YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hülya DURUR

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2010

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

Hülya DURUR

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. M. Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

HAZİRAN 2010

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ’ın danışmanlığında, **Hülya DURUR** tarafından hazırlanan **“Yüksek Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı”** başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca …/…/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Unvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Doç. Dr. Özkan ÖCALAN	
Üye	Doç. Dr. Mehmet KARABACAK	
Üye (Danışman)	Yrd. Doç. Dr. M. Kemal YILDIZ	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
........./......../........ tarih ve ……/..….
sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

Yüksek Lisans Tezi

Hülya DURUR

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: **Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ**

Diferensiyel denklemler üzerinde uzun yıllardır çalışılmaktadır ve diferensiyel denklemlerin birçok bilim dalında uygulaması mevcuttur. Yıllardır gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümünün salınımlılığını inceleyen çok sayıda çalışma yapılmıştır. Birçok yazar diferensiyel denklemin çözümünün salınımlılığı konusunu incelemiştir. Bu tezin birinci bölümünde diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ile ilgili elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde diferensiyel denklemlerin salınımlılığı için gerekli olan temel kavram ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde salınımlı katsayılı yüksek mertebeden lineer olmayan gecikmeli

$$\left[\alpha(t)[x(t)+r(t)x(k(t))]^{(n-1)}\right]' + p(t)F(x(\tau(t))) + q(t)G(x(\sigma(t))) = \Phi(t)$$

diferensiyel denklemlerinin salınımlılık durumları incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise

$$[y(t)+p(t)f\left(y(\tau(t))\right)]^{(n)} + q(t)h\left(y(\sigma(t))\right) = 0\,, t \geq t_0\,, t \in R$$

şeklindeki yüksek mertebeden lineer olmayan neutral salınımlı katsayılı fonksiyonel tipli diferensiyel denklemin sınırlı çözümlerinin salınımlılığı için yeter şartlar elde edilmiştir.

2010, 29 sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel denklemler, salınımlılık, salınımsızlık, neutral, gecikme.

ABSTRACT

OSCILLATION OF HIGHER ORDER
DIFFERENTIAL EQUATIONS

M. Sc. Thesis

Hülya DURUR

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied sciences
Department of Mathematics
Supervisor: **Assist. Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ**

Differential equations has been studied for a long time and its applications are avaliable in many scientific branches. In many years there has been much research activity concerning the oscillaton of delay differential equations. In the first chapter of the thesis, we tread some results given for differential equations in the literature. In the second chapter, general defination and some theorems for oscillations of delay differential equations are given. In the third chapter, oscillation of higher order nonlinear delay differential equations with oscillatory coefficients

$$\left[\alpha(t)[x(t)+r(t)x(k(t))]^{(n-1)}\right]' + p(t)F(x(\tau(t))) + q(t)G(x(\sigma(t))) = \Phi(t)$$

have been examined. In the fourth chapter, where our original results are given, the higher order nonlinear neutral type functional differential equation

$$[y(t)+p(t)f\left(y\left(\tau(t)\right)\right)]^{(n)} + q(t)h\left(y\left(\sigma(t)\right)\right) = 0\,, t \geq t_0\,, t \in R$$

is considered and sufficient conditions for oscillation of bounded solutions of this equation are given.

2010, 29 pages

Keywords and Phrases: Differential equations, oscillation, nonoscillation, neutral, delay.

TEŞEKKÜR

Eğitim ve öğretimimin ilk basamaklarını oluşturan, bende okuma bilinci uyandıran ve beni bu yönde yönlendiren aileme çok teşekkür ederim.

Tez konusunda bana matematik ile ilgili farklı bakış açısı ve bilimsel düşünme becerisi kazandıran ve bizzat tezimle ilgilenen danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. M. Kemal YILDIZ'a ve Doç. Dr. Özkan ÖCALAN'a sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca Lisans ve Lisansüstü eğitim ve öğretimimde bilimsel katkılarından dolayı Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Hülya DURUR
Afyonkarahisar, Haziran, 2010

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam Sembolü
$\prod$	Çarpım Sembolü
N	Doğal Sayılar Kümesi
Z	Tam Sayılar Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
$x'(t)$	$x(t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$x''(t)$	$x(t)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$\in$	Elemanıdır
$\forall$	Her, tüm
$C[A,B]$	A kümesinden B kümesine tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi
e	Euler sayısı (2,71828182845…)
ln	Doğal logaritma fonksiyonu
∞	Sonsuz
$\int$	Belirsiz integral
$\int_a^b$	Belirli integral
$\binom{n}{r}$	*n* nin *r* li kombinasyonu
lim	Doğal limit fonksiyonu
sin	Sinüs fonksiyonu

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hülya DURUR

Doğum Yeri : Serik/ANTALYA

Doğum Tarihi : 22/09/1986

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

İlköğretim : Serik Kazım Karabekir İlköğretim Okulu (1992–2000)

Lise : Serik Anadolu Lisesi (2000–2004)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2004–2008)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2008–2010)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

1. Birey Dershanesi (2008–2009)
2. Afyonkarahisar-Merkez Cumhuriyet İÖO.(2008–2009)
3. Afyonkarahisar-Merkez Hüseyin Sümer İÖO. (2009–2010)

Yayınlar (SCI ve diğer)

Bu çalışmanın 4. bölümünde ele alınan

$$[y(t)+p(t)f\left(y(\tau(t))\right)]^{(n)}+q(t)h\left(y(\sigma(t))\right)=0\,,t\geq t_0\,,t\ \in\ R$$

tipindeki yüksek mertebeden lineer olmayan neutral tipli fonksiyonel diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılık durumlarını araştırdığımız "Oscillatory behaviour of a higher order nonlinear neutral type functional difference equation with oscillationing coefficients" isimli çalışma yayın için gönderilmiştir.

Diğer Konular

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler uzun yıllardır çalışılan bir konudur. Diferensiyel denklemler günlük hayatta mühendislik, fizik, kimya, biyoloji gibi birçok temel bilim alanında kullanılmakta ve günlük hayatta birçok kolaylık sağlamaktadır.

Ayrıca diferensiyel denklemlerin vazgeçilmez bilimsel öneminde "doğada kopukluk yoktur" yanlış varsayımlarına yer veriliyordu. Bu eski hipoteze göre fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Bu nedenle diferensiyel denklemler, fizik bilimine özgü matematiksel ifade olarak kabul ediliyordu. Fakat 20. yüzyıl başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Eski Yunanlılara göre, doğa olaylarında görülen süreklilik ile kesiklilik arasındaki zıtlaşma, doğadaki sürekliliğin bir aldatmacasıydı. Günümüzde görülen bu süreksizlik problemleri fark denklemlerden faydalanarak çözülür.

Bütün bu gelişmelerin yanında diferensiyel denklemlerin çözümünün salınımlılığı ile ilgili son yıllarda oldukça yoğun çalışmalar yapılmaktadır. Diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığıyla ilgili Myslus, Ladas, Sfikas, Hunt, Chanturia, York, Tramov, Kaplatadze, Györi, Zhang, Stavroulakis, Arino gibi yazarlar çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalarda yazarlar diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık şartlarını elde etmişlerdir.

1972 yılında Myslus $p, t \in R$ olmak üzere

$$x'(t) + px(t - \tau) = 0 \tag{1.1}$$

diferensiyel denkleminin çözümünün salınımlılığı için

$$p.\tau > \frac{1}{e}$$

yeterli şartını elde etmiştir. 1983 yılında ise Ladas,

$$F(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau}$$

karakteristik denkleminin reel köke sahip olmaması durumunda (1.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olacağını ispatlamıştır.

1975 yılında Tramov, $p_i \in (0, \infty)$ ve $\tau_i \in R^+$, $i = 1,2,3, \dots, n$ olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \, x(t - \tau_i) = 0 \qquad (1.2)$$

denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i \, e^{-\lambda\tau} = 0$$

karakteristik denkleminin reel köke sahip olmaması şartını elde etmiştir. Aynı sonuç 1983 yılında Ladas ve daha sonra 1984 de Hunt ve Yorke tarafından elde edilmiştir. 1989 yılında Györi tarafından (1.2) denklemimin çözümünün salınımlılık şartları biraz daha geliştirilmiştir. 1984 yılında Ladas ve Sficas ile Hunt ve Yorke, $p_i \in R$, $\tau_i \in R^+$ negatif olmayan reel sayılar ve $i = 1,2,3, \dots, n$ olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \, x(t - \tau_i) = 0 \qquad (1.3)$$

denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, \tau_i > \frac{1}{e}$$

koşulunu elde etmişlerdir. 1979 yılında Ladas ve Kaplatadze 1982 yılında Chanturia çalışmalarında

$$x'(t) + p(t)x(t - \tau) = 0, \qquad t \geq t_0 \qquad (1.4)$$

denkleminin salınımlılığı için $p \in \left[[t_0, \infty), R^+\right]$, $\tau > 0$ olmak üzere

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}$$

koşulunu elde etmişlerdir.

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1.

$$x'(t) + f\big(t, x(t), x(t-\tau_1), x(t-\tau_2), \ldots, x(t-\tau_n)\big) = 0 \qquad (2.1)$$

gecikmeli diferensiyel denklem sistemi göz önüne alınacak olursa burada bazı $\widetilde{t_0} \in R$ elemanı ve pozitif bir m tamsayısı için

$$f \in C\big[[\,\widetilde{t_0}, \infty]\big] \times R^m \times R^m \ldots \times R^m, R^m]$$

ve

$$\tau_i \in C\big[[\,\widetilde{t_0}, \infty], R^+\big], \;\; i = 1,2,3 \ldots n \qquad (2.2)$$

ile

$$\lim_{t\to\infty}[t - \tau_i(t)] = \infty, \quad i = 1,2,3 \ldots n \qquad (2.3)$$

olmak üzere her $t_0 \geq \widetilde{t_0}$ başlangıç noktası için $t_{-1} = t_{-1}(t_0)$ şeklinde tanımlanırsa

$$t_{-1} = \min_{1\leq i\leq n}\left\{\inf_{t\geq t_0}\{t - \tau_i(t)\}\right\} \qquad (2.4)$$

dır. Görülür ki t_{-1} , t_0 noktasında olduğu gibi diferensiyel denklemin τ_i gecikmelerine bağlıdır. $[t_{-1}, t_0]$ aralığı (2.1) gecikmeli diferensiyel denklemi ve t_0 başlangıç noktası ile ilişkilendirilmiş başlangıç noktası olarak adlandırılmıştır. (2.1) gecikmeli diferensiyel denklemi ve verilen $t_0 \geq \widetilde{t_0}$ başlangıç noktası ile ilgili başlangıç koşulu; $t_{-1} \leq t \leq t_0$ için

$$x(t) = \varphi(t) \qquad (2.5)$$

dir. Burada

$$\varphi(t): [t_{-1}, t_0] \to R^m$$

başlangıç fonksiyonudur (Györi, Ladas 1991).

Tanım 2.2. a) $\widetilde{t_0} \leq t_0 \leq T$ olmak üzere I aralığı $[t_0, T)$, $[t_0, T]$ veya $[t_0, \infty)$ formunda ise eğer $x: [t_{-1}, t_0] \to R^m$ sürekli, $t \in I$ için sürekli diferensiyellenebilir ve her $t \in I$

için $x(t)$, (2.1) gecikmeli diferensiyel denklemini sağlıyor ise $x(t)$ fonksiyonuna (2.1) denkleminin bir çözümü denir.

b) I aralığı $[t_0, T)$, $[t_0, T]$ veya $[t_0, \infty)$ formunda olmak üzere eğer I aralığı üzerinde x, (2.1) denkleminin bir çözümü ve x, (2.5) eşitliğini sağlıyor ise $x(t)$ fonksiyonuna I aralığı üzerinde (2.1) başlangıç-değer probleminin bir çözümü denir.

c) x, eğer bazı $t_0 \geq \widetilde{t_0}$ için (2.1) denkleminin bir çözümünü sağlayan fonksiyonu ise x, $[t_0, \infty)$ aralığında (2.1) denkleminin bir çözümüdür.

d) x, $[t_0, \infty)$ aralığında (2.1) denkleminin bir çözümü ve (2.5) başlangıç fonksiyonunu sağlıyor ise x fonksiyonu (2.5) ve (2.1) başlangıç değer probleminin çözümünü sağlayan fonksiyondur (Györi, Ladas 1991).

Teorem 2.1. (2.2) ve (2.3) koşullarına ek olarak tüm $t \geq \widetilde{t_0}$ için $p \in C\left[[\ \widetilde{t_0}, \infty], R^+\right]$ .bir fonksiyon olmak üzere, *f* global Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon $x_i, y_i \in R^m$,

$i = 1,2,3 \dots n$ için

$$\|f(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) - f(t, y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)\| \leq p(t) \sum_{i=0}^{n} \|x_i - y_i\| \qquad (2.6)$$

olsun. O halde $t_0 \geq \widetilde{t_0}$ için $\varphi(t) \colon [[t_{-1}, t_0] \to R^m]$ olmak üzere, (2.1) başlangıç değer problemi ve (2.5) denkleminin $[t_0, \infty)$ aralığındaki çözümü kesin tektir(Györi, Ladas 1991).

Tanım 2.3. Lineer otonom olmayan gecikmeli sistemi

$$x'(t) + p_0(t)x(t) + \sum_{i=0}^{n} p_{\boldsymbol{i}}(t)\, x\big(t - \tau_i(t)\big) = 0 \qquad (2.7)$$

şeklinde tanımlanmak üzere burada bazı $\widetilde{t_0} \in R$ için ve pozitif m tamsayısı için

$$p_{\boldsymbol{i}} \in C\left[[\ \widetilde{t_0}, \infty], R^{m \times m}\right], \quad i = 1,2,3 \dots, n$$

için,

$$\tau_i \in C\left[[\ \widetilde{t_0}, \infty], R^{m \times m}\right], \qquad i = 1,2,3 \dots, n$$

ve

$$\lim_{t\to\infty}[t-\tau_i(t)] = \infty \ , \qquad i = 1,2,3\ldots,n$$

olmak üzere $t_0 \geq \widetilde{t_0}$ için $\varphi(t): [t_{-1}, t_0] \to R^m$ verilmiş olsun. O halde (2.5) başlangıç değer probleminin $[t_0, \infty)$ aralığında kesin tek çözümü vardır.

Tanım 2.4. Lineer otonom gecikmeli sistemi

$$x'(t) + p_{\mathbf{0}}x(t) + \sum_{i=0}^{n} p_{\boldsymbol{i}}\, x\big(t-\tau_i(t)\big) = 0 \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanmak üzere burada $i = 1,2,3,\ldots,n$ için $p_{\boldsymbol{i}}$ ifadeleri $m \times m$ tipinde matrisler ve τ_i gecikmeleri negatif olmayan reel katsayılardır. O zaman her $t_0 \in R$ ve her $\varphi(t): \big[[t_{-1}, t_0] \to R^m\big]$ için (2.8) ve (2.5) başlangıç değer probleminin $[t_0, \infty)$ aralığın da bir tek çözümü vardır (Györi, Ladas 1991).

Tanım 2.5. (Gronwalls eşitsizliği**)** $I = [t_0, T)$ şeklinde reel sayıların bir aralığı ve $c \in [0, \infty)$ ve $u, v \in C[I, R^+]$ olmak üzere $t \in I$ için

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} v(s)\, u(s) ds$$

ise bu durumda

$$u(t) \leq c\ exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds\right)$$

dır (Györi, Ladas 1991).

Tanım 2.6. (Laplace dönüşümü**)**

Lineer diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden birisi de integral dönüşümüdür. Bu integral dönüşümü

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t)\, dt \tag{2.9}$$

şeklindedir. Bu integral dönüşümü yardımıyla verilen bir $f(t)$ fonksiyonu bir diğer $F(s)$ fonksiyonuna dönüştürülmektedir. $F(s)$ fonksiyonuna $f(t)$ nin integral dönüşümü ve $K(s,t)$ ifadesine de integral dönüşümün çekirdeği denir. İntegral dönüşümün $K(s,t)$ çekirdeği değiştikçe integral dönüşümü değişik adlar alır. İntegral dönüşümünden $K(s,t) = \exp(-st)$ seçilirse ve integral sınırları $\alpha = 0\ ve\ \beta = \infty$ alınırsa bu integral dönüşümüne Laplace dönüşümü denir.

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty \exp(-st) f(t) dt = F(s)$$

denklemi ile tanınan $L\{f(t)\}$ veya $F(s)$ ye $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir. Laplace dönüşümü tanımından da görüldüğü gibi, bu dönüşüm genelleştirilmiş integral görünümündedir. Eğer, (2.9) denklemiyle verilen genelleştirilmiş integral yakınsak ise Laplace dönüşümü tanımlanır (Györi, Ladas 1991).

Lemma 2.7. a) $x \in \mathrm{C}\big[[-\tau,\infty), \mathrm{R}\big]$ ve $x(t)$ nin Laplace dönüşümü olan $X(s)$ nin yakınsadığı apsis $\sigma_0 < \infty$ olsun. $x(t-\tau)$ nin laplace dönüşümü aynı yakınsanan apsise sahiptir ve Re $s > \sigma_0$ olacak şekilde ki tüm s ler için

$$L[x(t-\tau)] = \int_0^\infty e^{-st} x(t-\tau) dt = e^{-st} X(s) + e^{-st} \int_{-\tau}^0 e^{-st} x(t) dt \qquad (2.10)$$

olur (Györi, Ladas 1991).

b) $x \in \mathrm{C}^1\big[[0,\infty), \mathrm{R}\big]$ ve $x(t)$ nin Laplace dönüşümü olan $X(s)$ nin yakınsadığı apsis $\sigma_0 < \infty$ olsun.$x'(t)$ nin Laplace dönüşümüde aynı yakınsanan apsise sahiptir ve Re $s > \sigma_0$ olacak şekildeki tüm s ler için

$$L[x'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} x'(t) dt = sX(s) - x(0)$$

olur (Györi, Ladas 1991).

Tanım 2.8. $p, \tau \in R$ olmak üzere $x'(t) + px(t-\tau) = 0$ gecikmeli diferensiyel denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak

$$F(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau} = 0$$

karakteristik denklemi hiçbir reel köke sahip değildir (Ladas,Sficas, Stavroulakis 1983).

Tanım 2.9.(Lipschitz Şartı**)**

$$y' = f(x,y)\,,\;\; y(x_0) = y_0$$

bir başlangıç değer problemi ve D bölgeside merkezi (x_0, y_0) noktasında olan,

$$|x - x_0| \leq a\,, |y - y_0| \leq a$$

ile tanımlı dikdörtgensel bir bölge olmak üzere bu bölgede tanımlı başlangıç değer problemindeki f ile df/dy fonksiyonları sürekli olsun. df/dy ifadesinin sürekli olması kabulu df/dy değerinin D de sınırlı olmasını gerektirir. Öyleyse D deki her bir nokta için

$$\left|\frac{d_f}{d_y}\right| < K$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. O halde (x, y_1)ve (x, y_2) noktaları D bölgesinde iki nokta olmak üzere ortalama değer teoreminden

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{d_f}{d_y}(x,y^*)(y_1 - y_2)$$

olacak şekilde y_1 ve y_2 arasında bir y^* sayısının olduğu kabul edilmek üzere, $x, y^* \in D$ olduğundan D deki (x, y_1) ve (x, y_2) noktalarının her bir çifti için,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{d_f}{d_y}(x,y^*)\right| |y_1 - y_2| \tag{2.11}$$

$$\leq K|y_1 - y_2|$$

bulunur. Bu eşitsizlik f fonksiyonu için Lipschitz şartı olarak adlandırılır. Buna göre varlık teoreminden $\frac{d_f}{d_y}$ değerinin D de sürekli olması kabulü yerine (2.11) şartının sağlanması kabulünün eşdeğer olduğu söylenebilir. O halde varlık teoreminin ispatında $\frac{d_f}{d_y}$ değerinin sürekliliği hipotezi yerine Lipschitz şartı kullanılabilir(Özer, Eser 2002).

Sonuç 2.1. Eğer $|x - x_0| \leq h$ ise $i = 1,2,3 \dots, n$ için

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y_{n-1}(x))| \leq K|y_n(x) - y_{n-1}(x)|$$

eşitsizliği doğrudur (Özer, Eser 2002).

Tanım 2.10. Bir diferensiyel denklemin herhangi bir çözümü x olmak üzere eğer bu x çözümleri keyfi sayıda sıfırlara sahipse bu çözüme salınımlıdır denir. Aksi takdirde bu çözümlere salınımlı olmayan çözümler denir. Yani x salınımlı değil ise bir $t_1 > t_0$ değeri vardır öyle ki $t > t_1$için $x(t) \neq 0$ dır. Diğer bir deyişle belli bir değerden sonra çözüm ya hep pozitiftir ya da hep negatiftir (I.Györı, G. Ladas 1991).

Tanım 2.11. Eğer $x(t)$,

$$x^{'}(t) + x\big(t - \tau(t)\big) = 0$$

denkleminin $[t_0, \infty)$ ve $[T_0, \infty)$ aralığında t_0 başlangıç noktasına göre $t \geq t_0$ için $x(t) > 0$ ise bu $x(t)$ çözümüne denklemin bir pozitif çözümü denir (Erbe, Kong, Zhang 1994).

Tanım 2.12.(Sup-norm**)** X, E (Öklid Uzayı) uzayında tanımlanmış sınırlı fonksiyonların bir uzayı olmak üzere

$$\|f\|=\sup_{x\in \mathrm{E}}|f(x)|$$

şeklinde tanımlanan norma sup-norm denir (Matematik Terimleri Sözlüğü 2000).

3. SALINIMLI KATSAYILI YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

Bu kısımda yüksek mertebeden homojen olmayan nonlineer neutral gecikmeli diferensiyel denklemin sınırlı çözümlerinin asimtotik davranışı ve salınımlılığı için yeter şartlar incelenecektir.

$$\left[a(t)\left[x(t)+r(t)x\big(\kappa(t)\big)\right]^{(n-1)}\right]' + p(t)F\left(x\big(\tau(t)\big)\right) + q(t)G\left(x\big(\sigma(t)\big)\right) = \Phi(t) \quad (3.1)$$

denkleminde $t \geq t_0$ ve $n \geq 2$ olmak üzere,

(A1) $\kappa, \tau, \sigma \in C([t_0, \infty), R)$ kesin artan sınırsız fonksiyonları yeterince büyük t ler için $\sigma^{-1} o \tau \in C^1([t_0, \infty), R)$ ve $\kappa(t), \tau(t), \sigma(t) \leq t$ şartlarını sağlar,

(A2) $a \in C([t_0, \infty), R^+)$ azalmayan, $p \in C([t_0, \infty), R^+)$ ve $r, q \in C([t_0, \infty), R)$ için fonksiyonları salınımlı,

(A3) $F, G \in C(R, R)$ azalmayan, $|F(u)| \geq |G(u)|$ ve bütün $u \in R\backslash\{0\}$ için $uF(u), uG(u) > 0$ dır.

Şimdiye kadar nötral (neutral) gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık ve asimptotik davranışları geniş bir şekilde incelenmiştir. $r \equiv c \in R$ ve/veya $r > 0$ ($r < 0$), $q \equiv 0$ olması durumunda bu tip denklemlerin çözümlerinin salınımlınımlılığı ile ilgili olarak 1999 da Agarwal ve Grace, 1991 ve 1995 de Bainov ve Mishev, 1991 de Györi ve Ladas, 1987 de Ladde, Lakshmikantham ve Zhang, 1995 de Li ve Quan, 2003 de Parhi ve Rath, 1993 de Zafer ve Dahiya bir çok sonuç elde etmişlerdir. r nin salınımlı olması durumunda, 2004 de Bolat ve Akın, 2003 de Parhi ve Rath, 2008 de Zhou ve Yu çalışmalarında bu denklemin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili olarak bazı sonuçlar elde etmişlerdir. 2009 da Karpuz, Öcalan ve Yıldız çalışmalarında bu sonuçları geliştirmişlerdir.

$t \geq t_0$ için $\delta(t) := min\{\kappa(t), \tau(t), \sigma(t)\}$ ve $t_{-1} := \delta(t_0)$ olsun. (3.1) in bir çözümü $x \in C([t_{-1}, \infty), R)$ olmak üzere $x(t) + r(t)x\big(\kappa(t)\big)$, $n-1$ kez diferensiyellenebilir ve bütün $t \geq t_0$ için $a(t)\left[x(t) + r(t)x\big(\kappa(t)\big)\right]^{(n-1)}$ diferensiyellenebilir ve (3.1) denklemini sağlasın.

Genel olarak (3.1) denkleminin bir çözümü er geç sabit işaretli ise salınımlı değildir aksi takdirde çözüm salınımlıdır denir.

3.1. (3.1) DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI İÇİN YETER ŞARTLAR

Kolaylık olması açısından P fonksiyonu $t \geq \delta^{-1}(t_0)$ için

$$P(t) := \mathrm{p}(t) + [\sigma^{-1}(\tau(t))]q(\sigma^{-1}(\tau(t)))$$

şeklinde tanımlansın.

Aşağıdaki şartlar altında (3.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için 2009 da Karpuz, Öcalan ve Yıldız'ın çalışmalarında elde ettiği sonuçları verilecektir.

(H1) Yeterince büyük tüm t ler için $P(t) \geq 0$ $(\neq 0)$ sağlanır.

(H2) λ ve Λ negatif olmayan iki sabit olmak üzere $\lambda + \Lambda < 1$ ve böylece yeterince büyük t ler için $-\lambda \leq r(t) \leq \Lambda$ sağlanır.

(H3) $\left|\int^{\infty} v^{n-2}/a(v) \int_{\sigma^{-1}(\tau(v))}^{v} q(u)du\, dv\right| < \infty$ sağlanır.

(H4) $\int^{\infty} v^{n-1}P(v)/a(v)dv = \infty$ sağlanır.

(H5) Bir $\Phi \in \mathrm{C}^{(n-1)}([t_0,\infty),\mathrm{R})$ fonksiyonu var öyle ki $a\Phi^{(n-1)} \in \mathrm{C}^{(1)}([t_0,\infty),\mathrm{R})$, $\left[a\Phi^{(n-1)}\right]' = \emptyset$ ve $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)$ var ve sonludur.

Teorem 3.1.1. Kabul edelim ki (A_1)-(A_3), (H_1)-(H_5) sağlansın. O zaman (3.1) denkleminin sınırlı her çözümü salınımlıdır ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yaklaşır (Karpuz, Öcalan, Yıldız, 2009).

İspat. Kabul edelim ki x, (3.1)'in salınımlı olmayan sınırlı bir çözümü olsun. Ayrıca, farz edelim ki x, $t \to \infty$ iken sıfıra yaklaşmasın. Böylece

$$\alpha := \limsup_{t\to\infty} |x(t)|$$

iken α bir pozitif sabittir.

Genelliği bozmaksızın x'in er geç pozitif olduğu kabul edilir (x er geç negatif olduğu zamanda ispat benzerdir), böylece bu durum atlanabilir. Bu yüzden bir

$t_1 \geq t_0$ vardır öyle ki bütün $t \geq t_1$ için $x(\delta(t)) > 0$ sağlanır. $t \geq t_1$ için,

$$y_x(t) := x(t) + r(t)x(k(t)) \tag{3.2}$$

ve

$$z_x(t) := y_x(t) - \int_t^{\infty} \frac{(t-\vartheta)^{n-2}}{(n-2)!} \frac{1}{a(\vartheta)} \int_{\sigma^{-1}(\tau(\vartheta))}^{\vartheta} q(u)G\left(x\left(\sigma(u)\right)\right) du d\vartheta - \Phi(t) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlansın.

Kolayca görebiliriz ki y_x ve z_x, (H2),(H3),(H5) ve x'in sınırlılığından dolayı sınırlıdır. O zaman (3.1),(3.2),(3.3) ve (H5) den bazı yeterince büyük $t_2 \geq t_1$ için tüm $t \geq t_2$ için

Leibniz formülünden

$$\varphi(t) = \int_t^b f(t,x)dx$$

$$\varphi'(t) = \int_t^b \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)dx + f(t,t)$$

$$f(t,v) = \frac{(t-v)^{n-2}}{(n-2)!} \frac{1}{a(v)} \int_{\sigma^{-1}(\tau(v))}^{v} q(u)G(x(\sigma(u)))du$$

$$\varphi(t) = \int_t^{\infty} f\,(t,v)dv$$

elde edilir. Buradan

$$\left[a(t)z_x^{(n-1)}(t)\right]' = \left[a(t)y_x^{(n-1)}(t)\right]' + q(t)G(x(\sigma(t))) - [\sigma^{-1}(\tau(t))]' q(\sigma^{-1}(\tau(t)))G(x(\tau(t))) - \Phi(t)$$

$$\leq -P(t)\, F(x(\tau(t))) \leq 0$$

elde edilir.

Böylece $\alpha z_x^{(n-1)}$ ya er geç negatif ya da er geç pozitif olur ve böylece α negatif olmadığı için $z_x^{(n-1)}$ ya er geç negatif ya da er geç pozitif olur. Bu gösterir ki $z_x^{(k)}$ kesin monoton ve $k = 0,1,\dots,n-2$, için er geç sabit işaretlidir. Bu yüzden

$$\beta := \lim_{t\to\infty} z_x(t)$$

var ve bir sonlu sabittir. x'in sınırlılığı ve (H3),(H5),(3.3) den

$$\gamma := \lim_{t\to\infty} \Phi(t)$$

iken

$$\lim_{t\to\infty} y_x(t) = \beta + \gamma$$

elde edilir.

Kolayca görebiliriz ki [Zafer, Dahiya 1993; Teorem 1] in ispatından $\liminf_{t\to\infty} x(t) = 0$ olur ki burada α azalmayan doğal sayı ve (H4) şartı gereklidir. O zaman herhangi bir artan ıraksak $\{\zeta_n\}$ $n \in$N dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} x(\zeta_n) = 0$$

sağlanır.

$$B + \gamma = \lim_{n\to\infty} y(\zeta_n) \leq \lim_{n\to\infty} x(\zeta_n) + \Lambda \lim_{n\to\infty} x(k(\zeta_n)) \leq \Lambda\alpha \quad (3.4)$$

$\{\xi_n\}$ $n\in$N, $\lim_{n\to\infty} x(\xi_n) = \alpha$ sağlayan ıraksak artan bir dizi olsun. x sınırlı olduğundan $\lim_{n\to\infty} x(k(\xi_n))$ limitinin varlığı kabul edilir. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} x(k(\xi_n)) \leq \alpha$$

doğrudur. O zaman (H2),(4) ve $\alpha > 0$ ile birlikte

$$B + \gamma = \lim_{n\to\infty} y(\xi_n) \geq \lim_{n\to\infty} x(\xi_n) - \lambda \lim_{n\to\infty} x(k(\xi_n)) \geq (1-\lambda)\alpha \quad (3.5)$$

sonucu çıkarılır. Böylece

$$0 \geq [1-(\lambda+\Lambda)]\alpha > 0$$

doğruluğu görülür. Bu bir çelişkidir ve böylece ispat tamamlanır.

3.2. (3.1) DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

Örnek 3.1.1. $t \geq 5$ için aşağıdaki neutral gecikmeli denklemi düşünelim.

$$\left[\frac{t}{t+1}\left[x(t)+(\frac{1}{3}\sin(t)+\frac{2}{9})x(\frac{t}{2})\right]^{(3)}\right]' + \frac{1}{t^4}[x(t/3)]^3 - \frac{\sin(t)}{e^t}\left[x({}^{t}/_{2})\right]^3 = \frac{\sin(t)}{t^5} \quad (3.6)$$

Açıktır ki $u \in R$ ve $t \geq 5$ için $n=4$, $a(t)=\frac{t}{(t+1)}$, $r(t)=\frac{sin(t)}{3}+\frac{2}{9}$, $k(t)=t/2$,

$p(t)=1/t^4$, $\tau(t)=t/3$, $G(u)=u^3$, $q(t)=-\frac{sin(t)}{e^t}$, $\sigma(t)=\frac{t}{2}$, $F(u)=u^3$ ve

$\emptyset(t)=\frac{\boldsymbol{sin(t)}}{\boldsymbol{t^5}}$ olur. Bu durumda $t \geq 5$ için $\lambda={}^{1}/_{9}$, $\Lambda={}^{5}/_{9}$, $P(t)=\frac{1}{t^4}-\frac{2\sin(2t/3)}{(3e^{2t/3})}$

elde edilir ve $t \to \infty$ iken

$$\Phi(t)=\int_t^{\infty}\frac{(\vartheta-2)^2(\vartheta+1)}{2\vartheta}\int_{\vartheta}^{\infty}\frac{sin(u)}{u^5}dud\vartheta \to 0$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklem hesaplanırsa

$$\int_5^{\infty}\vartheta^2\frac{\vartheta+1}{\vartheta}\int_{2\vartheta/3}^{\vartheta}\frac{-\sin(u)}{e^u}dud\vartheta = -\frac{459}{16}\frac{\cos({}^{10}/_{3})}{e^{10/3}}+\frac{63}{8}\frac{\sin({}^{10}/_{3})}{e^{10/3}}+\frac{71}{4}\frac{\cos(5)}{e^5}-\frac{13}{4}\frac{\sin(5)}{e^5}$$

ve

$$\int_5^{\infty}\vartheta^3\frac{\vartheta+1}{\vartheta}\left(\frac{1}{\vartheta^4}-\frac{2\sin({}^{2t}/_{3})}{3e^{2t/3}}\right)d\vartheta=\infty$$

elde edilir.

Böylece Teorem 3.1.1. in bütün şartları sağlandığından (3.6) denkleminin her sınırlı çözümü salınımlıdır ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yaklaşır (Karpuz, Öcalan ve Yıldız 2009).

4. SALINIMLI KATSAYILI YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NEUTRAL FONKSİYONEL TİPLİ DİFERENSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Bu bölümde (4.1) formunun salınımlılık katsayıları ile çok genel yüksek mertebeden lineer olmayan neutral tipli fonksiyonel diferensiyel denklemin çözümlerinin salınımlılığını ilgileneceğiz.

$$[y(t) + p(t)f\left(y\big(\tau(t)\big)\right)]^{(n)} + q(t)h\left(y\big(\sigma(t)\big)\right) = 0\,, t \geq t_0\,, t\ \in\ R \qquad (4.1)$$

ki burada $p\ \in\ C([t_0,\infty),R)$ salınımlı ve $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$, $q \in C([t_0,\infty),R^+)$, $\tau(t),\sigma(t) \in C([t_0,\infty),R)$, $\tau(t)$, $\sigma(t) < t$ ve $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$, $f,h\ \in\ C(R,R)$ dir. f ve h azalmayan fonksiyonlar ve tüm $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ ve $uh(u) > 0$ dır.

Bir diferensiyel denklemin $y(t)$ çözümü ne pozitif ne de negatif oluyorsa bu çözüme salınımlıdır denir. Eğer bir diferensiyel denklemin tüm çözümleri salınımlı ise o diferensiyel denklem salınımlıdır denir. Aksi takdirde salınımlı değildir. Bu yayında y çözümlerinin gerçek değerlerine dikkat edilir.

Kolaylık olması için $z(t)$ fonksiyonunu

$$z(t) = y(t) + p(t)f\left(y\big(\tau(t)\big)\right) \qquad (4.2)$$

şeklinde tanımlayalım.

Lemma 4.1 $y(t)$, R^+ da sabit işaretli n defa diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun, $y^n(t)$ de herhangi bir $[t_1,\infty)$ aralığında, sabit işaretli ve sıfır değilse, eğer

$$y^n(t)\,y(t) \leq 0 \qquad (4.3)$$

ise,

(i) Bir $t_2 \geq t_1$ sayısı vardır öyle ki $y^{(j)}(t)$, $j = 1,2,\dots,n-1$ fonksiyonları $[t_2,\infty)$ aralığında sabit işaretlidir.

(ii) n çift olduğu zaman bir $k \in \{1,3,5,\dots,n-1\}$ sayısı var ya da n tek olduğu zaman bir $k \in \{0,2,4,\dots,n-1\}$ sayısı vardır öyle ki

$$y(t)y^{(j)}(t) > 0, \qquad t \geq t_2\,, j = 0,1,\dots,k \qquad (4.4)$$

$$(-1)^{n+j-1}y(t)y^{(j)}(t) > 0, \qquad t \geq t_2, j = k+1, \dots, n$$

dır.

(iii) $|y^n(t)| \geq \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)\dots(n-k)}\left|y^{(n-1)}(2^{n-k-1}t)\right|$ (4.5)

(iv) Ya

$$sign\, y(s) = sign \lim_{t\to\infty} y^{(j)}(t), \qquad \mathrm{s} \geq t_{2\,,}\, j = 0,1,2, \dots, q$$

$$\lim_{t\to\infty} y^{(j)}(t) = 0, \qquad j = q+1, \dots, n-1 \tag{4.6}$$

Eğer,

$$y(s) \lim_{t\to\infty} y^{(k)}(t) > 0$$

ise

$$q = k$$

dır. Eğer,

$$k > 0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} y^{(k)}(t) = 0$$

ise

$$q = k - 1$$

dir. Ya da

$$k = 0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} y^{(k)}(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

ise

$$\lim_{t\to\infty} y^j(t) = 0, \qquad j = 0,1, \dots, n-1$$

dir (Ladde, Laksmikantham, Zhang 1987).

İspat. $y^{(n)}(t)y(t) \leq 0$ dan

genelliği bozmaksızın $t \geq t_1 \geq T$ için $y^{(n)}(t) \leq 0$ ve $y(t) > 0$ olsun. O zaman, $t \geq t_1$ için $y^{(n-1)}(t)$ artmayan fonksiyon ve yeterince büyük T ler için herhangi bir (T, ∞) aralığında sabit değildir. Tam olarak aşağıdaki ifadenin doğruluğunu gösterir.

(a$_1$) $$y^{(n-1)}(t) > 0, t \geq t_1$$

dır.

(b$_1$) $$y^{(n-1)}(t) < 0, t \geq T_{n-1}^{(1)} \geq t_1$$

dır.

(b$_1$) den $y(t) > 0$ ve $y^{(n)}(t) \leq 0$ dır. Buradan bir $T_{n-2}^{(1)} \geq T_{n-1}^{(1)}$ sayısı vardır öyle ki $t \geq T_{n-2}^{(1)}$ için

$$y^{(n-2)}(t) \leq 0$$

dır. Benzer şekilde $T \geq T_{n-3}^{(1)} \geq T_{n-2}^{(1)} \geq \cdots,$ için $y^{(n-3)}(t)$ olur ve böylece $t \geq T_0^{(1)} \geq T_1^{(1)}$ için

$$y(t) < 0$$

olur bu da $y(t) > 0$ ile çelişir. $t \geq t_1$ olduğu için

$$y(t) > 0$$

dır. O halde (a$_1$) sağlanır. $t \geq t_1$ için $y^{(n-2)}$ artan ve konkavdır. Böylece aşağıdaki ifadelerin doğruluğu mümkündür.

(a$_2$) $$y^{(n-2)}(t) \geq 0, t \geq T_{n-2}^{(1)} \geq t_1$$

(b$_2$) $$y^{(n-2)}(t) < 0, \ \ t \geq t_1$$

dır. (a$_1$) ve (a$_2$) den $t \geq T_{n-3}^{(2)} \geq T_{n-2}^{(2)}$ için

$$y^{(n-3)}(t) > 0$$

olur. Aynı şekilde $t \geq T_{n-4}^{(2)} \geq T_{n-3}^{(2)} \ \geq \cdots,$ için

$$y^{(n-4)}(t) > 0$$

ve bu şekilde devam ederek $t \geq T_0^{(2)} \geq T_1^{(2)}$ için

$$y(t) > 0$$

olur. Böylece $y^{(j)}(t)$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ fonksiyonları yeterince büyük t ler için sabit işaretlidir.

Eğer (b$_2$) sağlanırsa $t \geq t_1$ için $y^{(n-3)}$ azalan ve konvekstir. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(a$_3$) $$y^{(n-3)}(t) > 0, t \geq t_1$$

dır.

(b$_3$) $$y^{(n-3)}(t) < 0,\ t \ge T_{n-3}^{(3)} \ge t_1$$

dır.

Bu şekilde tekrar ederek ve yeterince büyük t ler için $y^{(j)}(t)$ $(j = 1, \dots, n-1)$ fonksiyonlarının sabit işaretli olduğu görülür.

Böylece (i) ve (ii) nin ispatı tamamlanır.

Şimdi (4.5)'in sağladığını gösterelim. Genelliği bozmaksızın

$$y(t) \ge 0$$

olsun.

(4.4) ve $y(t) \ge 0$ dan

$$-y^{(n-2)} = -y^{(n-2)}(\infty) + \int_t^{\infty} y^{(n-1)}(\tau)d\tau$$

$$\ge \int_t^{2t} y^{(n-1)}(\tau)d\tau \ge t y^{(n-1)}(2t)$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik integre edilirse

$$y^{(n-3)}(t) \ge -\int_t^{\infty} y^{(n-2)}(\tau)d\tau \ge \int_t^{2t} \tau y^{(n-1)}(2\tau)d\tau \ge t^2 y^{(n-1)}(4t)$$

bulunur. Böylece

$$y^{(k)}(t) \ge t^{n-k-1} y^{(n-1)}(2^{n-k-1}t)$$

dir.

$y^{(k-1)}(t) \ge 0$ için son eşitsizlikten

$$y^{(k-1)}(t) = y^{(k-1)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} y^{(k)}(\tau)d\tau$$

$$\ge \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{n-k-1}\, y^{(n-1)}(2^{n-k-1}\tau)d\tau$$

$$\ge \frac{(t-t_0)^{n-k}}{n-k} y^{(n-1)}(2^{n-k-1}t)$$

elde edilir.

Böylece $(k-1)$ defa integral aldıktan sonra (4.3) eşitsizliği bulunur.

Şimdi Lemma 4.1 in son bölümünün ispatını verelim. (ii) den

$$\lim_{t\to\infty} y^{(k)}(t) \geq 0$$

olur ve $k > 0$ ise $j = 0,1,2,\dots,k-1$ için

$$\lim_{t\to\infty} y^{(j)}(t) > 0$$

elde edilir. Ayrıca (ii) den $\lim_{t\to\infty} y^{(k+1)}(t) \leq 0$ olduğu görülür. Kabul edelim ki

$$\lim_{t\to\infty} y^{(k+1)}(t) = -a^2 \ \ (a \neq 0)$$

olsun. O halde yeterince büyük $t \geq t_2$ için $y^{(k)}(t) < 0$ dır ki bu da bir çelişkidir. $t \geq t_2$ ise

$$y^{(k)}(t) < 0$$

dır. Böylece

$$\lim_{t\to\infty} y^{(k+1)}(t) = 0$$

olur. Ayrıca (ii) den

$$\lim_{t\to\infty} y^{(k+2)}(t) \geq 0$$

dır.

$$\lim\nolimits_{t\to\infty} y^{(k+2)}(t) = a^2, (a \neq 0)$$

olsun. O halde integral alınarak yeterince büyük $t \geq t_2$ için

$$y^{(k+1)}(t) > 0$$

olur. Bu da bir çelişkidir. $t \geq t_2$ ise

$$y^{(k+1)}(t) < 0$$

dır. Böylece

$$\lim_{t\to\infty} y^{(k+2)}(t) = 0$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$\lim_{t\to\infty} y^{(k+3)}(t) = \lim_{t\to\infty} y^{(k+4)}(t) = \cdots = \lim_{t\to\infty} y^{(n-1)}(t) = 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.2. $y(t)$ pozitif ve R^+ da n kez diferensiyellenebilir ve her $t \geq t_y$ için

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \neq 0 \text{ ve } y^{(n-1)}(t)y^{(n)}(t) \leq 0$$

olsun. Her λ, $0 < \lambda < 1$ ve yeterince büyük t ler için

$$y(t) \geq \frac{\lambda}{(n-1)!} t^{n-1} y^{(n-1)}(t)$$

dır.

4.1. (4.1) DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI İÇİN YETER ŞARTLAR

Teorem 4.3.1. Kabul edelim ki n çift olsun.

(C_1) Bir $H: R \to R$ fonksiyonu var öyle ki H sürekli ve azalmayan fonksiyonu $u, v > 0$ için

$$-H(-uv) \geq H(uv) \geq KH(u)H(v)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada K bir pozitif sabit ve

$$|h(u)| \geq |H(u)|, \frac{H(u)}{u} \geq \gamma > 0 \text{ ve } u \neq 0 \text{ için } H(u) > 0$$

dır.

(C_2) $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = 0$

(C_3) $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} s^{n-1} q(s) ds = \infty$

$$w'(t) + q(t)K\gamma H\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\sigma(t)}{2^{n-1}}\right)^{n-1}\right) w(\sigma(t)) = 0 \qquad (4.7)$$

birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemin her sınırlı çözümü salınımlı ise (4.1) denkleminin her sınırlı çözümü ya salınımlıdır ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yaklaşır.

İspat. Kabul edelim ki (4.1) denklemi salınımlı olmayan sınırlı bir çözümü y olsun. Genelliği bozmaksızın y, er geç pozitif olsun. (y, er geç negatif olduğu zamanda ispat benzerdir). Yani $t \geq t_1 \geq t_0$ için

$$y(t) > 0, y(\tau(t)) > 0 \text{ ve } y(\sigma(t)) > 0$$

dır. Ayrıca kabul edelim ki $t \to \infty$ iken y sıfıra yaklaşmasın. (4.1) ve (4.2) den

$$z^{(n)}(t) = -q(t)h\left(y\big(\sigma(t)\big)\right) \leq 0, t \geq \mathrm{t}_1 \tag{4.8}$$

elde edilir. Buradan $z^{(\alpha)}(t)$ $(\alpha = 0,1,2,\dots,n-1)$ kesin monoton ve er geç sabit işaretlidir. Çünkü y sınırlı ve $t \to \infty$ iken sıfıra yaklaşmadığından, (C_2) den

$$\lim_{t\to\infty} p(t)f\left(y\big(\tau(t)\big)\right) = 0$$

dır. Bu durumda bir $t_2 \geq t_1$ vardır öyle ki her $t \geq t_2$ için

$$z(t) = y(t) + p(t)f(y(\tau(t))) > 0$$

dır ve aynı zamanda yeterince büyük $t \geq t_2$ için $z(t)$ sınırlıdır. Çünkü n çift ve $z^{(n)}(t) \leq 0$ olduğundan ve $(n + l)$ tek ve $l = 1$ için Lemma 4.1 den $z(t) > 0$ sınırlıdır. Aksi takdirde $z(t)$ sınırlı olamaz. Bir $t_3 \geq t_2$ vardır öyle ki $t \geq t_3$ için

$$(-1)^{k+1}z^{(k)}(t) > 0, \qquad (k = 0,1,2,\dots,n-1) \tag{4.9}$$

dir.

Özellikle $t \geq t_3$ için $z'(t) > 0$ olduğundan z artandır. y sınırlı olduğundan (C_2) den

$$\lim_{t\to\infty} p(t)f\left(y\big(\tau(t)\big)\right) = 0$$

dır. Bu durumda (4.2) den bir $t_4 \geq t_3$ vardır öyle ki $t \geq t_4$ için

$$y(t) = z(t) - p(t)f\left(y\big(\tau(t)\big)\right) \geq \frac{1}{2}z(t) > 0$$

dır. Bir $t_5 \geq t_4$ vardır öyle ki $t \geq t_5$ için

$$y\big(\sigma(t)\big) \geq \frac{1}{2}z\big(\sigma(t)\big) > 0 \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.4) ve (4.6) dan $t \geq t_5$ için

$$z^{(n)}(t) + q(t)h\left(\frac{1}{2}z\big(\sigma(t)\big)\right) \leq 0 \tag{4.11}$$

bulunur. $t \geq t_2$ için z tanımlı olduğundan Lemma 4.2 direk uygulandığında $t \geq t_2$ için

$$z^{(n)}(t) \leq 0$$

dır. Dolayısıyla Lemma 4.2 den

$$y\big(\sigma(t)\big) \geq \frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\sigma(t)}{2^{n-1}}\right)^{n-1} z^{(n-1)}\big(\sigma(t)\big),\ t \geq 2^{n-1}t_1 \tag{4.12}$$

olur. (C_1) ve (4.6) kullanılarak, $t \geq t_6 \geq t_5$ için

$$\begin{aligned} h(y(\sigma(t))) &\geq \mathrm{H}(y(\sigma(t))) \\ &\geq \mathrm{H}\Big(\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\sigma(t)}{2^{n-1}}\right)^{n-1} z^{(n-1)}\big(\sigma(t)\big)\Big) \\ &\geq K\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\sigma(t)}{2^{n-1}}\right)^{n-1}\right)\mathrm{H}\big(z^{(n-1)}\big(\sigma(t)\big)\big) \\ &\geq K\gamma\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\sigma(t)}{2^{n-1}}\right)^{n-1}\right)z^{(n-1)}\big(\sigma(t)\big) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (4.4) den ve yukarıdaki eşitsizlikten,

$$z^{(n)}(t) + q(t)K\gamma\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\sigma(t)}{2^{n-1}}\right)^{n-1}\right)z^{(n-1)}\sigma(t) \leq 0$$

dır. Burada $z^{(n-1)}(t) = w(t)$ alınırsa

$$w'(t) + q(t)K\gamma\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\sigma(t)}{2^{n-1}}\right)^{n-1}\right)w(\sigma(t)) \leq 0$$

birinci mertebeden diferensiyel denkleminin $w(t) = z^{(n-1)}(t)$ çözümü pozitif olduğundan

$$w'(t) + q(t)K\gamma\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\sigma(t)}{2^{n-1}}\right)^{n-1}\right)w\big(\sigma(t)\big) = 0, \qquad t \geq t_7 \geq t_6$$

diferensiyel denklemi de er geç bir pozitif çözüme sahiptir. Bu ise (4.1) denkleminin çözümünün salınımlı olması ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.3.1 Eğer

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)}^{t-1} q(s)\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\sigma(s)}{2^{n-1}}\right)^{n-1}\right)\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{eK}\gamma} \tag{4.13}$$

ise o zaman (4.1) denkleminin her sınırlı çözümü ya salınımlı ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yaklaşır.

$p(t) \equiv 0$ ve $n = 2$ olduğu zaman Sonuç 4.3.1 den eğer

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)}^{t-1} q(s)\mathrm{H}\left(\frac{1}{4}\sigma(s)\right)\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{eK}\gamma}$$

ise

$$y''(t) + q(t)h\left(y(\sigma(t))\right) = 0, t \geq t_0 \tag{4.14}$$

denkleminin sınırlı her çözümü salınımlıdır ya da $t \to \infty$ iken sıfıra gider.

Teorem 4.3.2 Kabul edelim ki n tek olsun ve (C_2), (C_3) sağlansın. O zaman (4.1) denkleminin her sınırlı çözümü ya salınımlıdır ya da $t \to \infty$ iken sıfıra gider.

İspat. Kabul edelim ki (4.1) denkleminin salınımlı olmayan sınırlı bir çözümü y olsun. Genelliği kaybetmeksizin y er geç pozitif olsun (y er geç negatif olduğu zamanda ispat benzerdir). Yani $t \geq t_1 \geq t_0$ için

$$y(t) > 0, y(\tau(t)) > 0 \text{ ve } y(\sigma(t)) > 0$$

dır. Ayrıca $t \to \infty$ iken $y(t)$ sıfıra gitmesin. (4.1) ve (4.2) den $t \geq t_1$ için

$$z^{(n)}(t) = -q(t)h\left(y(\sigma(t))\right) \leq 0 \tag{4.15}$$

elde edilir. Yani,

$$z^{(n)}(t) \leq 0$$

dır. Buradan $z^{(\alpha)}(t)$, $(\alpha = 0,1,2, \dots, n-1)$ kesin monoton ve er geç sabit işaretlidir.

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$$

olduğundan bir $t_2 \geq t_1$ vardır öyle ki $t \geq t_2$ için

$$z(t) > 0$$

olur. y sınırlı olduğundan (C_2) ve (4.2) den bir $t_3 \geq t_2$ vardır öyle ki $t \geq t_3$ için z sınırlıdır. n tek ve z sınırlı olduğundan ve Lemma 4.1 den $l = 0$ için (aksi halde z sınırlı olamaz) bir $t_4 \geq t_3$ vardır ve $t \geq t_4$ için

$$(-1)^k z^{(k)}(t) > 0 \quad (k = 0,1,2, \dots, n-1)$$

elde edilir. Özellikle, $t \geq t_4$ için $z^{'}(t)$ <0 olduğundan $z(t)$ azalandır. $z(t)$ sınırlı olduğundan

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = L \ (-\infty < L < \infty\,)$$

olur. Farz edelim ki $0 \leq L < \infty$ olsun. O zaman bir $c > 0$ sabiti ve $t_5 \geq t_4$ olacak şekilde bir t_5 vardır öyle ki $t \geq t_5$ için

$$z(t) > c > 0$$

dır. $y(t)$ sınırlı olduğu için (C_1) den

$$\lim_{t\to\infty} p(t) f\left(y\big(\tau(t)\big)\right) = 0$$

dır. Sonuç olarak bir $c_1 > 0$ sabiti ve $t_6 \geq t_5$ vardır öyle ki $t \geq t_6$ için

$$y(t) = \ z(t) - p(t) f\left(y\big(\tau(t)\big)\right) > c_1 > 0$$

dır. O halde bir $t_7 \geq t_6$ vardır öyle ki $t \geq t_7$ için

$$y(\sigma(t)) > c_1 > 0$$

dır. (4.15) den

$$z^{(n)}(t) \leq -q(t)h(c_1), (t \geq t_7) \tag{4.16}$$

elde edilir.

Eğer (4.16) nın her tarafı t^{n-1} ile çarpılıp ve t_7 den $t-1$ e integre edilirse o zaman

$$F(t) - F(t_7) \leq -h(c_1) \int_{t_7}^{t-1} q(s)s^{n-1}\, ds \tag{4.17}$$

bulunur. Burada

$$F(t) = \int_{\gamma=2}^{n-1} (-1)^{\gamma}\, t^{n-1} z^{(n-\gamma-1)}(t+\gamma)\,,$$

dır. $t \geq t_4$ ve $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ için

$$(-1)^k z^{(k)}(t) > 0$$

olduğundan $t \geq t_7$ için $F(t) > 0$ dır. (4.17) den

$$-F(t_7) \leq -h(c_1) \int_{t_7}^{t-1} q(s)s^{n-1}\, ds$$

elde edilir. (C_3) den $t \to \infty$ iken

$$-F(t_7) \leq -h(c_1) \int_{t_7}^{t-1} q(s)s^{n-1}\, ds = -\infty$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. O halde

$$L > 0$$

olamaz. Sonuç olarak $L = 0$ durumu mümkündür. Yani,

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

dır. $y(t)$ sınırlı olduğundan (C_2) ve (4.2) den

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} z(t) - \lim_{t\to\infty} p(t) f\left(y\big(\tau(t)\big)\right) = 0$$

elde edilir.

Şimdi $t \geq t_1$ için $y(t) < 0$ durumunu göz önüne alalım. (4.1) ve (4.2) den

$$z^{(n)}(t) = -q(t)h(y(\sigma(t))) \geq 0\,, (t \geq t_1)$$

dir. Yani,

$$z^{(n)}(t) \geq 0$$

dır. Buradan $z^{(\alpha)}(t)$, $(\alpha = 0,1,2,\dots,n-1)$ kesin monoton ve er geç sabit işaretlidir.

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$$

olduğundan bir $t_2 \geq t_1$ vardır öyle ki $t \geq t_2$ için

$$z(t) < 0$$

dır. $y(t)$ sınırlı olduğu için (C_2) ve (4.2) den bir $t_3 \geq t_2$ vardır öyle ki $t \geq t_3$ için $z(t)$ sınırlıdır. Kabul edelim ki

$$x(t) = -z(t)$$

olsun. O zaman

$$x^{(n)}(t) = -z^{(n)}(t)$$

dir. Böylece $t \geq t_3$ için

$$x(t) > 0 \text{ ve } x^{(n)}(t) \leq 0$$

dır. Bu durumda $x(t)$ nin sınırlı olduğu görülür. n tek ve x sınırlı olduğundan, Lemma 4.1 den $l = 0$ için (aksi halde x sınırlı değildir) bir $t_4 \geq t_3$ vardır öyle ki $k = 0,1,2,\dots,n-1$ ve $t \geq t_4$ için

$$(-1)^k x^{(k)}(t) > 0$$

dır.

Yani $k = 0,1,2,\dots,n-1$ ve $t \geq t_4$ için

$$(-1)^k z^{(k)}(t) < 0$$

dır. Özellikle $t \geq t_4$ için,

$$z'(t) > 0$$

olur. Böylece $z(t)$ artandır.

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = L\,, (-\infty < L \leq 0)$$

olsun. $y(t) > 0$ ın ispatındaki gibi

$$L = 0$$

olduğunu gösterebiliriz. Bundan sonrası için $y(t) > 0$ durumunda ispat benzerdir. Yani

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

dır.

Bu ise kabulümüz ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

ÖRNEK 4.1.

$$\left[y(t) + \left(-\frac{1}{2}\right)^t y(t-2)\right]^{(4)} + \frac{1}{t^2} y^3(t-3) = 0 \qquad (4.18)$$

diferensiyel denkleminde $n = 4$, $\tau(t) = t - 2$, $p(t) = \left(-\frac{1}{2}\right)^t$, $q(t) = \frac{1}{t^2}$, $\sigma(t) = t - 3$, $h(y) = y^3$ dir. $H(u) = u$ alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-3}^{t-1} \frac{1}{s^2}\frac{1}{2}\frac{1}{3!}\left(\frac{s-3}{2^3}\right)^3 ds > \frac{1}{\mathrm{e}}$$

dır. Bu durumda Teorem 4.3.1'in bütün şartları sağlanır. O halde (4.18)'in her sınırlı çözümü ya salınımlıdır ya da $t \to \infty$ da sıfıra yaklaşır.

ÖRNEK 4.2.

$$\left[y(t) + e^{-5t^2}[y^2(t-5) + 2y(t-5)]\right]^3 + t^2 y^2(t-3) = 0, t \geq t_2 \qquad (4.19)$$

diferensiyel denkleminde $n = 3, q(t) = t^2, \sigma(t) = t - 3, \tau(t) = t - 5,\ p(t) = e^{-5t^2}$, $f(y) = y^2 - 2y,\ h(y) = y^2$ dir. Böylece

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{5t^2}} = 0,$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} s^{n-1}\, q(s)ds = \int_{t_0}^{\infty} s^4 ds = \infty,$$

elde edilir.

Teorem 4.3.2'nin (C_2) ve (C_3) şartları sağlandığından (4.19)'un her sınırlı çözümü ya salınımlıdır ya da $t \to \infty$ iken sıfıra yaklaşır.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P. and Gace, S. R., 1999, “The oscillation of higher order differential equations with deviating arguments”, Comput. Math. Appl., 38,no.3-4, 185-199.

Agarwal, R.P. and Grace, S.R., 1999, **“**The oscillation of higher order differential equations with deviating arguments”, Comput. Math. Appl., 38, 185-199.

Bainow, D. and Mishev, D.P., 1991**,** **“**Oscillation theory for neutral differential equations with delay”, Adam Hilger, New York.

Bainow, D. and Mishev, D.P., 1995**,** **“**Oscillation theory of operator differential equations”, World Scientific, Singapore-New Yersey.

Bolat, Y. and Akın, Ö., 2004**,** “Oscillatory behaviour of higher order neutral type nonlinear forced differential equations with oscillating coefficients”, J. Math. Anal. Appl. 290, 302-309.

Györi, I. and Ladas, G., 1991**,** “Oscillation theory of delay differential equations with applications”, Clarendon Press, Oxford.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. and Yıldız, M.K., 2009, “Oscillation of higher order nonlinear delay differential equations with oscillatory coefficients”, Turk. J. Math. 33, 259-263.

Ladde, G. S., Lakshmikantham, V. and Zhang, B. G.,1987**,** “Oscillation theory of differential equations with deviating arguments”, M. Dekker, New York.

Lakshmikantham, V. and Trigiante, **D.** 1988, “Theory of difference equations, numerical methods and applications”, Academic Press, New York.

Li, W.T. and Quan, H.S., 1995**,** **“**Oscillation higher order neutral differential equations with positive and negative coefficients”, Ann. Differ. Equations. 11(1), 70-76.

Parhi, N. and Rath, R.N., 2003**,** **“**On oscillation of solutions of forced nonlinear neutral differential equations of higher order II”, Ann. Polon. Math. 81(2), 101-110.

Zafer, A. and Dahiya, R.S., 1993**,** **“**Oscillation of bounded solutions of neutral differential equations”, Appl, Math. Lett. 6(2), 43-46.

Zhou, X.L. and Yu, R., 2008**,** “Oscillatory behaviour of higher order nonlinear neutral forced differential equations with oscillating coefficients”, Comp. Math. Appl. 56(6), 1562–1568.