BAZI $\lambda -$ DİZİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rabia EKEN

Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül 2006

T.C.
AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI λ – DİZİ UZAYLARI

Rabia EKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

AFYONKARAHİSAR
Eylül 2006

TEZ JÜRİSİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Rabia EKEN'nin yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Bazı $\lambda -$Dizi Uzayları" başlıklı bu çalışma, lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

... / ... / ….

İmza

Jüri Üyesi : ……………………..
(Başkan)

Jüri Üyesi : ……………………..
(Danışman)

Jüri Üyesi : ……………………..

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ……………….................…Gün ve ………………sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI λ – DİZİ UAYLARI

Rabia EKEN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, gerekli olan temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. İkinci bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramı gözden geçirilmiştir. Genelleştirilmiş De la Valée –Pousin ortalaması tanımlanarak (V,λ)- toplanabilirliği yardımıyla λ- istatistiksel yakınsaklık genelleştirildi. Üçüncü bölümde f modulus fonksiyonu tanımlanarak modulus fonksiyonu yardımıyla bazı dizi uzayları tanımlanmıştır. De la Valée-Pousin yöntemi ile sıfıra kuvvetli hemen hemen toplanabilen, kuvvetli hemen hemen toplanabilen ve kuvvetli hemen hemen sınırlı dizilerin kümelerini bir modulus fonksiyon kavramıyla birleştirerek tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde M Orlicz fonksiyonu kullanılarak Orlicz fonksiyonu yardımıyla bazı dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

2006, 55 sayfa

Anahtar Kelimeler: İstatitiksel yakınsaklık, λ-istatistiksel yakınsaklık, Modulus fonksiyonu, Orlicz fonksiyonu, (V,λ)-toplanabilirlik, kuvvetli (V,λ)-toplanabilirlik, kuvvetli hemen hemen yakınsaklık.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME λ – SEQUENCE SPACES

Rabia EKEN
Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Basic Science Subdivision of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Fatih NURAY

This thesis consist of four section. First section has been assigned for basic definitions and theorems which are necessary. It has been looked over the concept of “statistical convergence” in second part. “Generalized De la Valee –Pousin means” has been defined and λ– statistical convergence has been generalized with help of to be collected of (V,λ)-summability. *f* modulus function has been defined and some sequence spaces have been defined with help of function of modulus in third section. The sets of strongly to zero almost summable of to be collected, strongly almost summable of to be collected, and strongly almost bounded sets has been merged and defined with a modulus function concept together by De la Valee –Pousin method. M Orlicz function and some sequence spaces have been defined with help of Orlicz function and topological caracteristic of some sequence spaces have been examined in fourth section.

2006, 55 pages
Keywords: Statistical convergence, λ- statistical convergence, Modulus function, Orlicz function, (V,λ)- summability, strongly (V,λ)- summability, strongly almost convergence.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

N	: Doğal sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks (Karmaşık) sayılar kümesi
$\lvert K\rvert$	: N doğal sayılar kümesinin bir *K* alt kümesinin eleman sayısı
$\lVert\ \rVert$	: N lineer uzayı üzerinde bir norm
$\delta(K)$	: *K* kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_A(K)$	: *K* kümesinin *A*- yoğunluğu
S	: Bütün istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesi
S_λ	: λ -istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesi
l_∞	: Sınırlı dizilerin kümesi
w_0	: Sıfıra kuvvetli toplanabilen dizilerin kümesi
w	: Kuvvetli toplanabilen dizilerin kümesi
w_∞	: Kuvvetli sınırlı dizilerin kümesi
$w_0(f)$	: f modulus fonksiyonu ile sıfıra kuvvetli toplanabilen dizilerin uzayı
$w(f)$	: f modulus fonksiyonu ile kuvvetli toplanabilen dizilerin uzayı
$w_\infty(f)$	: f modulus fonksiyonu ile kuvvetli sınırlı dizilerin uzayı
$[\hat{c}]_0$	: Sıfıra kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi
$[\hat{c}]$	: Kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin kümeleri
$[\hat{c}, f]_0$	: f modulus fonksiyonu ile sıfıra kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$[\hat{c}, f]$	: f modulus fonksiyonu ile kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$[V,\lambda]_0$	: De la Valée-Pousin yöntemi ile sıfıra kuvvetli toplanabilen dizilerin kümeleri
$[V,\lambda]$	: De la Valée-Pousin yöntemi ile kuvvetli toplanabilen dizilerin kümeleri
$[V,\lambda]_\infty$	: De la Valée-Pousin yöntemi ile kuvvetli sınırlı dizilerin kümeleri
l_M	: Orlicz dizi uzayı
$[\hat{V},\lambda, f]_0$	: f modulusune bağlı (V,λ) metodu ile sıfıra kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$[\hat{V},\lambda, f]$	: f modulusune bağlı (V,λ) metodu ile kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı

GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast (1951) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Šalát (1980) reel sayıların istatistiksel yakınsak dizileri üzerine çalışmış, Fridy (1985), Connor (1988) istatistiksel yakınsaklığı incelemişlerdir.

Bir $\theta = \{k_r\}$, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r := k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak şekilde artan tam sayı dizisi Lacunary dizisi olarak adlandırılır. (Fridy and Orhan 1993) θ bir lacunary dizisi olmak üzere

$$S_\theta := \{x : \text{bazı } L \text{ için } S_\theta - \lim x = L\}$$

yı tanımlanmıştır. Mursaleen (2000), $\lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_{n+1} \le \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$
olmak üzere ∞ giden azalmayan pozitif sayıların bir dizisi için

$$t_n(x) := \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k, \qquad I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$$

Genelleştirilmiş de la Valée-Pousin ortalamasını kullanarak λ- istatistiksel yakınsak dizi tanımını vermiş ve S_λ ile $[V,\lambda]$ ve (C,1) metodları arasındaki bağıntıyı kurmuştur.

Nakano (1953) tarafından Modulus fonksiyonunu tanımlanmış, Ruckle (1973) modulus fonksiyonu kavramını kullanarak bazı kompleks dizi uzaylarını oluşturmuştur. Maddox (1986) bir f modulus fonksiyonunu kullanarak

$$w_0(f) = \{x \in w : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|x_k|) = 0\},$$

$$w(f) = \{x \in w : x - le \in w_0(f) \text{ bazı } l \text{ sayısı için}\},$$

$$w_\infty(f) = \{x \in w : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|x_k|) < \infty\}$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların bazı özelliklerini incelenmiştir.

Savaş (1999) tarafından bir f modulus fonksiyonu kullanılarak genelleştirilen kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramı (V,λ) metodu ile birleştirilerek yeni dizi uzayları oluşturulmuş, özellikleri incelenmiştir.

Lindanstrauss ve Tzafriri (1971) *M*, sürekli, konveks, azalmayan Orlicz fonksiyonunu kullanarak

$$l_M = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty \text{ bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

dizi uzayını tanımlamışlardır.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmaya esas olan bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1. (Sınırlı Dizi) : (s_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer $\forall n \in \mathrm{N}$ için,

$$|s_n| \leq K$$

olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (s_n) dizisine sınırlı dizi denir (Balcı 1997).

Tanım 1.2 (Yakınsak Dizi): (s_n) bir reel sayı dizisi ve $s \in \mathrm{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|s_n - s| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (s_n) dizisi s ye yakınsaktır denir ve

$$\lim s_n = s \quad \text{veya} \quad (s_n) \to s$$

şeklinde gösterilir (Balcı 1997).

Tanım 1.3. : (s_n) dizisi verilmiş olsun.

1) Eğer $\forall n \in \mathrm{N}$ için $s_n < s_{n+1}$ ise bu diziye monoton artan dizi denir.

2) Eğer $\forall n \in \mathrm{N}$ için $s_n \leq s_{n+1}$ ise bu diziye azalmayan dizi denir.

3) Eğer $\forall n \in \mathrm{N}$ için $s_n > s_{n+1}$ ise bu diziye monoton azalan dizi denir.

4) Eğer $\forall n \in \mathrm{N}$ için $s_n \geq s_{n+1}$ ise bu diziye artmayan dizi denir

(Balcı 1997).

Teorem 1.1 : Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır (Balcı 1997).

Tanım 1.4. (Metrik ve Metrik uzay): X boş olmayan bir cümle olsun.

$$d : X \times X \to \mathrm{R}$$

fonksiyonu için,

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri özelliği)

M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir metrik ve d ile birlikte X e metrik uzay denir ve genellikle (X, d) veya X_d ile gösterilir (Bayraktar 2000).

Tanım 1.5. (Lineer Uzay): L boş olmayan bir cümle ve F, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir.

A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur.

$G1)$ Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

$G2)$ Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

$G3)$ Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

$G4)$ Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

$G5)$ Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ için $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

$L1)$ $\alpha.x \in L$ dir.

$L2)$ $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.

$L3)$ $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

$L4)$ $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

$L5)$ $1.x = x$ dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır.) (Bayraktar 2000).

Tanım 1.6. (Normlu Uzay): N bir lineer uzay olsun.

$$\| \ \| : N \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun x noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

$N1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$N2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in F)$

$N3)$ $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\| \ \|$ fonksiyonuna N üzerinde bir norm denir ve genellikle $(N, \| \ \|)$ ile gösterilir (Bayraktar 2000).

Tanım 1.7. (Cauchy Dizisi): $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.Verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Bayraktar 2000).

Tanım 1.8 : X normlu uzayındaki her (x_n) Cauchy dizisi X üzerinde tanımlı norm metriğine göre yakınsak ve yakınsadığı değer X in elemanı ise, yani $x_n \to x \in X$ ise $(X, \| \|)$ normlu uzayına tamdır denir.

Tam normlu uzaylara Banach uzayı denir.

Tanım 1.9. (Frechet Uzayı): Bir X tam lineer metrik uzayına Frechet uzayı denir.

Tanım 1. 10. (FK uzayı): Eğer X in metriği w nin metriğinden daha kuvvetliyse yani X dizi uzayındaki yakınsaklık koordinatsal yakınsaklığı gerektiriyorsa X Frechet dizi uzayına FK uzayı denir. (Almancada F ve K harfleri Frechet ve Koordinate kelimeleri yerine kullanılır.)

Bazı yazarlar hem Frechet uzayı hemde FK uzayının tanımında konveksliği ele alırlar. Burada Maddox ve Wilansky tarafından yapılan tanımı kullanacağız.

Tanım 1.11: $X \supset \phi$ bir FK uzayı olsun. Eğer bütün $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in X$ dizileri için $\sum_{k=0}^{n} x_k e^{(k)} \to x \quad (n \to \infty)$ ise AK özelliğine sahiptir denir. (AK Abschnittskonvergenz - kısımsal yakınsaklık- kelimesi yerine kullanılır.)

Tanım 1. 12. (Birim Matris): Karesel bir matriste köşegen elemanları 1, diğer elemanları 0 olan matrise birim matris denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 1. 13. (Üçgensel Matris): Bir $A = (a_{ij})$ matrisinde her $j < i$ için $a_{ij} = 0$ şartı sağlanıyorsa yani köşegen elemanların altında kalan bütün elemanlar 0 oluyorsa A ya üçgensel matris denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 1. 14. (Köşegen Matris): Esas köşegen haricindeki bütün elemanları sıfır olan matrise köşegen matris denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 1. 15. (Hausdorff Matrisi): $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, ...)$ bir kompleks dizi; M matrisi, $m_{nn} = \mu_n \quad (n = 0,1,2,...)$ olan bir köşegen matris; D matrisi, k = 1,2,… ve $\binom{n}{k}$ binom katsayıları olmak üzere,

$$d_{nn} = (-1)^n,\ d_{n0} = 1,\ d_{nk} = (-1)^k \binom{n}{k}$$

şeklinde bir üçgensel matris olsun.

$$H = H(\mu) = DMD$$

matrisi μ dizisi tarafından oluşturulan Hausdorff Matrisi olarak adlandılır. Bu matrisin elemanları,

$$h_{nk} = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j+k} \binom{n}{j}\binom{j}{k}$$

şeklindedir.

Tanım 1. 16. (Cesáro Matrisi): $\alpha > -1$ olmak üzere α. mertebeden Cesáro Matrisi $n = 0,1,2,...$ ve $k = 1,2,...$ için,

$$\mu_n = A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n}$$

dizisi ile oluşturulan bir Hausdorff matrisidir ve C_α ile gösterilir. Bu matrisin elemanları,

$$(C_\alpha)_{n,k} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}$$

şeklindedir.

Tanım 1. 17. (Toplanabilme) : *l* bir kompleks sayı olmak üzere,

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri her n için yakınsak ve

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = l$$

ise x dizisi l sayısına A - toplanabilirdir denir ve $x \to l(A)$ ile gösterilir. Bu aynı zamanda adi toplanabilme tanımıdır.

Tanım 1.18. (Kuvvetli A-toplanabilirlik): $0 < p < \infty$ olsun. Eğer,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \left| x_k - l \right|^p$$

serileri her n için yakınsak ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \left| x_k - l \right|^p = 0$$

ise x dizisi p indeksi ile l sayısına kuvvetli A - toplanabilirdir denir ve $x \to l[A]^p$ ile gösterilir.

Tanım 1.19. (Banach Limiti): $D((x_k)) = (x_{k+1})$ olmak üzere, eğer l_∞ üzerinde tanımlı L lineer fonksiyoneli aşağıdaki şartları sağlıyorsa L ye bir Banach limiti denir.

(i) $x_k \geq 0$ ise $\mathrm{L}(x) \geq 0$

(ii) Tüm $x \in \ell_\infty$ için $\mathrm{L}(Dx) = \mathrm{L}(x)$

ve

(iii) $e = (1,1,1,...)$ olmak üzere $\mathrm{L}(e) = 1$.

Tanım 1.20. (Hemen Hemen Yakınsak Dizi): Bir $x \in \ell_\infty$ dizisinin tüm Banach Limitleri aynı ise bu diziye hemen hemen yakınsak dizi denir.

Lorentz (1948), bir $x = (x_k)$ dizisinin L ye hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şartın n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_{n+k} = \mathrm{L}$$

olması olduğunu ispatladı.

II. BÖLÜM

λ - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Mursaleen (2000) tarafından (V,λ)- toplanabilirlik kullanılarak istatistiksel yakınsaklık kavramı genelleştirildi. Bu yeni metoda λ- istatistiksel yakınsaklık denildi ve λ- istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_λ ile gösterildi. $(C,1)$- toplanabilirlik ve (V,λ)- toplanabilirliğin istatistiksel yakınsaklık ile bağlantısı ele alındı. Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramı ve bu kavram üzerine genelleştirilen λ- istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak ilgili teoremler verilecektir.

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık ve toplanabilirlik kavramları tanımlanacak, bu kavramlarla ilgili olarak tanım ve teoremler gözden geçirilecektir.

Tanım 2.1.1: $\lambda=(\lambda_n)$,

$$\lambda_{n+1}\le\lambda_n+1 \quad , \quad \lambda_1=1$$

olmak üzere ∞ giden azalmayan pozitif sayıların bir dizisi olsun.

$$t_n(x):=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}x_k , \qquad I_n=[n-\lambda_n+1,n]$$

ifadesine **Genelleştirilmiş de la Valée-Pousin ortalaması** denir.

Tanım 2.1.2: $x=(x_k)$ dizisi için eğer,

$$n\to\infty \quad \text{iken} \quad t_n(x)\to L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisine L ye (V,λ) **- toplanabilir** denir.

Eğer $\lambda_n=n$ ise o zaman (V,λ) - toplanabilirlik $(C,1)$ - toplanabilirliğe dönüşür.

L ye kuvvetli (V,λ)- toplanabilir ve kuvvetli Cesáro toplanabilir $x=(x_k)$ dizilerinin kümeleri sırasıyla;

$$[V,\lambda]:=\left\{x=(x_n):\exists L\in R, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k-L|=0\right\}$$

ve

$$[C,1] := \left\{ x=(x_n) : \exists L \in R, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

ile gösterilsin.

İstatistiksel yakınsaklık fikri Fast (1951) tarafından öne sürüldü ve birçok yazar tarafından çalışıldı (Connor 1989, Fridy 1985 ve Šalát 1980).

N doğal sayılar kümesinin bir K alt kümesinin kardinali (eleman sayısı) $|K|$ ile gösterilsin, yani $|K| := card\ K$ olsun.

Tanım 2.1.3: K, N nin bir alt kümesi ve $K_n := \{k \le n : k \in K\}$ olsun.

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} \ , \quad \overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

sayılarına sırasıyla K kümesinin **alt yoğunluğu ve üst yoğunluğu** denir. $\frac{|K_n|}{n}$ dizisinin limitinin var olması durumunda bu limite K kümesinin **doğal yoğunluğu** denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. Yani $\delta(K) = \underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$ eşitliklerinin sağlanması halinde $K \subset$ N kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : k \in K\}|$$

dir (Niven and Zuckerman and Montgomery 1991).

Doğal yoğunluk kavramının daha iyi anlaşılabilmesi için Gürdal (2004) de verilen aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2.1.1: $K = \{1, \ 4,5,6, \ 13,14,...,24, \ 49,50,...,96, \ 193,194,...\}$ şeklinde verilsin. K indeks kümesi için $\frac{|K_n|}{n}$ ifadesini oluşturalım.

(a) $\frac{|K_n|}{n}$ ifadesinin üst limitini (lim sup) oluşturan alt dizi**,**

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, ... \to \frac{2}{3}$$

ve

(b) $\frac{|K_n|}{n}$ ifadesinin alt limitini (lim inf) oluşturan alt dizi**,**

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, ... \to \frac{1}{3}$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu örnek için

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \frac{1}{3}$$
$$\overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \frac{2}{3}$$

olduğundan $\underline{\delta}(K) \neq \overline{\delta}(K)$ dir. Bu nedenle K kümesinin doğal yoğunluğu yoktur. Bu örnekten de anlaşılacağı gibi doğal yoğunluğu olmayan kümeler de vardır. Ama her bir küme için alt yoğunluk ve üst yoğunluk mevcuttur. $\delta(K)$ veya $\delta(\mathrm{N} \setminus \mathrm{K})$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise $\delta(K) = 1 - \delta(\mathrm{N} \setminus K)$ dır. Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta(K) = 0$ olduğu açıktır.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık tanımını hatırlayalım.

Tanım 2.1.4: Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $K := K(\varepsilon) := \{k \in \mathrm{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin yoğunluğu sıfır yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına **istatistiksel yakınsaktır** denir ve S-lim $x = L$ veya $x_k \to L(S)$ yazılır. S bütün istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesidir (Fast 1951, Fridy 1985).

Adi anlamda yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağlantıyı kurmak için, bu iki kavramı karşılaştıralım. Bilindiği gibi, x reel sayı dizisi L ye yakınsak ise L nin her bir ε komşuluğu dışında dizinin ancak sonlu sayıda elemanı kalabilir. Şimdi, L noktasının her bir ε komşuluğu dışında dizinin sonlu sayıda değil, sonsuz sayıda da elemanının kalabileceğini kabul edelim. Fakat böyle elemanların sayısı dizinin tüm elemanlarının sayısına göre “çok çok az” olacaktır. Yani dizinin “hemen hemen” tüm elemanlarının, L nin ε komşuluğu içerisinde olduğunu söyleyebiliriz. Buradan x dizisinin L noktasına “hemen hemen” yakınsak olduğunu anlarız. İstatistiksel yakınsaklık kavramı bu fikri matematiksel olarak kesin ifade eden kavramlardan biridir. Burada L noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanlarının sayısının “az” olması, böyle elemanların doğal yoğunluğunun sıfır olması ile ifade edilir (Pehlivan 2001).

Teorem 2.1.1: $S - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ olacak şekilde bir $K = \{n_1 < n_2 < ...\} \subset \mathrm{N}$ kümesinin mevcut olmasıdır (Fridy 1985 , Šalát 1980, Miller 1995).

Burada adi anlamda yakınsak olan her dizinin istatistiksel yakınsak olduğunu ifade etmek gerekir. Çünkü x dizisi L ye yakınsak ise her $\varepsilon > 0$ için $K = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu sayıda eleman içerdiğinden yoğunluğu sıfırdır $(\delta(K) = 0)$. Yakınsak dizi sınırlı olmasına rağmen, istatistiksel yakınsak dizi sınırlı olmayabilir. Aşağıdaki örneklerden görülebileceği gibi sınırlı ıraksak ya da sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilirler (Gürdal 2004).

Örnek 2.1.2: $x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2, \ (n = 1,2,...) \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $\mathrm{K}_\varepsilon = \{\mathrm{k} \in \mathrm{N} : |\mathrm{x}_\mathrm{k} - 0| \geq \varepsilon\} = \{1,4,9,16,...\}$ alındığında

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

elde edilir. O halde S-lim x = 0 dır.

Örnek 2.1.3: $x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2, \ (n = 1,2,...) \\ 3, & k \neq n^2 \end{cases}$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için S-lim x = 3 dir.

İstatistiksel yakınsaklık ile klasik toplanabilme metodları arasındaki ilişki Scoenberg (1959) ve Fridy (1985) tarafından incelenmiştir. Bu ilişkiyi vermeden önce toplanabilme hakkında gerekli ön bilgileri vereceğiz.

$A = (a_{nk})$ kompleks terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer $A_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ mevcut ise, $Ax := (A_n(x))$ dizisine, (x_n) dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir. X ve Y reel ya da kompleks terimli dizilerinden oluşan iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ sonsuz matris olsun. Eğer her $x \in X$ için $(A_n(x))$ dönüşüm matrisi mevcut ve $(A_n(x)) \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X de Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir ve X den Y içine tanımlı bütün matrislerin sınıfı (X,Y) ile gösterilir. Eğer A, X den Y içine bir matris dönüşümü ise, $A \in (X,Y)$ şeklinde yazılır. $(X,Y;p)$ ile toplam ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı gösterilir. Örneğin, $A \in (c,c;p)$ olması $x_n \to L$ olduğunda $A_n(x) \to L$ olması demektir.

Bu tip matrislere Regüler matris adı verilir. $A \in (c,c;p)$ olması için gerek ve yeter koşulları Silverman-Toeplitz teoremi vermektedir. Bu teoremi ispatsız vereceğiz.

Teorem 2.1.2: $A = (a_{nk})$ toplanabilme matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

(i) Her k = 1,2,… için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$,

(iii) Pozitif bir M sayısı için $\sup\limits_{n} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq M < \infty$,

olmasıdır.

Örnek 2.1.4: $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ ve $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$

ile verilen C_1 Cesáro matrisi ve I birim matrisi Teorem 2.1.2 nin koşullarını sağladığı için her ikisi de regülerdir.

Hiçbir matris toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez. Yani her $x \in s$ için $A-\lim x = S-\lim x = L$ olacak şekilde bir A matrisi yoktur (Fridy 1985).

2.2. *A*-istatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda N doğal sayılar kümesinin bir K alt kümesinin A-yoğunluğu tanımlanarak A-istatistiksel yakınsaklık kavramı çalışılacaktır.

Tanım 2.2.1: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$$\delta_A(K) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k \in K} a_{nk} = \lim_{n\to\infty} (A\chi_K)_n$$

limiti mevcut ise $\delta_A(K)$ sayısına K kümesinin ***A*- yoğunluğu** denir (Freedman and Sember 1981).

$\delta_A(K)$ veya $\delta_A(\mathbb{N} \setminus K)$ yoğunluklarından herhangi bir mevcut ise $\delta_A(K) = 1 - \delta_A(\mathbb{N} \setminus K)$ dir.

Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise her A negatif olmayan regüler matris için K kümesinin $A-$ yoğunluğu sıfırdır. $(\delta_A(K)=0)$. Burada K sonlu bir küme ise onun karakteristik dizisi χ_K sonlu 1 lere sahiptir. Böylece $\lim_{n\to\infty}(\chi_K)_n=0$ ve A regüler olduğundan $\lim_{n\to\infty}(A\chi_K)_n=0$ dır.

Örnek 2.2.1: $a_{nk}=\begin{cases}1, & k=n^2,\ (n=1,2,...)\\ 0, & k\neq n^2\end{cases}$

şeklinde tanımlanan $A=(a_{nk})$ matrisini göz önüne alalım. Bu durumda, $K=\{k=n^2 : n\in \mathrm{N}\}$ kümesi için $\delta_A(K)=1$ ve $K'=\{k\neq n^2 : n\in \mathrm{N}\}$ kümesi için $\delta_A(K')=0$ dır.

Tanım 2.2.2: $A=(a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısı için $\{k\in \mathrm{N}: |x_k-L|\geq\varepsilon\}$ kümesinin *A*- yoğunluğu sıfır yani ,

$$\delta_A(\{k\in \mathrm{N}: |x_k-L|\geq\varepsilon\})=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına ***A*- istatistiksel yakınsaktır** denir. Bu durum $S_A-\lim x=L$ ile gösterilir (Connor 1989, Kolk 1991).

Eğer, $A=C_1$ alınırsa istatistiksel yakınsaklığın tanımı elde edilir.

Şayet bir x dizisi L ye yakınsak ise her $\varepsilon>0$ için $\{k: |x_k-L|\geq\varepsilon\}$ sonlu küme olup bu kümenin *A*- yoğunluğu sıfırdır. Böylece her negatif olmayan regüler *A* matrisi için *A*- istatistiksel yakınsaklık regüler toplanabilme metodudur.

Örnek 2.2.2: $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}$

şeklinde tanımlansın ve $x=(1,0,1,0,...)$ olsun. Burada x dizisi istatistiksel yakınsak olmamasına rağmen, sıfıra *A*- istatistiksel yakınsaktır. Dikkat edilirse eğer $\varepsilon>1$ için $\{k: |x_k-0|\geq\varepsilon\}=\phi$ olup bu kümenin *A*- yoğunluğu sıfırdır. Eğer $0<\varepsilon\leq 1$ ise

$$K = \{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{1,3,5,7,...\}$$

dir. Burada $\chi_k = (1,0,1,0,...)$, $A\chi_k = (0,0,0,...)$ ve $\delta_A(K) = 0$ dır. O halde her ε pozitif sayısı için $\delta_A(\{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}) = 0$ dır.

Örnek 2.2.3: $a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n^2, \ (n = 1,2,...) \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler matrisini göz önüne alalım. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{3}, & k = n^2, \ (n = 1,2,...) \\ 1, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ için $K = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - \frac{1}{3}| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\delta_A(K) = \lim_n (A\chi_K)_n = 0$$

olduğundan $S_A - \lim x = \dfrac{1}{3}$ dür (Gürdal 2004).

2.3. λ-istatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda λ-istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanıp çalışılacak, ayrıca $[V,\lambda]$ ve S ile ilişkisi belirtilecektir.

Tanım 2.3.1: Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise $x = (x_n)$ dizisi L ye λ**-istatistiksel yakınsaktır** veya S_λ**- yakınsaktır** denir. Bu durumda $S_\lambda - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\lambda)$ yazılır ve

$$S_\lambda := \{x : \exists L \in \mathbb{R},\ S_\lambda - \lim x = L\}$$

dır.

Uyarı: (i) Eğer $\lambda_n = n$ ise o zaman S_λ, S ile aynıdır.

(ii) λ-istatistiksel yakınsaklık, eğer matris $\boldsymbol{A} = (a_{nk})$

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_n}, & k \in I_n \\ 0, & k \notin I_n \end{cases}$$

alınırsa $\boldsymbol{A}$-istatistiksel yakınsaklığın özel bir durumudur.

S_λ ile $[V,\lambda]$ ve (C,1) metodları arasındaki bağıntı Mursaleen (2000) tarafından kurulmuştur.

Sonsuza giden $\lambda_{n+1} \le \lambda_n \; ve \; \lambda_1 = 1$ olacak şekilde pozitif sayıların bütün $\lambda = (\lambda_n)$ azalmayan diziler kümesi Λ ile gösterilsin.

Tanım 2.3.2: $\theta = \{k_r\}$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r := k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak şekilde bir artan tam sayı dizisi ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine **Lacunary dizisi** denir. Bu kısımda θ ile belirlenen aralıklar $I_r := (k_{r-1}, k_r]$ ile ve k_r / k_{r-1} oranı q_r ile gösterilecektir.

İstatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli Cesáro toplanabilirlik

$$|\sigma_1| := \left\{ x : \text{bazı } L \text{ için } \lim_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

arasında doğal bir ilişki vardır. $|\sigma_1|$ ile N_θ dizi uzayı

$$N_\theta := \left\{ x : \text{bazı } L \text{ için } \lim_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

arasında kuvvetli bir bağlantı vardır.

Tanım 2.3.3: θ bir lacunary dizisi olsun. x sayı dizisinin her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \{ k \in I_r : |x_k - L| \ge \varepsilon \} \right| = 0$$

ise x dizisi L ye $S_\theta -$**yakınsaktır** denir ve $S_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\theta)$ ile gösterilir. Burada

$$S_\theta := \{ x : \text{bazı } L \text{ için } S_\theta - \lim x = L \}$$

şeklinde tanımlanır (Fridy and Orhan 1993).

Teorem 2.3.1: $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi olsun. Bu taktirde

(i) (a) $x_k \to L(N_\theta)$ olduğunda $x_k \to L(S_\theta)$ dır ve

(b) N_θ, S_θ nın bir özaltkümesidir.

(ii) $x \in l_\infty$ ve $x_k \to L(S_\theta)$ olması $x_k \to L(N_\theta)$ olmasını gerektirir.

(iii) $S_\theta \cap l_\infty = N_\theta \cap l_\infty$ dır (Fridy and Orhan 1993).

Burada l_∞ sınırlı dizilerin kümesidir (Fridy and Orhan 1993) .

İspat :

(i) (a) Eğer $\varepsilon > 0$ ve $x_k \to L(N_\theta)$ ise

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon \left| \{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \} \right|$$

yazılır ve buradan istenen elde edilir.

(b) (i) deki $N_\theta \subseteq S_\theta$ kapsamasının doğruluğu için, θ verilsin ve x_k, I_r deki ilk $[\sqrt{h_r}]$ tamsayılarında $1,2,...,[\sqrt{h_r}]$ ve diğer durumlarda $x_k = 0$ tanımlansın. Burada x sınırsızdır. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\frac{1}{h_r} \left| \{ k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon \} \right| = \frac{\left[\sqrt{h_r}\right]}{h_r} \to 0, \quad r \to \infty \text{ iken}$$

yani $x_k \to 0(S_\theta)$ dır.Diğer taraftan,

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{1}{h_r} \frac{\left[\sqrt{h_r}\right]\left(\left[\sqrt{h_r}\right] + 1\right)}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0;$$

Böylece $x_k \not\to 0(N_\theta)$ olur.

(ii) $x_k \to L(S_\theta)$ ve $x \in l_\infty$ olduğunu kabul edelim, bütün k lar için $|x_k - L| \leq M$ diyelim. $\varepsilon > 0$ verildiğinde,

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|$$

$$\leq \frac{M}{h_r} \left| \{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \} \right| + \varepsilon$$

ile sonuca ulaşılır.

(iii) şıkkı (i) ve (ii) nin bir sonucudur.

N_θ-toplanabilir dizi C_θ-toplanabilir olduğundan, Teorem 2.2.1 (ii) den herhangi bir sınırlı S_θ-toplanabilir dizi aynı zamanda C_θ- toplanabilirdir.

Teorem 2.3.2: $\lambda \in \Lambda$ olsun. O zaman

(i) $x_k \to L[V,\lambda] \Rightarrow x_k \to L(S_\lambda)$ ve $[V,\lambda] \subseteqq S_\lambda$ kapsaması kesindir.

(ii) Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \to L(S_\lambda)$ ise $x=(x_k)$ olmak şartıyla

$x_k \to L[V,\lambda]$ ve buradan $x_k \to L(C,1)$ dir. Burada $x=(x_k)$ sabit değildir.

(iii) $S_\lambda \cap \ell_\infty = [V,\lambda] \cap \ell_\infty$ dır.

İspat:

(i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \to L[V,L]$ olsun.

$$\sum_{k\in I_n} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon \left| \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right|$$

yazılır. Böylece $x_k \to L[V,\lambda] \Rightarrow x_k \to L(S_\lambda)$ dir.

Aşağıdaki örnek $S_\lambda \underset{\neq}{\subset} [V,\lambda]$ dir.

$x=(x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} k, & n-[\sqrt{\lambda_n}\,] \leq k \leq n \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $x \notin \ell_\infty$ olur ve her ε $(0 < \varepsilon \leq 1)$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} \left| \{k \in I_n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} \right| = \frac{[\sqrt{\lambda_n}]}{\lambda_n} \to 0, \; n \to \infty \text{ iken}$$

yani $x_k \to 0(S_\lambda)$ olur. Diğer yandan,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} |x_k - 0| \to \infty \quad (n \to \infty)$$

yani $x_k \not\to 0[V,\lambda]$ dir.

(ii) $x_k \to L(S_\lambda)$ ve $x \in \ell_\infty$ olduğunu kabul edelim. Tüm k lar için $|x_k - L| \leq M$ diyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} |x_k - L| = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|$$

$$\leq \frac{M}{\lambda_n} \left| \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| + \varepsilon$$

yazılır, bu $x_k \to L[V,\lambda]$ olmasını gerektirir. Ayrıca,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - L) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}(x_k - L) + \frac{1}{n}\sum_{k\in I_n}(x_k - L)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}\left|x_k - L\right| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|x_k - L\right|$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|x_k - L\right|$$

yazılır. $x_k \to L[V,\lambda]$ olduğundan $x_k \to L(C,1)$ dır.

(iii) Bu kısmın ispatı (i) ve (ii) den hemen çıkar.

Tüm λ lar için $S_\lambda \subseteq S$ olduğunu görmek kolaydır, çünkü λ_n / n, 1 ile sınırlıdır.

Teorem 2.3.3: $S \subseteq S_\lambda$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} > 0 \qquad (2.2.1)$$

olmasıdır.

İspat: Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{k \leq n : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\} \supset \left\{k \in I_{n:} \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

dır. Bundan dolayı

$$\frac{1}{n}\left\{k \leq n : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\} \geq \frac{1}{n}\left\{k \in I_{n:} \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

$$\geq \frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$n \to \infty$ iken limiti alınır ve (2.2.1) kullanılırsa

$$x_k \to L(S) \Rightarrow x_k \to L(S_\lambda)$$

elde edelir.

Tersine olarak, $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} = 0$ olduğu kabul edelim. $\frac{\lambda_n(j)}{n(j)} < \frac{1}{j}$ olacak şekilde bir $(n(j))_{j=1}^{\infty}$ alt dizisini seçebiliriz. Bir $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{n(j)} \text{ ise } j = 1,2,3,... \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $x \in [C,1]$ ve buradan, Connor (1988) den, $x \in S$ dir. Fakat diğer taraftan $x \notin [V,\lambda]$ ve teorem 2.2.2 (ii), $x \in S_\lambda$ yı gerektirir. Bu yüzden (2.2.1) gereklidir.

III. BÖLÜM
MODULUS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI λ - DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde De la Valée- Pousin ortalaması ve modulus fonksiyonu kavramlarından yararlanarak bazı dizi uzayları tanımlanacak ve bu uzayların çeşitli özellikleri incelenecektir.

3.1. Modulus Fonksiyonu

Modulus fonksiyonu kavramı Nakano (1953) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.1.1 : $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ olmak üzere,

(i) $f(x)=0$ olması için gerek ve yeter şart $x=0$ olması,

(ii) Her $x,y\geq 0$ için $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$,

(iii) f artandır,

(iv) f, sıfırda sağdan süreklidir.

koşullarını sağlayan f fonksiyonuna **modulus fonksiyonu** denir. $|f(x)-f(y)|\leq f(|x-y|)$ olduğundan (iv) den f, $[0,\infty)$ da süreklidir. Ayrıca (ii) şartından bütün $n\in$ č için $f(nx)\leq nf(x)$ elde edilir ve dolayısıyla $f(x)=f(nx\frac{1}{n})\leq nf(x/n)$ dir. Böylece bütün $n\in$ č için

$$\frac{1}{n}f(x)\leq f(x/n) \tag{3.1.1}$$

olur. Bir modulus fonksiyonu sınırlı ($f(x)=x/(1+x)$) veya sınırsız ($0<p\leq 1$ için $f(x)=x^p$) olabilir.

Ruckle (1973) modulus fonksiyonu kavramını bazı kompleks dizi uzayları oluşturmak için kullandı. Maddox (1986) bir f modulus fonksiyonu kullanarak w, bütün $x=(x_k)$ kompleks dizilerin uzayı ve $e=(1,1,1,...)$ olmak üzere,

$$w_0(f)=\{x\in w:\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(|x_k|)=0\},$$

$$w(f)=\{x\in w:x-le\in w_0(f)\text{ bazı } l \text{ sayısı için}\},$$

$$w_\infty(f)=\{x\in w:\sup_n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(|x_k|)<\infty\}$$

üç dizi uzayını tanımladı ve bu uzayların bazı özelliklerini inceledi. Burada $t_n(x) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f(|x_k|)$ dir. $f(x) = x$ alındığında daha önce yine Maddox (1979) tarafından tanımlanan kuvvetli toplanabilen dizilerin

$$w_0 = \{x \in w : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0\}$$

$$w = \{x \in w : \quad x - le \in w_0, \ \ bazı \ \ l \in \mathbb{C} \ \ için\}$$

$$w_\infty = \{x \in w : \sup \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k| < \infty\}$$

uzayları elde edilir.

E. Savaş (1999) bir f modulus fonksiyonunu kullanarak kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramını genelleştirerek aşağıdaki dizi uzaylarını tanımladı ve bazı özelliklerini inceledi.

$$[\hat{c}, f]_0 = \left\{x \in w : \lim_m \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(|x_{n+k}| = 0, \ \ n \ ye \ göre \ düzgün\right\}$$

$$[\hat{c}, f] = \left\{x \in w : \lim_m \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(|x_{n+k} - le|) = 0, \ n \ ye \ göre \ düzgün\right\}$$

$$[\hat{c}, f]_\infty = \left\{x \in w : \sup_{m,n} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(|x_{n+k}|) < \infty\right\}$$

E. Savaş (2000a) istatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirmek için (V,λ)-toplanabilirliği kullanarak hemen hemen λ - istatistiksel yakınsaklığı tanımladı.

De la Valée-Pousin yöntemi ile sıfıra kuvvetli hemen hemen toplanabilen, kuvvetli hemen hemen toplanabilen ve kuvvetli hemen hemen sınırlı dizilerin kümelerini bir modulus fonksiyon kavramıyla birleştirerek tanımlamak mümkündür. (V,λ) metodu ve kuvvetli hemen hemen yakınsaklık gibi sıfıra kuvvetli hemen hemen toplanabilen, kuvvetli hemen hemen toplanabilen ve kuvvetli hemen hemen sınırlı dizilerin uzayları f modulusune bağlı olarak E. Savaş (1999) tarafından tanımlanmıştır.

Bu bölümde esas olarak bir modulus fonksiyon kavramı ve genelleştirilmiş De la Vallée-Poussin ortalaması yardımıyla tanımlanan $[\hat{V},\lambda, f]_0$ *ve* $[\hat{V},\lambda, f]$ dizi uzayları çalışılacaktır.

w, bütün $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ kompleks dizilerin kümesi olsun ve l_∞, c, c_0 ile sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzaylarını gösterecektir. Burada norm $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ şeklindedir. Bütün sonlu dizilerin kümesi ϕ ile gösterilecektir, ayrıca e ve $e^{(n)}$ (n=1,2,…) dizilerinde $e_k = 1 \ (k = 1,2,...)$, $e_n^{(n)} = 1$ ve $e_k^{(n)} = 0 \ (k \neq n)$ dir.

Tanım 3.1.2 : X bir lineer uzay olsun.

$$p : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa **paranorm** olarak adlandırılır. (X, p) uzayına da kısaca paranormlu uzay denir.

$(P.1)$ $p(0) \geq 0$

$(P.2)$ Bütün $x \in X$ için $p(x) \geq 0$

$(P.3)$ Bütün $x \in X$ için $p(-x) = p(x)$

$(P.4)$ Bütün $x, y \in X$ için $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

$(P.5)$ Eğer (λ_n) dizisi $\lambda_n \to \lambda$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir skaler dizisi ve (x_n), $p(x_n - x) \to 0$ $(n \to \infty)$ şeklinde bir vektörel dizi ise o zaman ew $p(\lambda_n x_n - \lambda x) \to 0$ $(n \to \infty)$ dır. (Skalerle çarpmanın sürekliliği)

Tanım 3.1.3: p bir paranorm olsun. Eğer,

$$p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

oluyorsa bu paranorma **total paranorm** denir.

Herhangi bir lineer metrik uzayın metriğinin bir total paranorm ile verilebileceği bilinir.

De la Valée-Pousin yöntemi ile sıfıra kuvvetli toplanabilen, kuvvetli toplanabilen ve kuvvetli sınırlı dizilerin kümeleri için sırasıyla

$$[V, \lambda]_0 = \{x \in w : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0\}$$

$$[V, \lambda] = \{x \in w : \quad x - le \in [V, \lambda]_0, \ \text{bazı} \ \ l \in \mathbb{C} \ \ \text{için}\}$$

$$[V, \lambda]_\infty = \{x \in w : \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k| < \infty\}$$

şeklindedir. n =1,2,… için $\lambda_n = n$ özel durumunda $[V, \lambda]_0$, $[V, \lambda]$ ve $[V, \lambda]_\infty$ kümeleri sırasıyla Maddox (1979) tarafından tanımlanan ve çalışılan w_0, w ve w_∞ kümelerine indirgenir.

Maddox (1979) sıfıra kuvvetli hemen hemen yakınsak ve kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin kümeleri

$$[\hat{c}]_0 = \{x \in w : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+m}| = 0, \ m \text{ ye göre düzgün}\}$$

ve

$$[\hat{c}] = \{x \in w : x - le \in [\hat{c}]_0, \text{ bazı } l \in \mathbb{C} \text{ için}\}$$

şeklinde tanımladı. Bir modulus fonksiyonu ile kuvvetli (V,λ) metodu ve kuvvetli hemen hemen yakınsaklık metotlarını birleştirerek aşağıdaki kümeleri tanımlayabiliriz.

$$[\hat{V},\lambda, f]_0 = \{x \in w : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} f(|x_{k+m}|) = 0 \text{, m ye göre düzgün}\}$$

$$[\hat{V},\lambda, f] = \{x \in w : \quad x - le \in [\hat{V},\lambda, f]_0, \quad \text{bazı} \quad l \in \mathbb{C} \quad \text{için}\}$$

$$[\hat{V},\lambda, f]_\infty = \{x \in w : \sup \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} f(|x_{k+m}|) < \infty\}$$

n =1,2,… için $\lambda_n = n$ olduğunda $[\hat{V},\lambda, f]_0$ *ve* $[\hat{V},\lambda, f]$ kümeleri Savaş (1999) tarafından tanımlanan $[\hat{c}, f]_0$ *ve* $[\hat{c}, f]$ kümelerine indirgenir. Eğer $f(x) = x$ konulursa $[\hat{V},\lambda, f]_0 = [\hat{V},\lambda]_0$ *ve* $[\hat{V},\lambda, f] = [\hat{V},\lambda]$ olur.

3.2. Bazı Yardımcı Teoremler

Bu kısımda ana sonuçların ispatında ihtiyaç duyulan bazı yardımcı teoremleri vereceğiz.

Yardımcı Teorem 3.2.1: Herhangi bir f modulus fonksiyonu için $\lim_{t\to\infty} f(t)/t$ limiti vardır.çmchşi

İspat: $0 \le \beta \le f(1)$ olduğunda $\beta = \inf\{f(t)/t : t > 0\}$ dir. $\varepsilon > 0$ alındığında $f(a) < a(\beta + \varepsilon)$ için $a > 0$ vardır. $t > a$ seçildiğinde $na < t \le (n+1)a$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Modulus fonksiyonunun (ii) ve (iii) şartlarından

$$t\beta \le f(t) \le nf(a) + f(a) \le na(\beta + \varepsilon) + f(a)$$
$$< t(\beta + \varepsilon) + f(a)$$

yazılır. Buradaki β, $\lim_{t\to\infty} f(t)/t$ eşitidir (Maddox 1987).

Yardımcı Teorem 3.2.2: *f*,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \alpha > 0 \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde herhangi modulus fonksiyonu olsun. Bu takdirde bütün $t \ge 0$ için

$$f(t) \ge \beta\, t \tag{3.2.2}$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sabiti vardır.

İspat: (3.2.1) şartının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $t \geq t_0$ için

$$f(t) \geq \frac{\alpha}{2} t \tag{3.2.3}$$

olacak şekilde $t_0 > 0$ vardır. Şimdi $1 \leq t \leq t_0$ olsun. Bu takdirde modulus fonksiyonunun (iii) koşulundan

$$f(t) \geq f(1) = \frac{1}{t} f(1)t \geq \frac{f(1)}{t_0} t \tag{3.2.4}$$

dır. Son olarak $0 < t < 1$ olsun. Bu takdirde $1/(n+1) < t \leq 1/n$ olacak şekilde $n \in č$ vardır ve bir modulus fonksiyon (iii) koşulu ve (3.1.1) den

$$f(t) \geq f(\frac{1}{n+1}) \geq \frac{1}{n+1} f(1) = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n} f(1) \geq \frac{n}{n+1} f(1)t \geq \frac{1}{2} f(1)t \tag{3.2.5}$$

olur. $\beta = \min\{\alpha/2, f(1)/t_0, 1/2\, f(1)\} > 0$ yazalım. Bu durumda (3.2.2.),değeri (3.2.3) ,(3.2.4) ve (3.2.5) ifadelerinden çıkar.

Yardımcı Teorem 3.2.3: f bir modulus fonksiyonu ve $0 < \delta < 1$ olsun. Bu takdirde bütün $x \geq \delta$ için

$$f(x) \leq 2 f(1)\delta^{-1} x \tag{3.2.6}$$

dir.

İspat: Bir modulus fonksiyonun özellikleri kullanılarak doğrudan bir hesaplamayla çıkar.

Yardımcı Teorem 3.2.4: $x \in [\hat{V}, \lambda, f]$ olsun. Bu durumda $x - le \in [\hat{V}, \lambda, f]_0$ olacak şekilde bir tek $l \in \mathbb{C}$ vardır.

İspat: $x \in [\hat{V}, \lambda, f]$ ve $x - le,\ x - le' \in [\hat{V}, \lambda, f]_0$ olsun. Bu takdirde verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k \varepsilon I_n} f(|x_k - l|) < \varepsilon/2 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k \varepsilon I_n} f(|x_k - l'|) < \varepsilon/2$$

olacak şekilde $n \in č$ vardır.Bu,

$$f(|l - l'|) \leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k \in I_n} f(|x_k - l|) + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k \in I_n} f(|x_k - l'|) < \varepsilon$$

olduğunu gösterir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan modulus (i) ve (iv) şartlarından $l = \hat{l}$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.2.5: f bir modulus fonksiyonu olsun.Bu takdirde,

(a) $[\hat{V},\lambda, f]_\infty = l_\infty(f) = \{x \in w : (f(|x_k|))_{k=1}^{\infty} \in l_\infty\}$

(b) $[\hat{V},\lambda, f]_0 \subset [\hat{V},\lambda, f] \subset [\hat{V},\lambda, f]_\infty$

İspat: (a) $x \in [\hat{V},\lambda, f]_\infty$ olsun. Bu durumda, bütün *m* ler için

$$\frac{1}{\lambda_1} f(|x_{1+m}|) \leq \sup_{m,n} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f(|x_{k+m}|) \leq m$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır ve bu yüzden $(f(|x_k|))_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$ dır.Diğer taraftan $x \in l_\infty(f)$ olsun.Bu durumda bütün j için $f(|x_j|) \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır ve buradan bütün *m* ve *n* ler için

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f(|x_{k+m}|) \leq M \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} 1 \leq M$$

dir. Böylelikle $x \in [\widehat{V},\lambda, f]_\infty$ dır.

(b) $[\hat{V},\lambda, f]_0 \subset [\hat{V},\lambda, f]_\infty$ olduğu aşikardır. $x \in [\hat{V},\lambda, f]$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f(|x_{k+m} - l|) \leq 1, \quad \text{bütün } n \geq n_0 \text{ ve bütün } m \in \text{č için}$$

olacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayı ve bir l kompleks sayısı vardır ve bu yüzden

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f(|x_{k+m}|) \leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f(|x_{k+m} - l|) + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} f(|l|)$$

$$\leq 1 + f(|l|), \qquad \text{bütün } n \geq n_0 \text{ ve } m \in \text{č için}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\frac{1}{\lambda_{n_0}} f(|x_{n_0+m}|) \leq \frac{1}{\lambda_{n_0}} \sum f(|x_{k+m}|) \leq 1 + f(|l|), \text{ bütün } m \in \text{č için}$$

olur. Bundan dolayı bütün m ler için $f(|x_{n_0+m}|) \leq \lambda_{n_0}(1 + f(|l|)$ dır. Böylece $x \in l_\infty(f)$ dir.

3.3. Ana Sonuçlar

Teorem 3.3.1: $[\hat{V},\lambda,f]_0$ *ve* $[\hat{V},\lambda,f]$ uzayları,

$$p(x)=\sup_{m,n}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|x_{k+m}|) \tag{3.3.1}$$

Paranormu ile paranormlu FK uzaylarıdır. $[\hat{V},\lambda,f]_0$, AK özelliğine sahiptir ve her $x=(x_k)_{k=1}^{\infty}\in[\hat{V},\lambda,f]$ dizisi ,

$$x=le+\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-l)e^{(k)} \tag{3.3.2}$$

şeklinde bir tek gösterime sahiptir. Burada $l\in\mathbb{C}$, $x-le\in[\hat{V},\lambda,f]_0$ olacak şekildedir.

İspat: İlk olarak $[\hat{V},\lambda,f]$ uzayının (3.3.1) de tanımlanan p paranormu ile paranormlu bir FK uzayı olduğunu gösterelim. $[\hat{V},\lambda,f]_0$ ispatı da tamamen aynıdır. Yardımcı Teorem (3.2.5) (b) den p , $[\hat{V},\lambda,f]$ üzerinde tanımlıdır. Bütün $x\in[\hat{V},\lambda,f]$ için $p(x)\geq 0$ olduğu açıktır. Ayrıca bütün j ler için $p(x)\Rightarrow f(|x_j|)=0$ dir ve bu yüzden modulus fonksiyonun (i) şartından $x=0$ dır. Bütün $x\in[\hat{V},\lambda,f]$ için $p(-x)=p(x)$ olduğu açıktır. $x,y\in[\hat{V},\lambda,f]$ olsun. Bu takdirde modulus fonksiyonun (ii) ve (iii) şartlarından

$$p(x+y)\leq\sup_{m,n}\frac{1}{\lambda_n}\sum(f(|x_{k+m}|)+(f(|y_{k+m}|))$$

$$\leq\sup_{m,n}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}f(|x_{k+m}|)+\sup_{m,n}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}f(|y_{k+m}|)\leq p(x)+p(y)$$

olur. Şimdi $p(x^{(r)})\to 0$ ve $\mu_r\to\mu$ $(r\to\infty)$ olsun. Bu takdirde (μ_r) dizisi sınırlıdır yani bütün r için $|\mu_r|\leq M\in$ č dir. Modulus fonksiyonun (i) ve (iii) şartlarından

$$p(\mu_r x^{(r)})=\sup_{m,n}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}f(|\mu_r x_{k+m}^{(r)}|)\leq\sup_{m,n}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}f(M|x_{k+m}^{(r)}|)$$

$$\leq M\sup_{m,n}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}f(|x_{k+m}^{(r)}|)=M.p(x^{(r)})\to 0\ \ (r\to\infty)$$

olur. Son olarak $x\in[\hat{V},\lambda,f]$ verilsin ve $\mu_r\to 0$ $(r\to\infty)$ olsun. Verilen $\varepsilon>0$ için,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}f(|x_{k+m}-l|)<\varepsilon/2 \quad \text{(bütün } n>n_0 \text{ ve bütün m ler için)} \tag{3.3.3}$$

olacak şekilde $n_0 \in$ č vardır. Yardımcı teorem 3.2.5(a) dan $x \in l_\infty(f)$ olduğundan ve f sürekli olduğundan

bütün $r \geq r_0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|\mu_r x_{k+m}|) < \varepsilon \quad \text{(bütün } 1 \leq n \leq n_0 \text{ arasıdaki } n \text{ ler ve bütün } m \text{ ler için)} \tag{3.3.4}$$

olacak şekilde $r_0 \in$ č vardır. Şimdi $n > n_0$ olsun. F in sürekliliğinden ve $\mu_r \to 0$ $(r \to \infty)$ olduğundan

$$f(|\mu_r l|) < \varepsilon/2 \quad ve \quad |\mu_r| < 1 \quad \text{(bütün } r \geq r_1 \text{ için)} \tag{3.3.5}$$

olacak şekilde $r_1 \in$ č vardır. Bu takdirde (3.3.3) ve(3.3.5) den bütün $r \geq r_1$ için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|\mu_r x_{k+m}|) \leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|\mu_r l|) + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|\mu_r(x_{k+m} - l|)$$

$$\leq f(|\mu_r l|) + ([|\mu_r|]+1)\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|x_{k+m} - l|) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{bütün } m \text{ ler için} \tag{3.3.6}$$

olur. $r_2 = \max\{r_1, r_0\}$ seçelim.Bu takdirde (3.3.4) ve (3.3.6) dan bütün $r \geq r_2$ için $p(\mu_r x) \leq \varepsilon$ olur. Bu $r \to \infty$ için $p(\mu_r x) \to 0$ olmasıdır. Böylelikle p nin bir total paranorm olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi $[\hat{V}, \lambda, f]$ nin tam olduğunu gösterelim. $(x^{(r)})_{r=0}^{\infty}$, $[\hat{V}, \lambda, f]$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Verilen $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|x_{k+m}^{(r)} - x_{k+m}^{(s)}|) < \varepsilon \quad \text{(bütün } r, s \geq r_0 \text{ ve bütün } n,m \text{ ler için)} \tag{3.3.7}$$

olacak şekilde $r_0 \in \check{c}_0$ vardır. Bu

$$f(|x_j^{(r)} - x_j^{(s)}|) < \varepsilon \quad \text{(bütün } r, s \geq r_0 \text{ ve her bir } j \text{ için)} \tag{3.3.8}$$

olduğunu söylenir. Dolayısıyla her bir $(x_j^{(r)})_{r=0}^{\infty}$ dizisi $\mathbb{C}$ de Cauchy dizisidir, bundan dolayı $x_j = \lim_{r\to\infty} x_j^{(r)}$ yakınsaktır. Eğer $(x_{j_0}^{(r)})_{r=0}^{\infty}$ bazı j_0 lar için bir Cauchy dizisi değilse o zaman bazı $c > 0$ için $|x_{j_0}^{(r_k)} - x_{j_0}^{(s_k)}| \geq c$ (bütün k lar için) olacak şekilde $(x_{j_0}^{(r_k)})_{k=1}^{\infty}$ ve $(x_{j_0}^{(s_k)})_{k=1}^{\infty}$ altdizileri vardır ve bu yüzden bütün k lar için (3.3.8) in aksine $f(|x_{j_0}^{(r_k)} - x_{j_0}^{(s_k)}|) \geq f(c) > 0$ olur.

$r \geq r_0$ olmak üzere s sonsuza giderken (3.3.7) den f sürekliliği

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(\left|x_{k+m}^{(r)} - x_{k+m}\right|) \le \varepsilon \quad \text{(bütün } r \ge r_0 \text{ ve bütün } m\ ,n \text{ ler için)} \qquad (3.3.9)$$

$$p(x^{(r)} - x) \le \varepsilon \quad \text{(bütün } r \ge r_0 \text{ için)} \qquad (3.3.10)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca her bir r için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(\left|x_{k+m}^{(r)} - l^{(r)}\right|) < \varepsilon \quad \text{(bütün } n \ge n_r \text{ ve bütün } m \text{ ler için)} \qquad (3.3.11)$$

olacak şekilde $n_r \in$ č vardır. Şimdi $r, s \ge r_0$ ve $n_0 = \max\{n_r, n_s\}$ olsun. Bu takdirde (3.3.7) ve (3.3.11) den

$$\begin{aligned} f(\left|l^{(r)} - l^{(s)}\right|) &= \frac{1}{\lambda_{n_0}}\sum_{k\in I_{n_0}} f(\left|l^{(r)} - l^{(s)}\right| \\ &\le \frac{1}{\lambda_{n_0}}\sum_{k\in I_{n_0}} f(\left|x_{k+m}^{(r)} - l^{(r)}\right|) + \frac{1}{\lambda_{n_0}}\sum_{k\in I_{n_0}} f(\left|x_{k+m}^{(s)} - l^{(s)}\right|) \\ &+ \frac{1}{\lambda_{n_0}}\sum_{k\in I_{n_0}} f(\left|x_{k+m}^{(r)} - x_{k+m}^{(s)}\right|) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \quad (\textit{bütün} \;\; m \;\; \textit{ler} \;\; \textit{için}) \end{aligned}$$

olur ve tekrar $l^{(r)} \to l \;\; (r \to \infty)$ söylenir. Buradan (3.3.10) ve (3.3.11) kullanılarak, bütün yeterli büyüklükteki n ler ve bütün m ler için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(\left|x_{k+m} - l\right|) &\le \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(\left|x_{k+m} - x_{k+m}^{(r_0)}\right|) + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(\left|x_{k+m}^{(r_0)} - l^{(r_0)}\right|) \\ &+ \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(\left|l - l^{(r_0)}\right|) < 4\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x \in [\hat{V}, \lambda, f]$ dir. Buradan $[\hat{V}, \lambda, f]$ tamdır.

Şimdi $p(x^{(r)} - x) \to 0 \;\; (r \to \infty)$ her bir j için $x_j^{(r)} \to x_j \;\; (r \to \infty)$ belirttiği gösterelim. $p(x^{(r)} - x) \to \infty \;\; (r \to \infty)$ olsun. Bu takdirde, verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(\left|x_{k+m}^{(r)} - x_{k+m}\right|) < \varepsilon \quad \text{(bütün } r \ge r_0 \text{ ve bütün } m,\ n \text{ ler için)}$$

olacak şekilde $r_0 \in$ č$_0$ vardır. Bu da bütün $r \ge r_0$ ve her bir j için $f(\left|x_j^{(r)} - x_j\right|) < \varepsilon$ olduğunu gösterir ve tekrar her bir j için $x_j^{(r)} \to x_j \;\; (r \to \infty)$ olur.

Böylece ispat tamamlanır. $[\hat{V}, \lambda, f]$ paranormlu FK uzayıdır.

Şimdi $[\hat{V},\lambda,f]_0$ uzayının AK özelliğine sahip olduğunu gösterelim. $x \in [\hat{V},\lambda,f]_0$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|x_{k+m}|) < \varepsilon \quad \text{(bütün } n \geq n_0 \text{ ve bütün } m \text{ ler için)}$$

olacak şekilde $n_0 \in$ č vardır. $r_1 - \lambda_{r_1} + 1 \geq n_0$ olacak şekilde $r_1 \in$ č seçelim. $r \geq r_1$ ve $x^{[r]} = \sum_{k=1}^{r} x_k e^{(k)}$ olsun. Bu takdirde

$$p(x^{[r]} - x) \leq \sup_{n\geq r_0, m} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|x_{k+m}|) \leq \varepsilon$$

olur. Son olarak $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in [\hat{V},\lambda,f]$ verilsin. Yardımcı Teorem (3.2.4) den $y = x - le \in [\hat{V},\lambda,f]_0$ olacak şekilde bir tek l kompleks sayısı vardır. $[\hat{V},\lambda,f]_0$, AK özelliğine sahip olduğundan $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - l)e^{(k)}$ ve bu yüzden $x = le + \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - l)e^{(k)}$ dır.

Teorem 3.3.2: (a)Herhangi f modulus fonksiyonu için $[\hat{V},\lambda] \subset [\hat{V},\lambda,f]$ ve $[\hat{V},\lambda]_0 \subset [\hat{V},\lambda,f]_0$ dır.

(b) Eğer $\lim_{t\to\infty} f(t)/t = \alpha > 0$ ise bu taktirde $[\hat{V},\lambda,f] = [\hat{V},\lambda]$ ve $[\hat{V},\lambda,f]_0 = [\hat{V},\lambda]_0$ dır.

İspat: (a) f modulus ve $x \in [\hat{V},\lambda]$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} |x_{k+m} - l| < \varepsilon \quad \text{(bütün } n \geq n_0 \text{ ve bütün } m \text{ ler için)}$$

olacak şekilde $n_0 \in$ č vardır. F sürekli olduğundan bütün $t \in [0,\delta]$ için $f(t) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ olan bir δ seçebiliriz. Bu takdirde, Yardımcı Teorem (3.2.3) den bütün $n \geq n_0$ ve bütün m ler için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|x_{k+m} - l|) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_{k+m}-l|\leq\delta}} f(|x_{k+m} - l|) + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_{k+m}-l|>\delta}} f(|x_{k+m} - l|) \\
&< \varepsilon + 2f(1)\delta^{-1}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_{k+m} - l| \\
&< \varepsilon(1 + 2f(1)\delta^{-1})
\end{aligned}$$

olur. Böylece $x \in [\hat{V},\lambda,f]$ dır.

$[\hat{V},\lambda]_0 \subset [\hat{V},\lambda,f]_0$ olduğu benzer gösterilir.

(b) $x \in [\hat{V}, \lambda, f]$ olsun. Yardımcı Teorem (3.2.1) den $\lim_{t\to\infty} f(t)/t$ limiti mevcuttur. Yardımcı Teorem (3.2.2) den bütün $t \geq 0$ için $f(t) \geq \beta\, t$ olacak şekilde $\beta > 0$ vardır ve böylece

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_{k+m}-l| < \frac{1}{\beta\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|x_{k+m}-l|) \quad \text{(bütün } n \text{ ve bütün } m \text{ ler için)}$$

dir. Böylece $x \in [\hat{V}, \lambda]$ olur.

$[\hat{V}, \lambda, f]_0 = [\hat{V}, \lambda]_0$ oluşu da benzer biçimde gösterilir.

Tanım 3.3.1: Bir x dizisi eğer $\forall \varepsilon > 0$ için ,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k \in I_n : |x_{k+m}-l| \geq \varepsilon\}\right| = 0 \quad (m \text{ ye göre düzgün})$$

ise bir l sayısına **hemen hemen λ- istatistiksel yakınsaktır** denir. $\hat{s}_\lambda - \lim x = l$ veya $x_k \to l(\hat{s}_\lambda)$ ile gösterilir ve $\hat{s}_\lambda := \{x \in w : \hat{s}_\lambda - \lim x = l \text{ bazı } l \in \mathbb{C} \text{ için}\}$ yazılır. Eğer $\lambda_n = n$ ise bu tanım Savaş (2000a) tarafından tanımlanan hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramına indirgenir.

Şimdi $\hat{s}_\lambda$ ve $[\hat{V}, \lambda, f]$ kümeleri arasındaki bağıntıyı verelim.

Teorem 3.3.3: $\hat{s}_\lambda \subset [\hat{V}, \lambda, f]$ için gerek ve yeter şart f nin sınırlı olmasıdır.

İspat: f nin sınırlı ve $x \in \hat{s}_\lambda$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde bütün $x \geq 0$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir sabit M vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $M\delta + f(\eta) < \varepsilon$ olacak şekilde $\eta, \delta > 0$ seçelim. $x \in \hat{s}_\lambda$ olduğunda

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k \in I_n : |x_{k+m}-l| \geq \eta\}\right| < \delta \quad \text{(bütün } n \geq n_0 \text{ ve bütün } m \text{ ler için)}$$

olacak şekilde $l \in \mathbb{C}$ ve $n_0 = n_0(\eta, \delta) \in \check{c}$ vardır. Bu nedenle, bütün $n \geq n_0$ ve bütün m ler için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} f(|x_{k+m}-l|) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_{k+m}-l|\leq\eta}} f(|x_{k+m}-l|) + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_{k+m}-l|>\eta}} f(|x_{k+m}-l|) \\
&\leq M\,\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k \in I_n : |x_{k+m}-l| \geq \eta\}\right| + f(\eta) \\
&< M\delta + f(\eta) < \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı $x \in [\hat{V}, \lambda, f]$ dır.

Tersine olarak f nin sınırlı olmadığını kabul edelim. Bu takdirde, $k=1,2,...$ için $f(v_k)=k^2$ olan bir $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ pozitif dizi vardır. x dizisi, $(i=1,2,...)$ için eğer $i=k^2$ ise $x_i=v_k$ ve diğer durumlarda $x_i=0$ şeklinde tanımlanır. Bu takdirde,

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k\in I_n : |x_{k+m}|\geq\varepsilon\}\right|\leq\frac{1}{\lambda_n}\sqrt{\lambda_{n-1}} \qquad \text{(bütün } n \text{ ve } m \text{ ler için)}$$

olur. Böylece $x\in\hat{s}_{\lambda}$, fakat $x\notin[\hat{V},\lambda,f]$ dır.

IV. BÖLÜM

ORLİCZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde bir Orlicz fonksiyonuna göre λ- kuvvetli yakınsaklık tanıtılarak yeni dizi uzaylarının bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca eğer bir dizi bir Orlicz fonksiyonuna göre λ-kuvvetli yakınsak ise bu takdirde bu dizinin λ-istatistiksel yakınsak olduğu gösterilecektir.

4.1. Orlicz Fonksiyonu

Bu kısımda Orlicz fonksiyonu tanımlanarak Orlicz fonksitonuna göre λ- kuvvetli yakınsaklığın tanımı verilecektir**.**

Tanım 4.1.1: M sürekli, konveks, azalmayan , $x > 0$ için $M(x) \geq 0$ ve $M(0) = 0$ olacak şekilde $x \geq 0$ için tanımlanan bir fonksiyon ise M ye **Orlicz fonksiyonu** denir (Lindanstrauss ve Tzafriri 1971)

Eğer M Orlicz fonksiyonunun konveksliği (dış bükeyliği) $M(x+y) \leq M(x) + M(y)$ ile yer değiştirirse bu takdirde M fonksiyonu Nakano (1953), Ruckle (1973), Maddox (1986) ve diğerleri tarafından tanımlanan ve ele alınan bir modulus fonksiyonu olarak adlandırılır.

Lindanstrauss ve Tzafriri (1971) Orlicz fonksiyonunu kullanarak

$$l_M = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty \text{ bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

dizi uzayını tanımladı. Bir Banach uzayındaki

$$\|x\| = \inf\left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normu ile birlikte l_M uzayı bir Orlicz dizi uzayı olarak adlandırılır. $1 \leq p < \infty$, $M(x) = x^p$ için l_M uzayı klasik dizi uzayı l_p ile çakışır.

Parashar ve Choudhary (1994) bir M Orlicz fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki dizi uzaylarını tanımladılar.

$$l_M(p) = \left\{ x \in w : \sum_{k=1}^{n} \left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k} < \infty, \text{bazı } \rho > 0 \,\text{için} \right\}$$

$$w(M, p) = \left\{ x \in w : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(M\left(\frac{|x_k - l|}{\rho}\right)\right)^{p_k} = 0, \text{bazı } \rho \text{ ve } l > 0 \,\text{için} \right\}$$

$$w_0(M,p)=\left\{x\in w:\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k}=0,\text{ bazı }\rho>0\text{ için}\right\}$$

$$w_\infty(M,p)=\left\{x\in w:\sup_{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k}<\infty,\text{ bazı }\rho>0\text{ için}\right\}$$

Bu dizi uzayları iyi bilinen M Orlicz dizi uzayı l_M ve kuvvetli toplanabilen dizi uzayları $[C,1,p]$, $[C,1,p]_0$ ve $[C,1,p]_\infty$ u genelleştirir.

E. Savaş (2000b) Orlicz fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki dizi uzaylarını tanımladı.

Tanım 4.1.2: M bir Orlicz fonksiyonu ve $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun.

$$[V,M,p]=\left\{x=(x_k):\lim_{n}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k-l|}{\rho}\right)\right]^{p_k}=0\text{ bazı }l\text{ ve }\rho>0\text{ için}\right\}$$

$$[V,M,p]_0=\left\{x=(x_k):\lim_{n}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}=0\text{ bazı }\rho>0\text{ için}\right\}$$

$$[V,M,p]_\infty=\left\{x=(x_k):\sup_{n}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\infty\text{ bazı }\rho>0\text{ için}\right\}$$

dizi uzayları tanımlanır.

Bütün k lar için $p_k=1$ olduğunda $[V,M,p],[V,M,p]_0$ *ve* $[V,M,p]_\infty$ uzayları $[V,M]$, $[V,M]_0$ *ve* $[V,M]_\infty$ olarak tanımlanır. Eğer $x\in[V,M]$ ise x dizisine M Orlicz fonksiyonuna göre λ **- kuvvetli yakınsaktır** denir. Bütün k lar için eğer $p_k=1$, $M(x)=x$ ise bu takdirde $[V,M,p]=[V,\lambda]$, $[V,M,p]_0=[V,\lambda]_0$ ve $[V,M,p]_\infty=[V,\lambda]_\infty$ olur. Eğer $\lambda_n=n$ ise $[V,M,p]$, $[V,M,p]_0$ ve $[V,M,p]$ uzayları $w(M,p)$, $w_0(M,p)$ ve $w_\infty(M,p)$ uzaylarına indirgenir. Bu durum Parashar ve Choudhary (1994) tarafından çalışılmıştır.

2. Topolojik Özellikler

Bu kısımda $[V,M,p],[V,M,p]_0$ *ve* $[V,M,p]_\infty$ uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelenecektir.

Teorem 4.2.1: $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi ve herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için $[V,M,p],[V,M,p]_0$ *ve* $[V,M,p]_\infty$ kompleks sayılar kümesi üzerinde lineer uzaylardır.

İspat: Sadece $[V,M,p]_0$ için ispatlayalım. Çünkü diğerlerinin ispatları benzerdir. $x,y\in[V,M,p]_0$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ olsun. İspatı yapabilmek için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\alpha x_k+\beta y_k|}{\rho_3}\right)\right]^{p_k}=0$$

olacak şekilde bazı $\rho_3>0$ lar bulmamız gerekiyor. $x,y\in[V,M,p]_0$ olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}=0 \text{ ve } \lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}=0$$

olacak şekilde bazı pozitif ρ_1 ve ρ_2 vardır. $\rho_3=\max(2|\alpha|\rho_1,\ 2|\beta|\rho_2)$ olarak tanımlansın. M azalmayan ve konveks olduğundan $n\to\infty$ iken

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\alpha x_k+\beta y_k|}{\rho_3}\right)\right]^{p_k} &\le \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\alpha x_k|}{\rho_3}+\frac{|\beta y_k|}{\rho_3}\right)\right]^{p_k}\\
&\le \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\frac{1}{2^{p_k}}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)+M\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\\
&\le \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)+M\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\\
&\le K\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}+K\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\to 0
\end{aligned}$$

olur. Burada $K=\max(1,2^{H-1}),\ H=\sup p_k$ dir. Böylece $\alpha x+\beta y\in[V,M,p]_0$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2: $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için $[V,M,p]_0$,

$$g(x)=\inf\left\{\rho^{p_n/H}:\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H}\le 1\ ,\ n=1,2,3,...\right\}$$

ile bir total paranormlu uzaydır. Burada $H=\max(1,\sup p_k)$ dır.

İspat: $g(x)=g(-x)$ olduğu açıktır. Teorem (4.2.1) kullanılarak $\alpha=\beta=1$ için $g(x+y)\le g(x)+g(y)$ sonucuna ulaşırız. $M(0)=0$ olduğunda $x=0$ için $\inf\{\rho^{p_n/H}\}=0$ olur.

Diğer taraftan $g(x)=0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\inf\left\{\rho^{p_n/H}:\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H}\le 1\right\}=0$$

olur. Verilen $\varepsilon>0$ için

$$\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_\varepsilon}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H}\le 1$$

olacak şekilde bazı $\rho_\varepsilon\,(0<\rho_\varepsilon<\varepsilon)$ vardır. Böylece, her bir n için

$$\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\varepsilon}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H}\le\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_\varepsilon}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H}\le 1$$

dir.

Bazı $m\in I_n$ için $x_{n_m}\ne 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon\to 0$ olsun. Bu takdirde $\left(\frac{|x_{n_m}|}{\varepsilon}\right)\to\infty$ olur.

Bu

$$\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_{n_m}|}{\varepsilon}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H}\to\infty$$

olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. Böylece her bir m için $x_{n_m}=0$ dir. Son olarak skalerle çarpmanın sürekliliğini gösterelim. μ herhangi bir kompleks sayı olsun. Tanım gereği,

$$g(\mu x)=\inf\left\{\rho^{p_n/H}:\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\mu x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H}\le 1\ ,\ n=1,2,3,...\right\}$$

dir. Bu takdirde $s=\rho/|\mu|$ için

$$g(\mu x)=\inf\left\{(|\mu|s)^{p_n/H}:\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{s}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H}\le 1\ ,\ n=1,2,3,...\right\}$$

olur. $|\mu|^{p_n}\le\max(1,|\mu|^{\sup p_n})$ olduğundan $g(\mu x)\le(\max(1,|\mu|^{\sup p_n}))^{1/H}$ yazılır.

$$\times\inf\left\{s^{p_n/H}:\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{s}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H}\le 1\ ,\ n=1,2,3,...\right\}$$

$[V,M,p]_0$ da x sıfıra yakınsakken sıfıra yakınsaktır.

Şimdi $\mu_{n_m}\to 0$ ve x in $[V,M,p]_0$ da sabit olduğunun kabul edelim. Rasgele $\varepsilon>0$ için N

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<(\varepsilon/2)^H \quad \text{(bazı } \rho>0 \text{ ve bütün } n>N \text{ için)}$$

olacak şekilde bir pozitif tamsayı olsun. Bu

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\varepsilon/2 \quad \text{(bazı } \rho>0 \text{ ve bütün } n>N \text{ için)}$$

belirtir. $0<|\mu|<1$ olsun. $n>N$ için M nin konveksliğini kullanarak

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\mu x_k|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}<\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[|\mu|M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<(\varepsilon/2)^H$$

yazılır. M, $[0,\infty)$ içinde her yerde sürekli olduğundan $n>N$ için

$$f(t)=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|tx_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

o da süreklidir. Böylece $o<t<\delta$ için $|f(t)|<(\varepsilon/2)^H$ olacak şekilde $1>\delta>0$ vardır. $m>K$ için $|\mu_m|<\delta$ olacak şekilde K olsun. Bu takdirde $m>K$ ve $n\le N$ için

$$\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\mu_m x_k|}{\rho_\varepsilon}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq \varepsilon/2$$

olur. Böylece $m > K$ ve bütün n ler için

$$\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{\mu_m |x_k|}{\rho_\varepsilon}\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} \leq \varepsilon$$

dır. Böylece $g(\mu x) \to 0$ $(\mu \to 0)$ olur.

Tanım 4.2.1: Eğer $M(2u) \leq KM(u)$ $u \geq 0$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa M Orlicz fonksiyonuna bütün u değerleri için Δ_2 **- şartını sağlıyor** denir.

Daima K>2 olduğunu görmek kolaydır. Δ_2-şartı, bütün u değerleri ve $l > 1$ için $M(lu) \leq K(l)M(u)$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 4.2.3: Δ_2-şartını sağlayan herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için $[V,\lambda] \subseteq [V,M]$ olur.

İspat: $x \in [V,\lambda]$ olsun. Böylece

$$T_n = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k - l| \to 0 \ \ n \to \infty \text{ iken} \qquad \text{(bazı } l \text{ ler için)}$$

dir. $\varepsilon > 0$ olsun ve $0 \leq t \leq \delta$ için $M(t) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ olan δ seçilsin. $y_k = |x_k - l|$ yazalım ve

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} M(|y_k|) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

ifadesini göz önünde bulunduralım. Burada ilk toplam $y_k \leq \delta$ üzerinde ve ikinci toplam $y_k > \delta$ üzerindedir. M sürekli olduğundan

$$\sum\nolimits_1 < \lambda_n \varepsilon$$

ve $y_k > \delta$ için $y_k < y_k/\delta < 1 + y_k/\delta$ kullanılır. M azalmayan ve konveks olduğundan

$$M(y_k) < M(1+\delta^{-1}y_k) < \frac{1}{2}M(2) + \frac{1}{2}M(2\delta^{-1}y_k)$$

şeklinde olur. M, Δ_2-şartını sağladığından $M(2\delta^{-1}y_k) \leq \frac{1}{2}K\delta^{-1}y_k M(2)$ olacak şekilde bir K>2 sabiti vardır. Bu nedenle

$$M(y_k) < \frac{1}{2}K\delta^{-1}y_k M(2) + \frac{1}{2}K\delta^{-1}y_k M(2)$$
$$= K\delta^{-1}y_k M(2)$$

dir. Buradan

$$\sum\nolimits_2 M(y_k) \leq K\delta^{-1}M(2)\lambda_n T_n$$

$\sum_1 \leq \varepsilon\lambda_n$ ile beraber $[V,\lambda] \subseteq [V,M]$ sonucu çıkar bu da ispatı tamamlar.

Teorem (4.2.3) in ispatı Δ_2-şartını sağlayan herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için $[V,\lambda]_0 \subset [V,M]_0$ ve $[V,\lambda]_\infty \subset [V,M]_\infty$ yazılacağını gösterir.

Teorem 4.2.4: $0 \leq p_k \leq q_k$ ve (q_k/p_k) sınırlı olsun. Bu taktirde $[V,M,q] \subset [V,M,p]$ dir.

İspat: $x \in [V,\lambda,q]$ olsun. $t_k = \left(M\left(\frac{|x_k - l|}{\rho}\right)\right)^{q_k}$ ve $\lambda_k = p_k/q_k$ yazılır. $p_k \leq q_k$ olduğundan $0 < \lambda_k \leq 1$ dir.

$0 < \lambda < \lambda_k$ alalım. $u_k = t_k \ (t_k \geq 1) = 0 \ (t_k < 1)$ ve $v_k = 0 \ (t_k \geq 1)_1 = t_k(t_k < 1)$ tanımlanır. Bu yüzden $t_k = u_k + v_k$ ve $t_k^{\lambda_k} = u_k^{\lambda_k} + v_k^{\lambda_k}$ dır.

$$u_k^{\lambda_k} \leq u_k \leq t_k \quad \text{ve} \quad v_k^{\lambda_k} \leq v_k^{\lambda}$$

yazılır. Bundan dolayı

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k^{\lambda_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k + \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\right]^{\lambda}$$

olur ve buradan $x \in [V,M,p]$ dir.

Şimdi λ- istatistiksel yakınsaklık ve Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli yakınsaklık arasındaki bağıntıyı verelim. Mursaleen (2000) λ- istatistiksel yakınsaklık tanımını yaptı. Daha sonra λ- istatistiksel yakınsaklık Savaş (2000a) tarafından genelleştirildi. Şimdi $[V,M]$ ile S_λ arasındaki kapsama ilişkisini vereceğiz.

Teorem 4.2.5: Herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için $[V,M]\subset S_\lambda$ dır.

İspat: $x\in V[V,M]$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu takdirde,

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{k\in I_n} M\left(\frac{|x_k-\ell|}{\rho}\right)\geq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n,|x_k-l|\geq\varepsilon} M\left(\frac{x_k-\ell}{\rho}\right)$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_n}M(\varepsilon/\rho).\left|\{k\in I_n : |x_k-\ell|\geq\varepsilon\}\right|$$

buradan $x\in S_\lambda$ sonuçlanır.

S_λ nin kesinlikle [V,M] kapsadığını göstermek için Mursaleen (2000) de yaptığı gibi, $x=(x_k)$ dizisini, eğer $n-\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor+1\leq k\leq n$ ise $x_k=k$ ve diğer k lar için $x_k=0$ olarak tanımlayalım.

Bu taktirde $x\notin\ell_\infty$ ve her $\varepsilon(0<\varepsilon\leq 1)$ için

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k\in I_n : |x_k-0|\geq\varepsilon\}\right|=\frac{[\sqrt{\lambda_n}]}{\lambda_n}\to 0 \quad n\to\infty$$

yani $x_k\to 0(S_\lambda)$ dır. Burada [ ] en büyük tamsayı fonksiyonunu gösterir. Diğer yandan

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} M\left(\frac{|x_k-0|}{\rho}\right)\to\infty \quad (n\to\infty)$$

Yani $x_k\not\to 0$ [V,M] dir. Bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

Balcı, M., 1997, “Analiz-I”, Ankara.

Bayraktar, M., 2000, “Fonksiyonel Analiz”, Uludağ Üniversitesi.

Connor, J.S., 1989, “On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence”, Canad. Math. Bull., 32 , 194-198.

Fast, H., 1951, “Sur la convergence statistique”, Colloq. Math., 2 , 241-244.

Freedman, A. R., and Sember, J. J., 1981, “Densitis and summability”, Pacific J.
1 Math., 95, 293-305.

Fridy, J. A., 1985, “On statistical convergence”, Analysis 5, 301-313.

Fridy, J. A. and Orhan, C., 1993, “Lacunary statistical convergence”, Pacific. J. Math., 160, 43-51.

Gürdal, M., 2004, “ Bazı Yakınsaklık Tipleri”, Doktora Tezi, Isparta,

Hacısalihoğlu, H.H.,1998, “Lineer Cebir”, Gazi Üniversitesi Yayınları.

Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., 1971, “On orlicz sequence spaces”, Israel J. Math., 10(3), 345-355.

Lorentz, G. G.,1948, “A contribution to the theory of divergent sequences”, Acta. Math., 80, 167-190.

Kolk, E., 1991, “The statistical convergence in banach spaces”, Acta. Comm. Univ. Tartuensis, 928, 41-52.

Maddox, I. J., 1979, “On strong almost convergence”, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 85, 345-350.

Maddox, I. J., 1986, “Sequence spaces defined by a modulus”, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 100 , 161-166.

Maddox, I. J., 1987, “Inclusions between FK spaces and Kuttner’s theorem”,Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,101, 523-527.

Malkowsky, E. and Savaş, E., 2000, “Some λ-sequence spaces defıned by a modulus”, Arc. Math. (Brno), 36, 219-228.

Miller, H . I., 1995, “A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence”, Trans .Amer. Math. Soc., 347, 1811-1819.

Mursaleen, 2000, “λ-statistical convergence”, Math. Slovaca, 50(1), 111-115.

Nakano, H., 1953, “Concave Modulus”, J. Math. Soc. Japon., 5, 29- 49.

Nıven, I., Zuckerman, H.S. and Montgomery, H.L., 1991, “An introduction to the theory of numbers”, Fifth Edition John Wiley and Jons, Inc., 529.

Parashar, S.D. and Choudhary, B., 1994, “Sequence spaces defined by orlicz

Functions”, Indian J. Pure Appl. Math., 25(14), 419-428.

Pehlivan,S., 2001, “İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine Ders Notları”, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta .

Ruckle, W.H., 1973, “ FK Spaces in which the sequence of coordinate vector is bounded”, Canad. J. Math., 25, 973-978.

Šalát, T., 1980, “On statistically convergent sequence of real numbers”, Math. Slovaca, 30, 139-150.

Savaş, E., 1999, “On some generalized sequence spaces defıned by a modulus”, Indian Jornual of Pure and Appl. Math., 30 (5), 459-464.

Savaş, E., 2000a, “Strong almost convergence and almost λ-statistical convergence”, Hokkaido Math. J., 24(3), 531-536.

Savaş, E., 2000b, “Strongly almost convergent sequences defined by Qrlicz functions”, Comm. Appl. Anal. 4, 453-458.

Savaş, E. ve Savaş, R. 2004, “Some sequence spaces defıned by orlicz functions”, Arc. Math. (Brno), 40, 33- 40.

Schoenberg, I. J., 1959, “ The integrability of certain functions and related summability methods”, Amer. Math. Montly., 66, 361-375.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmanın her safhasında vaktini ve desteğini benden esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Fatih NURAY' a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca, tez çalışmalarım boyunca benden desteğini esirgemeyen sevgili eşim Cahit EKEN'e, kardeşim Ayşe KIRKBINAR'a ve canım aileme yardım ve destekleri için teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

Rabia EKEN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans

Eğitim

Lisans: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, 1998

Lise : Fatih Lisesi

İŞ

1998-Matematik Öğretmeni, Afyon Lisesi

2006- Matematik Öğretmeni, Urla Anadolu Lisesi

Kişisel Bilgiler

Doğum Yeri ve Yılı : Sandıklı, 01.05.1977

Cinsiyet : Bayan

Yabancı Dili : İngilizce