a_2b_1, a_2b_2, a_0rb_0, a_2rb_2, b_0a_0, b_0a_1+b_1a_0,$ $b_0a_2+b_1a_1+b_2a_0, b_1a_2+b_2a_1, b_2a_2, b_0ra_0, b_2ra_2, (a_0+a_1+a_2)r(b_0+b_1+b_2), (b_0+$ $b_1+b_2)r(a_0+a_1+a_2), r_1r_2r_3r_4$
tarafından üretilen ideali olmak üzere $R = (Z_2 + A)/I$ olsun. R ne güçlü yarıdeğişmelidir ne terslenebilirdir. Fakat simetriktir.

Kim ve Lee (2003) R halkası terslenebilir iken $T(R,R)$'nin yarıdeğişmeli olmak zorunda olmadığını göstermişlerdir. Böylece $T(R,R)$ güçlü yarıdeğişmeli değildir. Aşağıdaki önermede $T(R,R)$'nin güçlü yarıdeğişmeli olması için bir karakterizasyon verilmiştir.

Önerme 4.5.4 R yarıasal bir halka olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R güçlü yarıdeğişmelidir.

(2) $T(R,R)$ güçlü yarıdeğişmelidir.

(3) Herhangi pozitif n tamsayısı için $R[x]/(x^n)$ güçlü yarıdeğişmelidir.

Kwak (2012) tarafından ifade edilen aşağıdaki örnek yarıdeğişmeli bir halkanın homomorfik görüntüsünün yarıdeğişmeli olmadığını gösterir.

Örnek 4.5.5 D bir bölümlü halka ve $A = D[s,t]$ değişmeli olmayan s,t değişkenleri üzerinde serbest cebir olsun. O halde A'nın bir bölge olduğu açıktır. Böylece A hem Armendariz hemde yarıdeğişmelidir. $\bar{R} = A/(s^2)$ bölüm halkasını gözönüne alalım. $\bar{a} = a + (s^2)$ olmak üzere $\bar{s}\bar{s} = 0$ fakat $\bar{s}R\bar{s} \neq 0$ olduğundan R yarıdeğişmeli değildir.

Güçlü yarıdeğişmeli halkaların homomorfik görüntüsü de güçlü yarıdeğişmeli olmak zorunda değildir. Örnek 4.5.5'te verilen A ve R halkaları için A'nın güçlü yarıdeğişmeli olduğu fakat R'nin yarıdeğişmeli ve güçlü yarıdeğişmeli olmadığı görülür.

Önerme 4.5.6

(1) R güçlü yarıdeğişmeli bir halka olsun. Eğer A, R'nin boştan farklı bir alt kümesinin tek taraflı sıfırlayanı ise R/A güçlü yarıdeğişmelidir.

(2) R halkasının bir I ideali için R/I güçlü yarıdeğişmeli olmak üzere eğer I inmiş birimsiz bir halka ise R güçlü yarıdeğişmelidir.

İspat:

(1) $\emptyset \neq S \subseteq R$ olmak üzere, güçlü yarıdeğişmeli bir R halkası için $A = r_R(S)$ olsun. R yarıdeğişmeli olduğu için A idealdir. $\bar{R} = R/A$ olmak üzere $\bar{f}(x), \bar{g}(x) \in \bar{R}[x]$ için $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{0}$ olsun. O halde $Sf(x)g(x) = 0$ olup $Sf(x)Rg(x) = 0$ olur. Böylece $\bar{f}(x)\bar{R}\bar{g}(x) = \bar{0}$ ve R/A güçlü yarıdeğişmelidir. Sol sıfırlayan için de ispat benzer şekilde gösterilebilir.

(2) $f(x), g(x) \in R[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olsun.
$g(x)If(x) \subseteq I[x]$,$(g(x)If(x))^2 = 0$ ve I inmiş olduğu için $f(x)Rg(x) \subseteq I[x]$ ve $g(x)If(x) = 0$'dır. Böylece $(f(x)Rg(x)I)^2 = f(x)Rg(x)If(x)Rg(x)I = 0$ ve böylece $f(x)Rg(x)I = 0$'dır. $f(x)Rg(x) \subseteq I[x]$ olduğundan $(f(x)Rg(x))^2 \subseteq f(x)Rg(x)I = 0$'dır. $I[x]$ inmiş olduğu için $f(x)Rg(x) = 0$'dır. Sonuç olarak R güçlü yarıdeğişmelidir. □

Önerme 4.5.6'daki I'nın inmiş olma şartının düşürülemeyeceği aşağıdaki örnekte gösterilecektir.

Örnek 4.5.7 F bir cisim olmak üzere güçlü yarıdeğişmeli olmayan bir $R = U_2(F)$ halkasını düşünelim. R'nin sıfırdan farklı özidealleri sadece

$$I_1 = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

idealleridir. O halde R/I_1 ve R/I_2, F'ye izomorftur ve

$$R/I_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I_3 : a, c \in F \right\}$$

inmiş bir halkadır. Ve böylece her bir $i = 1, 2, 3$ için R/I_i güçlü yarıdeğişmelidir. Burada I_i idealleri inmiş değildir.

Önerme 4.5.8 R güçlü yarıdeğişmeli halkaların direkt toplamı olsun. O zaman R güçlü yarıdeğişmelidir.

Teorem 4.5.9 R halkasının güçlü yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart $R[x]$'in güçlü yarıdeğişmeli olmasıdır.

İspat: R'nin ideal-Armendariz olduğunu varsayalım. $p(y) = f_0 + f_1(y) + \ldots + f_m y^m$, $q(y) = g_0 + g_1(y) + \ldots + g_n y^n \in (R[x])(y)$ olmak üzere $p(y)q(y) = 0$ olsun. Her bir $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_{i_0}, \ldots, a_{i_w}, b_{j_0}, \ldots, b_{j_v} \in R$ olmak üzere $f_i = a_{i_0} + a_{i_1}x + \ldots + a_{w_i}x^{i_w}$, $g_j = b_{j_0} + b_{j_1}x + \ldots + b_{j_v}x^{j_v}$'yi ele alalım. $k = \sum_{i=0}^{m} deg(f_i) + \sum_{j=0}^{n} deg(g_j)$ olsun. $p(x^k) = f_0 + f_1(x^k) + \ldots + f_m x^{km}$ ve $q(x^k) = g_0 + g_1(x^k) + \ldots + g_n x^{kn}$'dir. Sırasıyla f_i'nin ve g_j'nin katsayıları $p(x^k)$ ve $q(x^k)$'nın katsayılarına denk olarak düşünülebilir. $p(y)q(y) = 0$ olduğundan x, $R[x]$'te R'nin elemanları ile yer değişir. Ve $R[x]$'te $p(x^k)q(x^k) = 0$'dır. R halkası güçlü yarıdeğişmeli olduğu için herhangi $0 \leq k \leq m + n$ ve her l_i, s_j için $\sum_{i+j=k} f_i R[x] g_j = 0$ ve $p(y)R[x]q(y) = 0$ olup $R[x]$ güçlü yarıdeğişmelidir. □

Önerme 4.5.10 M, R'nin merkezil düzenli elemanlarını içeren çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. O halde R'nin güçlü yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart $M^{-1}R$'nin güçlü yarıdeğişmeli olmasıdır.

İspat: R'nin güçlü yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim.

$$F[x] = u^{-1}f(x),\ G[x] = v^{-1}g(x) \in (M^{-1}R)[x]$$

için $F[x]G[x] = 0$ olsun. Buradan $f(x)g(x) = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. R güçlü yarıdeğişmeli olduğundan $f(x)Rg(x) = 0$ ve böylece herhangi bir s düzenli elemanı için $f(x)(S^{-1}R)g(x) = 0$'dır. Buradan $F[x](M^{-1}(R))G[x] = 0$ olup $M^{-1}R$'nin güçlü yarıdeğişmelidir. □

Sonuç 4.5.11 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(1) R güçlü yarıdeğişmeli halkadır.

(2) $R[x]$ güçlü yarıdeğişmeli halkadır.

(3) $R[x; x^{-1}]$ güçlü yarıdeğişmeli halkadır.

Önerme 4.5.12

(1) R halkasının merkezil bir e eşkaresi için, R'nin güçlü yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart eR ve $(1-e)R$'nin güçlü yarıdeğişmeli olmasıdır.

(2) R değişmeli S bölgesi üzerinde bir cebir ve D, R ile S'nin Dorroh genişlemesi olsun. O halde R'nin güçlü yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart D'nin güçlü yarıdeğişmeli olmasıdır.

5 SKEW P0LİNOM HALKASININ YARIDEĞİŞMELİLİĞİ

Bu bölüm; tez çalışmasının orijinal bölümünü oluşturmaktadır. Başer vd. (2015) tarafından elde edilen sonuçlar ayrıntılı biçimde sunulacaktır. Bu bölümde ilk olarak skew polinom halkası yarıdeğişmeli olan halkaların sınıfı tanıtılarak özellikleri ifade edilecektir. Daha sonra bu halka sınıfının diğer halka sınıflarıyla ilişkisi incelenecektir.

5.1 Güçlü α-Yarıdeğişmeli Halkalar ve Özellikleri

Aşağıdaki örnekte, bir halkanın yarıdeğişmeli olma özelliğinin skew polinom halkasına taşınmadığı ifade edilmiştir.

Örnek 5.1.1 Bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını ele alalım. R inmiş olduğu için yarıdeğişmelidir. R'nin $\alpha(a, b) = (b, a)$ ile tanımlı α endomorfizmasını ele alalım. $p(x) = (1, 0)$ ve $q(x) = (0, 1)x \in R[x; \alpha]$ için $p(x)q(x) = (1, 0)(0, 1)x = 0$ iken $p(x)xq(x) = (1, 0)x(0, 1)x = (1, 0)\alpha((0, 1))x^2 = (1, 0)(1, 0)x^2 = (1, 0)x^2 \neq 0$ olduğundan $p(x)R[x; \alpha]q(x) \neq 0$ olup $R[x; \alpha]$ yarıdeğişmeli değildir.

Yukarıda verilen örneğin bir sonucu olarak aşağıdaki tanım ifade edilmiştir.

Tanım 5.1.2 Bir R halkasının $\alpha(1) = 1$ özelliğine sahip bir α endomorfizması için $R[x; \alpha]$ yarıdeğişmeli ise R'ye *güçlü α-yarıdeğişmeli halka* denir.

Her güçlü α-yarıdeğişmeli halka yarıdeğişmeli ve böylece Abelyandır. Güçlü α-yarıdeğişmeli bir halkanın $\alpha(S) \subseteq S$ olacak şekildeki her S alt halkası da güçlü α-yarıdeğişmelidir. α; D'nin bir monomorfizması olmak üzere her D bölgesi için, D α-katı olduğundan, $D[x; \alpha]$ inmiş ve böylece yarıdeğişmeli olup D güçlü α-yarıdeğişmelidir.

Bir R halkasının terslenebilirliği $R[x; \alpha]$ skew polinom halkasına taşınamadığı için Jin vd. (2017) terslenebilir halkaların bir genişlemesi olan güçlü α-terslenebilir halka sınıfını tanımlamışlardır. $R[x; \alpha]$ skew polinom halkası terslenebilir olan bir R halkası *güçlü α-terslenebilir* olarak adlandırılmıştır. Uyarı 3.1.7'de ifade edilen terslenebilir ve yarıdeğişmeli halkalar arasındaki ilişkinin benzeri bu halka sınıflarının genişletilmişleri arasında da mevcuttur.

Uyarı 5.1.3 Herhangi güçlü α-terslenebilir halka güçlü α-yarıdeğişmelidir. Fakat bu gerektirmenin karşıtının doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 5.1.4 $R = \mathbb{Z}[t]$ polinom halkasını ve $f(t) \in R$ olmak üzere $\alpha(f(t)) = f(0)$ ile tanımlanan $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını gözönüne alalım. Jin vd. (2017) tarafından yapılan çalışma gereğince R güçlü α-terslenebilir değildir.

Şimdi R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. Her i, j için $f_i(t), g_j(t) \in R$ olmak üzere $p(x) = f_0(t)+f_1(t)x+\ldots+f_m(t)x^m, q(x) = g_0(t)+g_1(t)x+\ldots+g_n(t)x^n \in R[x;\alpha]$ için $p(x)q(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. Burada genelliği bozmaksızın $p(x) \neq 0$ kabul edilir.

1.durum: Kabul edelim ki $f_0(t) \neq 0$ olsun. $p(x)q(x) = 0$ olduğu kullanılarak sabit terim $f_0(t)g_0(t) = 0$ olup R bir bölge olduğundan $g_0(t) = 0$ bulunur. x'li terimin katsayısı $f_0(t)g_1(t) + f_1(t)\alpha(g_0(t)) = 0$ olup $g_0(t) = 0$ yerine yazılırsa $f_0(t)g_1(t) = 0$ olur. Buradan $g_1(t) = 0$ elde edilir. x^2'li terimin katsayısından $f_0(t)g_2(t) + f_1(t)\alpha(g_1(t))+f_2(t)\alpha^2(g_0(t)) = 0$ olup $g_2(t) = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $g_0(t) = g_1(t) = \ldots = g_n(t) = 0$ yani $q(x) = 0$ olur. Böylece $p(x)R[x;\alpha]q(x) = 0$ olup R güçlü α-yarıdeğişmelidir.

2.durum: $0 < k \leq m$ olmak üzere $f_0(t) = f_1(t) = \ldots = f_{k-1}(t) = 0$ olacak şekilde $f_k(t) \neq 0$ var olduğunu kabul edelim. x^k'lı terimin katsayısından

$$f_0(t)g_k(t) + f_1(t)\alpha(g_{k-1}(t)) + \ldots + f_{k-1}(t)\alpha^{k-1}(g_1(t)) + f_k(t)\alpha^k(g_0(t)) = 0$$

olup kabulden $f_k(t)\alpha^t(g_0(t)) = 0$ bulunur. $f_k(t) \neq 0$ ve R bir bölge olduğundan $\alpha^k(g_0(t)) = 0$ ve bundan dolayı $\alpha(g_0(t)) = 0$ elde edilir. x^{k+1}'li terimin katsayısından

$$f_0(t)g_{k+1}(t) + f_1(t)\alpha(g_k(t)) + \ldots + f_k(t)\alpha^k(g_1(t)) + f_{k+1}(t)\alpha^{k+1}(g_0(t)) = 0$$

olup kabulden $f_k(t)\alpha^k(g_1(t)) = 0$ bulunur. Yukarıdaki argümana benzer olarak $\alpha^k(g_1(t)) = \alpha(g_1(t)) = 0$ bulunur. Bu şekilde devam edilerek her $0 \leq j \leq n$ için $\alpha(g_j(t)) = 0$ elde edilir. Böylece $xq(x) = 0$ bulunur. Sonuç olarak herhangi $r \in R$ ve $s \geq 0$ için $p(x)(rx^s)q(x) = 0$ bulunur. Ayrıca $p(x)rq(x) = rp(x)q(x) = 0$ olduğuna dikkat edilir. Sonuç olarak 1.durum ve 2.durumdaki hesaplamalar gözönüne alındığında $p(x)R[x;\alpha]q(x) = 0$ olup R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olduğu açıktır.

Uyarı 5.1.5 Yukarıdaki örnekten de görüleceği gibi güçlü α-yarıdeğişmeli bir halkanın α endomorfizması monomorfizma olmak zorunda değildir.

Önerme 5.1.11'de güçlü α-yarıdeğişmeli halka sınıfının bazı genişletilmiş Armendariz halka sınıflarıyla ilişkileri incelenmektedir. Öncelikle bu genişletilmiş Armendariz halka sınıflarının tanımlarını verelim.

Tanım 5.1.6 R bir halka olmak üzere; R halkası Armendariz ve yarıdeğişmeli ise *ideal-Armendariz* olarak adlandırılır. Açık olarak inmiş halkalar ideal-Armendarizdir.

Tanım 5.1.7 R bir halka, α, R'nin bir endomorfizması ve $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ olmak üzere $p(x)q(x) = 0$ iken her $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_i \alpha^i(b_j) = 0$ oluyorsa R *α-skew Armendariz* olarak adlandırılır. (Hong *et al.* 2003).

Tanım 5.1.8 R bir halka, α, R'nin bir endomorfizması ve $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ olmak üzere $p(x)R[x;\alpha]q(x) = 0$ iken $a_i R \alpha^i(b_j) = 0$ oluyorsa R *α-skew quasi-Armendariz* olarak adlandırılır (Hong *et al.* 2010).

Uyarı 5.1.9 Herhangi bir α-katı R halkası için $R[x;\alpha]$ inmiştir ve Armendariz (1974) gereğince Armendariz olup R, α-skew Armendariz'dir. Diğer yandan $R[x;\alpha]$ inmiş olduğundan yarıdeğişmeli olup R güçlü α-yarıdeğişmelidir. Bu bilgilerin ışığında α-skew Armendariz ve güçlü α-yarıdeğişmeli halkaların ilişkili olduğu düşünülebilir. Fakat Huh vd. (2002) ve Rege ve Chhawchharia (1997) tarafından elde edilen sonuçlar gereğince bu halka sınıfları birbirinden bağımsızdır.

Uyarı 5.1.10 α herhangi bir R halkasının bir epimorfizması olmak üzere R α-skew Armendariz iken α-skew quasi-Armendariz'dir.

Aşağıdaki önermede güçlü α-yarıdeğişmeli halkaların yarıdeğişmeli ve α-yarıdeğişmeli halkalarla ilişkileri incelenmektedir. Ayrıca Uyarı 5.1.10'un karşıtının hangi koşullarda sağlandığı araştırılmıştır.

Önerme 5.1.11

(1) R güçlü α-yarıdeğişmeli bir halka ise, R hem yarıdeğişmeli hem de α-yarıdeğişmelidir.

(2) R α-skew Armendariz bir halka ve α, R'nin bir epimorfizması olsun. R'nin yarıdeğişmeli ve α-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olmasıdır.

(3) R güçlü α-yarıdeğişmeli bir halka ve α, R'nin bir epimorfizması olsun. R'nin α-skew Armendariz olması için gerek ve yeter şart R'nin α-skew quasi-Armendariz olmasıdır.

(4) R güçlü α-yarıdeğişmeli bir halka ise herhangi $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$'dir.

İspat:

(1) R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. Herhangi $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Kabulden herhangi $r \in R[x;\alpha]$ için $arb = 0$ ve buradan $aRb = 0$ olup R yarıdeğişmelidir. Diğer yandan $sx \in R[x;\alpha]$ için ve $asxb = 0$ ve $as\alpha(b)x = 0$ olup $aR\alpha(b) = 0$ olarak bulunur. Böylece R α-yarıdeğişmelidir.

(2) α, R'nin bir epimorfizması olmak üzere R'nin α-skew Armendariz olduğunu kabul edelim. Yeter koşul için ispat (1)'den açıktır. Gerek koşul için ispat yapmak yeterlidir. Bunun için R'nin yarıdeğişmeli ve α-yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olduğunu göstermek için $p(x)q(x) = 0$ olacak şekilde $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ alalım. R'nin α-skew Armendariz olduğu kullanılarak her i, j için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ bulunur. R yarıdeğişmeli olduğundan $a_iR\alpha^i(b_j) = 0$ olur. R α-yarıdeğişmeli olduğu için $0 < t \leq m$ olmak üzere $a_iR\alpha^{t+i}(b_j) = 0$ olup buradan $(a_ix^i)(Rx^t)(b_j) = 0$ elde edilir. Böylece herhangi $c \in R$ için $p(x)(cx^t)q(x) = 0$ olup sonuç olarak $p(x)R[x;\alpha]q(x) = 0$ olduğundan R güçlü α-yarıdeğişmelidir.

(3) R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli ve α'nın bir epimorfizma olduğunu kabul edelim. Uyarı 5.1.10 gereğince gerek koşulun ispatı açıktır. Yeter koşulu ispatlamak için R'nin α-skew quasi-Armendariz olduğunu kabul edelim. $p(x)q(x) = 0$ olacak şekilde $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$ olsun. R güçlü α-yarıdeğişmeli olduğundan $p(x)R[x;\alpha]q(x) = 0$ olup R'nin α-skew quasi-Armendariz olduğu kullanılarak her i, j için $a_iR\alpha^i(b_j) = 0$ bulunur. Sonuç olarak $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olup R α-skew Armendarizdir.

(4) R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $R[x;\alpha]$ yarıdeğişmeli olduğundan Abelyandır. Böylece herhangi $e^2 = e \in R[x;\alpha]$ için $xe = ex$. Diğer taraftan $xe = \alpha(e)x$ dir. Böylece $\alpha(e) = e$ elde edilir. $\square$

Aşağıdaki örnekte, Önerme 5.1.11 (1)'in karşıtının doğru olmadığı ve (2)'de halkanın α-skew Armendariz olma şartı kaldırıldığında ifadenin sağlanmadığı gösterilmiştir.

Örnek 5.1.12 $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki değişmeli olmayan $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ bilinmeyenleri ile birlikte $A = \mathbb{Z}_2[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c]$ polinomların bir serbest cebiri ve α;

$$\alpha(a_0) = b_0, \alpha(a_1) = b_1, \alpha(a_2) = b_2, \alpha(b_0) = a_0, \alpha(b_1) = a_1, \alpha(b_2) = a_2, \alpha(c) = c$$

ile tanımlı A'nın bir otomorfizması ve B, A'daki sıfır sabit terimli tüm polinomların kümesi olsun. $r, r_1, r_2, r_3, r_4 \in B$ olmak üzere I, A'nın a_0b_0, $a_0b_1 + a_1b_0$, $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$, $a_1b_2 + a_2b_1$, a_2b_2, a_0rb_0, a_2rb_2, b_0a_0, $b_0a_1 + b_1a_0$, $b_0a_2 + b_1a_1 + b_2a_0$, $b_1a_2 + b_2a_1$, b_2a_2, b_0ra_0, b_2ra_2, $(a_0 + a_1 + a_2)r(b_0 + b_1 + b_2)$, $(b_0 + b_1 + b_2)r(a_0 + a_1 + a_2)$, a_0a_0, a_2a_2, a_0ra_0, a_2ra_2, b_0b_0, b_2b_2, b_0rb_0,b_2rb_2, $r_1r_2r_3r_4$, $a_0a_1 + a_1a_0$, $a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0$, $a_1a_2 + a_2a_1$, $b_0b_1 + b_1b_0$, $b_0b_2 + b_1b_1 + b_2b_0$, $b_1b_2 + b_2b_1$, $(a_0 + a_1 + a_2)r(a_0 + a_1 + a_2)$, $(b_0+b_1+b_2)r(b_0+b_1+b_2)$ tarafından üretilen ideali olmak üzere $B^4 \subseteq I$ olduğu açıktır. $R = A/I$ olsun. $\alpha(I) \subseteq I$ olduğundan $s \in A$ için R'nin $\sigma(s+I) = \alpha(s)+I$ ile tanımlı σ otomorfizması elde edilebilir. Burada $\sigma^2 = 1_R$'dir. A'nın her elemanını R'deki görüntüsüyle basitçe belirleyebiliriz. Kim vd. (2014) tarafından yapılan çalışma gereğince R hem yarıdeğişmeli hem de α-yarıdeğişmelidir. Fakat R ne güçlü α-yarıdeğişmeli nede α-skew Armendarizdir. $a_0+a_1x^2+a_2x^4$, $b_0+b_1x^2+b_2x^4 \in R[x;\sigma]$ için,

$$(a_0 + a_1x^2 + a_2x^4)(b_0 + b_1x^2 + b_2x^4) = 0$$

olur. Fakat $a_0ca_1 + a_1ca_0 \neq 0$ olduğu için;

$$(a_0 + a_1x^2 + a_2x^4)cx(b_0 + b_1x^2 + b_2x^4)$$

$$= (a_0 + a_1x^2 + a_2x^4)c(\alpha(b_0) + \alpha(b_1)x^2 + \alpha(b_2)x^4)x$$

$$= (a_0 + a_1x^2 + a_2x^4)(a_0 + a_1x^2 + a_2x^4) \neq 0$$

olup $R[x;\sigma]$ yarıdeğişmeli değildir. Ayrıca

$$(a_0 + a_1x^2 + a_2x^4)(b_0 + b_1x^2 + b_2x^4) = 0$$

eşitliğinden $a_0b_1 \neq 0$ olup R α-skew Armendariz değildir.

Önerme 5.1.11'in bir sonucu olarak, α endomorfizması birim endomorfizma alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.13

(1) R güçlü α-yarıdeğişmeli halka ise Abelyandır.

(2) R halkası Armendariz iken R'nin yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul R'nin güçlü yarıdeğişmeli olmasıdır.

(3) R halkası güçlü yarıdeğişmeli iken R'nin Armendariz olması için gerek ve yeter koşul R'nin quasi-Armendariz olmasıdır.

İspat:

(1) R güçlü α-yarıdeğişmeli iken Önerme 5.1.11(1) gereğince yarıdeğişmeli olup böylece R Abelyandır.

(2) R Armendariz olsun. R güçlü yarıdeğişmeli bir halka iken yarıdeğişmeli olduğu açıktır. R'nin yarıdeğişmeli olması durumunda ise R Armendariz olduğundan $R[x]$ yarıdeğişmeli olup R güçlü yarıdeğişmelidir.

(3) Kabul edelim ki R güçlü yarıdeğişmeli ve Armendariz olsun. $f(x)R[x]g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ alalım. Bu durumda $f(x)g(x) = 0$ olup R Armendariz olduğundan $a_i b_j = 0$ bulunur. R güçlü yarıdeğişmeli olduğu için $a_i R[x] b_j = 0$ olur. Özel olarak $a_i R b_j = 0$ olup R quasi-Armendarizdir. $\square$

Aşağıdaki önermede, bir halkanın güçlü α-yarıdeğişmeli olma özelliğinin direkt toplam ile direkt çarpıma taşınabildiği ve güçlü α-yarıdeğişmeli olması için bazı karakterizasyonlar ifade edilmiştir. Öncelikle aşağıda bazı kavramların tanımlarını hatırlatalım. $J(R)$, R'nin Jacobson radikali olmak üzere $R/J(R)$ bir bölümlü halka ise R halkası *yerel* (*local*) olarak adlandırılır. $R/J(R)$ yarıbasit (semisimple) Artinian ise R ye *yarıyerel* (*semilocal*) denir. R yarıyerel ve eşkareleri modülo $J(R)$'ye göre yükseltilebiliyorsa R *yarıtam* (*semiperfect*) olarak adlandırılır. Yerel halkalar Abelyan ve yarıyereldir.

Önerme 5.1.14

(1) Her bir $\gamma \in \Gamma$ için σ_γ, R_γ'nın bir endomorfizması olmak üzere aşağıdakiler denktir:

  (i) Her bir $\gamma \in \Gamma$ için R_γ güçlü σ_γ-yarıdeğişmelidir.

  (ii) $\gamma \in \Gamma$ için $\prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ güçlü σ-yarıdeğişmelidir.

  (iii) $\gamma \in \Gamma$ için R_γ'ların direk toplamı güçlü σ-yarıdeğişmelidir

(2) R bir halka olmak üzere herhangi $e^2 = e \in R$ için $\sigma(e) = e$ şartını sağlayan σ R'nin bir endomorfizması olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

  (i) R'nin güçlü σ-yarıdeğişmeli ve yarıtam olması için gerek ve yeter koşul R'nin lokal güçlü σ_γ-yarıdeğişmeli halkaların sonlu direkt toplamı olmasıdır.

  (ii) e bir R halkasının merkezi eşkaresi olmak üzere eR ve $(1-e)R$'nin güçlü σ-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul R'nin güçlü σ-yarıdeğişmeli olmasıdır.

İspat:

(1) $(i) \Rightarrow (ii)$'nin gösterilmesi yeterli olacaktır. $p(x)q(x) = 0$ olacak şekilde $p(x) = (p_\gamma(x))_\gamma$, $q(x) = (q_\gamma(x))_\gamma \in \prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma[x;\sigma]$ alalım. $p_\gamma(x), q_\gamma(x) \in R_\gamma[x;\sigma_\gamma]$ olmak üzere her bir $\gamma \in \Gamma$ için $p_\gamma(x)q_\gamma(x) = 0$'dır. Hipotez gereği her $r_\gamma \in R_\gamma$, herhangi $s \geq 0$ ve her bir $\gamma \in \Gamma$ için $p_\gamma(x)(r_\gamma x^s)q_\gamma(x) = 0$ olur. Buradan her $r \in (r_\gamma)_\gamma \in \prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ ve $s \geq 0$ için $p(x)(rx^s)q(x) = 0$ olur. Böylece R_γ'ların direkt çarpımı güçlü σ-yarıdeğişmeli bulunur.

(2) (i) R'nin güçlü σ-yarıdeğişmeli ve yarıtam olduğunu kabul edelim. R yarıtam olduğu için Lambek (1966)'da yapılan çalışmalar gereğince R toplamları 1 olan yerel eşkarelerin bir sonlu ortagonal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ kümesine sahiptir. Her bir e_iRe_i lokal halka olacak şekilde $R = \sum_{i=1}^n e_iR$ yazılır. Sonuç 5.1.13 (1)'den R Abelyandır. Böylece her bir e_iR $e_iR = e_iRe_i$ özelliğine sahip R'nin idealidir. Her bir i için kabul gereğince $\sigma(e_iR) \subseteq$

e_iR olduğundan her bir e_iR alt halka olarak güçlü σ-yarıdeğişmelidir. Diğer taraftan R'nin güçlü σ_γ-yarıdeğişmeli yerel halkaların direk toplamı olduğunu kabul edelim. Yerel halkalar yarıtam olduğu için R yarıtamdır. Böylece (1) gereğince R güçlü σ-yarıdeğişmelidir.

(ii) Güçlü σ-yarıdeğişmeli halkaların sınıfı alt halkalar altında kapalı olduğundan $R \cong eR \oplus (1-e)R$ olmak üzere ispat (1)'den açıktır. □

Aşağıdaki önermede bir halkanın Jordan genişlemesi kullanılarak güçlü α-yarıdeğişmeli olması için bir karakterizasyon verilmiştir.

Önerme 5.1.15 R bir halka ve α, R'nin bir monomorfizması olsun. R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $A(R,\alpha)$ Jordan genişlemesinin güçlü α-yarıdeğişmeli olmasıdır.

İspat: R; Jordan genişlemesinin bir alt halkası olarak gözönüne alındığında yeter koşulun ispatı açıktır. Gerek koşulun ispatlanması yeterlidir. Bundan dolayı $A = A(R,\alpha) = \{t^{-i}rt^i : r \in R, i \geq 0\}$ olmak üzere R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. $a_i', b_j' \in R$ ve $v(i), u(j) \geq 0$ için $a_i = t^{-v(i)}a_i't^{v(i)}$ ve $b_j = t^{-u(j)}b_j't^{u(j)}$ olmak üzere $p(x) = \sum_{i=0}^m a_ix^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^n b_jx^j \in A[x;\alpha]$ için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Her bir $j \geq 0$ için $x^{-i}rx^i = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)x^{i+j}$ özelliği ve A'nın α otomorfizması kullanılarak $s \geq 0$ ve $\alpha_i, \beta_j \in R$ için $a_i = t^{-s}\alpha_it^s$ ve $b_j = t^{-s}\beta_jt^s$ yazılabilir. Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} a_i\alpha^i(b_j)\right)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} t^{-s}\alpha_it^s\alpha^i(t^{-s}\beta_jt^s)\right)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} t^{-s}\alpha_it^st^{-s}\alpha^i(\beta_j)t^s\right)x^k \\
&= t^{-s}\left(\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} \alpha_i\alpha^i(\beta_j)\right)x^k\right)t^s
\end{aligned}
$$

olur. Böylece;

$$
\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} \alpha_i\sigma^i(\beta_j)\right)x^k = 0
$$

olur.

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i, q'(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olsun. $p(x) = t^{-s}p'(x)t^s$ ve $q(x) = t^{-s}q'(x)t^s$ olduğu ve yukarıdaki sonuç kullanılarak $p'(x)q'(x) = 0$ bulunur. R güçlü α yarıdeğişmeli olduğundan her $r \in R$ ve $l \geq 0$ için $p'(x)R[x;\alpha]q'(x) = 0$'dır. Yani $p'(x)(rx^l)q'(x) = 0$ olur. Buradan herhangi $u \geq 0$ için

$$t^{-u}p'(x)(rx^l)q'(x)t^u = 0 \qquad (*)$$

bulunur. $r \in R$ olmak üzere $a = t^{-c}rt^c$ olsun. $c = s$ olarak alalım. (*) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} p(x)(ax^l)q(x) &= (t^{-s}p'(x)t^s)(ax^l)(t^{-s}q'(x)t^s) \\ &= t^{-s}p'(x)t^s(t^{-s}rt^sx^l)t^{-s}q'(x)t^s \\ &= t^{-s}p'(x)rt^st^{-s}x^lq'(x)t^s \\ &= t^{-s}p'(x)rx^lq'(x)t^s \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $p(x)A[x;\alpha]q(x) = 0$ olup A güçlü α-yarıdeğişmelidir. □

Herhangi bir α endomorfizmasına göre güçlü α-yarıdeğişmeli olan bir halkanın ($\sigma : R \cong S$) izomorf olduğu S halkasının da $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-yarıdeğişmeli olduğu aşağıdaki önermede ifade edilmiştir.

Önerme 5.1.16 $\sigma : R \to S$ bir halka izomorfizması olsun. R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul S'nin güçlü $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-yarıdeğişmeli olmasıdır.

İspat: Her i, j için $a'_i = \sigma(a_i)$, $b'_j = \sigma(b_j) \in S$ olmak üzere;

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{m} a'_i x^i, q'(x) = \sum_{j=0}^{n} b'_j x^j \in S[x;\sigma\alpha\sigma^{-1}]$$

olmasıdır. σ birebir ve örten olduğu için $\sigma(r) = r'$ olmak üzere $r' \in S \Leftrightarrow r \in R$'dir. Herhangi $r \in R$ ve $s \geq 0$ için,

$$
\begin{aligned}
0 = p(x)(rx^s)q(x) \in R[x;\alpha] &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i \alpha^i (r\alpha^s(b_j))) \right) x^{k+s} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} \sigma(a_i \alpha^i (r\alpha^s(b_j)) \right) x^{k+s} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} \sigma(a_i)\sigma(\alpha^i (r\alpha^s(b_j))) \right) x^{k+s} = 0
\end{aligned}
$$

olup böylece;

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} \sigma(a_i)(\sigma\alpha\sigma^{-1})^i(\sigma(r)(\sigma\alpha\sigma^{-1})^s\sigma(b_j)) \right) x^{k+s} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a'_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})^i(r'(\sigma\alpha\sigma^{-1})^s(b'_j)) \right) x^{k+s} = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 = p'(x)(r'x^s)q'(x) \in S[x;\sigma\alpha\sigma^{-1}]
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Aşağıdaki teoremde; güçlü α-yarıdeğişmeli halkalar, α-katı halkalar kullanılarak karakterize edilmiştir.

Teorem 5.1.17 *R'nin α-katı olması için gerek ve yeter şart R'nin yarıasal, güçlü α-yarıdeğişmeli ve α'nın bir monomorfizma olmasıdır.*

İspat: R α-katı olsun. Bu durumda $R[x;\alpha]$ inmiş olup yarıdeğişmelidir. Böylece R güçlü α-yarıdeğişmelidir. R, α-katı iken Hong vd. (2003) gereğince R inmiş ve α monomorfizmadır. Böylece R'nin yarıasal olduğu açıktır. Diğer taraftan R'nin yarıasal, güçlü α-yarıdeğişmeli ve α'nın bir monomorfizma olduğunu kabul edelim. $a \in R$ için $\alpha(a)a = 0$ olsun. Önerme 5.1.11 (1)'den R α-yarıdeğişmeli olup $\alpha(a)R\alpha(a) = 0$ bulunur. R'nin yarıasal olduğu kullanılarak $\alpha(a) = 0$ olur. α monomorfizma olduğundan $a = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R, α-katıdır. □

Aşağıdaki örnek, Teorem 5.1.17'de yer alan R'nin yarıasal ve α'nın monomorfizma olma şartının kaldırılamayacağını gösterir.

Örnek 5.1.18

(1) $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ ve $\alpha \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ile tanımlı α; R'nin bir otomorfizması olsun. R güçlü α-terslenebilir olup Uyarı 5.1.3 gereğince güçlü α-yarıdeğişmelidir. Fakat R yarıasal olmadığından R α-katı değildir.

(2) Örnek 5.1.4'de yer alan $R = \mathbb{Z}[t]$ güçlü α-yarıdeğişmeli halkasını ve monomorfizma olmayan α endomorfizmasını hatırlayalım. R bölge olduğu için yarıasaldır. Fakat $0 \neq x \in R$ için $x\alpha(x) = 0$ olduğu için R α-katı değildir.

Jordan genişlemesinde herhangi $u \geq 0$, $r \in R$ için $\alpha^i(r) = \alpha^i(r)x^{-u}x^u = x^{-u}\alpha^{u+i}(r)x^u$ olduğu gözönüne alınarak $x^{-i}rx^j \mapsto \alpha^i(r)x^{j-i}$ ile tanımlanan izomorfizma yardımıyla $R[x, x^{-1}; \alpha] \cong A(R, \alpha)[x, x^{-1}; \alpha]$ olduğu görülür. Önerme 5.1.15'in sonucu olarak aşağıdaki denk koşullar ifade edilir.

Sonuç 5.1.19 R yarıasal bir halka ve α R'nin bir monomorfizması olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) R güçlü α-terslenebilirdir.

(2) R güçlü α-yarıdeğişmelidir.

(3) R α-yarıdeğişmelidir.

(4) R α-katıdır.

(5) $R[x, x^{-1}; \alpha]$ inmiştir.

(6) $A(R, \alpha)$ güçlü α-terslenebilirdir.

(7) $A(R, \alpha)$ güçlü α-yarıdeğişmelidir.

(8) $A(R, \alpha)$ α-yarıdeğişmelidir.

(9) $A(R, \alpha)$ α-katıdır.

İspat: $(4) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ ve $(9) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8)$ olduğu açıktır. Teorem 5.1.17'nin bir sonucu olarak $(3) \Rightarrow (4)$ ve $(8) \Rightarrow (9)$ gerektirmeleri ispatlanır. $(2) \Rightarrow (7)$ Önerme 5.1.15'in sonucudur. Nasr-Isfahani ve Moussavi (2009) R'nin α-katı olması için gerek ve yeter koşulun $R[x, x^{-1}; \alpha]$'in inmiş olması gerektiğini ifade etmişlerdir. $R[x, x^{-1}; \alpha]$'nın, $A(R, \alpha)[x, x^{-1}; \alpha]$'ya izomorf olmasından dolayı (4) ve (5)'in denk oldukları elde edilir. □

McCoy (1942) değişmeli bir R halkası üzerinde "$f(x)$'in $R[x]$'te bir sıfır bölen olması için gerek ve yeter koşulun $f(x)c = 0$ olacak şekilde $0 \neq c \in R$ var olmasıdır" ifadesini ispatlamıştır. Fakat Weiner (1952) bu ifadenin değişmeli olmayan halkalarda doğru olmadığını göstermiştir. Bu sonuca dayanarak Nielsen (2006) değişmeli olmayan R halkası üzerinde $0 \neq c \in R$ için $0 \neq f(x), g(x) \in R[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ iken $f(x)c = 0$ (sırasıyla $cg(x) = 0$) oluyorsa R halkası *sağ McCoy* (sırasıyla *sol McCoy*) olarak adlandırmıştır. R halkası hem sağ McCoy hem sol McCoy ise *McCoy* olarak adlandırılır. Nielsen (2006) terslenebilir halkaların McCoy olduğunu göstermiştir. Fakat aynı çalışmada McCoy olmayan yarıdeğişmeli halka örneği verilmiştir. Bir halka üzerindeki McCoy olma koşulu skew polinom halkasına Başer vd. (2009) tarafından genişletilmiştir. Herhangi sıfırdan farklı $p(x), q(x) \in R[x; \alpha]$ polinomları için $p(x)q(x) = 0$ iken $p(x)c = 0$ olacak şekilde $0 \neq c \in R$ varsa R halkası α-skew McCoy olarak adlandırılmıştır. Aşağıdaki önermede güçlü α-yarıdeğişmeli halkaların α-skew McCoy halkalarla ilişkisi incelenmiştir.

Önerme 5.1.20 Eğer R güçlü α-yarıdeğişmeli bir halka ise R α-skew McCoydur.

İspat: R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli bir halka olduğunu kabul edelim. Herhangi $0 \neq p(x), q(x) \in R[x; \alpha]$ için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Kabulden $p(x)R[x; \alpha]q(x) = 0$'dır. Hong vd. (2010)'dan $p(x)R[x; \alpha]c = 0$ olacak şekilde $0 \neq c \in R$ vardır. Buradan $p(x)c = 0$ olup R α-skew McCoydur. □

α birim endomorfizma olarak alınırsa Önerme 5.1.20'nin bir direk sonucu olarak Kwak vd. (2012) tarafından ifade edilen aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.21 R halkası güçlü yarıdeğişmeli bir halka ise McCoydur.

5.2 Güçlü α-Yarıdeğişmeli Halka Örnekleri

Bu bölümde güçlü α-yarıdeğişmeli bir halkanın güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olan genişlemelerine örnekler verilecektir.

Teorem 5.2.1 *R değişmeli bir S bölgesi üzerinde bir cebir ve α R'nin bir endomorfizması olmak üzere R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul R ve S'nin D Dorroh genişlemesinin güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olmasıdır.*

İspat: $\alpha(1) = 1$ olduğu gözönüne alınarak $s1_R \in R$ olacak şekilde $s \in S$ belirlenip $R = \{r + s \mid (r, s) \in D\}$ yazılabilir. R güçlü α-yarıdeğişmeli iken D'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için R güçlü α-yarıdeğişmeli olmak üzere

$$p(x) = \Sigma_{i=0}^{m}(a_i, b_i)x^i, q(x) = \Sigma_{j=0}^{n}(c_j, d_j)x^j \in D[x; \bar{\alpha}]$$

için $p(x)q(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $p(x)q(x) = 0$ eşitliğinden x^k'lı terimin katsayısı

$$\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k}(a_i, b_i)\bar{\alpha}^i(c_j, d_j)\right)x^k = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k}(a_i, b_i)(\alpha^i(c_j), d_j)\right)x^k = 0 \qquad (5.1)$$

bulunur. Ayrıca $\alpha(1) = 1$ olduğundan her $s \in S$ için $\alpha(s) = \alpha(s.1) = s\alpha(1) = s1 = s$ olup bu durum ispatın geri kalan kısmında referans verilmeksizin kullanılacaktır. (5.1) eşitliğinden $f(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$,$g(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j \in S[x]$ olarak alınırsa $f(x)g(x) = 0$ bulunur. $S[x]$ bir bölge olduğundan $f(x) = 0$ yada $g(x) = 0$ olmak zorundadır. $f(x) = 0$ ise (5.1) eşitliğinden;

$$\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k}(a_i(\alpha^i(c_j) + d_j), 0)\right)x^k = 0$$

olup

$$0 = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k}(a_i(\alpha^i(c_j) + d_j)\right)x^k = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k}(a_i\alpha^i(c_j + d_j)\right)x^k \qquad (5.2)$$

elde edilir. $p'(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$,$q'(x) = \sum_{j=0}^{n}(c_j + d_j)x^j \in R[x; \alpha]$ olarak alınırsa (5.2) eşitliği gereğince $p'(x)q'(x) = 0$ bulunur. R güçlü α-yarıdeğişmeli olduğundan herhangi $r+s \in R$ ve $t \geq 0$ için $p'(x)((r+s)x^t)q'(x) = 0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i \alpha^i((r+s)\alpha^t(c_j+d_j)) \right) x^{k+t} \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i(\alpha^i(r)+s)(\alpha^{i+t}(c_j)+d_j) \right) x^{k+t} \end{aligned}$$

olur. Böylece;

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} (a_i,0)\bar{\alpha}^i((r,s)\bar{\alpha}^t((c_j,d_j))) \right) x^{k+t} \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} (a_i,0)(\alpha^i(r),s)(\alpha^{i+t}(c_j),d_j) \right) x^{k+t} \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} (a_i(\alpha^i(r)+s)(\alpha^{i+t}(c_j)+d_j),0) \right) x^{k+t} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda herhangi $(r,s) \in D$ ve $t \geq 0$ için $p(x)(r,s)x^t q(x) = 0$ bulunur.

Diğer yandan $g(x) = 0$ olması durumunda ise yukarıdaki ispata benzer olarak herhangi $(r,s) \in D$ ve $t \geq 0$ için $p(x)(r,s)x^t q(x) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R'nin S ile D Dorroh genişlemesi güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir. $\square$

Önerme 5.1.14(2-ii) ve Teorem 5.2.1'in bir sonucu olarak, α birim endomorfizma olarak alındığında, Kwak vd. (2012) tarafından ifade edilen aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.2.2

(1) e bir R halkasının merkezi eşkare elemanı olmak üzere R'nin güçlü yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart eR ve $(1-e)R$'nin güçlü yarıdeğişmeli olmasıdır.

(2) R; değişmeli bir S bölgesi üzerinde bir cebir ve D; R'nin S ile Dorroh genişlemesi olmak üzere R'nin güçlü yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter şart D'nin güçlü yarıdeğişmeli olmasıdır.

Bir halka yarıdeğişmeli iken polinom halkası yarıdeğişmeli olmak zorunda değildir. Ancak halkanın Armendariz olması durumunda bu özellik polinom halkasına taşınmaktadır. Aşağıdaki teoremde $\alpha^t = 1_R$ özelliğine sahip bir halka güçlü α-yarıdeğişmeli iken onun polinom halkasının güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olduğu ifade edilmiştir.

Teorem 5.2.3 α bir R halkasının $\alpha^t = 1_R$ olacak şekilde bir endomorfizması olmak üzere R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olmasıdır.

İspat: Güçlü α-yarıdeğişmeli halkalar alt halkalar altında kapalı olduğundan gerek koşulun ispatlanması yeterlidir. R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. Her bir $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$, $a_{i_0}, \ldots, a_{i_{w_i}}, b_{j_0}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_{v_j}} \in R$ için

$$f_i(x) = a_{i_0} + a_{i_1}x + \ldots + a_{i_{w_i}}x^{w_i}$$

$$g_j(x) = b_{j_0} + b_{j_1}x + \ldots + b_{j_{v_j}}x^{v_j}$$

olmak üzere $p(y)q(y) = 0$ olacak şekilde $p(y) = f_0(x) + f_1(x)y + \ldots + f_m(x)y^m$, $q(y) = g_0(x) + g_1(x)y + \ldots + g_n(x)y^n \in R[x][y; \bar{\alpha}]$ alalım.

$$C = \left\{ a_{i_0}, \ldots, a_{i_{w_i}}, b_{j_0}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_{v_j}} | 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n \right\} \text{ ve } yr = \alpha(r)y$$

olduğu göz önüne alınarak $p(y)$ ve $q(y)$ yeniden düzenlenirse $h(x) = p(y) = h_0(y) + h_1(y)x + \ldots + h_u x^u$, $l(x) = q(y) = l_0(y) + l_1(y)x + \ldots + l_s(y)x^s \in R[y; \alpha][x]$ ve $h(x)l(x) = 0$ olur. Sıfır polinomunun derecesi sıfır olmak üzere

$$\{deg h_i(y), deg l_j(y) \ \ | \ \ 0 \leq i \leq u, 0 \leq j \leq s\}$$

kümesindeki maksimal elemandan daha büyük olacak şekilde bir pozitif k tamsayısı seçelim.

$$h(y^{tk}) = h_0(y) + h_1(y)y^{tk} + \ldots + h_u(y)y^{mtk}$$

$$l(y^{tk}) = l_0(y) + l_1(y)y^{tk} + \ldots + l_s(y)y^{ntk}$$

olmak üzere $h_i(y)$ (sırasıyla $l_j(y)$) ve $h(y^{tk})$ (sırasıyla $l(y^{tk})$)'nın katsayıları aynı olup bu katsayıların kümesi C'ye eşittir. $p(y)q(y) = 0 = h(x)l(x)$ ve $\alpha^{tk} = 1_R$ olduğundan $h(y^{tk})l(y^{tk}) = 0$ elde edilir. $r \in R$ için $\bar{\alpha}(r) = \alpha(r)$ olduğu gözönüne alınarak kabul gereğince herhangi $r \in R$ ve $\gamma \geq 0$ için $h(y^{tk})ry^{\gamma}l(y^{tk}) = 0$ bulunur. Her λ_i ve ϵ_j için

$$\sum_{\iota=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=\iota} a_{\lambda_i} \alpha^{\lambda_i}(r\alpha^{\gamma}(b_{\epsilon_j})) \right) y^{\iota+\gamma} = 0$$

olur. $\alpha^{tk} = 1_R$ olduğundan her bir $0 \leq \iota \leq m+n$ için $\sum_{i+j=\iota} h_i(y)(ry^{\gamma})l_j(y) = 0$ olur. Sonuç olarak herhangi $r \in R$ ve $\gamma \geq 0$ için $p(y)(ry^{\gamma})q(y) = 0$ olup $R[x]$ güçlü $\bar{\alpha}$ yarıdeğişmelidir. □

Aşağıdaki önermede; $\alpha^t = 1_R$ özelliğine sahip güçlü α-yarıdeğişmeli bir halkanın Laurent polinom halkasının da güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olduğu gösterilmiştir.

Önerme 5.2.4 α bir R halkasının $\alpha^t = 1_R$ olacak şekilde bir endomorfizması olmak üzere R'nin güçlü α-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x; x^{-1}]$'in güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki R güçlü α-yarıdeğişmeli bir halka ve her bir $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ için $a_{s_i}, \ldots a_{w_i}, b_{k_j} \cdots, b_{z_j} \in R$ ve $s_i, w_i, k_j, z_j \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f_i(x) = \sum_{u=s_i}^{w_i} a_u x^u, g_j(x) = \sum_{v=k_j}^{z_j} b_v x^v \in R[x; x^{-1}]$$

olsun. $(R[x; x^{-1}])[y, \bar{\alpha}]$'daki

$$p(y) = f_0(x) + f_1(x)y + \ldots + f_m(x)y^m$$

$$q(y) = g_0(x) + g_1(x)y + \ldots + g_n(x)y^n$$

polinomları için $p(y)q(y) = 0$ olduğunu kabul edelim. $s = max\,\{|s_i| \;\mid\; i = 0, 1, \ldots, m\}$ ve $k = max\,\{|k_j| \;\mid\; j = 0, 1, \ldots, n\}$ olacak şekilde k, s pozitif tamsayıları seçelim. $f_i'(x) = f_i(x)x^s$ ve $g_j'(x) = g_j(x)x^k$ olmak üzere;

$$p(y) = x^s f(y) = f_0'(x) + f_1'(x)y + \ldots + f_m'(x)y^m$$

$$q(y) = x^k g(y) = g_0'(x) + g_1'(x)y + \ldots + g_n'(x)y^n$$

olarak alınırsa Teorem 5.2.3'ün ispatına benzer şekilde $R[x; x^{-1}]$'in güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olduğu gösterilir. □

Kwak vd. (2012) tarafından ispatlanmış olan aşağıdaki sonuçlar, Teorem 5.2.3 ve Önerme 5.2.4'ün bir sonucu olarak ispatsız biçimde daha basitçe ifade edilebilir.

Sonuç 5.2.5 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(1) R güçlü yarıdeğişmelidir.

(2) $R[x]$ güçlü yarıdeğişmelidir.

(3) $R[x; x^{-1}]$ güçlü yarıdeğişmelidir.

Önerme 5.2.6 R bir halka ve α, R'nin bir otomorfizması olmak üzere, M, R'nin merkezil düzenli elemanlarını içeren çarpımsal kapalı alt kümesi ve her $m \in M$ için $\alpha(m) = m$ olsun. Bu durumda bir R halkasının güçlü α-yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $M^{-1}R$'nin güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki R güçlü α-yarıdeğişmeli ve $P(x) = u^{-1}(a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k)$, $Q(x) = v^{-1}(b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n) \in M^{-1}R[x;\bar{\alpha}]$ için $P(x)Q(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &= P(x)Q(x) \\ &= u^{-1}(a_0v^{-1} + a_1\alpha(v)^{-1}x + \ldots + a_k\alpha^k(v)^{-1}x^k)(b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n) \end{aligned}$$

olur. Hipotez gereğince $0 \leq i \leq k$ için $\alpha^i(v)^{-1} = v^{-1}$ olduğundan;

$$\begin{aligned} 0 &= P(x)Q(x) \\ &= (uv)^{-1}(a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n) \end{aligned}$$

elde edilir. $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$, $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \in R[x]$ olsun. Bu durumda $p(x)q(x) = 0$ olup R güçlü α-yarıdeğişmeli olduğundan $p(x)R[x;\alpha]q(x) = 0$ olur. Herhangi $r^{-1}s \in M^{-1}R$ ve $t \geq 0$ için $\alpha^i(m)^{-1} = m^{-1}$ olduğu göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned} &P(x)(r^{-1}sx^t)Q(x) \\ &= u^{-1}(a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k)(r^{-1}sx^t)v^{-1}(b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n)u^{-1} \\ &= (urv)^{-1}p(x)(sx^t)q(x) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $M^{-1}R$ güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir. Güçlü α-yarıdeğişmeli halkaların sınıfı alt halkalar altında kapalı olduğu için ispatın karşıtı açıktır. $\square$

R bir halka ve α, R'nin bir endomorfizması olmak üzere $UTM_2(R)$ alt halkası Abelyan olmadığı için ($n \geq 2$ için) $M_n(R)$ ve $UTM_n(R)$ matris halkaları yarıdeğişmeli değildir. Ayrıca Kim ve Lee (2003) tarafından yapılan çalışma gereğince ($n \geq 4$ için) $D_n(R)$ matris halkası yarıdeğişmeli değildir. Bundan dolayı Önerme 5.1.11 gereğince ($n \geq 2$ için) $M_n(R)$, $UTM_n(R)$ ve ($n \geq 4$ için) $D_n(R)$ matris halkaları güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli değildir. Bu ifade edilen durum ileride yapılacak olan ispatlarda referans verilmeksizin kullanılacaktır. Diğer yandan Jin vd. (2017) tarafından yapılan çalışma gereğince α-katı bir R halkası üzerinde ($n \geq 2$ için) $V_n(R)$ matris halkası güçlü $\bar{\alpha}$-terslenebilir olduğundan güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir.

Aşağıdaki önermede α-katı bir R halkası üzerinde $n = 2, 3$ için $D_n(R)$ matris halkasının güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olduğu ifade edilmiştir.

Önerme 5.2.7 R, α-katı bir halka ise $n = 2, 3$ için $D_n(R)$ güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir.

İspat: $D_2(R) = V_2(R)$ olduğundan α-katı olan bir R halkası üzerinde $D_3(R)$'nin güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olduğunu göstermemiz yeterlidir. Kabul edelimki R α-katı ve $A_i = (a^{(i)}{s_t})$, $B_j = (b^{(j)}{u_v}) \in D_3(R)$ olmak üzere

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i, \; q(x) = \sum_{j=0}^{n} B_j x^j \in D_3(R)[x; \bar{\alpha}]$$

için $p(x)q(x) = 0$ olsun. $D_3(R)[x; \bar{\alpha}] \cong D_3(R[x; \alpha])$ olduğu kullanılarak

$$p_{s_t} = \sum_{i=0}^{m} a^{(i)}{s_t} x^i, \; q_{u_v} = \sum_{j=0}^{n} b^{(j)}{u_v} x^j \in R[x; \alpha]$$

olmak üzere $p(x) = (p_{st}(x))$, $q(x) = (q_{uv}(x)) \in D_3(R[x; \alpha])$ yazılabilir. $p(x)q(x) = 0$ olmasından aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$p_{11}(x)q_{11}(x) = 0 \tag{5.3}$$

$$p_{11}(x)q_{12}(x) + p_{12}(x)q_{11}(x) = 0 \tag{5.4}$$

$$p_{11}(x)q_{13}(x) + p_{12}(x)q_{23}(x) + p_{13}(x)q_{11}(x) = 0 \tag{5.5}$$

$$p_{11}(x)q_{23}(x) + p_{23}(x)q_{11}(x) = 0 \tag{5.6}$$

R α-katı olduğu için $R[x; \alpha]$ inmiştir. R herhangi bir inmiş halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ ve $ba = 0$ ve $ab^2 = 0$ iken $ab = 0$ olduğu aşağıdaki ispatlarda kullanılacaktır. (5.3) eşitliğinden R güçlü α-yarıdeğişmeli olduğundan;

$$p_{11}(x)R[x; \alpha]q_{11}(x) = 0 \tag{5.7}$$

eşitliği elde edilir. (5.4) ve (5.6) eşitlikleri sağdan $q_{11}(x)$ ile çarpılırsa, $p_{12}(x)q_{11}^2(x) = 0$ ve $p_{23}(x)q_{11}^2(x) = 0$ olduğundan $p_{12}(x)q_{11}(x) = 0$ ve $p_{23}(x)q_{11}(x) = 0$ olur. Ayrıca

$p_{11}(x)q_{12}(x) = 0$ ve $p_{11}(x)q_{23}(x) = 0$ bulunur. Böylece,

$$p_{11}(x)R[x\alpha]q_{12}(x) = 0,\ p_{12}(x)R[x;\alpha]q_{11}(x) = 0 \tag{5.8}$$
$$p_{11}(x)R[x;\alpha]q_{23}(x) = 0,\ p_{23}(x)R[x;\alpha]q_{11}(x) = 0$$

olur. (5.5) eşitliği sağdan $q_{11}(x)$ ve $q_{23}(x)$ ile çarpıldığında $p_{13}(x)q_{11}(x) = 0$ ve $p_{12}(x)q_{23}(x) = 0$ olup yukarıdaki metoda benzer olarak $p_{11}(x)q_{13}(x) = 0$ elde edilir. Böylece

$$p_{11}(x)R[x;\alpha]q_{13}(x) = 0, p_{12}(x)R[x;\alpha]q_{23}(x) = 0, p_{13}(x)R[x;\alpha]q_{11}(x) = 0 \tag{5.9}$$

bulunur. Sonuç olarak $D_3(R)$ güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir. □

Önerme 5.2.7'deki R'nin "α-katı olma şartı" R'nin "güçlü α-yarıdeğişmeli olma koşulu" ile zayıflatılamaz. Örnek 5.1.18 (1)'deki güçlü α-yarıdeğişmeli olan fakat α-katı olmayan R halkasını göz önüne alalım. Başer vd. (2008) tarafından ifade edildiği üzere $D_2(R)$ halkası α-yarıdeğişmeli değildir. Önerme 5.1.11'den $D_2(R)$ güçlü α-yarıdeğişmeli değildir. Ayrıca Önerme 5.2.7'de; Kim ve Lee (2003) tarafından elde edilen bazı sonuçlar genişletilmiştir.

Güçlü α-yarıdeğişmeli halkaların sınıfı homomorfik görüntüler altında kapalı değildir. Gerçekten; R, katsayıları tamsayılar olan kuaterniyonlar halkası ve α, R'nin bir monomorfizması ise R bir bölge olduğundan güçlü α-yarıdeğişmelidir. Ayrıca q herhangi bir tek asal sayı olmak üzere Goodearl ve Warfield (1989) tarafından ifade edildiği üzere $R/qR \cong M_2(\mathbb{Z}_q)$ olur. Daha önce de bahsedildiği gibi $M_2(\mathbb{Z}_q)$ güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli değildir. Bundan dolayı R/qR bölüm halkası güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli değildir.

Aşağıdaki önermede güçlü α-yarıdeğişmeli bir halkanın homomorfik görüntüsünün güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olması için bir karakterizasyon verilmiştir. Ayrıca bölüm halkası güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olan bir halkanın hangi koşulda güçlü α-yarıdeğişmeli olduğu incelenmiştir.

Önerme 5.2.8

(1) R güçlü α-yarıdeğişmeli bir halka olmak üzere I, R deki herhangi boştan farklı bir kümenin tek yanlı sıfırlayanı ve $\alpha(I) \subseteq I$ ise, R/I güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir.

(2) α bir R halkasının bir endomorfizması ve I, R/I güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olacak şekilde R'nin bir α-ideali olsun. I birimsiz bir α-katı halka ise, R güçlü α-yarıdeğişmelidir.

İspat:

(1) Kabul edelim ki R güçlü α-yarıdeğişmeli ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ için $I = r_R(S)$ olsun. Önerme 5.1.11 (1) gereğince R yarıdeğişmeli olup ve Lemma 3.1.1'den I R'nin iki yanlı idealidir. $\bar{p}(x)\bar{q}(x) = \bar{0}$ olacak şekilde

$$\bar{p}(x) = \sum_{i=0}^{m} \bar{a}_i x^i, \ \bar{q}(x) = \sum_{j=0}^{n} \bar{b}_j x^j \in R/I[x;\bar{\alpha}]$$

alalım. Bu durumda

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \ q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere $p(x)q(x) \in I = r_R(S)$ olduğundan $Sp(x)q(x) = 0$ olur. R güçlü α-yarıdeğişmeli halka olduğundan $Sp(x)R[x;\alpha]q(x) = 0$ olup herhangi $r \in R$ ve $t \geq 0$ için $Sp(x)(rx^t)q(x) = 0$ bulunur. Böylece

$$S\left(\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} a_i\alpha^i(r\alpha^t(b_j))\right)x^{k+t}\right) = 0$$

ve bundan dolayı;

$$\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} \bar{a}_i\bar{\alpha}^i(\bar{r}\bar{\alpha}^t(\bar{b}_j))\right)x^{k+t} = \bar{0}$$

olup herhangi $r \in R$ ve $t \geq 0$ için $\bar{p}(x)(\bar{r}x^t)\bar{q}(x) = \bar{0}$ olduğundan R/I güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir. Sol sıfırlayan için de benzer durum geçerlidir.

(2) Kabul edelim ki R/I güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli ve I α-katı olsun. $p(x), q(x) \in R[x;\alpha]$ için $p(x)q(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. R/I güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmeli olduğu için $p(x)R/I[x;\bar{\alpha}]q(x) \subseteq I[x;\alpha]$'dır.

$$(q(x)I[x;\alpha]p(x))^2 = q(x)I[x;\alpha]p(x)q(x)I[x;\alpha]p(x) = 0$$

ve I α-katı olduğundan $I[x;\alpha]$ inmiş olup $q(x)I[x;\alpha]p(x) = 0$'dır. Böylece;

$$(p(x)R[x;\alpha]q(x)I[x;\alpha])^2 = p(x)R[x;\alpha]q(x)I[x;\alpha]p(x)R[x;\alpha]q(x)I[x;\alpha] = 0$$

olup $I[x;\alpha]$ inmiş olduğundan $p(x)R[x;\alpha]q(x)I[x;\alpha]=0$ bulunur.

$$(p(x)R[x;\alpha]q(x))^2 \subseteq p(x)R[x;\alpha]q(x)I[x;\alpha]=0$$

ve $(p(x)R[x;\alpha]q(x) \subseteq I[x;\alpha]$ olduğundan I'nın inmiş olduğu kullanılarak

$$p(x)R[x;\alpha]q(x)=0$$

bulunur. Böylece R güçlü α-yarıdeğişmelidir. $\square$

Önerme 5.2.8 (2)'deki I'nın α-katı olma şartının indirgenemeyeceği aşağıdaki örnekte ifade edilmiştir.

Örnek 5.2.9 F bölümlü halka olmak üzere $R=\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkasını ve

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

ile tanımlı α otomorfizmasını ele alalım. Sonuç 5.1.13'den R Abelyan olmadığından güçlü α-yarıdeğişmeli değildir. $I=\begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ α-ideali α-katı değildir.

$$R/I=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}+I : a,c\in F\right\}$$

bölüm halkası inmiş ve $\bar{\alpha}$, R/I üzerinde monomorfizma olduğu için R/I, $\bar{\alpha}$-katı ve böylece güçlü $\bar{\alpha}$-yarıdeğişmelidir.

KAYNAKLAR

Anderson, D.D. and Camillo, V. (1999). Semigroups and rings whose zero products commute. *Communications in Algebra*, **27**: 2847-2852.

Anderson, F.W. and Fuller, K.R. (1992). Rings and categories of modules. *Springer-Verlag*, 2.edition, New York

Baser, M. and Agayev, N. (2006). On Reduced and Semicommutative Modules. *Turkish Journal of Mathematics*, **30:** 285-291.

Baser, M., Harmanci, A. and Kwak, T.K. (2008). Generalized semicommutative rings and their extensions. *Bulletin of The Korean Mathematic Society*, **45**: 285-297.

Baser, M., Hicyilmaz, B., Kaynarca F., Kwak, T.K. and Lee, Y. (2015). Insertion of factors property on skew polynomial rings. J*ournal of the Korean Mathematical Society,* **52:** 1161-1178.

Baser, M., Hong, C.Y. and Kwak, T.K. (2009). On extended reversible rings. *Algebra Colloquium*, **16**: 37-48.

Baser, M., Kwak, T.K. (2010). On strongly reversible rings and their extensions. *Korean Journal of Mathematics,* **18:** 119-132.

Baser, M., Kwak, T.K. and Lee,Y. (2009). The McCoy condition on skew polynomial rings. *Communications in Algebra*, **37**: 4026-4037.

Bell, H.E. (1970). Near rings in which each element is a power of itself. *Bulletin of The American Mathematical Society*, **2**: 363-368.

Chen, W. (2011). On nil semicommutative rings. Thai Journal of Mathematics, **1:** 39-47.

Cohn, P.M. (1999). Reversible rings. *Bullettin of London Mathematic Society*, **31**: 641-648.

Gang, Y. (2007). Semicommutative and reduced rings. *Vietnam Journal of Mathematics*, **35:** 1-7.

Gang, Y. and Liu, Z.K. (2008). On strongly reversible rings. *Taiwanese Journal of Mathematics,* **12:** 129-136.

Goodearl, K.R. and Warfield, R.B. (1989). An Introduction to noncommutative noetherian rings. *Cambridge University Press*, 1.edition, Cambridge, UK.

Habeb, J.M. (1990). A note on zero commutative and duo rings. *Mathematical Journal of Okayama University*, **32**: 73-76.

Hirano,Y. (2002). On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **168**: 45-52.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak,T.K. (2000). Ore extensions of Baer and p.p. rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **151**: 215-226.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Kwak,T.K. (2003). On skew Armendariz rings. *Communications in Algebra*, **31**: 103-122.

Hong, C.Y., Kim, N.K. and Lee,Y. (2010). Skew Polynomial rings over semiprime rings. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **47**: 879-897.

Hong, C.Y., Kwak, T.K. and Rizvi, S.T. (2006), Extensions of generalized Armendariz Rings. *Algebra Colloquium*, **13**: 253-266.

Huh, C., Lee, Y. and Smoktunowicz, A. (2002). Armendariz rings and semicommutative rings. *Communications in Algebra*, **30**: 751-761.

Hungerford, T.W. (1974). Algebra. *Springer-Verlag*, New York

Jin, H.L., Kaynarca, F., Kwak, T.K. and Lee, Y. (2017). On commutativity of skew polynomials at zero. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **54:** 51-69.

Jordan, D.A. (1982). Bijective extensions of injective rings endomorphism. *Journal of the London Mathematical Society*, **25**: 435-448.

Kaplansky, I. (1968). Rings of Operators. *W.A. Benjamin*, New York

Kim, N.K., Kwak, T.K and Lee, Y. (2014). Insertion of Factors Property skewed by ring endomorpisms. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **18:** 849-869.

Kim, N.K. and Lee, Y. (2003). Extensions of reversible rings. *Journal of Pure and Applied. Algebra*, **185**: 207-223.

Krempa, J. (1996). Some examples of reduced rings. *Algebra Colloquium*, **3**(4): 289-300.

Krempa, J. and Niewieczerzal, N. (1977). Rings in which annihilators are ideals and their application to semi-group rings. *Bulletin De Lacademie Polonaise Des Sciences Serie Des Sciences Mathematiques Astronomiques Et Physiques,* **25:** 851-856.

Kwak, T.K., Lee, Y., and Yun, S.J. (2012). The Armendariz property on ideals. *Journal of Algebra*, **354**: 121-135.

Lam, T.Y., (2001). A First Course in Noncommutative Rings. *Springer-Verlag*, 2.edition, New York

Lambek, J. (1971). On the representation of modules by sheaves of factor modules. *Canadian Mathematical Bullettin*, **14**: 359-368.

Liang, L., Wang, L. and Liu, Z. (2007). On a generalization of semmicommutative rings. *Taiwanese Journal of Mathematics,* **11:** 1359-1368.

Liu, Z.K. (2006). Semicommutative Subrings of Matris Rings. *Journal of Mathematical Reseach and Exposition*, **26:** 264-268.

Marks, G. (2002). Reversible and symmetric rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **174:** 311-318.

Marks, G. (2003). A taxonomy of 2-primal rings. *Journal of Algebra*, **266**: 494-520

McCoy, N.H. (1942). Remarks on divisors of zero. *The American Mathematical Monthly*, **49**: 286-295.

Mohammadi, R., Moussavi, A. and Zahiri, M. (2012). On nil-semicommutative rings. *International Electronic Journal of Algebra*, **11**: 20-37.

Narbone, L.M. (1982). Anneaux semi-commutatifs et unis riels anneaux dont les id aux principaux sont idempotents. *Proceedings of the* 106^{th} *National Congress of Learned Societies*, 71-73.

Nielsen, P.P. (2006). Semi-commutativity and the McCoy condition. *Journal of Algebra*, **298**: 134-141.

Qu, Y. and Wei, J. (2014). Some notes on nil-semmicommutative rings. *Turkish Journal of Mathematics,* **38:** 212-224.

Rege, M.B. and Chhawchharria, S. (1997). Armendariz rings. *Procedings of the Japan Academy Series A Mathematical Sciences*, **73**: 14-17.

Shin, G. (1973). Prime ideals and sheaf representation of a pseudu symmetric rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, **184**: 43-60.

Wang, L. and Wei, J.C. (2014). Central semicommutative rings. *Journal of Pure and Applied Algebra,* **45:** 13-25.

Wang, W. (2008). Maximal semicommutative subrings of upper triangular matrix rings. *Communications in Algebra*, **36:** 77-81.

Weiner, L. (1952). Concerning a theorem of McCoy. *American Mathematical Monthly,* **59:** 336-337.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Begüm YENER (HİÇYILMAZ)

Doğum Yeri ve Tarihi : Afyonkarahisar,1989

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Tel/e-posta) : 0 555 362 33 90

Eğitim Durumu (Kurum ve yıl)

Lise	:	Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi, (2003-2007)
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü (2007-2011)
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (2011-2013)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Afyon Birey Dershaneleri, (2010)

Yayınları(SCI ve diğer): Başer, M., Hiçyılmaz, B., Kaynarca F., Kwak, T.K. and Lee, Y. (2015). Insertıon of factors property on skew polynomial rings. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **52:** 1161-1178.

Diğer Konular:-