FOURIER SERİLER ve FOURIER İNTEGRALLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma Nur CAN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak, 2012

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FOURIER SERİLER ve FOURIER İNTEGRALLERİ

Fatma Nur CAN

DANIŞMAN

Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2012

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM danışmanlığında Fatma Nur CAN tarafından hazırlanan "Fourier Seriler ve Fourier İntegralleri" başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 23.01.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ	
Danışman	Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM	
Üye	Doç. Dr. Özkan ÖCALAN	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.
……………………………….

Enstitü Müdürü
(Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FOURIER SERİLER ve FOURIER İNTEGRALLERİ

Fatma Nur CAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmamız için gerekli olan tanım ve temel teoremler verildi. İkinci bölümde Fourier Serisi ve Fourier Serisinin çeşitli tipleri ele alındı. Üçüncü bölümde Fourier İntegrali, Fourier İntegrali ile Fourier Serisi arasındaki iliskiler ve Fourier İntegrallerinin uygulamaları verildi.

2012, vii+57 sayfa

Anahtar Kelimeler : Fourier Serisi, Fourier İntegrali, Ortogonal Fonksiyonlar, Ortogonal ve Ortonormal kümeler

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

FOURIER SERIES and FOURIER INTEGRALS

Fatma Nur CAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Hüseyin YILDIRIM

This Thesis Consists of three parts. In the first part, the necessary theorems and basic definations are given. In the second part, we discussed Fourier Series and the various types of Fourier Series. In the third part, Fourier Integral, the relations between Fourier Integral and Fourier Series and the applications of Fourier Integrals are given.

2012, vii+57 Page

Key Words : Fourier Series, Fourier Integral, Orthogonal Functions, Orthogonal and Orthonormal Sets

TEŞEKKÜR

Master eğitimim süresince engin bilgisi ve titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan ve ufkumu genişleten danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a, çalışmam boyunca beni teşvik etmesi ve bilimsel katkılarından dolayı Arş. Grv. Aziz SAĞLAM'a ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Fatma Nur CAN

AFYONKARAHİSAR, Ocak 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}^+$	$(0, \infty)$ aralığı
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$, aralığı
$\bar{A}$	A Kümesinin Kompleks Eşleniği
$\operatorname{Im} Z$	Z nin Imajiner kısmı
$\operatorname{Re} Z$	Z inin Reel kısmı

ŞEKİLLER DİZİNİ

GİRİŞ

Belirli zaman aralıklarında kendini tekrar eden sürece periyodiklik, eğer bu durumu gerçekleyen bir fonksiyon varsa bu tür fonksiyona da periyodik fonksiyon denir. Matematik , Fizik, Kimya, Biyoloji gibi bir çok disiplinde bir çok olay peryodiktir ve peryodik olarak gerçeklenir. Periyodik olayları ifade etmek için kullanılan bir sınıf fonksiyon da trigonometrik fonksiyonlardır. Bunun sebebi peryodikliğin daha kolay anlaşılmasını sağlamasındandır. Örneğin doğada basit peryodik olaylar, matematik olarak sinüs ve kosinüs fonksiyonları ile gösterilebilir.Fiziksel olarak gerçeklenen bir diyapozonun titreşimleri örnek olarak verilebilir. Eğer olay n defa tekrarlanıyorsa basit titreşimleri gösteren fonksiyon

$$A \sin 2\pi nt \text{ veye } A \cos 2\pi nt$$

den ibarettir. Bununla birlikte basit sinüs ve kosinüs fonksiyonları ile ifade edilen olaylara Basit Harmonik Titreşim denir. Bundan dolayı peryodik fonksiyonları bir Trigonometrik seri ile gösterme gereği duyulmuştur. Böyle bir seri

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

şeklindeki Fourier Serisidir. Fourier Serisi Elektromagnetik teorisinde, Akustik, Isı Akımında ve Matematik-Fizik in bir çok alanında oldukca önemlidir. Eğer bir f fonksiyonu

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

şeklinde ifade edilirse, bu fonksiyonda a_n ve b_n keyfi olarak belirlenen sabitler dizisi olmak üzere, a_n e ve b_n e hangi değerleri verirsek verelim $f(t)$ daima 2π periyodlu periyodik fonksiyon olacaktır. Dolayısıyla $\cos nt, \sin nt$ fonksiyonları $n = 0, 1, ...$ için değişik formdaki periyodik fonksiyonların yapı taşları olarak düşünülebilir. Fransız Matematikçi Jean Baptiste Joseph Fourier periyodik fonksiyonları bir takım fark denklemlerinin çözümünde ele almıştır.

Fourier 1700 lerin sonuna doğru yaptığı çalışmalarında periyodik bir f fonksiyonunu yukarıda da ifade edildiği gibi

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

şeklinde vermiştir. Bu tanımlamalardan sonra, sinüsoidal olmayan sinyaller Fourier serileri vasıtasıyla sinüsoidal olarak ifade edilmiştir.

Yapılan bu temel çalışmalardan sonra, Fourier Serileri üzerine bir çok temel çalışmalar ve bu çalışmaların farklı disiplinlerde uygulamaları yapılmıştır.

Bu Tezi oluştururken temel olarak R. YARASA'nın 1979 yılında tercümesini yaptığı "Fourier Analysis" kitabını temel kaynak olarak göz önüne aldık.

Bu çalışmada ortogonal sistemleri ele alarak bunlar için Fourier Serilerini yazdık ve özelliklerini inceledik. Ayrıca Fourier Serilerinin farklı şekillerini ifade ederek bu seriler yardımıyla Fourier İntegrallerini ele aldık

1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1 (Süreklilik) : $A \subset R$, f: $A \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1.1}$$

ise f fonksiyonuna a noktasında **süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekliyse fonksiyon A **üzerinde süreklidir** denir.

Tanım 1.2 (Parçalı Sürekli Fonksiyon) : Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde parçalı sürekli fonksiyondan şu anlaşılır. $[a, b]$ aralığında $a = t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ özelliğine sahip sonlu sayıda $t_1, t_{2,...}, t_n$ noktalarını alalım. $f(t)$ her kısmi $t_i < t < t_{i+1}$ aralığında(içinde) sürekli ve aralığın uç noktalarına her iki taraftan yaklaşması halinde, yani sağdan $f(t_i + 0)$ ve soldan da $f(t_{i+1} - 0)$ sonlu limitleri varsa, $f(t)$ ye$[a, b]$ aralığında **parçalı sürekli fonksiyon** denir.

Tanım 1.3 (Periyodik Fonksiyon) : Belirli zaman aralıklarında kendini tekrar eden sürece periyodiklik bu tür fonksiyonlara da **periyodik fonksiyonlar** denir. Matematik ve uygulamalı bilimlerde pek çok olay peryodiktir. Reel eksen üzerinde tanımlı bir $f(x)$fonksiyonu bir T değeri için $f(x) = f(x + T)$ özelliğini taşıyorsa bu fonksiyona periyodik fonksiyon ve T sayısına da periyod denir. T lerin en küçüğüne esas veya asli peryod denir (Hwei P. H. 1967, Yarasa 1976**)**.

Peryodik fonksiyonların bazı özelliklerini şu şekilde verebiliriz. f bir peryodik fonksiyon ve T de bu fonksiyonun peryodu olmak üzere,

1. $$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt$$

dir. Özellikle $a = T/2$ alınırsa,

$$\int_{0}^{T} f(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt$$

olduğu görülür.

2. $$\int_{T}^{T+t} f(t)\, dt = \int_{0}^{t} f(t)\, dt$$

3. $g(t) = \int\limits_0^t f(u)\,du$

ise ancak ve ancak

$\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = 0$ olduğunda $g(t+T) = g(t)$ dir.

4. $\int\limits_c^{c+T} f(t)\,dt = \int\limits_0^T f(t)\,dt$

dir

Tanım 1.4 (Fourier Serisi) : 2π peryodlu bir $f(t)$ fonksiyonu bazı koşulları sağladığında trigonometrik bir seri ile gösterilebilir.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1.2}$$

şeklinde olan bu seriye **fourier serisi** denir (Yarasa 1976).

$f(t)$ nin (**1.2**) serisi ile gösterilebilmesi Dirichlet koşulları ile belirlenmiştir (Yarasa 1976).

Tanım 1.5 (Dirichlet Koşulları) : $f(t)$, $(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlanmış 2π peryotlu bir fonksiyon olsun.

a. $f(t)$,$(-\pi, \pi)$ aralığında sürekli veya parçalı sürekli bir fonksiyondur.

b. $f(t)$ fonksiyonunun bir peryod içindeki maksimum ve minimumları sonlu sayıda olmalıdır.

c. $f(t)$ fonksiyonu bir peryod aralığında mutlak integrallenebilirdir.

Bu koşullara **Dirichlet koşulları** denir. Dolayısıyla 2π peryodlu bir $f(t)$ fonksiyonu $(-\pi, \pi)$ aralığında Dirichlet koşullarını sağladığında Fourier serisi,

$$f\ \ (t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right)$$

veya kısaca

$$f\ \ (t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} + \phi_n \right)$$

olarak yazılır. $\dfrac{\pi}{l} = \omega$ alınarak,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n) \\ & c_n \cos(n\omega t + \phi_n) = c_n . \left[\cos(n\omega t) . \cos\phi_n - \sin(n\omega t) . \sin\phi_n\right] \\ & a_n = c_n \cos\phi_{n,} \quad b_n = -c_n \sin\phi_n \\ & \phi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n}, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. a_0 : apsisten itibaren ortalama yükseklik, $c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$: Fourier Serisinin Genel Terimi, ω: esas Frekans Açısı(birim zamandaki radyan sayısı,uygulamada açı birimi olarak derece kullanılırsa da, matematikte radyan birimi tercih edilir. $1rad = \dfrac{180}{\pi} \approx 57.29°$), c_n: Harmonik Amplitüd(dalganın genliği), ϕ_n: Faz Açısıdır(dalganın yatay eksende ne kadar kaydığıdır).

Burdan hareketle bu sinüsodial hareketler frekans, periyod, genlik olarak adlandırılan özellikleriyle oluşurlar ve frekans boyutlu analizler olarak ifade edilirler (Yarasa 1976).

Tanım 1.6 (Mutlak İntegrallenebilme) : $f(t)$ fonksiyonu bir peryod aralığında

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ f(t)|\, dt = sonlu < \infty \tag{1.3}$$

ise mutlak integrallenebilirdir denir (Dym 1985).

Tanım 1.7 (Frekans ve Periyot) : Frekans ; süreçteki döngüsel hareketlerin ne sıklıkta olduğunu özetlemektedir. Bir başka deyişle; 2π de bir tamamlanan döngü sayısını ifade etmektedir.**Periyot** ; sürecin döngüsel hareketi tamamlaması için gereken zaman uzunluğunu göstermektedir (Yarasa 1976).

Tanım 1.8 (Frekans Açısı) : ω, esas Frekans Açısı(birim zamandaki radyan sayısı) (Yarasa 1976).

Tanım 1.9 (Amplitüd) : Bir dalganın yüksekliği yani dalganın maksimum ya da minimum noktası ile yatay eksen arasındaki uzaklığa .**Amplitüd(genlik)** denir. Dalganın maksimum noktası ile minimum noktası arasındaki aralık olan ve genliğin iki katı olarak ifade edilen değer **dalga şiddeti** olarak bilinmektedir (Yarasa 1976).

Tanım 1.10 (Jordan Kriteri) : $f(t)$ nin sonlu değişimli olduğu her aralıkta onun Fourier serisi yakınsaktır ve fonksiyonun sürekli olduğu bir aralığın içinde de düzgün yakınsaktır (Yarasa 1976).

Tanım.1.11 (Ortogonal Fonksiyonlar) : $\{\varphi_n(t)\}$ fonksiyon dizisinin her hangi iki fonksiyonu (a,b) aralığında

$$\int_a^b \varphi_m(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \quad \text{için} \\ \neq 0 & m = n \quad \text{için} \end{cases} \tag{1.4}$$

eşitliğini sağlıyorsa $\{\varphi_n(t)\}$ dizisi (a,b) aralığında **Ortogonaldir** denir.

Tanım 1.12 (Dirichlet Teoremi) : $(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlanan 2π peryodlu $f(t)$ fonksiyonu, Dirichlet koşullarını sağladığından $(-\pi,\pi)$ aralığında (**1.2**) Fourier serisi ile gösterilebilir. Serinin değeri (Schwartz 1966, Hwei P. H. 1967, Yarasa 1976).

1. $f(t)$ nin sürekli olduğu bütün noktalarda(aralığın içinde) $f(t)$ nin değerine eşit,

2. Süreksizlik noktalarında

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$

değerine eşit.

3. **A**ralığın uç noktalarında, $t=-\pi,\ \ t=\pi$ de

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

ifadesine eşit olur. Böylece $f(t)$ nin Fourier serisi

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1.5}$$

veya

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nt + \varphi_n) \tag{1.6}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.13 (Fourier İntegrali) : Eğer $f(t)$ fonksiyonu her sonlu aralıkta Dirichlet koşullarını sağlıyor ve $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak integrallenebiliyorsa yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < M \tag{1.7}$$

olacak şekilde bir M sayısı bulunabiliyorsa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-j\omega u} du \right] e^{j\omega t} d\omega \tag{1.8}$$

integraline $f(t)$ fonksiyonunun **Fourier İntegrali** denir (Schwartz 1966, Hwei P. H. 1967, Stein 1971, Dym 1985, Korner 1988).

2. FOURIER SERİSİ

Bu başlık altında peryodik fonksiyonların özelliklerini kullanarak Fourier serisini ve farklı tiplarini ele alarak detaylı bir inceleme yapacağız.

2.1 Fourier Serisi

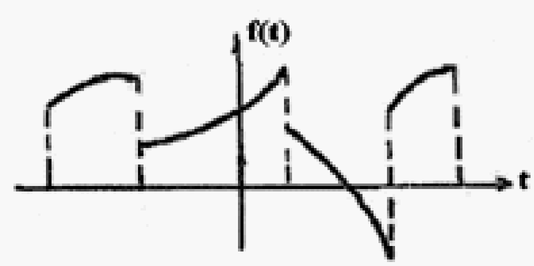
2π peryodlu bir $f(t)$ fonksiyonu bazı koşulları sağladığında trigonometrik bir seri ile gösterilebilir (Yarasa 1976).

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right) \tag{2.1}$$

şeklinde olan bu seriye Fourier serisi denir. 2π peryodlu $f(t)$ fonksiyonunun (**2.1**) serisi ile ifade edilmesi Dirichlet şartları ile sağlanmıştır. Şimdi Dirichlet şartlarını ele alalım.

2π peryodlu $f(t)$ fonksiyonu $(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Eğer bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona Dirichlet şartlarına sahip bir fonksiyon, bu şartlara da Dirichlet şartları denir.

a. $f(t)$, $(-\pi,\pi)$ aralığında sürekli veya parçalı sürekli bir fonksiyondur. Burada $[a,b]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyondan şu anlaşılır:



Şekil 2.1. f(t) fonksiyonunun parçalı sürekliliği

$[a,b]$ aralığında $a=t_1<t_2<...<t_n=b$ özelliğine sahip sonlu sayıda $t_1,t_{2,...},t_n$ noktalarını alalım. Eğer $f(t)$ fonksiyonu her $t_i<t<t_{i+1}$ alt aralığında(içinde) sürekli ve aralığın uç noktalarına her iki taraftan yaklaşılması halinde, yani sağdan $f(t_i+0)$ ve soldan da $f(t_{i+1}-0)$ yaklaşıldığında sonlu limitlere sahipse o zaman $f(t)$ ye bu aralıkta parçalı sürekli fonksiyon denir.

b. $f(t)$ fonksiyonunun bir peryod içindeki maksimum ve minimumları sonlu sayıda olmalıdır $f'(t)$ türevi parçalı sürekli olabilir. (a) ve (b) koşullarını sağlayan fonksiyonlara parçalı düzgün sürekli denir.

c. $f(t)$ fonksiyonu bir peryod aralığında mutlak integrallenebilirdir. Yani

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ f(t)|\, dt = sonlu < \infty$$

olmalıdır.

Özellikle $t = -\pi$ uç noktasında fonksiyonun aldığı değer t nin sağdan $-\pi$ ye yaklaşırken aldığı $f(-\pi+0)$ değeridir. $t = \pi$ için de $f(\pi-0)$ değeri anlaşılacaktır. Bunlar eşit veya farklı olabilirler.

Dirichlet Teoremi (Schwartz 1966, Yarasa 1976, Korner 1988).

$(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlanan 2π peryodlu $f(t)$ fonksiyonu, Dirichlet koşullarını sağladığından $(-\pi, \pi)$ aralığında **(2.1)** Fourier serisi ile gösterilebilir.

1. Serinin değeri, $f(t)$ nin sürekli olduğu bütün noktalarda (aralığın içinde) $f(t)$ nin değerine eşit,

2. Serinin değeri, süreksiz noktalarında,

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

değerine eşit

3. Serinin değeri, aralığın uç noktalarında yani $t = -\pi$, $t = \pi$ noktalarında,

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$$

ifadesine eşit olur.

Bunların sonucu olarak, $f(t)$ nin Fourier serisi

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \qquad (2.2)$$

veya

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nt + \varphi_n) \qquad (2.3)$$

şeklinde yazılır. Buradaki **(2.3)** serisinin $c_n \cos(nt + \varphi_n)$ genel terimine $f(t)$ fonksiyonunun n.Harmonik fonksiyonu denir. Burada a_0, a_n, b_n ler Fourier katsayılarıdır.

2.2 Ortogonal Fonksiyonlar :

$\{\varphi_n(t)\}$ fonksiyon dizisinin her hangi iki fonksiyonu (a, b) aralığında

$$\int_a^b \varphi_m(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \text{ için} \\ \neq 0 & , m = n \text{ için} \end{cases} \tag{2.4}$$

eşitliğini sağlıyorsa $\{\varphi_n(t)\}$ dizisi (a, b) aralığında Ortogonaldir denir.

Bu durumda, dizinin her bir $\varphi_1(t)$,$\varphi_2(t)$,...,$\varphi_n(t)$ elemanı diğerinin ortogonalidir. Dolayısıyla bu fonksiyonlar (a, b) de ortogonal bir cümle oluştururlar. Şimdi bu durumu örneklerle gösterelim.

1. $\{\sin t, \sin 2t, ..., \sin nt\}$ dizisi $(0, \pi)$ aralığında ortogonaldir. Gerçekten,

$$\int_0^\pi \varphi_m(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \int_0^\pi \sin mt.\sin nt.dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \text{ için} \\ \dfrac{\pi}{2} & , m = n \text{ için} \end{cases}$$

eşitliği kolayca görülür.

2. $\{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, ..., \sin nt, \cos nt\}$ dizisi $(0, 2\pi)$ ve $(-\pi, \pi)$ aralıklarında ortogonal, fakat $(0, \pi)$ de ortogonal değildir. $n \neq 0$ olan bütün n ler için,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ntdt = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ntdt = 0$$

ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ \pi & m = n \text{ için} \end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ \pi & m = n \text{ için} \end{cases} \tag{2.5}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ \pi & m = n \text{ için} \end{cases}$$

olarak hesaplanır.

(2.4) de $m = n$ için elde edilen integralin

$$\int_a^b \varphi_n^2 (t) \, dt = A_n = \|\varphi\| \tag{2.6}$$

değerine $\varphi_n (t)$ in **Normu** denir.

Eğer $\varphi_n (t) = (A_n)^{-1/2} \varphi_n (t)$ alınırsa yukardaki integralin normu 1 olur. Yani,

$$\int_a^b \left[(A_n)^{-1/2} \varphi_n (t) \, dt \right]^2 = 1 \tag{2.7}$$

dir. Bu durumda,

$$\frac{\varphi_1 (t)}{\sqrt{A_1}}, \frac{\varphi_2 (t)}{\sqrt{A_2}}, ..., \frac{\varphi_n (t)}{\sqrt{A_n}}, ... \tag{2.8}$$

dizisini göz önüne alıyoruz demektir. Normu 1 e eşit olan **(2.8**) dizisi **Ortonormal cümle**, $\varphi_n (t)$ fonksiyonlarına da **Normalize** edilmiş fonksiyon denir. Diğer bir deyişle,

$$\int_a^b \varphi_m (t) \, \varphi_n (t) \, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ için} \\ 1 & m = n \text{ için} \end{cases} \tag{2.9}$$

eşitliğini sağlayan $\{\varphi_n (t)\}$ cümlesine Ortonormal cümledir denir.

Örneğin,

$$\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 ntdt = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 nt.dt = \pi \quad (n \geq 1)$$

olduğundan dolayı,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, ...$$

ifadesi ortonormal bir cümle oluşturur. Bu cümlede iki farklı fonksiyonun çarpımının 0 dan 2π ye kadar integrali sıfır ve herbirinin karesinin 0 dan 2π ye kadar integrali de 1 e eşit olacaktır.

2.3 Euler-Fourier Formülü

$\{\varphi_n(t)\}$fonksiyonlar cümlesi (a,b) de ortonormal bir cümle ve $f(t)$ fonksiyonu da

$$f(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + ... + c_n\varphi_n(t) + ... \tag{2.10}$$

şeklinde bir seri ile ifade edilmiş olsun. Burada $f(t)$ fonksiyonu (a,b) de integrallenebilen bir fonksiyondur. Bu serideki c_n katsayılarını belirlemek için (**2.10**) ifadesinin her iki yanını soldan $\varphi_n(t)$ ile çarparsak,

$$f(t)\varphi_n(t) = c_1\varphi_1(t)\varphi_n(t) + c_2\varphi_2(t)\varphi_n(t) + ... + c_n\varphi_n^2(t) + ...$$

olacaktır. Elde edilen bu ifadenin her iki yanını terim terime, a dan b ye kadar integre edersek, $(m \neq n)$ olan terimlerin integrali sıfır olacağından, yalnız $c_n\varphi_n^2(t)$ terimli integral kalacaktır. Böylece (**2.9**) gereğince,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt &= c_n\int_a^b \varphi_n^2(t)\,dt = c_n \\ c_n &= \int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt \end{aligned} \tag{2.11}$$

olur. Bu da c_n katsayılarını belirler. Bulunan (**2.11**) formülüne Euler-Fourier formülü denir. c_n katsayılarına $\{\varphi_n(t)\}$ yardımıyla elde edilen Fourier katsayıları ve **(2.10)** şeklindeki seriye de $\{\varphi_n(t)\}$ile ilgili Fourier serisi denir(Genelleştirilmiş Fourier Serisi) (Hwei P.H. 1967, Yarasa 1976).

2.4 Fourier Katsayıları :

(**2.2**) de ifade edilen $f(t)$ nin trigonometrik Fourier Serisindeki $\{\varphi_n(t)\}$ ortogonal cümle

$$\{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, ..., \sin nt, \cos nt\}$$

şeklindedir. Diğer yandan (**2.5**) eşitliklerini ve (**2.11**) formülünü kullanarak,

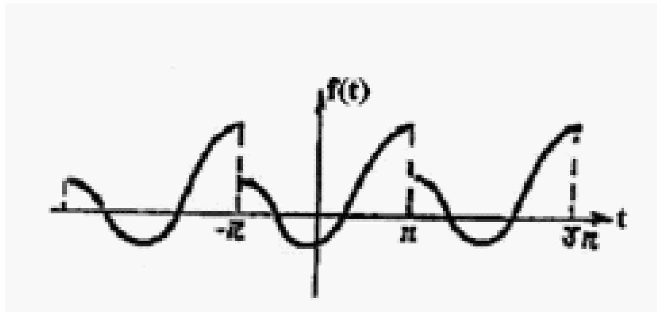
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt \end{aligned} \tag{2.12}$$

eşitlikleriyle ifade edilen a_0, a_n, b_n bulunur. Bulunan bu a_0, a_n, b_n ifadeler Fourier Katsayıları için formüllerdir (Schwartz 1966, Stein 1971, Yarasa 1976). Verilmiş bir fonksiyonun (**2.2**) Fourier serisi

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

açılımına Harmonik Analiz denir. (**2.2**) serisinin terimleri 2π peryodlu peryodik fonksiyonlardır. Eğer bu seri $(-\pi, \pi)$ aralığında yakınsak ise t nin bütün değerleri içinde yakınsaktır. Buna ilave olarak, serinin 2π peryodik tekrarlamada aldığı değer(serinin toplamı), $(-\pi, \pi)$ aralığında aldığı değere eşittir. Ayrıca Fourier Serisi $(-\pi, \pi)$ aralığının dışında da 2π peryodu ile $f(t)$ yi ifade eder. a_0,a_n,b_n katsayılarını veren (**2.12**) formülleri herhangi 2π uzunluklu bir aralıkta da geçerlidir. Bu halde (**2.12**) integralinin alt ve üst sınır değerleri α dan $\alpha + 2\pi$ ye kadar olur(α herhangi bir açı)

Eğer $f(-\pi + 0) \neq f(\pi - 0)$ ise, $t = \pm\pi$ uç noktaları süreksizlik noktaları olur. (**şekil 2.2** de görüldüğü gibi) $(-\pi, \pi)$ de sürekli olan fonksiyon, peryodik tekrarlamadan dolayı uç noktalarda süreksiz olmaktadır.



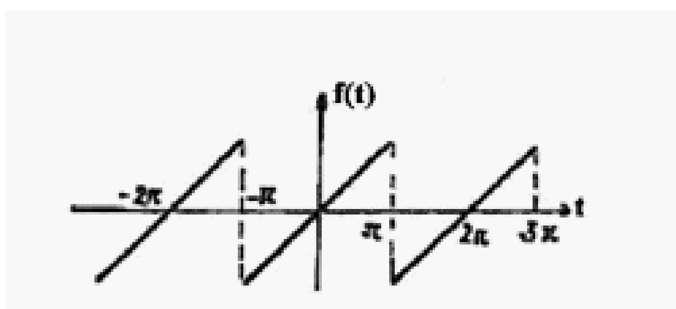
Şekil 2.2. t=±π uç noktalarının süreksizliğinin gösterimi

Örnek 1 :$(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlanmış 2π peryodlu $f(t) = t$ fonksiyonunun Fourier Serisini bulalım.

Fonksiyon $(-\pi, \pi)$ aralığında sürekli, fakat uç noktalarda süreksizdir. Bu noktalarda fonksiyonun aldığı değer

$$f(-\pi) = \frac{f(-\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

dir. Aynı şekilde $f(\pi) = 0$ olarak yazılır.



Şekil 2.3. 2π peryodlu f(t)=t fonksiyonunun gösterimi

(**2.12**) formülleri yardımıyla, $a_{0,}a_n, b_n$ katsayılarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt dt = -\frac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n-1}\frac{2}{n} \end{aligned}$$

Böylece verilen fonksiyonun Fourier Serisi

$$f(t) = t = 2\left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + ...\right) \ , (-\pi < t < \pi)$$

olarak yazılıyor. $t = \pm\pi$ için seri $f(t)$ nin değerine değilde, $f(t)$ nin $(-\pi, \pi)$ noktalarında sağdan ve soldan aldığı değerlerin aritmetik ortalamasına, yani yukarda ifade edildiği gibi sıfıra yaklaşır. $t = \pm\pi$ için serinin her terimi sıfırdır. Yani $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ dir.

Örnek 2 : 2π peryodlu

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \ \text{ için} \\ \\ 1 & 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \ \text{ için} \\ \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \ \text{ için} \end{cases}$$

fonksiyonu için Fourier serisini arayalım. Bunun için ilk olarak Fourier katsayılarına bakalım.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0dt = \frac{1}{2} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1.\cos nt.dt = \frac{1}{n\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & , \ n = 2k \quad \text{için} \\ \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} & , n = 2k+1, \quad \text{için} \\ & (k = 0, 1, ...) \end{cases} \\ b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1.\sin nt dt = \frac{-1}{n\pi}(\cos n\pi/2 - 1) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{(2k+1)\pi} & , n = 2k+1 \quad \text{için} \\ \\ \dfrac{1-(-1)^k}{2k\pi} & , n = 2k \qquad \text{için} \end{cases} \end{aligned}$$

olarak belirlenir. Dolayısıyla $f(t)$ nin Fourier Serisi

$$f(t) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{\pi} \cos t + \sin t + \sin 2t - \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\sin 3t}{3} \right.$$
$$\left. + \frac{\cos 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} - \frac{\cos 7t}{7} + \frac{\sin 6t}{3} + ... \right)$$

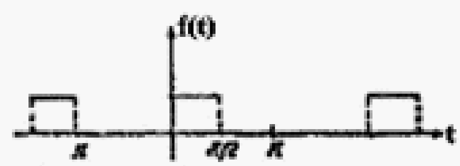
dır. $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ noktalarında seri $\dfrac{1}{2}$ değerine yaklaşmaktadır. Serinin $t = 0$ için değeri fonksiyonun aldığı $\dfrac{1}{2}$ değerine yaklaşacağından

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... \right)$$

yazılır. Buradan da

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

bulunur.



Şekil 2.4. 2π peryodlu f(t) fonksiyonu gösterimi

2.5 Kosinüs ve Sinüs Serileri :

Fourier katsayılarının hesaplanmasında bizlere kolaylık sağlayacak şu teoremi verelim.

Teorem: Bir $f(t)$ fonksiyonu $(-\alpha, \alpha)$ aralığında çift fonksiyon yani $f(-t) = f(t)$ ise

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\, dt = 2 \int_{0}^{\alpha} f(t)\, dt$$

dir. Eğer fonksiyon tek fonksiyon $f(-t) = -f(t)$ ise

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\, dt = 0$$

dır.

Çift Fonksiyonun Fourier Serisi :

$$
\begin{aligned}
b_n &= 0 \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt dt
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

katsayıları yardımıyla,

$$
\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt}
\tag{2.14}
$$

olarak yazılır.

Tek Fonksiyonun Fourier Serisi :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_n &= 0 \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt dt
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

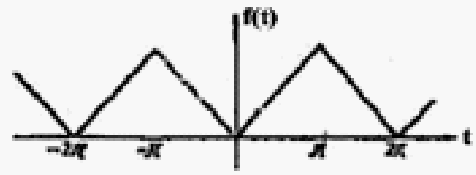
katsayıları yardımıyla,

$$
\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt}
\tag{2.16}
$$

eşitliği yazılır.

Çift fonksiyonun açılımında yalnız kosinüslü terimler, tek fonksiyounun açılımında ise yalnız sinüslü terimler bulunduğundan (**2.14**) serisine Kosinüs serisi,ya da (**2.16**) serisine Sinüs serisi denir.

Örnek 3. $(-\pi, \pi)$ de tanımlanmış 2π peryodlu $f(t) = |t|$ fonksiyonunun(üçgen dalga) Fourier serisini hesaplayalım.



Şekil 2.5. 2π peryodlu f(t)=|t| fonksiyonu gösterimi

Bu fonksiyon için, $f(-t) = f(t)$ sağlandığından $f(t)$ çift fonksiyondur($0y$ eksenine göre simetriği var.). Bundan dolayı $f(t) = t$ fonksiyonu $(0, \pi)$ de kosinüs serisine açılır.

$$|t| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

olacaktır. Burada,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t dt = \pi \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt dt = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ çift için} \\ \dfrac{-4}{\pi(2k+1)^2} & n = 2k+1 \\ & k = 0, 1, 2, ... \end{cases} \end{aligned}$$

eşitlikleri yazıldığından,

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + ... + \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} + ...\right)$$

elde edilir. $t = 0$ için serinin değerinden ve $f(0) = 0$ değerinde,

$$\pi^2 = 8\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + ...\right)$$

eşitliği bulunur.

Örnek 4. $(-\pi, \pi)$ de tanımlanmış 2π peryodlu

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \quad \text{için} \\ 1 & 0 < t < \pi \quad \text{için} \\ 0 & t = 0, t = \pm\pi \quad \text{için} \end{cases}$$

fonksiyonun Fourier serisini yazınız.

$f(-t) = -f(t)$ eşitliği sağlandığından $f(t)$ fonksiyonu tek fonksiyon(orjine göre simetrik)olup Fourier serisi

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

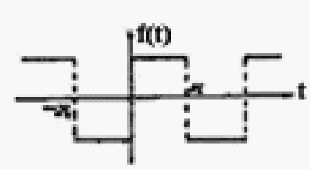
şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1. \sin nt dt = \frac{2}{\pi}\left(1 - (-1)^n\right) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ çift için} \\ \frac{4}{\pi} & n \text{ tek için} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + ... + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} + ...\right)$$

yazılır.

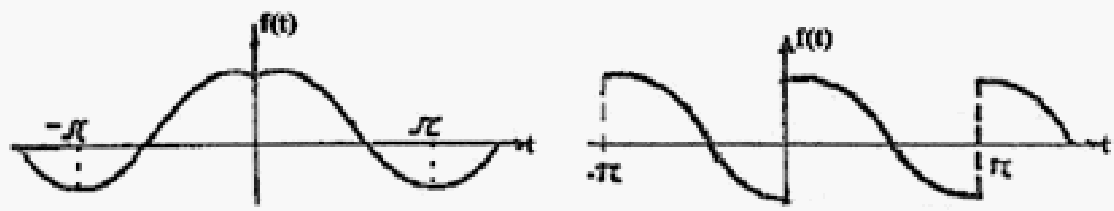


Şekil 2.6. 2π peryodlu f(t) fonksiyonu

2.6 Yarım Aralık Uzantılar

$(0,\pi)$aralığında tanımlanmış herhangi bir fonksiyon $(0,\pi)$ de yalnız kosinüs terimlerini kapsayan **(2.14)** serisi ile gösterilebileceği gibi, yalnız sinüs terimlerini kapsayan (**2.16)** serisi ile de gösterilebilir. Katsayılar (**2.14)** veya (**2.16)** ile hesaplanır. Her iki seri $(0,\pi)$ aralığının içinde $f(t)$ fonksiyonunu, süreksizlik noktalarında aritmetik ortalamayı verir. $(0,\pi)$ aralığının dışında ise tamamen farklı fonksiyonlar gösterirler.

$(0,\pi)$ aralığında tanımlanan $f(t)$ fonksiyonunu $(-\pi,0)$ aralığına, çift fonksiyon olacak şekilde uzatalım($0y$ eksenine göre simetriğini alarak). Böylece $(-\pi,\pi)$ aralığında 2π peryodlu çift fonksiyon elde ederiz. Bu fonksiyon kosinüs serisi ile gösterilir(**Şek 2.7).** Benzer olarak $(0,\pi)$ de tanımlanmış olan $f(t)$ fonksiyonu $(-\pi,0)$ aralığına, orjine göre simetriği alınarak uzatılırsa $(-\pi,\pi)$ aralığında 2π peryodlu tek fonksiyon olacağından, bu fonksiyon sinüs serisi ile gösterilir (**Şek.2.8).**



Şekil 2.7. 2π peryodlu çift fonksiyon   Şekil 2.8. 2π peryodlu tek fonksiyon

Kosinüs serisine açılımında

$$f(-0) = f(0) \ , \ f(-\pi+0) = f(\pi-0)$$

sinüs serisine açılımında

$$f(-0) = -\ f(0) \ , \ f(-\pi+0) = -f(\pi-0)$$

dır.

Birinci halde $0, \pm\pi$ süreklilik noktaları ikinci halde süreksizlik noktaları olur. Genel olarak bu aşağıdaki teoremde belirtilmiştir.

Teorem : $(0, \pi)$ aralığında parçalı düzgün sürekli(kendisi ve türevi sürekli veya parça parça sürekli) $f(t)$ fonksiyonunun Fourier kosinüs serisi ve sinüs serisi, $0 < t < \pi$ de $f(t)$ nin sürekli olduğu her noktada $f(t)$ ye, ve $f(t)$ nin süreksiz olduğu herhangi t_0 noktasında

$$\frac{1}{2}\left[f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)\right]$$

değerine yaklaşır(Hwei P.H. 1967, Yarasa 1976).

Kosinüs serisi $t = 0$ da $f(0 + 0)$, $t = \pi$ de $f(\pi - 0)$ ye yaklaşmaktadır ve her yerde süreklidir. Sinüs serisi ise $t = 0, \pi$ için sıfıra yaklaşır.

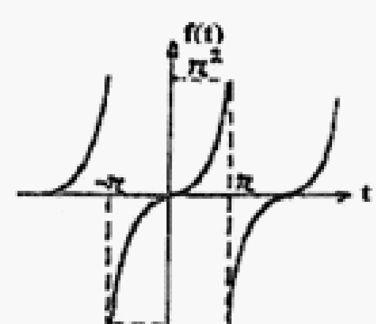
Bu teoremden şu sonuç çıkarılır.

$(0, \pi)$ de sürekli olan bir fonksiyon için Fourier kosinüs serisi, bu aralıkta $f(t)$ ye yaklaşır. Fakat sinüs serisi bu yaklaşım için $f(0) = f(\pi) = 0$ koşulunu gerektirir. Yani

$(0, \pi)$ de sürekli ve $t = 0$, $t = \pi$ de sıfır olan fonksiyon bu aralıkta sinüs serisi ile gösterilir.

Örnek 5 : $(0, \pi)$ aralığında verilmiş $f(t) = t^2$ fonksiyonunun sinüs ve kosinüs serilerini yazınız.

a. $f(t) = t^2$ fonksiyonunun, orjine göre simetriğini alarak $(-\pi, 0)$ aralığına uzatalım. Bu halde $(-\pi, \pi)$ de 2π peryodlu tek fonksiyon elde etmiş oluruz(**Şek.2.9).** Bu fonksiyonun Fourier serisi:



Şekil 2.9. f(t)=t² fonksiyonunun gösterimi

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_n &= 0 \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} t^2 \sin nt dt = \frac{2\left(-1\right)^n \pi}{n} + \frac{4\left[\left(-1\right)^n - 1\right]}{n^3\pi}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri yardımıya,

$$
t^2 = 2\pi\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - ...\right) - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1^3} + \frac{\sin 3t}{3^3} + ...\right)
$$

olarak yazılır. Şekilden de görüldüğü gibi $t = 0$, $t = \pi$ de fonksiyon ve serinin değeri sıfırdır($t = \pi$ süreksizlik noktasıdır).

b. Bu kez $f\left(t\right) = t^2$ fonksiyonunun $0y$ eksenine göre simetriğini alarak $\left(-\pi, 0\right)$ aralığına uzatalım. Bu halde fonksiyon çift olduğundan kosinüs serisine açılır(**Şek 2.10).**

$$
\begin{aligned}
b_n &= 0 \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} t^2 \cos nt dt = \left(-1\right)^n \frac{4}{n^2}
\end{aligned}
$$

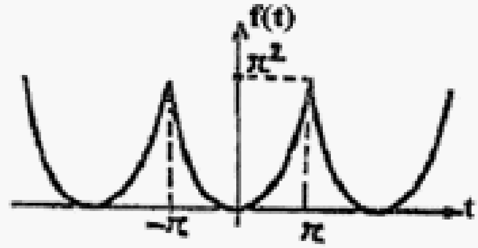
olup

$$
t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{\cos nt}{n^2}
$$

serisi elde edilir. Özellikle $t = 0$ için serinin toplamı $f\left(0\right)$ a eşittir. Böylece

$$
\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + ...
$$

olduğu görülür.



Şekil 2.10. f(t)=t² fonksiyonunun gösterimi

2.7 $2l$ Peryodlu Peryodik Fonksiyonların Fourier Serisi

$(-l, l)$ aralığında tanımlanmış $(2l)$ peryodlu bir fonksiyon kosinüs ve sinüs terimli bir seriye açılabilir. $(0, l)$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon ise yalnız kosinüs veya sinüs serisine açılır. t yerine $t = \dfrac{l\tau}{\pi}$, $\tau = \dfrac{\pi t}{l}$ dönüşümü yapılarak elde edilen

$$f(t) = f\left(\frac{l\tau}{\pi}\right) = \varphi(\tau)$$

τ değişkeninin $\varphi(\tau)$ fonksiyonu, $(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlanmış 2π peryodlu bir fonksiyondur. $\varphi(\tau)$ nın Fourier serisi ise,

$$\varphi(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau)$$

olup bu serideki Fourier katsayıları,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\tau)\, d\tau \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\tau) \cos n\tau d\tau \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\tau) \sin n\tau d\tau \end{aligned}$$

eşitliklerinde $\tau = \dfrac{\pi t}{l}$, $d\tau = \dfrac{\pi}{l} dt$ alındığında,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt \\
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt \\
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

olarak elde edilir. Böylece $(-l,\ l)$ aralığında Dirichlet koşullarını sağlayan $f(t)$ fonksiyonu için Fourier serisi,

$$
f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l} + b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right) \tag{2.18}
$$

veya daha sade olarak,

$$
f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos\left(\frac{n\pi t}{l} + \phi_n\right)
$$

şeklinde yazılır. $\dfrac{\pi}{l} = \omega$ alınırsa,

$$
f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega t + \phi_n) \tag{2.19}
$$

olur. Burada

$$
c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n}
$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca, $c_n\cos(n\omega t + \phi_n)$: Fourier serisinin genel terimi, ω : esas frekans açısı, c_n : Harmonik amplitüd ve ϕ_n : Faz açısıdır.

Diğer yandan $(2l)$ peryodlu herhangi $2l$ uzunluğundaki bir aralıkta Fourier Katsayıları,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(t)\,dt \\
a_n &= \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt \\
b_n &= \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Bu katsayılar $\alpha = -l$ için (**2.17**) katsayılarını verecektir.

Örnek 6 : $(-1, 1)$ aralığında $2l = 2$ peryodlu $f(t) = t - t^2$ fonksiyonunun Fourier serisini bulalım.

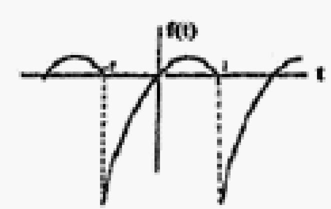
(**2.17**) formüllerine göre Fourier Katsayıları

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} (t - t^2)\, dt = -\frac{2}{3} \\
a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} (t - t^2) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \\
&= -\frac{4\cos \pi n}{n^2\pi^2} \qquad (n \neq 0) \\
b_n &= 1\int_{-1}^{1} (t - t^2) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \\
&= -\frac{2\cos \pi n}{n\pi}
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$
\begin{aligned}
f(t) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos \pi t}{1} - \frac{\cos 2\pi t}{4} + \frac{\cos 3\pi t}{9} - ...\right) \\
+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin \pi t}{1} - \frac{\sin 2\pi t}{2} + \frac{\sin 3\pi t}{3} - ...\right)
\end{aligned}
$$

olur.



Şekil 2.11 f(t)=t-t² fonksiyonu

2.8 Sonlu Fourier Serisi ile Yaklaşım

Eğer bir $f(t)$ fonksiyonu, başka bir $S_n(t)$ fonksiyonu ile yaklaşık olarak gösterilmek istenirse,

$$\begin{array}{c} |\, f(t) - S_n(t)| \\ \text{veya} \\ [\, f(t) - S_n(t)]^2 \end{array} \tag{2.20}$$

farkı, bu yaklaşımdaki hatayı verir. $n \to \infty$ için (**2.20**) farkları sıfıra giderse $S_n(t)$ dizisi de $f(t)$ ye yaklaşır denir. t nin $[a,b]$ aralığında değişmesi halinde oluşacak hata ise (**2.20**) nin a dan b ye kadar integrali

$$\begin{array}{c} \displaystyle\int_a^b |\, f(t) - S_n(t)|\, dt \\ \text{veya} \\ \displaystyle\int_a^b [\, f(t) - S_n(t)]^2\, dt \end{array} \tag{2.21}$$

ile bulunur. Bunlara ‹‹**Ortalama Hata**›› veya ‹‹**Ortalama Kare Hata**›› denir. $n \to \infty$ için yukardaki integralin sıfıra yaklaşması $S_n(t)$ dizisinin $f(t)$ ye yakınsak olduğunu verir.

Bir $\{\varphi_n(t)\}$ cümlesi $[a,b]$ de ortonormal yani

$$\int_a^b \varphi_n(t)\, \varphi_m(t)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \ \text{için} \\ 1 & m = n \ \text{için} \end{cases} \tag{2.22}$$

olsun. $\{\varphi_n(t)\}$ ortonormal cümlenin elemanlarının lineer bir bağıntısı ile gösterilen n.kısmi toplam

$$S_n(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + ... + \alpha_n\varphi_n(t) \tag{2.23}$$

ise, her $f(t)$ için $S_n(t)$ nin $f(t)$ ye yaklaşması

$$
\begin{aligned}
E &= \int_a^b [\ f(t) - S_n(t)]^2\, dt \\
&= \int_a^b [f(t) - (\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + ... +\ \alpha_n\varphi_n(t))]^2\, dt
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

hatasının minumum olması demektir. Bunun için α_i katsayıları nasıl olmalıdır. Bunu anlamak için integral içindeki kareyi açalım.

$$
\begin{aligned}
E = \int_a^b\ f^2(t)\, dt - 2\int_a^b (\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + ... +\ \alpha_n\varphi_n(t)) f(t)\, dt \\
+ \int_a^b (\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + ... + \alpha_n\varphi_n(t))^2 dt
\end{aligned}
$$

(**2.11**) de ifade edilen

$$
c_n = \int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\, dt
$$

şeklindeki Fourier Katsayıları yardımıyla sağ taraftaki ikinci integral

$$
\int_a^b (\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + ... +\ \alpha_n\varphi_n(t)) f(t)\, dt = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2\ + ... + \alpha_n c_n
$$

şeklinde yazılır. Aynı şekilde (**2.22**) yardımıyla sağ tarafdaki üçüncü integral

$$
\int_a^b (\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + ... + \alpha_n\varphi_n(t))^2 dt = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2
$$

olarak ifade edilir. Böylece (**2.24**) eşitliği

$$
E = \int_a^b\ f^2(t)\, dt - 2\sum_{i=1}^n \alpha i c_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2
$$

olur. Bu da

$$E = \int_a^b f^2(t)\, dt - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - c_i)^2$$

demektir. Burada E yi minumum yapan a_i nin seçimi $\alpha_i = c_i$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla α_i ler Fourier Katsayıları olmalıdır. Böylece

$$\min E = \int_a^b f^2(t)\, dt - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \tag{2.25}$$

olur. **(2.24)** eşitliği $E \geq 0$ olduğunu gösterir. Zira integrant karedir.

$$E = \int_a^b f^2(t)\, dt - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \geq 0$$

veya (2.26)

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leq \int_a^b f^2(t)\, dt$$

Burada $n \to \infty$ büyüdükçe $\sum_{i=1}^{n} c_i^2$ toplamı da büyür. Fakat $\int_a^b f^2(t)\, dt$ den küçük kalacağından c_i^2 den meydana gelen nümerik seri yakınsaktır. Bunu şu teoremle söyleyelim.

Teorem : $c_n = \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt$ integralleri $\{\varphi_n(t)\}$ ortonormal cümle ile ilgili $f(t)$ nin Fourier serisinin katsayıları ise, $\sum_{i=1}^{n} c_i^2$ serisi yakınsaktır ve Bessel eşitsizliği denilen

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leq \int_a^b f^2(t)\, dt$$

eşitsizliğini sağlar.

Yakınsak bir serinin genel teriminin sıfıra yaklaşması gereğinden

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

dır(Fourier Katsayılar Dizisi yakınsaktır). O halde şu teoremi verebiliriz.

Teorem : $n \to \infty$ için Fourier Katsayıları

$$c_n = \int_a^b f\ (t)\, \varphi_n\,(t)\, dt$$

sıfıra gider.

Uygulamalar için $n \to \infty$ da kare hata sıfır olmalıdır. (**2.25**) minimum hatanın sıfıra yaklaşması ile hatanın sıfıra yaklaşacağı açıktır. Bu halde (**2.26**) Bessel eşitsizliği şimdi ifade edeceğimiz Parseval eşitliği olarak bilinen eşitlige dönüşecektir.

Teorem(Parseval Teoremi) : $c_1\varphi_1\,(t)+...+c_n\varphi_n\,(t)$, bir $f\,(t)$ fonksiyonunun ortonormal $\{\varphi_n\,(t)\}$ cümlesinin terimleri ile oluşmuş n.ci kısmi açılımı ise $n \to \infty$ gittiğinde ortalama kare hata sıfıra yaklaşır. Böylece

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \int_a^b f^2\,(t)\, dt \tag{2.27}$$

şeklindeki Parseval eşitliği elde edilir. Dolayısıyla Fourier serisi $f\,(t)$ ye yakınsak olur (Yarasa 1976).

Ortogonal $\{\varphi_n\,(t)\}$ cümlesinin elemanları ve (2.**11**) eşitliği ile belirtilen c_n katsayıları ile düzenlenmiş $S_n\,(t)$, eğer her $f\,(t)$ için $f\,(t)$ ye yakınsarsa $\{\varphi_n\,(t)\}$ ortogonal cümlesine kapalı dır denir.

Eğer $\{\varphi_n\,(t)\}$ cümlesinin bütün $\varphi_i\,(t)$ fonksiyonlarına ortogonal olan sıfırdan farklı hiç bir $f\,(t)$ fonksiyonu yoksa, $f\,(t)$ ye göre $\{\varphi_n\,(t)\}$ cümlesine **Tam(Complete)** denir.

Teorem : Her kapalı ortogonal $\{\varphi_n\,(t)\}$ cümlesi tamdır.

Teorem(Trigonometrik Fourier Serileri İçin Parseval Teoremi) : $(-\pi, \pi)$ aralığında 2π peryodlu düzgün sürekli, integrallenebilir $f\,(t)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f\,(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

olduğuna göre Parseval eşitliği

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{2.28}$$

dır. Gerçekten $f(t)$ serisinin her iki tarafını $f(t)$ ile çarpıp $(-\pi,\pi)$ arasında integre edersek(Seri düzgün yakınsak olduğundan bu işlem yapılabilir),

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt + b_n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt\right] \\
&= \frac{a_0}{2}a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pi a_n + b_n\pi b_n)
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

olduğunu görülür (Yarasa 1976).

2.9 Fourier Serisinin Türetilmesi ve İntegrasyonu

Bir $f(t)$ fonksiyonunun

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$$

Fourier serisini, terim terim türeterek elde edilecek serinin, $f(t)$ nin türevi olan $f'(t)$ ye her zaman yakınsadığı söylenemez. İlk serinin yakınsak olmasına karşın, bunu türeterek bulunan türev serisi ıraksak olabilmektedir. Örneğin t nin her değeri için yakınsak olan 2π peryodlu $\frac{t}{2}$ nin

$$\frac{t}{2} = \sin t - \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} - ...$$

Fourier serisini terim terim türeterek elde edilen

$$\cos t - \cos 3t + \cos 5t - ...$$

serisi t nin her değeri için ıraksaktır. Bu durum peryodik (2π peryodlu) olan $\frac{t}{2}$ fonksiyonunun $\pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, ...$de süreksiz olmasından ileri gelmektedir.

Fourier Serisini türetebilme ihtimali seriyi meydana getiren $f(t)$ fonksiyonunun t nin her değeri için sürekli olmasını gerektirir (Seeley 1966, Yarasa 1976, Dym 1985).

Teorem: $f(t)$, 2π peryodlu sürekli bir fonksiyon ve $f(-\pi) = f(\pi)$ olsun. Eğer $f'(t)$ parçalı sürekli ise $f(t)$ nin Fourier serisini terim terim türeterek elde edilen seri $f'(t)$ ye yakınsar.

Gerçekten $f'(t)$ parçalı sürekli ve türetilebilir bir fonksiyon olduğundan $f'(t)$ nin Fourier serisi

$$f'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

dır.(Yarasa 1976). Burada katsayıları belirleyelim. Hipotezden,

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\left[f(\pi) - f(-\pi)\right] = 0$$

olur. α_n ve β_n için kısmi integrasyonu uygulayalım.

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt dt = \frac{1}{\pi} \mid f(t)\cos nt|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, n \sin nt dt$$

eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim sıfır ve ikinci terim de $f(t)$ nin Fourier serisindeki b_n yi verir. Böylece $\alpha_n = nb_n$ olur. Benzer yolla $\beta_n = -na_n$ bulunur. dolayısıyla, $f'(t)$ nin Fourier serisi

$$\boxed{f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nt + nb_n \cos nt)} \tag{2.29}$$

olarak bulunur.

Yukardaki işlemlerden görüldüğü gibi, Fourier Serisini terim terim türeterek elde edilen serinin Fourier Katsayıları $\pm n$ ile çarpılmaktadır. n in artan değerlerine karşılık a_n, b_n yeterince küçük kalmazlarsa, başlangıçtaki serinin yakınsak olmasına karşın türetilmiş seri yakınsak olmaz.

Teorem : 2π peryodlu $f(t)$ fonksiyonu sonlu her aralıkta kendisi ve türevi parçalı sürekli ise, a_n, b_n Fourier Katsayıları

$$|a_n| \leq \frac{M}{n}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n}$$

bağıntısını gerçekler. Yani $\lim_{n\to\infty} na_n$, $\lim_{n\to\infty} nb_n$ limitleri sonludur (Yarasa 1976). Türetilmiş seri Fourier serisi olduğundan yakınsaklığı, kullanılan metodlarla denenebilir. $f'(t)$ Dirichlet koşullarını sağlıyorsa, $f(t)$ nin Fourier Serisi sürekli olduğu her noktada $f'(t)$ ye yakınsak olur.

Örnek 7: 2π peryodlu $f(t) = t^2$ fonksiyonunun $(-\pi, \pi)$ aralığındaki Fourier serisi

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2}$$

dır. $(-\pi, \pi)$ de sürekli olup $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2$ olduğundan terim terim türetilebilir. Türev serisi olan

$$4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n}$$

bu seri $f(t) = t^2$ fonksiyonunun türevi olan $2t$ ye yaklaşır. Gerçektende t nin Fourier serisi

$$t = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n}$$

dır.

2.10 Fourier Serisinin İntegrasyonu

Fourier serisinin terim terim integre edilmesi türetilmesinde olduğu kadar güçlük göstermez.

$f(t)$, 2π peryodlu ve $(-\pi, \pi)$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$F(t) = \int_{-\pi}^{t} f(x)\, dx \qquad (2.30)$$

integrali ile tanımlanan $F(t)$ fonksiyonu da sürekli ve parçalı düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. (2.30) ile tanımlanan $F(t)$, 2π peryodlu peryodik fonksiyon olduğunda $F(\pi) = F(-\pi)$ koşulu sağlanıyorsa sürekli kalır. Diğer taraftan $F(-\pi) = 0$ nedeni ile (2.**30)** da t yerine π yazılırsa

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0$$

olur. Böylece

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \pi a_0 = 0 \tag{2.31}$$

bulunur. a_0, $f(t)$ nin ilk Fourier Katsayısıdır. $a_0 = 0$ halinde her t için peryodik $F(t)$ fonksiyonunun Fourier serisinin $F(t)$ ye yakınsadığını söyleyebiliriz. $a_0 \neq 0$ halinde ise $f(t)$ nin Fourier serisini terim terim integre ederek bulunan

$$F(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)\,d\tau = \frac{a_0}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(a_n \sin nt - b_n \cos nt\right)$$

serisinde $\frac{a_0}{2}t$ gibi peryodik olmayan bir terim bulunacağından $F(t)$ peryodik olmaz. Ancak $a_0 = 0$ halinde $f(t)$ Fouurier serisinin terim terim integrali $f(t)$ nin integraline yaklaşır.

$n \geq 1$ için A_n, $f(t)$ nin Fourier kosinüs katsayılarını B_n de Fourier sinüs katsayılarını göstersin. Bu durumda,

$$\pi A_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt dt = \left| F(t)\frac{\sin nt}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{n} F'(t)\,dt$$

ifadesinde $F'(t) = f(t)$ olması kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \pi A_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{n} f(t)\,dt \\ A_n &= -\frac{b_n}{n} \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$A_0 = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t f(t)\,dt \tag{2.33}$$

yazılır. Benzer şekilde,

$$B_n = \frac{a_n}{n} \tag{2.34}$$

elde edilir. Bu durumları şu teoremde ifade edelim.

Teorem : $f(t)$, 2π peryodlu ve Fourier Serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

olan bir fonksiyon $(a_0 = 0)$ ve

$$F(t) = \int_{-\pi}^{t} f(x)\, dx$$

ile tanımlanan 2π peryodlu fonksiyon olduğuna göre, $F(t)$ nin Fourier serisi, $f(t)$ nin Fourier serisini terim terim integre ederek elde edilen

$$F(t) = \int_{-\pi}^{t} f(\tau)\, d\tau = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} \cos nt \right) \tag{2.35}$$

seridir. İlk terim

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t\ f(t)\, dt$$

ile verilmektedir. $a_0 \neq 0$ halinde ise teorem $\left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right)$ ye uygulanır. Yukarıdaki teoremin $F'(t) = f(t)$ nin serisinin düzgün yakınsak olmasını istememesi ilginçtir. Genel olarak terim terim integrasyon türetmeye oranla daha az koşullar istemektedir.

Örnek 8. $f(t) = t$ nin Fourier serisi

$$t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nt}{n} \tag{2.36}$$

şeklindedir. Bu seriyi integre ederek,

a. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ...$

b. $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + ...$

toplamlarını hesaplayalım.

$$F(t) = \int_{-\pi}^{t} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{t} x dx$$

olarak tanımlanan $F(t)$ nin Fourier serisi

$$F(t) = \int_{-\pi}^{t} x dx = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \tag{2.37}$$

dir. Burada

$$A_0 = \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t f(t)\, dt = \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t f(t)\, dt = -\frac{2\pi^2}{3}$$

ve

$$A_n = -\frac{b_n}{n}, B_n = \frac{a_n}{n}$$

olduğundan, $f(t) = t$ nin (**2.36**) serisinde $a_n = 0$, $b_n = (-1)^{n-1} \dfrac{2}{n}$ eşitliklerinden,

$$A_n = \frac{2(-1)^n}{n^2}, \; B_n = 0$$

dır. Böylece (**2.37**) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{t^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2} \\ t^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2} \end{aligned} \tag{2.38}$$

elde edilir.

Şimdi birde (**2.36**) eşitliğini terim terim integre ederek aynı sonucu bulalım.

$$F(t) = \int_{0}^{t} x dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{t} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} dx$$

$$\frac{t^2}{2} = C + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2}$$

C, t^2 fonksiyonunun ilk Fourier katsayısıdır. Dolayısıyla,

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t^2}{2}dt = \frac{\pi^2}{6}$$

olarak bulunur. C yukarda yerine yazılırsa,

$$\frac{t^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nt}{n^2}$$

serisi bulunur. Bu ise **(2.38)** ifadesidir(t^2 fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. $(\pi \pm 2n\pi, \pi^2)$ noktalar sivri noktalar olup, $f(t) = t$ fonksiyonundaki sıçrama noktalarına karşı gelir).

a. **(2.38)** serisinde $t = 0$ yazılırsa,

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$$

ve

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ...$$

bulunur.

b. **(2.38)** ifadesi için Parseval teoremini uygulayalım.

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}, a_n = (-1)^n\frac{4}{n^2}, b_n = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

olduğundan,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^4dt = \frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

eşitliği yardımıyla,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{31\pi^4}{1440}$$

bulunur.

Örnek 9. Örnek 8 deki sonuçtan yararlanarak

$$f(t) = \frac{\pi^2 t - t^3}{3}; [-\pi, \pi]$$

fonksiyonunun Fourier serisini hesaplayınız. Biz

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2}$$

olduğunu görmüştük. $a_0/2 = \pi^2/3$ dır ve sıfırdan farklıdır. Bu nedenle $f(t) - a_0/2$ fonksiyonunu integre edeceğiz.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{t} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) dx &= 4\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{t} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} dx \\
\frac{t^3}{3} - \frac{\pi^2 t}{3} &= 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nt}{n^3}
\end{aligned}$$

bulunur.

2.11 Fourier Serisinin Kompleks Şekli

Fourier Serisinde, trigonometrik foksiyonlar yerine üstel imajiner fonksiyonları kullanarak seri ve seri ile ilgili hesaplamalar basitleştirilebilir. (**2.18**) eşitliğinde $\frac{\pi}{l}$ yerine ω açısal frekansı yazarak seriyi tekrar ele alalım.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{2.39}$$

(2.39) serisinde,

$$\cos n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}, \sin n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \tag{2.40}$$

formüllerini göz önüne alacak olursak,

$$\begin{aligned}
a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t &= \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \\
&= \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t}
\end{aligned}$$

eşitliğinden ve

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \tag{2.41}$$

tanımlamasından,

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}$$

yazılır. Böylece $a_0/2 = c_0$ alarak, (**2.39**) Trigonometrik Fourier Serisinin kompleks şekli,

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}) \tag{2.42}$$

olur. Burada c_n ve c_{-n} (**2.41**) ile verilen a_n, b_n değerlerine bağlı katsayılardır. Ayrıca (**2.42)** ifadesi,

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jn\omega t}$$

şeklinde yazılarak,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega t} \tag{2.43}$$

olduğu görülür.

c_0, c_n, c_{-n} Fourier katsayıları,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt \\
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\
&= \frac{1}{2l} \left[\int_{-l}^{l} f(t) \cos n\omega t dt - j \int_{-l}^{l} f(t) \sin n\omega t dt \right] \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) [\cos n\omega t - j \sin n\omega t]\, dt \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-jn\omega t} dt
\end{aligned} \tag{2.44}$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Benzer olarakta

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left(a_n + jb_n\right) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f\left(t\right) e^{jn\omega t} dt$$

bulunur. c_n ve c_{-n} lerin her ikisini birlikte ($n = 0, \pm1, \pm2, ...$tam sayıları olmak üzere)

$$c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f\ \ \left(t\right) e^{-jn\omega t} dt, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{2.45}$$

olarak tek formülle gösterebiliriz. (**2.43**) ve (**2.45**) Fourier serisinin kompleks gösterimidir.

$$\begin{aligned} f\left(t\right) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega t} \\ c_n &= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f\left(t\right) e^{-jn\omega t} dt \end{aligned} \qquad n = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{2.46}$$

c_n katsayısı genel olarak

$$c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2l} f\left(t\right) e^{-jn\omega t} dt \tag{2.47}$$

şeklinde yazılır. Bunlara ek olarak fiziksel hesaplar reel büyüklüklerle ilgili olduğundan kompleks olarak bulunan sonuçların reel büyüklüklere çevrilmesi zorunludur.

(**2.43**) kompleks serisinden, (**2.39**) reel (trigonometrik) seriye geçilebilir. Bunun için de (**2.41**) eşitliklerinden a_n, b_n ler c_n, c_{-n} lere bağlı olarak çözülürler.

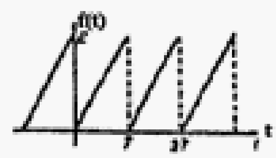
$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_n &= j\left(c_n + \underline{c_n}\right) = j\left(c_n + \overline{c_n}\right) = 2\operatorname{Re}\left(c_n\right) \\ b_n &= \ j\left(c_n - \underline{c_n}\right) = \ j\left(c_n - \overline{c_n}\right) = -2\operatorname{Im}\left(c_n\right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

Burada c_{-n}, c_n nin eşlenik kompleksidir. $\overline{c_n} = \underline{c_n}$ Re ve Im notasyonları c_n in reel ve imaginer kısımlarını belirtmektedir.

Örnek 11 :

$$f\left(t\right) = \frac{E}{T}t \ ;0 < t < T \ ,f\left(t+T\right) = f\left(t\right)$$

olarak tanımlanan ve peryodik tekrarlanan testere dişi fonksiyonun kompleks Fourier serisini yazalım. Bunun için,



Şekil 2.12. f(t)=(E/T)t göstermi

(**2.43**) formülünu yani,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \;; \omega = \frac{2\pi}{T}$$

eşitliğini kullanacağız. Dolayısıyla Fourier katsayıları,

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E}{T} t e^{-jn\omega t} dt$$

integralinde kısmi integrasyon yöntemiyle

$$c_n = \frac{E}{T^2}\left[\frac{Te^{-jn2\pi}}{-jn\omega} - \frac{1}{(jn\omega)^2}\left(e^{-jn2\pi} - 1\right)\right]$$

eşitliğinde $e^{-jn2\pi} = 1$ oluşu kullanılarak

$$c_n = \frac{-E}{JTn\omega} = j\frac{E}{2\pi n} = \frac{E}{2\pi n} e^{j\pi/2} \tag{2.49}$$

bulunur. c_n eşitliğinde $n = 0$ için c_0 belirtilemediğinden ayrıca hesaplayacağiz.

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt = \frac{E}{T^2}\int_0^T t^2 dt = \frac{E}{2}$$

olur. c_0 ve c_n değerlerini (**2.43**) de yerlerine koyarak

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{E}{2\pi n} e^{j\pi/2} e^{jn\omega t} \\ &= \frac{E}{2} + \frac{E}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{j(n\omega t + \pi/2)} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bu açılımı Trigonometrik şekle dönüştürelim. Bunun için (**2.48**) formülleri ve (**2.49**) dan

$$a_0 = 2c_0 = E, a_n = 2\operatorname{Re}(c_n) = 0, b_n = -2\operatorname{Im}(c_n) = \frac{-2E}{2\pi n} = -\frac{E}{\pi n}$$

bulunur. Bu değerleri

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

de yerlerine yazılırsa

$$f(t) = \frac{E}{2} - \frac{E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}$$

bulunur.

Örnek 12. Örnek 11 de olduğu gibi, aynı işaretli, yani negatif kısmı üste alınmış peryodik sinüs fonksiyonunun serisini yazınız.

$f(t) = E \sin \pi t$, $0 \leq t \leq 1$ veriliyor. Burada peryod $2l = 1$, $\omega = \dfrac{\pi}{l} = 2\pi$ olur. (**2.47**) formülünü $a = 0$ alarak gözönune alacağız.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t)\, e^{-jn\omega t} dt \\
&= \int_0^1 E \sin \pi t e^{-jn2\pi t} dt \\
&= \frac{E}{2j} \int_0^1 \left(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\right) e^{-jn2\pi t} dt \\
&= \frac{E}{2j} \left[\frac{e^{-j(2n-1)\pi t}}{-j(2n-1)} - \frac{e^{-j(2n+1)\pi t}}{-j(2n+1)} \right]_0^1 \\
&= \frac{-2E}{(4n^2-1)\pi}, \quad e^{-j(2n-1)\pi} = e^{-j(2n+1)\pi} = -1
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. c_n den $n = 0$ için $c_0 = \dfrac{2E}{\pi}$ bulunur(veya $\displaystyle\int_0^1 E \sin \pi t dt$ den hesaplanır).

Bu yapılanlar gereğince $f(t)$ nin kompleks Fourier serisi

$$f\left(t\right)=-\frac{2E}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{j2\pi nt}$$

olup, trigonometrik Fourier serisini yazalım.

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\,\mathrm{Re}\left(c_n\right)=\frac{-4E}{\left(4n^2-1\right)\pi}\\
a_0 &= 2c_0=\frac{4E}{\pi}\\
b_n &= -2\,\mathrm{Im}\left(c_n\right)=0
\end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla,

$$f\left(t\right)=\frac{2E}{\pi}-\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nt}{4n^2-1}$$

olacaktır.

2.12 Kompleks Fourier Serisinin Ortogonalliği

Kompleks Fourier Serisi için $\{\varphi_n(t)\}$ ortogonal fonksiyonlar cümlesi $e^{jn\omega t}$, $e^{-jn\omega t}$ fonksiyonlarından oluşmuştur. Burada

$$\varphi_n(t) = e^{\,jn\omega t},\ \varphi_m(t) = e^{\,jm\omega t}$$

ve $\varphi_m(t)$ nin eşlenik kompleksi, $\bar{\varphi}_m(t) = e^{-jm\omega t}$ olmak üzere $\{\varphi_n(t)\}$, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$cümlesi ortogonaldir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi_n(t)\ \bar{\varphi}_m(t)\,dt &= \int_{-l}^{l} e^{\,jn\omega t} e^{-jm\omega t} dt \\ &= \int_{-l}^{l} e^{-j(n-m)\omega t} dt \\ &= \begin{cases} 0 & m \neq n \ \text{ için} \\ 2l & m = n \ \text{ için} \end{cases}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. O halde

$$\left\{\frac{e^{jn\omega t}}{\sqrt{2l}}\right\}, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

cümlesi ortonormaldir.

3. FOURIER İNTEGRALİ

3.1 Fourier İntegrali

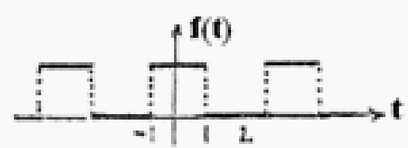
Fourier Serileri, Dirichlet koşullarını sağlayan peryodik fonksiyonlarla ilişkili çeşitli problemlerin incelenmesinde güçlü bir araçdır. Bir çok pratik problemlerde peryodik fonksiyonlar bulunmaz. Bu çeşit problemlerde(Mekanik-Elektrik Sistemleri v.s) etkiyen kuvvet veya voltaj peryodsuz olabilir. Örneği, bir kez meydana gelen ve tekrarlanmayan Puls gibi. Bu tür fonksiyonlar için Fourier Serisini kullanamayız. Fakat verilen bir peryodik fonksiyonun peryodu sonsuza gittiğinde, serinin yaklaştığı limiti (şayet varsa) inceleyerek, peryodik olmayan fonksiyonların uygun bir gösterimini elde edebiliriz.

Bu tür problemleri çözebilmek için Fourier Analiz yöntemi oluşturulmuştur. Yukarda söylediklerimizi bir örnekle açıklayalım (Gelfand 1964, Yarasa 1976).

Örnek 3.1 : $2l = 4$ peryodlu $f_l(t)$ fonksiyonu(**Şek 3.1**)

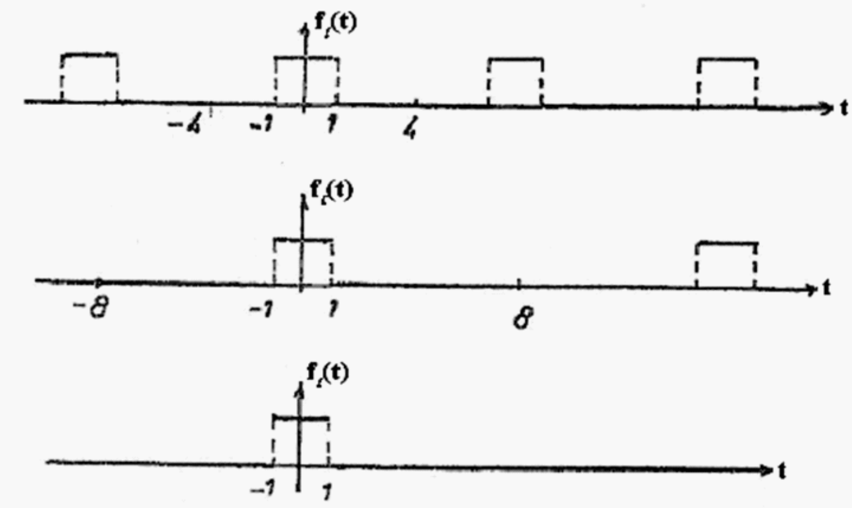
$$f_l(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & -2 < t < -1 \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu peryodik fonksiyonun, peryodunun giderek büyüyerek sonsuza gitmesi halinde peryodik olmayan bir şekle dönüştüğünü görelim.



Şekil 3.1. 2l=4 peryodlu f(t) fonksyonu

Bunun için, $l = 4$, $l = 8$ ve $l \to \infty$ değerlerini vererek elde ettiğimiz şekiller aşağıda görüldüğü gibi olacaktır.



Şekil 3.2. l=4, l=8 ve l→∞ değerlerini vererek elde edilen fonksiyonların gösterimi

$f_l\,(t)$ çift fonksiyon olduğundan kosinüs serisine,

$$f_l\,(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi t}{l} + \;\; a_2 \cos\frac{2\pi t}{l} +,,, + a_n \cos\frac{n\pi t}{l} + ... \tag{3.1}$$

olarak açılır. Burada

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l}\int_0^l dt = \frac{2}{l} \\ a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \cos\tfrac{n\pi t}{l} dt \\ &= \frac{2}{l}\frac{\sin n\pi/l}{n\pi/l} \end{aligned}$$

dır. a_n, $n\pi/l$ frekansının fonksiyonu olarak değişmektedir. $n\pi/l = \omega_n$ alınırsa,

$$a_n = \frac{2}{l}\frac{\sin\omega_n}{\omega_n}$$

ω_n ler n ye ardışık değerler vererek elde edilmekte ve ardışık iki değer arasındaki fark sabit olup $\dfrac{\pi}{l}$ dir. n indisi tam sayılar olduklarından a_n amplitüdleri(ω_n değiştikçe) sürekli bir eğri göstermezler.

a_n ler,

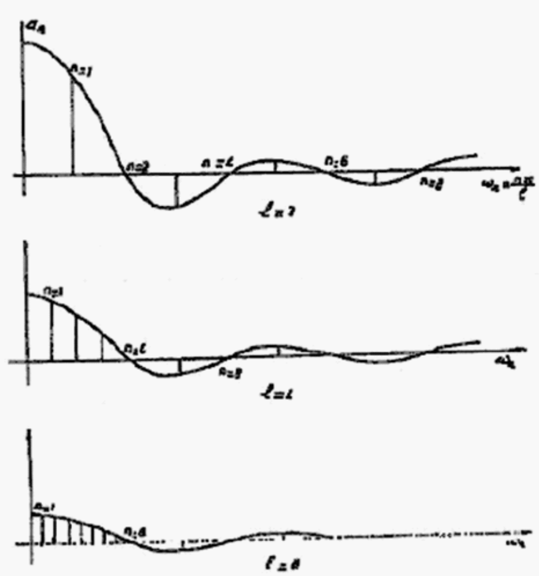
$$y = \frac{2}{l}\frac{\sin \omega_n}{\omega_n}$$

eğrisinde ω nın sadece ardışık değerlerine karşilık bulunan $\frac{\pi}{l}$ aralıklı ordinat değerleridir. Bu nedenle a_n nin grafiği olan amplitüd spektrmuna "**Çizgi Spektrmu"** ismi verilir. Bu durum **Şekil 3.3** de $l = 2$, $l = 4$ ve $l \to \infty$ için çizilmiş a_n nin grafiklerinde belirgin olarak görünmektedir.

l sonsuz büyüdükçe(**Şekil 3.3** ten de anlaşılacağı üzere) (**3.1**) eşitliği ile gösterilen $f_l(t)$ serisinin terimlerinin frekansları giderek sıklaşmakta ve katsayıları da sıfıra yaklaşmaktadır. Bundan dolayı $f_l(t)$ serisini limiti integral olan sonsuz küçük terimlerin toplamı olarak düşünebiliriz

Şimdi genel halde $l \to \infty$ için Fourier serisinin alacağı şekli araştıralım.

Doğal olarak, bu durumda $f(t)$ peryodik değildir ve biz peryodik olmayan fonksiyonların Fourier gösterimini yapacağız demektir.



Şekil 3.3. l→∞ için f(t) fonksiyonunun gösterimi

Her sonlu $(-l, l)$ aralığında Dirichlet koşulları sağlayan ve $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak integrallenebilir olan $f(t)$ fonksiyonunun kompleks Fourier serisi olan

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad (\omega = \frac{\pi}{l}) \tag{3.2}$$

seriyi ele alalım. Burada

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-jn\omega t} dt$$

şeklinde olan c_n katsayılarını (3.2) de yerine yazarsak $f(t)$ ifadesi,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, e^{-jn\omega t} dt\right] e^{jn\omega t} \\ f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(u)\, e^{-jn\omega u} du\right] e^{jn\omega t}\frac{\pi}{l} \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde olur. Şimdi bu toplamın $l \to \infty$ için limitini arayalım.
$\omega = \dfrac{\pi}{l}$ den görüleceği gibi $l \to \infty$ olurken, ω küçülerek sıfıra yaklaşmaktadır. Genel terim frekansı $n\omega = n\dfrac{\pi}{l}$ dır ve iki ardışık frekans arasındaki fark $\dfrac{\pi}{l}$ olupbunu

$$\frac{(n+1)\pi}{l} - \frac{n\pi}{l} = \frac{\pi}{l} = \Delta\omega$$

ile göstererek (**3.3**) de yerine koyarsak

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(u)\, e^{-jn\Delta\omega u} du\right] e^{jn\Delta\omega t}\Delta\omega \tag{3.4}$$

olur. Burada

$$\varphi(n\Delta\omega) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(u)\, e^{-jn\Delta\omega u} du\right] e^{jn\Delta\omega t}$$

tanımlamasını yapacak olursak (**3.4**) eşitliği

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n\Delta\omega)\,.\Delta\omega \tag{3.5}$$

şeklinde olacaktır.

l sonsuz arttığında $\Delta\omega$ sıfıra yaklaşır. n de sonsuza gittiğinden $n\Delta\omega$ (ve ya (**3.3**) deki $n\omega$)harmonikleri sürekli değişeceğinden spektrumda sürekli sıralanacaktır. Diğer bir deyişle $n\omega$ ya karşı gelen tek tek harmonikler yerine limitte $n\Delta\omega \rightarrow \omega$ alınabilir.

$l \rightarrow \infty$ $(\Delta\omega \rightarrow 0)$ için (**3.5**)toplamının limiti belirli integralin tanımına göre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)\, d\omega$$

integralini verecektir. O halde $l \rightarrow \infty$ limitinde (**3.4**) eşitliği

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-j\omega u} du \right] e^{j\omega t} d\omega \tag{3.6}$$

şeklinde bir integrale varır.

Bu eşitlik limit olarak elde edilmiş peryodik olmayan $f(t)$ fonksiyonunu sürekli harmonikler ile gösterme olanağını verir. Kuşkusuz, bu formüllerin çıkarlışında Matematik formasyonundan daha çok mühendislikteki uygulamaları ve kullanma yöntemleri önemlidir.

Ayrıca klasik matematik ile gösterilmeyen bazı fonksiyonların ele alınmalarını mümkün kılar.

Yukarda $f(t)$ ile yapılan işlemlerin geçerli olmasını sağlayan sınırlamalar şöyle belirlenmiştir.

1. $f(t), -\infty < t < \infty$ aralığında reel değişkenin tek değerli fonksiyonu olmalıdır. Bununla beraber sonlu sayıda süreksizlik noktaları bulunabilir.

2. Bir t_0 süreksizlik noktasındaki değeri:

$$f(t_0) = \frac{1}{2}\left(f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)\right)$$

ortalama değerine eşittir. **(1)** ve (**2**) birlikte şöyle ifade edilir. $f(t)$ her sonlu aralıkta Dirichlet koşullarını sağlamalıdır.

3. $f(t), (-\infty, \infty)$ aralığında mutlak integrallenebilir olmalı. Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < M$$

olacak şekilde M sayısı bulunabilmelidir.

Bu koşullar altında (**3.6**) eşitliğine $f(t)$ fonksiyonunun **Fourier İntegrali** denir ve

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \tag{3.7}$$

şeklinde gösterilir. Yine Burada

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \tag{3.8}$$

yazılır.

Fourier İntegrali elektrik kominikasyonunda, bazı integrallerin hesaplanmasında ve kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde güçlü bir yöntemdir. (**3.7**) ve (**3.8**) formülleri

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \tag{3.9}$$

olarakta yazılır. Buna **Simetrik Şekil** denir.

3.2 Fourier İntegralinin Trigonometrik Şekli

(**3.6**) eşitliğinde, Euler formüllerini kullanarak

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{j\omega(t-u)} du d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left(\cos\omega(t-u) + j\sin\omega(t-u)\right) du d\omega \end{aligned}$$

yazılır. $f(t)$ fonksiyonunun reel olması nedeni ile ikinci sinüslü terim sıfır alınarak

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(t-u)\, du d\omega \tag{3.10}$$

bulunur. (**3.10**) de $\cos\omega(t-u), \omega$ nın çift fonksiyonudur. Bu nedenle ω üzerindeki integrasyon sınırları $(0,\infty)$ alınması ve $u = x$ yazılmas ile (**3.10**)

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)\, dx d\omega \tag{3.11}$$

olur. Bu (**3.11**) ifadesi Fourier Serisinin $l \to \infty$ için elde edilen değeridir. **(3.11)** aşağıdaki teoremle belirtilmiştir.

3.3 Fourier Teoremİ:

$f(t)$ fonksiyonu her sonlu aralıkta Dirichlet koşullarını sağlar ve $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak integrallenebilir bir fonksiyon ise (**3.11**) $f(t)$ nin sürekli olduğu her yerde $f(t)$ değerine ve süreksiz olduğu noktalarda ise sağ ve sol limitlerinin aritmetik ortalamasına eşittir. Yani her t için

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)\,dx\,d\omega \qquad (3.12)$$

eşitliği sağlanır. Bu teoreme Fourier Teoremi denir.

(**3.11**), (**3.8**) nin trigonometrik gösterimidir. (**3.11**) aşağıdaki şekillerde de yazılabilir.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)\,dxd\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)\cos\omega t\cos\omega x + f(x)\sin\omega t\sin\omega x]\,dx\right]d\omega \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx \\ B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx \end{aligned} \qquad (3.13)$$

tanımlamalarını yaparak (**3.11**) ifadesi

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t]\,d\omega \qquad (3.14)$$

yazılır.

Bu formül $(-\infty, \infty)$ aralığı içinde $f(t)$ fonksiyonunu harmonik titreşime göre verir.Bu titreşimin ω frekansı sürekli olarak 0 dan ∞ a kadar değişir. $A(\omega)$, $B(\omega)$ fonksiyonları ω frekansına bağlı olmasından dolayı amplitüd ve başlangıç fazının dağılım kanununu gösterir.

$f(t)$ nin çift fonksiyon olması halinde $B(\omega) = 0$ olup,

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 2\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \\ f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t d\omega \end{aligned} \tag{3.15}$$

dir. $f(t)$ nin tek fonksiyon olması halinde ise $A(\omega) = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} B(\omega) &= 2\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx \\ f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\omega)\sin\omega t d\omega \end{aligned} \tag{3.16}$$

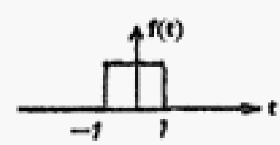
yazılır.

Şimdi Fourier integrali ile bazı integrallerin hesaplanmasına ilişkin örnekler verelim.

Örnek 3.2:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonun Fourier İntegralini bulunuz.



Şekil 3.4. f(t) fonksiyonunun gösterimi

şekli göz önünde bulundurulusa, (**3.11**) eşitliği

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x)\,dxd\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-1}^{1} \cos\omega(t-x)\,dxd\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega(t+1)-\sin\omega(t-1)\right)d\omega \\
f(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olacaktır..$f(t)$ nin $t=\pm 1$ noktasındaki ortalama değeri

$$f(1)=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

dir. Böylece (**3.12**) Fourier İntegral Teoremine göre (**3.17**) ($f\ (t)$ nin yukarda verilen değerini yerine koyarak)integralinin değeri

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & -1<t<1 \text{ için}\\ \dfrac{\pi}{4} & t=\pm 1 \text{ için}\\ 0 & t<-1; t>1 \text{ için}\end{cases}$$

olarak belirlenir(Bu integrale Dirichletin süreksizlik faktörü denmektedir).

Örnek 3.3 : $\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 3.2.de bulunan sonuçta $t=0$ alınırsa,

$$f(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega$$

olur. $f(0)$, $f(t)$ nin tanımından $f(0)=1$ dir. O halde

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

elde edilir. Bu integral **sinüs-integral** ismi verilen

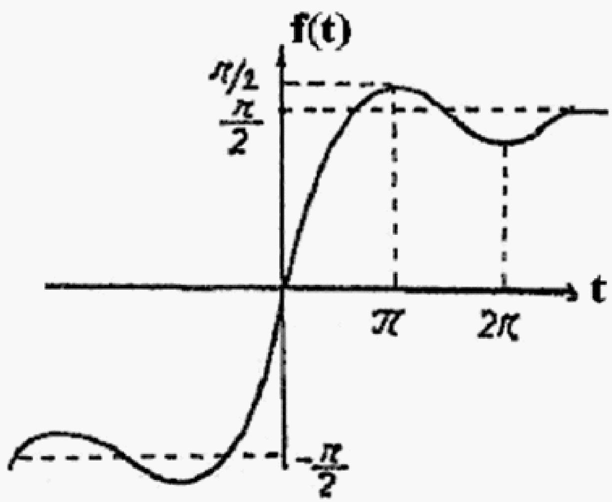
$$\mathrm{Si}(y)=\int_0^{y}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega \tag{3.18}$$

integralinin y (reel) sonsuz için limitidir. Si-integral fonksiyonu (tanımından), $\mathrm{Si}\,(0) = 0$ ve $\mathrm{Si}\,(\infty) = \dfrac{\pi}{2}$ değerlerini almakta ve $\mathrm{Si}\,(-y) = -\,\mathrm{Si}\,(y)$ eşitliğini sağladığı için de tek fonksiyondur. Grafiği (**Şek 3.5**) de gösterilmiştir.

(**3.17**) integralini Si-integral olarak gösterebiliriz. Bunun için (**3.17**) de $\cos\omega t.\sin\omega$ çarpımını toplam şekline çevirirsek

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{\cos\omega t\ \sin\omega}{\omega}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{\sin\left(\omega+\omega t\right)}{\omega}d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{\sin\left(\omega-\omega t\right)}{\omega}d\omega \qquad (3.19)$$

olur.



Şekil 3.5. f(t) si-integral tek fonksiyonunun gösterimi

Birinci integral de $\omega + \omega t = x$ dönüşümü yapalım, $0 \le \omega \le a$ için $0 \le x \le a\,(t+1)$ ve ikinci integralde $\omega - \omega t = -x$ alalım. $0 \le \omega \le a$ için $0 \le x \le a\,(t-1)$ olacağından (**3.19**)

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{\cos\omega t\ \sin\omega}{\omega}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{(t+1)a}\frac{\sin x}{x}dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{(t-1)a}\frac{\sin x}{x}dx \qquad (3.20)$$

ve (**3.18**) e göre

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos\omega t\ \sin\omega}{\omega}d\omega \ = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}\left(a\left(t+1\right)\right) - \ \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}\left(a\left(t-1\right)\right)$$

elde edilir.

Örnek 3.4 : $f\left(t\right) = e^{-a|t|}$ $(a > 0)$ fonksiyonunun Fourier İntegralini hesaplayınız.

$f\left(t\right)$ çift fonksiyondur. (**3.16**) yi uygulayarak

$$A\left(\omega\right) = 2\int_0^\infty e^{-a|x|}\cos\omega x dx = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$f\left(t\right) = e^{-a|t|} = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega \qquad (t > 0, a > 0)$$

olur. Buradan da

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2a}e^{-a|t|} \tag{3.21}$$

bulunur.

$f\left(t\right) = e^{-a|t|}$ $(t > 0$ için$)$ foksiyonunun $f\left(-t\right) = -f(t)$ tek fonksiyon olarak tanımlanması halinde benzer işlemlerle

$$\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-at} \quad (t > 0, a > 0) \tag{3.22}$$

bulunur. (**3.21**), (**3.22**) integrallerine "**Laplace İntegralleri**" denir.

KAYNAKLAR

Dym, H. and McKean, H.P. (1985). Fourier Series and İntegrals, Academic Pres. New York.

Gelfand, I.M. and Shilov, G.E. (1964). Generalized Functions, Vol. 1 Academic Pres. New York.

Korner, T.W.(1988). Fourier Analysis, Cambridge Univ. Pres. Cambridge.

Schwartz, L. (1966). Mathematical for the physical sciences, Hermann, Editeurs des sciences et des arts. France.

Seeley Benjamin, R.T. (1966). An Introduction to Fourier Series and Integrals. Benjamin, New York.

Stein, E.M,. Weiss, G. (1971). Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Priceton Univ. Pres. New York.

Yarasa, R. (1976). Fourier Analizi, Çağlayan Basımevi, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Fatma Nur CAN
Doğum Yeri	:	Merzifon
Doğum Tarihi	:	17.11.1986
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	:	Bursa Hasan Coşkun Lisesi, 2003
Lisans	:	Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2008
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 2012

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl