

MAKSİMUM METRİĞİ GEOMETRİSİNDE BAZI

ÖKLİD PROBLEMLERİNİN BENZERLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin ÇAPUTCU

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. NİLGÜN SÖNMEZ

Matematik Anabilim Dalı

OCAK 2011

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**MAKSİMUM METRİĞİ GEOMETRİSİNDE BAZI ÖKLİD
PROBLEMLERİNİN BENZERLERİ**

Hüseyin ÇAPUTCU

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2011

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ danışmanlığında,

Hüseyin ÇAPUTCU tarafından hazırlanan

MAKSİMUM METRİĞİ GEOMETRİSİNDE BAZI ÖKLİD

PROBLEMLERİNİN BENZERLERİ

başlıklı bu çalışma lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri

uyarınca

19/01/2011

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı, SOYADI

İmza

Başkan Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

Üye Yrd. Doç. Dr. Murat PEKER

Üye Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun

...../...../..... tarih ve

..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ONAY SAYFASI.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Maksimum Düzlem ve Uzaklık Fonksiyonu	4
2.2 Öklidyen Uzaklık İle Maksimum Uzaklık Arasındaki Fonksiyonel İlişki	5
2.3 Çember Kavramı	7
3 MAKSİMUM ÇEMBERİNDE KİRİŞ VE TEĞET KAVRAMI	8
3.1 Maksimum Çemberinin Kirişleri	8
3.1.1 Maksimum Kirişlerinin Uzunlukları	9
3.2 Maksimum Çemberlerinin Teğetleri	16
3.2.1 Maksimum Çemberlerinin Üzerindeki Bir Noktadan Geçen Teğetler.....	16
3.2.2 Köşesal ve Kenarsal Teğetlerin Çaplarla ve Kirişlerle İlişkilendirilmesi	20
3.2.3 Maksimum Çemberlerinin Dışındaki Noktalardan Çizilen Teğetler	23
3.3 İki Maksimum Çemberinin Teğet Olması	26
3.3.1 İçten Teğet Maksimum Çemberleri	28
3.3.2 Dıştan Teğet Maksimum Çemberleri	37
3.3.3 Bir Maksimum Çemberine Üzerindeki Bir Noktadan Çizilen Teğet Maksimum Çemberleri	53
3.3.4 Bir Maksimum Çemberine Üzerinde Olmayan Bir Noktadan Çizilen Teğet Maksimum Çemberleri	58
4 MAKSİMUM DAİRE DİLİMİNİN ALANI İLE MAKSİMUM YAY UZUNLUĞU ARASINDAKİ İLİŞKİ	76
KAYNAKLAR	102
ÖZGEÇMİŞ	viii

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MAKSİMUM METRİĞİ GEOMETRİSİNDE BAZI ÖKLİD PROBLEMLERİNİN BENZERLERİ

Hüseyin ÇAPUTCU

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, geometri ve maksimum düzlem modeli ile ilgili bilgiler verilmektedir. İkinci bölümde, bu modelle ilgili bazı tanım ve teoremler yer almaktadır. Üçüncü bölümde, maksimum çemberinde kiriş ve teğet kavramları üzerinde durulmaktadır. Dördüncü bölümde ise maksimum daire diliminin alanı ile maksimum yay uzunluğu arasındaki ilişki incelenmektedir.

2011, 102 sayfa

ANAHTAR KELİMELEER: Maksimum Çemberi, Teğet, Kiriş

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

THE EQUIVALENTS OF SOME PROBLEMS IN EUCLIDEAN GEOMETRY THE MAXIMUM METRIC

Hüseyin ÇAPUTCU

**Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nilgün SÖNMEZ**

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some information about the geometry and maximum plane model is given. In the second chapter, some definitions and theorems about this model are mentioned. In the third chapter, the concepts of chord and tangent on the maximum circle are focused on. In the fourth chapter, the relationship between the sector area and the arc length of a maximum circle is examined.

2011, 102 pages

KEY WORDS: Maximum Circles, Tangent, Chord

TEŐEKKÖRLER

Yüksek Lisans çalışmalarımın her aşamasında büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli hocam Sayın

Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ'e

saygı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hüseyin ÇAPUTCU
AFYONKARAHİSAR, 2011

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

R_M^2	Maksimum düzlemi
d_M	Maksimum uzaklık
d_E	Öklidyen uzaklık
$m_{X_1X_2}$	X_1X_2 Doğrusunun eğimi
r	Yarıçap
C	Düzlemde bir maksimum çemberi
l	Düzlemde bir doğru
B	Maksimum çemberininde bir bölge
$P = (x_0, y_0)$	x_0, y_0 noktalarından geçen bir nokta
$M = (m, n)$	m ve n noktalarından geçen çemberin merkezi
$\left \overset{\frown}{P_1P_2} \right _M$	P_1 ve P_2 noktalarından geçen maksimum yay uzunluğu
$A(OP_1P_2)$	OP_1P_2 maksimum daire diliminin alanı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	A ve B noktaları arası d_M uzaklığı
Şekil 2.2	Maksimum birim çember
Şekil 3.1	Bazı kirişler
Şekil 3.2	Bazı çaplar
Şekil 3.3	Aynı kenar üzerinde iki noktanın belirttiği kirişin uzunluğu
Şekil 3.4	$\alpha = m_{X_1X_2} < 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu
Şekil 3.5	$\alpha = m_{X_1X_2} = 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu
Şekil 3.6	$\alpha = m_{X_1X_2} > 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu
Şekil 3.7	$\alpha = m_{X_1X_2} > 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu
Şekil 3.8	$\alpha = m_{X_1X_2} = 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu
Şekil 3.9	$\alpha = m_{X_1X_2} < 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu
Şekil 3.10	$m_{X_1X_2} < 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu
Şekil 3.11	$m_{X_1X_2} > 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu
Şekil 3.12	Köşesal teğetler
Şekil 3.13	Kenarsal teğetler
Şekil 3.14	C-maksimum çemberi üzerindeki köşesal teğetler
Şekil 3.16	K noktasından geçen doğrular
Şekil 3.17	Esas köşesal teğet doğrusu
Şekil 3.19	Maksimum çemberinin dış bölgeleri
Şekil 3.20	SA_2 ve SA_4 köşesal teğetleri
Şekil 3.21	SA_2 köşesal , SA_1 kenarsal teğetleri
Şekil 3.22	SA_4 köşesal , SA_1 kenarsal teğetleri
Şekil 3.23	SA_1 ve SA_2 köşesal teğet doğruları
Şekil 3.24	SA_3 ve SA_4 köşesal teğet doğruları

1 GİRİŞ

Geometri, tarihi binlerce yıl öncesine dayanan matematiğin en eski branşlarından biri olmasına rağmen henüz kesin bir tanımı yapılamamıştır. Literatürde “cisimlerin büyüklük ve biçimlerini ölçen bilim dalı “olarak geçmesine rağmen bu tanım çoğu matematikçi ve geometrici tarafından kabul edilebilir olmaktan uzaktır. Geometrinin en benimsenen tanımı Alman matematikçi Felix Klein tarafından verildi. Klein geometriyi “S bir küme ve G ise S kümesini kendisine dönüştüren dönüşümlerden meydana gelen bir grup olmak üzere, S kümesinin G nin elemanları olan dönüşümler altında değişmez kalan özelliklerinin incelenmesi” olarak tanımlamıştır. Bu tanım açıkça geometriyi dönüşümler grubuyla birleştirmek zorunluluğunu ortaya çıkarmıştır. Dönüşümlerde genel olarak geometrik kavram olmayan noktaların koordinatları yardımıyla formüleleştirilebilir. Bu nedenle, Klein’in tanımı geometriyi bağımsız ve kendine özgü yöntemlerle incelenebilen bir dal olarak düşünmek fikrine aykırı görüldüğünden bazı geometriciler tarafından eleştirilmektedir. Böylece bu tanım genel bir geometri tanımı değil fakat bir kümenin geometrisinin tanımı olarak düşünülebileceği için geometri kavramına daha geniş bir açıdan bakılmasını mümkün kılmıştır [10].

Kaynaklar; geometrinin önce Eski Mısır’da başladığını, Eski Yunanlılar’ın geometriyi Eski Mısırdan öğrenmiş olduklarını göstermektedir. Eski Yunanlılar, geometriyi sistemli ispatlara dayanan müstakil bir bilim haline getirmişlerdir. Thales (M.Ö. 624-M.Ö. 546), Pythagoras (M.Ö. 570-M.Ö. 490), ve Euclides (Öklid, M.Ö. 325-M.Ö.265) bu dönemin en ünlü geometricileridir. Öklid’in M.Ö. 300 yılında yazdığı “Elements” adlı 13 ciltten oluşan kitap, geometrinin sistemli bir bilgi haline gelmesine öncülük etmiştir. Günümüzde orta öğrenim boyunca öğretilen geometri, Öklid’in ortaya koyduğu bu düzlem geometridir.

Öklid düzlem geometrisinde temel elemanlar noktalar ile doğrulardır. Nokta ve doğru, tanımlanamayan ilkel kavramlardır. Öklid geometrisi; tanımlar, aksiyomlar ve postulatlar olmak üzere üç temel kavrama dayandırılmıştır. Tanımlar, kendine özgü bir takım özellikleri olan geometrik nesnelere belirlemek yada diğerlerinden ayırmak için onlara verilen isimden ibarettir. Aksiyomlar ise doğruluğundan şüphelenilmeyen ispatsız olarak kabul edilen temel önermelerdir. Öklid’in aksiyomları şunlardır:

1. Aynı şeye eşit olan şeyler birbirlerine de eşittirler.
2. Eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse, eşitlik bozulmaz.
3. Eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkartılırsa, eşitlik bozulmaz.
4. Birbirine çakışan şeyler birbirine eşittir.
5. Bütün parçadan büyüktür.

Postulatlar ise aksiyomlar gibi ispatsız kabul edilen fakat doğruluklarına o zamanki anlayışa göre aksiyomlar kadar kesin gözle bakılmayan temel önermelerdir.

Öklid'in beş postulatı vardır. Bunların günümüz modern matematiğindeki karşılıkları şöyledir:

1. Bir noktadan diğer bir noktaya bir tek doğru çizilebilir.
2. Herhangi bir doğru parçası bir doğrultuda istenildiği kadar uzatılabilir.
3. Merkezi ve yarıçapı verilen bir tek çember vardır.
4. Bütün dik açılar eşittir.
5. Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebilir.

İlk dört postulat kısa ve kesindir. Beşinci postulat ise bazı matematikçiler tarafından çokça tartışılmış olup, Öklid geometrisinde bir boşluk olabileceği düşüncesine itmiştir [11].

Öklid'in elementlerindeki aksiyomlarda var olan bazı belirsizlikler ve eksiklikler, uzun yıllar boyunca bilinmesine karşın aynen kullanılmışlardır. Ancak Hilbert 1889 da çağının bilgileriyle Öklid düzlemin aksiyomlarını yeniden düzenlemiştir. Artık Öklid düzlemi için, tüm matematik dünyasınca "mükemmel" olarak değerlendirilen bu aksiyom sistemi (Hilbert Düzenlemesi) geçerlidir denilebilir. Ancak 20. yüzyılda çağdaş matematik bilgileri göz önüne alınarak daha kısa ve daha rafine bir aksiyom sistemi oluşturulmuştur. F.Krause'nin "Taxicab Geometry" adlı kitabından alınan ve son zamanlarda Öklid düzlem geometrisini işleyen birçok eserde kullanılan Birkhoff'un metrik aksiyomlarının bir modifikasyonu olan bir aksiyom sisteminde vardır.

Tarihsel olarak, paralellik aksiyomunu sağlamayan her geometri Öklid dışı bir geometri olarak bilinmektedir. Fakat Hilbert (veya eş anlamlı olarak Birkhoff) tarafından verilen aksiyomlardan "en az birini sağlamayan bir geometri Öklidyen olmayan bir geometridir" anlayışı yerleşmiş bulunmaktadır. Bunların bir kaçı aşağıdaki gibidir [12]:

Taksi Düzlemi

Klein Modeli

Maksimum Düzlem Modeli

Poincare Üst Yarı düzlem Modeli

Poincare disk Modeli

Bölüm 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde [1], [3]-[9] kaynakları esas alınarak maksimum düzlem ile ilgili bazı tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Maksimum Düzlem ve Uzaklık Fonksiyonu

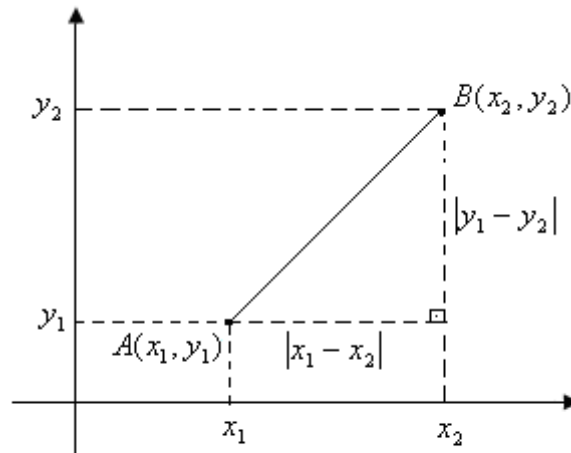
Maksimum düzlemi R_M^2 nin noktaları ve doğruları , Öklid düzlemi R^2 nin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açılar da aynı yolla ölçülür. Fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır. Analitik düzlemde alınan $A=(x_1, y_1)$ ve $B=(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık;

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken , maksimum uzaklık

$$d_M(A, B) = \max \{ |x_2 - x_1|, |y_2 - y_1| \}$$

ile tanımlıdır. Daha açık olarak , A ve B noktaları arasındaki d_M uzaklığı , A ve B noktalarından eksenlere paralel çizilen uzunluklarından maksimum olanının alınmasından ibarettir. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1 A ve B noktaları arası d_M uzaklığı

2.2. Öklidyen Uzaklık ile Maksimum Uzaklık Arasındaki Fonksiyonel İlişki

Teorem 2.2.1 : l , analitik düzlemde $A=(x_1, y_1)$ ve $B=(x_2, y_2)$ noktalarından geçen bir doğru olsun. l nin eğimi m ise

$$d_M(A, B) = \rho(m) \cdot d_E(A, B), \quad \rho(m) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+m^2}, & |m| < 1 \\ |m|/\sqrt{1+m^2}, & |m| \geq 1 \end{cases} \text{ ise}$$

dir.

İspat: Eğer l , x-eksenine paralel ise $m=0$ ve $\rho(m)=1$, y-eksenine paralel ise

$$|m| \rightarrow \infty \text{ ve } \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(m) = 1 \text{ olur. Bu durumda } d_M(A, B) = d_E(A, B)$$

dir. l doğrusu x ve y-eksenine paralel olmasın. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ olmak üzere A ve B den geçen doğru $ax+by+c=0$ olsun. O halde $A=(x_1, -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b})$ ve $B=(x_2, -\frac{a}{b}x_2 - \frac{c}{b})$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= \max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \} \\ &= \max \left\{ |x_1 - x_2|, \left| \left(-\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b} \right) - \left(-\frac{a}{b}x_2 - \frac{c}{b} \right) \right| \right\} \\ &= \max \left\{ |x_1 - x_2|, \left| -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b} + \frac{a}{b}x_2 + \frac{c}{b} \right| \right\} \\ &= \max \left\{ |x_1 - x_2|, \left| -\frac{a}{b}(x_1 - x_2) \right| \right\} \\ &= \max \left\{ |x_1 - x_2|, \left| -\frac{a}{b} \right| \cdot |x_1 - x_2| \right\} \\ &= |x_1 - x_2| \max \left\{ 1, \left| \frac{a}{b} \right| \right\} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$d_E(A, B) = |x_1 - x_2| \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

bulunur. O halde

$$\frac{d_M(A, B)}{d_E(A, B)} = \frac{|x_1 - x_2| \max \left\{ 1, \left| \frac{a}{b} \right| \right\}}{|x_1 - x_2| \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}} = \frac{\max \left\{ 1, \left| \frac{a}{b} \right| \right\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}$$

elde edilir. Buradan da ,

$$d_M(A, B) = \frac{\max\{1, \left|\frac{a}{b}\right|\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}} \cdot d_E(A, B)$$

bağıntısı bulunur. $m = -\frac{a}{b}$ olduğunu biliyoruz. O halde yukarıdaki bağıntıyı şöyle ifade edebiliriz;

$$d_M(A, B) = \frac{\max\{1, |m|\}}{\sqrt{1 + m^2}} \cdot d_E(A, B)$$

Bu bağıntıdan görüldüğü gibi , d_M - uzaklığı aynı doğru boyunca öklidyen uzaklıkta pozitif bir sabitin çarpımına eşittir. Bu sabiti ρ (m) ile gösterelim.

$$\rho(m) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+m^2} & , |m| < 1 \\ |m|/\sqrt{1+m^2} & , |m| \geq 1 \end{cases} \text{ ise}$$

olmak üzere $d_M(A, B) = \rho(m) \cdot d_E(A, B)$ elde edilir.

Teorem 2.2.2 : $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde iki nokta olsun.

$Q = (x, y)$ noktası P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru üzerinde bir nokta ise

$$\frac{d_M[P_1Q]}{d_M[QP_2]} = \frac{d_E[P_1Q]}{d_E[QP_2]}$$

dir.

İspat: P_1, P_2 noktalarından geçen doğru x veya y - eksenine paralel ise,

$d_M(P_1, P_2) = d_E(P_1, P_2)$, dolayısıyla oranlar eşittir. $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ ve

P_1, P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimi m olsun. Teorem 1.2.1 e göre

$$d_E[P_1Q] = d_E(P_1, Q) = |x_1 - x| \sqrt{1 + m^2} ,$$

$$d_E[QP_2] = d_E(Q, P_2) = |x - x_2| \sqrt{1 + m^2} ,$$

$$d_M[P_1Q] = d_M(P_1, Q) = |x_1 - x| \max\{1, |m|\} ,$$

$$d_M[QP_2] = d_M(Q, P_2) = |x - x_2| \max\{1, |m|\}$$

dir. Buradan

$$\frac{d_E[P_1Q]}{d_E[QP_2]} = \frac{|x_1 - x| \sqrt{1 + m^2}}{|x - x_2| \sqrt{1 + m^2}} = \frac{|x_1 - x|}{|x - x_2|}$$

olduğu açıktır. $|m| < 1$ ise $\max\{1, |m|\} = 1$ olduğundan $d_M[P_1Q] = |x_1 - x|$ ve $d_M[QP_2] = |x - x_2|$ olur. Bu durumda

$$\frac{d_M[P_1Q]}{d_M[QP_2]} = \frac{|x_1 - x|}{|x - x_2|}$$

elde edilir. Benzer şekilde $m \geq 1$ ise $\max\{1, |m|\} = |m|$ olduğundan

$$\frac{d_M[P_1Q]}{d_M[QP_2]} = \frac{|x_1 - x|}{|x - x_2|}$$

olur. Böylece her iki durumda da oranlar eşittir.

2.3 Çember Kavramı

Tanım 2.3.1. Düzlemde verilen bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine çember denir.

Düzlemde verilen $M = (m, n)$ noktasından (çemberin merkezi) r birim ($r \in \mathbb{R}, r > 0$ çemberin yarıçapı) uzakta bulunan değişken nokta $X = (x, y)$ olsun.

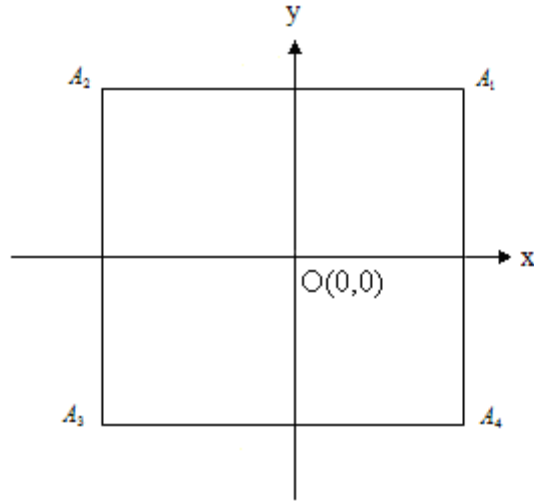
$\{X : |MX| = r\}$ noktalar kümesi bir çember belirtir ve bu çemberin denklemi

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.2. \mathbb{R}_M^2 de $\max\{|x|, |y|\} = 1$ denklemini sağlayan (x, y) noktalarının

kümesine M- birim çember (maksimum birim çember) denir. \mathbb{R}_M^2 nin birim çemberi, köşeleri $A_1 = (1, 1)$, $A_2 = (-1, 1)$, $A_3 = (-1, -1)$, $A_4 = (1, -1)$ noktaları olan karedir. (Şekil 2.2)



Şekil 2.2 Maksimum birim çember

Bölüm 3

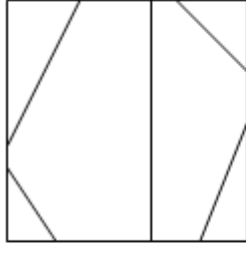
Bu bölümde maksimum çemberinin teğet ve kiriş kavramları Ekmekçi, S. [4] çalışması esas alınarak incelenmekte ve maksimum çemberlerle ilgili durumlar Öklid çemberleriyle ilgili durumlarla karşılaştırılarak verilmektedir.

Maksimum Çemberinde Kiriş ve Teğet Kavramı

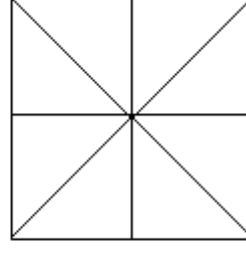
3.1 Maksimum Çemberinin Kirişleri

Kiriş: Maksimum çemberi üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasına, eğer bir kenar değilse, **kiriş** denir. (Şekil 3.1)

Çap: Maksimum çemberinin merkezinden geçen kirişe **çap** denir. (Şekil 3.2)



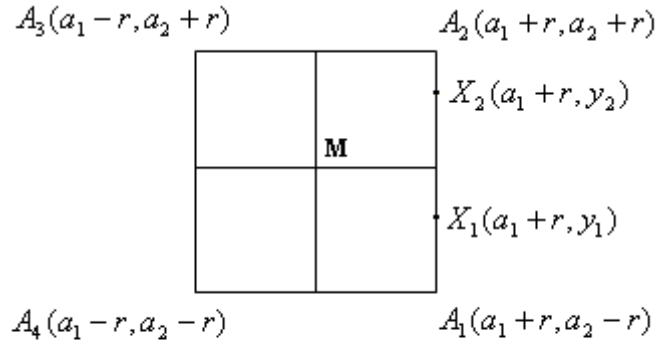
Şekil 3.1 Bazı kirişler



Şekil 3.2 Bazı çaplar

3.1.1 Maksimum Kirişlerinin Uzunlukları

(a) Aynı kenar üzerinde iki noktanın belirttiği kirişin uzunluğu



Şekil 3.3 Aynı kenar üzerinde iki noktanın belirttiği kirişin uzunluğu

$M = (a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı C maksimum çemberinin A_1A_2 kenarı üzerinde X_1 ve X_2 noktalarını alalım (Şekil 3.3)

$$A_1A_2 \dots x_1 = a_1 + r$$

olduğundan noktaların koordinatları $X_1 = (a_1 + r, y_1)$ ve $X_2 = (a_1 + r, y_2)$ olarak alabiliriz. A_1A_2 doğrusunun eğimi $m_{A_1A_2} = \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 d_M(X_1, X_2) &= \max\{|a_1 + r - a_1 - r|, |y_1 - y_2|\} \\
 &= \max\{0, |y_1 - y_2|\} \\
 &= |y_1 - y_2|
 \end{aligned}$$

bulunur. Genel olarak

$$X_1, X_2 \in \text{aynı kenar} \Rightarrow d_M(X_1, X_2) = y_2 - y_1$$

ve özel olarak $X_1 = A_1$ ve $X_2 = A_2$ alındığında kenar uzunluğu

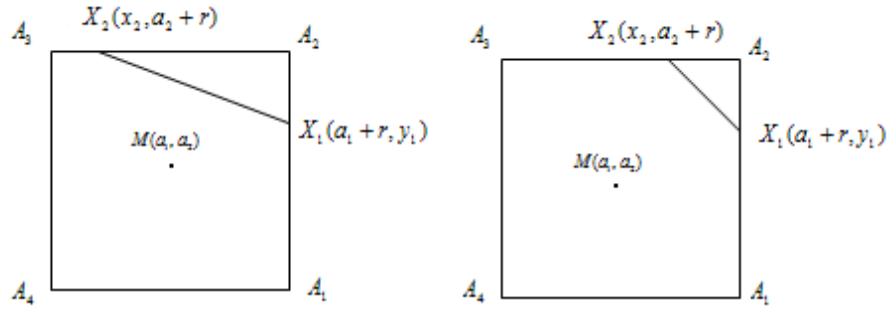
$$\begin{aligned} d_M(A_1, A_2) &= \max\{0, 2r\} \\ &= 2r \end{aligned}$$

olur.

C maksimum çemberinin A_1A_2 kenarı üzerindeki X_1 ve X_2 noktalarının belirttiği X_1X_2 kirişinin uzunluğu aslında X_1X_2 maksimum yayının uzunluğuna eşittir.

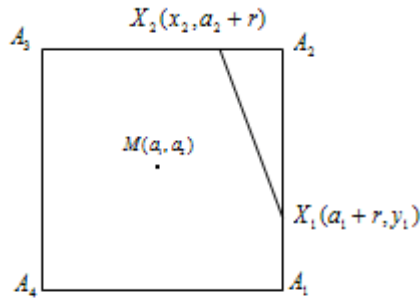
(b) Çemberin bitişik kenarları üzerinde alınan iki noktanın belirttiği kirişin uzunluğu

(i) Noktalardan birisi A_1A_2 üzerinde diğeri A_2A_3 üzerinde olsun



Şekil 3.4 $\alpha = m_{X_1X_2} < 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu

Şekil 3.5 $\alpha = m_{X_1X_2} = 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu



Şekil 3.6 $\alpha = m_{X_1X_2} > 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu

$M=(a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı maksimum çemberinin A_1A_2 kenarında X_1 noktasını A_2A_3 kenarında X_2 noktasını alalım.

$$A_1A_2 \dots x = a_1 + r$$

$$A_2A_3 \dots y = a_2 + r$$

olduğuna göre $X_1 = (a_1 + r, y_1)$ ve $X_2 = (x_2, a_2 + r)$ olarak alabiliriz. X_1X_2 doğrusunun eğimi $\alpha = m_{X_1X_2}$ olsun.

* $\alpha = m_{X_1X_2} < 1$ ise, (Şekil 3.4)

$$d_M(X_1, X_2) = \max\{|a_1 + r - x_2|, |y_1 - a_2 - r|\}$$

$$d_M(X_1, X_2) = |(a_1 + r) - x_2|$$

** $\alpha = m_{X_1X_2} = 1$ ise (Şekil 3.5)

$$d_M(X_1, X_2) = \max\{|a_1 + r - x_2|, |y_1 - a_2 - r|\}$$

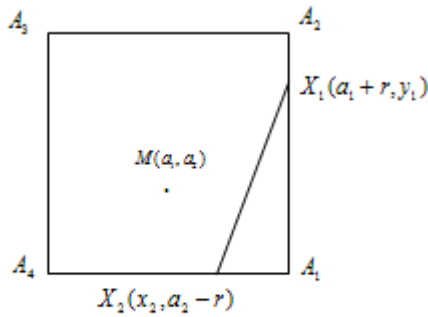
$$d_M(X_1, X_2) = |a_1 + r - x_2| = |y_1 - a_2 - r|$$

*** $\alpha = m_{X_1X_2} > 1$ ise (Şekil 3.6)

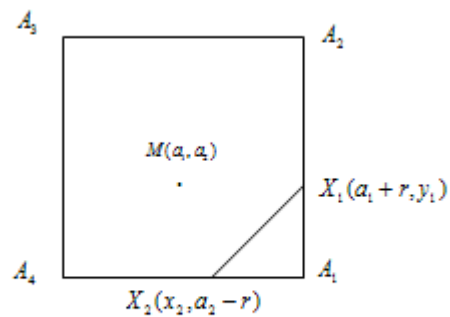
$$d_M(X_1, X_2) = \max\{|a_1 + r - x_2|, |y_1 - a_2 - r|\}$$

$$d_M(X_1, X_2) = |y_1 - a_2 - r|$$

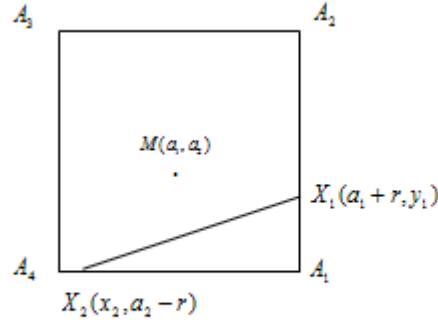
ii) Noktalardan birisi A_1A_2 üzerinde diğeri A_1A_4 olsun.



Şekil 3.7 $\alpha = m_{X_1X_2} > 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu



Şekil 3.8 $\alpha = m_{X_1X_2} = 1$ iken X_1X_2 kirişinin uzunluğu



Şekil 3.9 $\alpha = m_{X_1X_2} < 1$ iken X_1X_2 kirisinin uzunluğu

$M=(a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı maksimum çemberinin A_1A_2 kenarında X_1 noktasını A_1A_4 kenarında X_2 noktasını alalım.

$$A_1A_2 \dots x = a_1 + r$$

$$A_1A_4 \dots y = a_2 - r$$

olduğuna göre $X_1 = (a_1 + r, y_1)$ ve $X_2 = (x_2, a_2 - r)$ olarak alabiliriz. X_1X_2 doğrusunun eğimi $\alpha = m_{X_1X_2}$ olsun.

* $\alpha = m_{X_1X_2} > 1$ ise (Şekil 3.7)

$$d_M(X_1, X_2) = \max\{|a_1 + r - x_2|, |y_1 - a_2 + r|\}$$

$$d_M(X_1, X_2) = |y_1 - a_2 + r|$$

** $\alpha = m_{X_1X_2} = 1$ ise (Şekil 3.8)

$$d_M(X_1, X_2) = \max\{|a_1 + r - x_2|, |y_1 - a_2 + r|\}$$

$$d_M(X_1, X_2) = |a_1 + r - x_2| = |y_1 - a_2 + r|$$

*** $\alpha = m_{X_1X_2} < 1$ ise (Şekil 3.9)

$$d_M(X_1, X_2) = \max\{|a_1 + r - x_2|, |y_1 - a_2 + r|\}$$

$$d_M(X_1, X_2) = |a_1 + r - x_2|$$

Özel olarak (i).den $X_2 = A_3$ alındığında ($\alpha = m_{X_1X_2} < 1$ iken)

$$d_M(X_1, A_3) = \max\{|a_1 + r - a_1 + r|, |y_1 - a_2 - r|\}$$

$$d_M(X_1, A_3) = 2r$$

$X_1 = A_1$ alındığında ($\alpha = m_{X_1X_2} = 1$ iken)

$$d_M(A_1, X_2) = \max\{|a_1 + r - x_2|, |a_2 - r - a_2 - r|\}$$

$$d_M(A_1, X_2) = 2r$$

$X_2 = A_3$ alındığında ($\alpha = m_{X_1, X_2} > 1$ iken)

$$d_M(X_1, A_3) = \max\{|a_1 + r - a_1 + r|, |y_1 - a_2 - r|\}$$

$$d_M(X_1, A_3) = 2r$$

Özel olarak yine (ii) den eğimlere göre durumları incelersek,

$X_1 = A_2$ alındığında ($\alpha = m_{X_1, X_2} > 1$ iken)

$$d_M(A_2, X_2) = \max\{|a_1 + r - x_2|, |a_2 + r - a_2 + r|\}$$

$$d_M(A_2, X_2) = 2r$$

$X_2 = A_4$ alındığında ($\alpha = m_{X_1, X_2} = 1$ iken)

$$d_M(X_1, A_4) = \max\{|a_1 + r - a_1 + r|, |y_1 - a_2 + r|\}$$

$$d_M(X_1, A_4) = 2r$$

$X_1 = A_2$ alındığında ($\alpha = m_{X_1, X_2} < 1$ iken)

$$d_M(A_2, X_2) = \max\{|a_1 + r - x_2|, |a_2 + r - a_2 + r|\}$$

$$d_M(A_2, X_2) = 2r$$

Sonuç 3.1.1.1: (i) den

$$d_M(X_1, X_2) = \begin{cases} |a_1 + r - x_2| & , m_{X_1, X_2} < 1 \\ |a_1 + r - x_2| = |y_1 - a_2 - r| & , m_{X_1, X_2} = 1 \\ |y_1 - a_2 - r| & , m_{X_1, X_2} > 1 \end{cases}$$

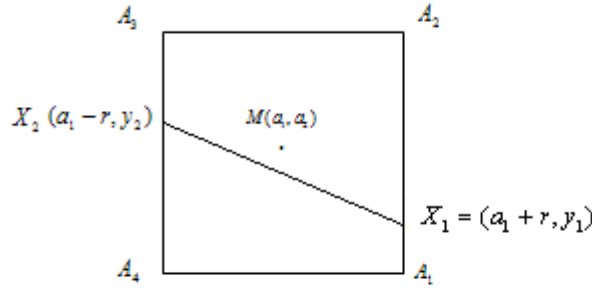
Sonuç 3.1.1.2: (ii) den

$$d_M(X_1, X_2) = \begin{cases} |a_1 + r - x_2| & , m_{X_1, X_2} < 1 \\ |a_1 + r - x_2| = |y_1 - a_2 + r| & , m_{X_1, X_2} = 1 \\ |y_1 - a_2 + r| & , m_{X_1, X_2} > 1 \end{cases}$$

Sonuç 3.1.1.3 : r yarıçaplı bir maksimum çemberinin herhangi bir köşesini, bu köşenin karşısındaki kenarlardan herhangi biri üzerindeki bir noktaya birleştiren kirişin maksimum uzunluğu 2r dir.

(c) Karşılıklı kenarlar üzerinde alınan farklı iki noktanın belirttiği kirişin uzunluğu

(i) Noktalardan biri A_1A_2 üzerinde diğeri A_3A_4 üzerinde olsun (Şekil 3.10).



Şekil 3.10 $m_{x_1, x_2} < 1$ iken X_1, X_2 kirişinin uzunluğu

$M = (a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı maksimum çemberinin A_1A_2 kenarında X_1 noktasını A_3A_4 kenarında X_2 noktasını alalım.

$$A_1A_2 \dots \dots x = a_1 + r$$

$$A_3A_4 \dots \dots x = a_1 - r$$

olduğuna göre $X_1 = (a_1 + r, y_1)$ ve $X_2 = (a_1 - r, y_2)$ olarak alabiliriz. X_1X_2 doğrusunun eğimi $\alpha = m_{X_1, X_2}$ olsun.

$m_{x_1, x_2} < 1$ olduğundan (Şekil 3.10) den

$$d_M(X_1, X_2) = \max\{|a_1 + r - a_1 + r|, |y_1 - y_2|\}$$

$$d_M(X_1, X_2) = 2r$$

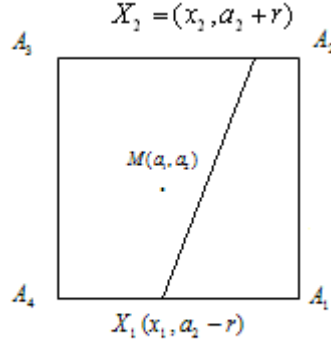
Özel olarak $X_1 = A_1$ alındığında

$$d_M(A_1, X_2) = \max\{|a_1 + r - a_1 + r|, |a_2 - r - y_2|\}$$

$$d_M(A_1, X_2) = 2r$$

bulunur. O halde A_1 köşe noktasını A_3A_4 kenarı üzerindeki her noktaya birleştiren kirişlerin uzunlukları $2r$ dir.

ii) Noktalardan biri A_1A_4 üzerinde diğeri A_2A_3 üzerinde olsun.



Şekil 3.11 $m_{x_1x_2} > 1$ iken X_1X_2 girişinin uzunluğu

$M=(a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı maksimum çemberinin A_1A_4 kenarında X_1 noktasını A_2A_3 kenarında X_2 noktasını alalım.

$$A_1A_4 \dots y = a_2 - r$$

$$A_2A_3 \dots y = a_2 + r$$

olduğuna göre $X_1 = (x_1, a_2 - r)$ ve $X_2 = (x_2, a_2 + r)$ olarak alabiliriz. X_1X_2 doğrusunun eğimi $\alpha = m_{x_1x_2}$ olsun.

$m_{x_1x_2} > 1$ olduğundan (Şekil 3.11) den

$$d_M(X_1, X_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |a_2 - r - a_2 - r|\}$$

$$d_M(X_1, X_2) = 2r$$

Özel olarak $X_2 = A_2$ alındığında

$$d_M(X_1, A_2) = \max\{|x_1 - a_1 - r|, |a_2 - r - a_2 - r|\}$$

$$d_M(X_1, A_2) = 2r$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.1.4 : r yarıçaplı bir maksimum çemberinde farklı iki nokta karşılıklı (paralel) iki kenar üzerinde ise bu noktaları birleştiren girişin maksimum uzunluğu $2r$ dir.

Büyük Giriş : Bir maksimum çemberinde uzunluğu çapın uzunluğuna eşit olan girişleri büyük giriş olarak tanımlanır.

Sonuç 3.1.1.5 : Bir maksimum çemberinde farklı iki noktanın şu durumlarında büyük kirişler elde edilir.

- (i) Noktalardan birisi çemberin köşe noktasıdır.
- (ii) Noktalardan ikisi de çemberin köşe noktasıdır.
- (iii) Noktalar çemberin karşılıklı iki (paralel) kenarı üzerindedir.

3.2 Maksimum Çemberinin Teğetleri

Tanım 3.2.1 : Düzlemde bir C maksimum çember ile bir d doğrusu verilsin.

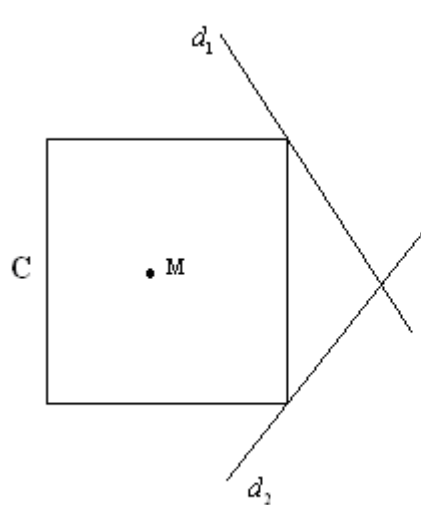
“ d, C ye köşesel teğettir $\Leftrightarrow d \cap C = \{A\} \ni A, C$ nin bir köşesidir”.

biçiminde tanımlayalım. Yani doğru ile maksimum çemberi, çemberin bir tek köşe noktasında kesişiyorsa doğru maksimum çembere köşesel teğettir, denir (Şekil 3.12).

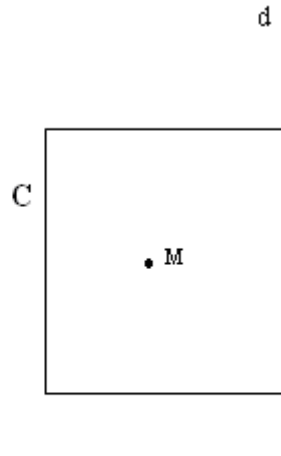
Tanım 3.2.2: Maksimum düzlemde bir C maksimum çemberi ile bir d doğrusu verilsin.

“ d, C ye kenarsal teğettir $\Leftrightarrow d \cap C = a : a, C$ nin bir kenarıdır”.

biçiminde tanımlayalım. Yani doğru ile maksimum çemberi, çemberin bir tek kenarı boyunca kesişiyorsa doğru maksimum çembere kenarsal teğettir, denir (Şekil 3.13).



Şekil 3.12 Köşesel teğetler



Şekil 3.13 Kenarsal teğetler

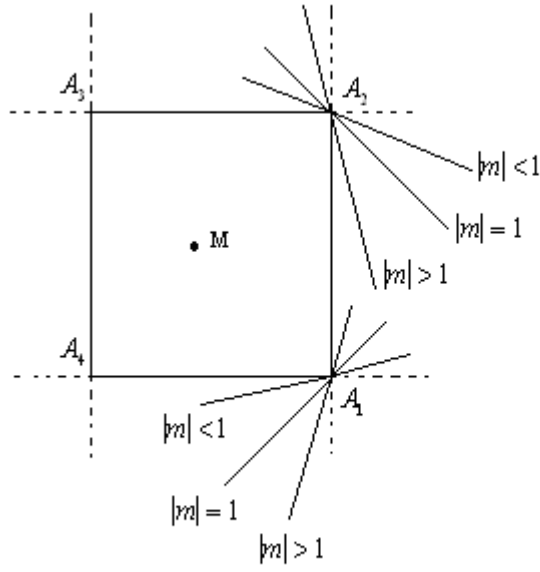
3.2.1 Maksimum Çemberinin Üzerindeki Bir Noktadan Geçen Teğetler

Öncelikle çemberin bir köşe noktasından çizilen köşesel teğetlere bakalım. $M=(a_1, a_2)$

merkezli, r yarıçaplı C -maksimum çemberinden söz ederken daima

$$A_1 = (a_1 + r, a_2 - r), A_2 = (a_1 + r, a_2 + r), A_3 = (a_1 - r, a_2 + r), A_4 = (a_1 - r, a_2 - r)$$

olarak alınır ve aşağıdaki biçimde gösterilir.



Şekil 3.14 C-maksimum çemberi üzerindeki köşesel teğetler

A_1 noktasından geçen köşesel teğet doğruları

$$\{(x,y): y = mx - m(a_1 + r) + a_2 - r, |m| > 1, m \in R\}$$

biçimindeki **dikeysel** doğrulardır.

$$\{(x,y): y = mx - m(a_1 + r) + a_2 - r, |m| = 1, m \in R\}$$

biçimindeki **ayırık** doğrulardır.

$$\{(x,y): y = mx - m(a_1 + r) + a_2 - r, |m| < 1, m \in R\}$$

biçimindeki **yataysal** doğrulardır.

A_2 noktasından geçen köşesel teğet doğruları

$$\{(x,y): y = mx - m(a_1 + r) + a_2 + r, |m| > 1, m \in R\}$$

biçimindeki doğrular **dikeysel** doğrulardır.

$$\{(x,y): y = mx - m(a_1 + r) + a_2 + r, |m| = 1, m \in R\}$$

biçimindeki **ayırık** doğrulardır.

$$\{(x,y): y = mx - m(a_1 + r) + a_2 + r, |m| < 1, m \in R\}$$

biçimindeki **yataysal** doğrulardır.

A_3 noktasından geçen köşesel teğet doğruları

$$\{(x,y): y = mx -m(a_1 - r) + a_2 + r, |m| > 1, m \in R\}$$

biçimindeki **dikeysel** doğrulardır.

$$\{(x,y): y = mx -m(a_1 - r) + a_2 + r, |m| = 1, m \in R\}$$

biçimindeki **ayıraç** doğrulardır.

$$\{(x,y): y = mx -m(a_1 - r) + a_2 + r, |m| < 1, m \in R\}$$

biçimindeki **yataysal** doğrulardır.

A_4 noktasından geçen köşesel teğet doğruları

$$\{(x,y): y = mx -m(a_1 - r) + a_2 - r, |m| > 1, m \in R\}$$

biçimindeki **dikeysel** doğrulardır.

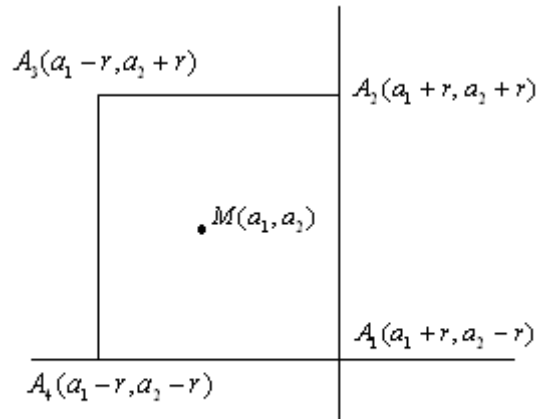
$$\{(x,y): y = mx -m(a_1 - r) + a_2 - r, |m| = 1, m \in R\}$$

biçimindeki **ayıraç** doğrulardır.

$$\{(x,y): y = mx -m(a_1 - r) + a_2 - r, |m| < 1, m \in R\}$$

biçimindeki **yataysal** doğrulardır.

Böylece çemberin köşe noktalarından her birinden sonsuz sayıda köşesel teğet doğrusu geçer. Şimdi köşe noktalarından geçen kenarsal teğetleri inceleyelim.



Şekil 3.15

A_1 noktasından geçen iki kenarsal teğet vardır ve sırasıyla

$$x = a_1 + r$$

$$y = a_2 - r$$

şeklindedir (Şekil 3.15). Benzer şekilde A_2 noktasından geçen iki kenarsal teğet vardır ve sırasıyla bunlar

$$x = a_1 + r$$

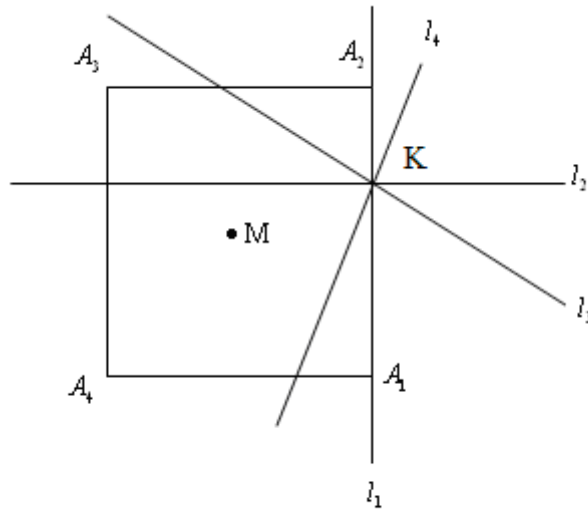
$$y = a_2 + r$$

biçimindedir. Yani bir maksimum çemberinin her köşe noktasından iki kenarsal teğet geçer. Böylece, bir maksimum çemberinin köşe noktalarından sonsuz sayıda teğet geçer ve bunlardan yalnız ikisi kenarsal, diğerleri köşesel teğetlerdir.

Şimdi maksimum çemberinin köşe olmayan noktalarından geçen teğetlerine bakalım.

Buna göre kabul edelim ki $K \neq A_i, i=1,2,3,4$ ve KoC olsun. Ayrıca K noktasını

C-maksimum çemberinin A_1A_2 kenarı üzerinde alalım (Şekil 3.16).



Şekil 3.16 K noktasından geçen doğrular

Buna göre l_1, l_2, l_3, l_4 doğruları sırasıyla K dan geçen

l_1 ; ∞ eğimli doğru ,

l_2 ; 0 eğimli doğru ,

l_3 ; herhangi bir yataysal doğru ,

l_4 ; herhangi bir dikeysel doğru

olsun. l_1 doğrusu C yi A_1A_2 kenarı boyunca keser. Buna göre l_1 , K dan geçen C ye kenarsal teğet olan bir doğrudur. l_2, l_3, l_4 doğruları, Şekil 3.16 dan görüldüğü gibi, C yi K dan başka bir noktada daha kestikleri için teğet doğruları olmazlar. Buna göre C nin A_1A_2 kenarı üzerindeki K noktasından C ye teğet olan bir tek kenarsal teğet vardır. Nokta çemberin diğer kenarları üzerinde iken benzer şekilde bir tek kenarsal teğet elde edilir.

Sonuç 3.2.1 : K maksimum çemberi üzerinde alınan herhangi bir nokta olsun.

(1) Eğer K köşe noktası ise bu noktadan çembere ikisi kenarsal diğerleri köşesel olan sonsuz sayıda teğet çizilebilir.

(2) Eğer K köşe noktalarından farklı bir nokta ise bu noktadan çembere bir tek kenarsal teğet çizilebilir.

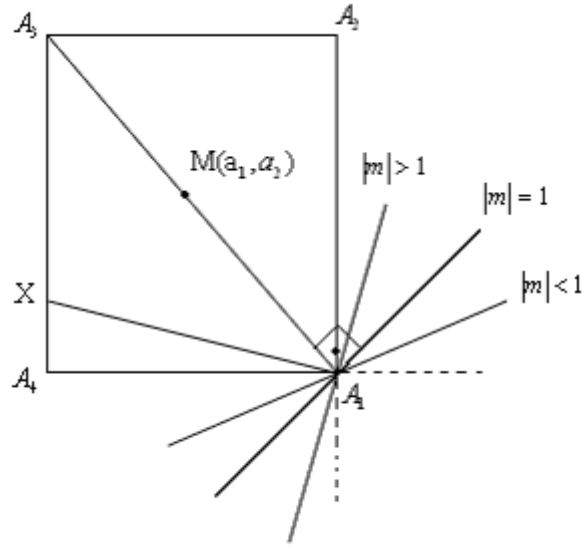
3.2.2 Köşesel ve Kenarsal Teğetlerin Çaplarla ve Kirişlerle İlişkilendirilmesi

Öklid düzleminde bir çembere üzerindeki bir noktadan bir tek teğet çizilebildiği halde, Maksimum düzleminde, çembere üzerindeki bir noktadan en az bir teğet çizilebilmektedir. Şimdi bu teğetlerin çaplarla ve kirişlerle aralarında nasıl bir ilişki olduğunu inceleyelim.

Esas Köşesel Teğet : Bir maksimum çemberin çapına dik olan köşesel teğetini esas köşesel teğet olarak tanımlayalım.

Bu tanıma göre $M=(a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı bir maksimum çemberinin

$A_1 = (a_1 + r, a_2 - r)$ noktasından geçen esas köşesel teğetini belirleyelim.



Şekil 3.17 Esas köşesel teğet doğrusu

$A_1 = (a_1 + r, a_2 - r)$ noktasından geçen teğetler

$$\{(x,y): y = mx - m(a_1 + r) + a_2 - r, |m| = 1, m \in R\}$$

$|m| > 1$ iken A_1 den geçen köşesel teğetler, $|m| = 0, \infty$ iken kenarsal teğetler elde edilir.

Yine $|m| \leq 1$ iken A_1 den geçen köşesel teğet elde edilir. Esas köşesel teğet ise yukarıdaki teğetlerden, A_1 den geçen çapa dik olanıdır. Buna göre $|m| = 1$ için duruma bakacak olursak

$$y - (a_2 - r) = m(x - (a_1 + r))$$

$$y - (a_2 - r) = 1 \cdot (x - a_1 - r)$$

$$y = x - a_1 + a_2 - 2r$$

doğrusu esas köşesel teğet doğrusudur.

A_1 noktasının diğer köşesel teğetleri içinde esas köşesel teğet olup olmadığına bakalım.

$|m| = 1$ ise $\frac{-1}{m} = -1$ dir.

O halde,

$$y - (a_2 - r) = \frac{-1}{m} (x - (a_1 + r))$$

$$y - (a_2 - r) = -1 \cdot (x - a_1 - r)$$

$$y = -x + a_1 + a_2$$

doğrusu teğete dik olan kiriştir. $M=(a_1, a_2)$ noktası için

$y = -x + a_1 + a_2$ doğrusunda $x = a_1$ için

$$y = -x + a_1 + a_2$$

$$a_2 = -a_1 + a_1 + a_2$$

$$a_2 = a_2$$

olduğundan merkez, kiriş üzerinde ve kiriş de çaptır.

Buna göre $m=1$ iken A_1 noktasının köşesel teğetlerine dik olan büyük kirişler vardır.

$|m| > 1$ için $y = mx - m(a_1 + r) + a_2 - r$ teğetine dik olan kiriş

$$y - (a_2 - r) = \frac{-1}{m} (x - (a_1 + r))$$

$$y = \frac{-1}{m} x + \frac{(a_1 + r) + m(a_2 - r)}{m}$$

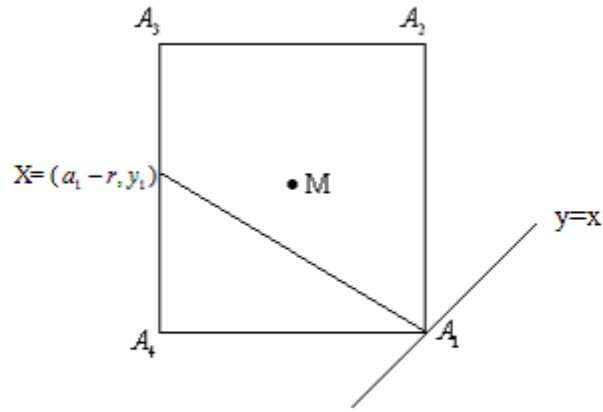
dir. $M=(a_1, a_2)$ noktası için

$$\frac{-1}{m} x + \frac{(a_1 + r) + m(a_2 - r)}{m} = a_2$$

$$\frac{-1}{m} a_1 + \frac{(a_1 + r) + m(a_2 - r)}{m} = a_2$$

$$\frac{r + m(a_2 - r)}{m} \neq a_2$$

olduğundan merkez, kiriş üzerinde değil ve kiriş de çap değildir. Ancak köşesel teğete dik olan bu kiriş büyük kiriştir fakat esas köşesel teğet değildir. $X = (a_1 - r, y_1)$ olmak üzere



Şekil 3.18

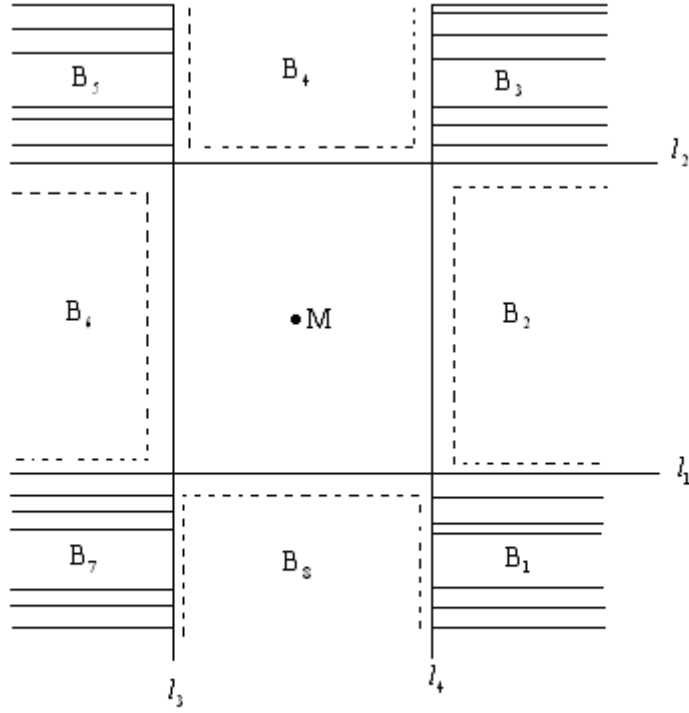
$$\begin{aligned}
 d_M(X, A_1) &= \max\{d_M(X, A_4), d_M(A_1, A_4)\} \\
 &= d_M(A_1, A_4) \\
 &= 2r
 \end{aligned}$$

dir. Buna göre $|m| > 1$ iken A_1 in köşesel teğetlerine dik olan büyük kirişler vardır. Benzer şekilde $|m| < 1$ iken incelendiğinde yine köşesel teğetlere dik olan büyük kirişler bulunur. Böylece A_1 köşe noktasından $m=1$ iken geçen köşesel teğetlerin yalnız bir tanesi çapa diktir ve bu teğet A_1 den geçen $y = x - a_1 + a_2 - 2r$ doğrusudur. Benzer şekilde A_2 noktasından geçen köşesel teğetlerin içinde $y = x - a_1 + a_2$ doğrusu çapa diktir. A_3 den geçen esas köşesel teğet doğrusu $y = x - a_1 + a_2 + 2r$ ve A_4 den geçen esas köşesel teğet doğrusu $y = x - a_1 + a_2$ doğrularındır. O halde çember üzerindeki noktalardan geçen köşesel teğetlerden birisi esas köşesel teğettir.

Sonuç 3.2.2 : Maksimum çemberinin her bir köşe noktasından geçen köşesel teğetlerin içinde bir tanesi (esas köşesel teğet) çapa; diğerlerinin her biri büyük kirişe diktir.

3.2.3. Maksimum Çemberinin Dışındaki Noktalardan Çizilen Teğetler

Bir $M=(a_1, a_2)$ merkezli r yarıçaplı maksimum çemberinin dışını aşağıdaki şekilde bölgelere ayıralım:



Şekil 3.19 Maksimum çemberinin dış bölgeleri

$$B_1 = \{(x,y) : y \leq a_2 - r \text{ ve } x \geq a_1 + r \}$$

$$B_2 = \{(x,y) : y > a_2 - r \text{ ve } y < a_2 + r \text{ ve } x > a_1 + r \}$$

$$B_3 = \{(x,y) : y \geq a_2 + r \text{ ve } x \geq a_1 + r \}$$

$$B_4 = \{(x,y) : y > a_2 + r \text{ ve } x > a_1 - r \text{ ve } x < a_1 + r \}$$

$$B_5 = \{(x,y) : x \leq a_1 - r \text{ ve } y \geq a_2 + r \}$$

$$B_6 = \{(x,y) : y < a_2 + r \text{ ve } y > a_2 - r \text{ ve } x < a_1 - r \}$$

$$B_7 = \{(x,y) : y \leq a_2 - r \text{ ve } x \leq a_1 - r \}$$

$$B_8 = \{(x,y) : y < a_2 - r \text{ ve } x > a_1 - r \text{ ve } x < a_1 + r \}$$

S noktası çemberin dışında bir nokta olsun.

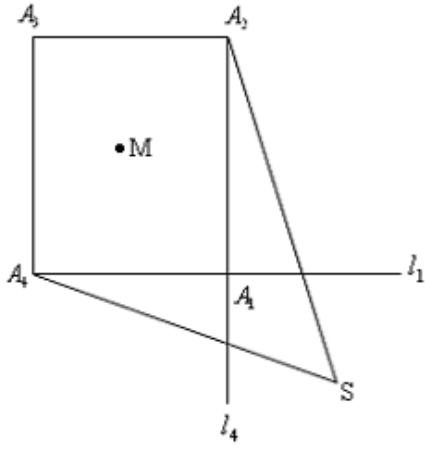
(1) $S \in B_1$ olsun. Bu durumda

$S \notin l_1$ ve $S \notin l_4 \rightarrow SA_2$ ve SA_4 köşesal teğetleri (Şekil 3.20)

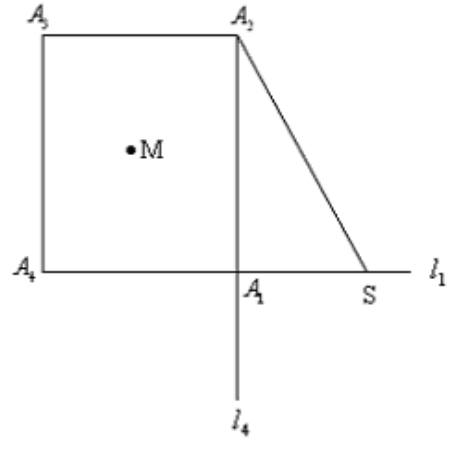
$S \in l_1 \rightarrow SA_2$ köşesal, SA_1 kenarsal teğetleri (Şekil 3.21)

$S \in l_4 \rightarrow SA_4$ köşesal, SA_1 kenarsal teğetleri (Şekil 3.22)

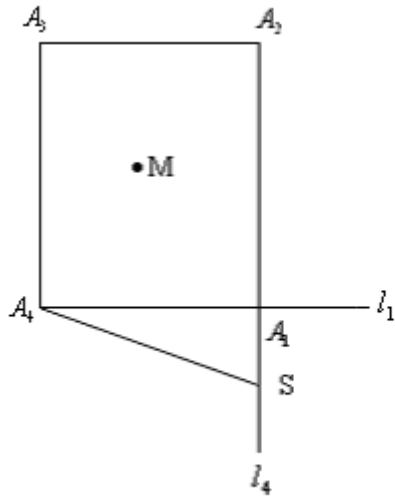
vardır.



Şekil 3.20 SA_2 ve SA_4 köşesel teğetleri

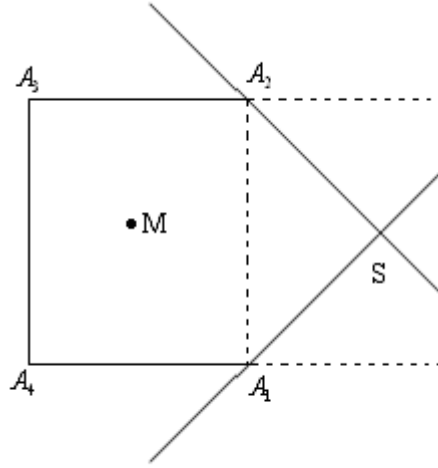


Şekil 3.21 SA_2 köşesel, SA_1 kenarsal teğetleri



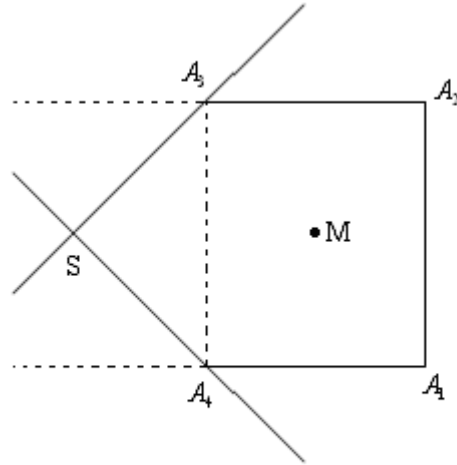
Şekil 3.22 SA_4 köşesel, SA_1 kenarsal teğetleri

(2) $S \in B_2$ olsun. Bu durumda SA_1 ve SA_2 doğruları köşesel teğet doğrularıdır.



Şekil 3.23 SA_1 ve SA_2 köşesel teğet doğruları

(3) $S \in B_6$ olsun. Bu durumda SA_3 ve SA_4 doğruları köşesel teğet doğrularıdır. S nin diğer bölgelerde olması benzer durumları gerektirir.



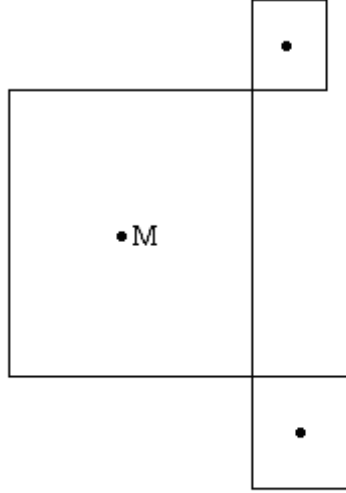
Şekil 3.24 SA_3 ve SA_4 köşesel teğet doğruları

Sonuç 3.2.3 : Bir maksimum çemberine dışındaki bir noktadan iki teğet doğru çizilebilir; Bunların ya ikisi de köşesel teğet yada biri köşesel biri kenarsal teğettir.

3.3 İki Maksimum Çemberinin Teğet Olması

Tanım 3.3.1 : Maksimum düzleminde C_1 ve C_2 maksimum çemberleri verilsin.

“ C_1 ve C_2 köşesel teğettir $\Leftrightarrow C_1 \cap C_2 = \{P\} \ni P$ hem C_1 in hem de C_2 nin köşe noktası” olarak tanımlansın. Yani iki maksimum çemberi bir tek köşe noktasında kesişirse bu iki çember köşesel teğettir, denir.

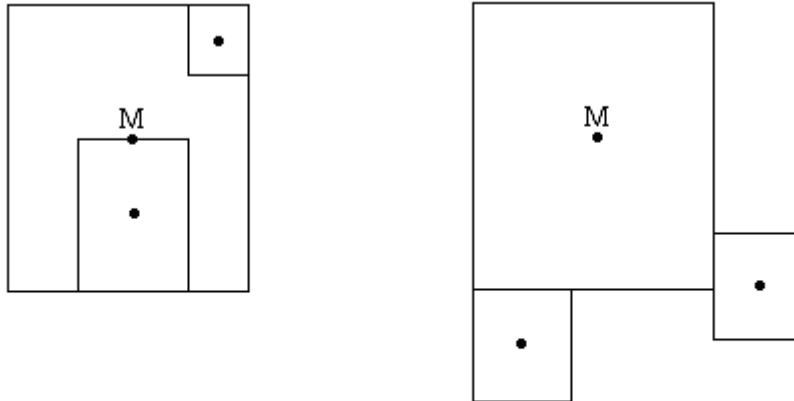


Köşesel teğet çem berler

Şekil 3.25

Tanım 3.3.2 : Maksimum düzleminde C_1 ve C_2 maksimum çemberleri verilsin.

“ C_1 ve C_2 kenarsal teğettir $\Leftrightarrow C_1 \cap C_2 = \{d: d \text{ hem } C_1 \text{ in hem de } C_2 \text{ nin üzerinde kenar parçası } \}$ ” olarak tanımlansın. Yani iki maksimum çemberi bir doğru boyunca kesişirse bu iki çembere kenarsal teğettir denir.



Kenarsal teğet çem berler

Şekil 3.26

3.3.1 İçten Teğet Maksimum Çemberleri

Öklid düzleminde O merkezli, r yarıçaplı Öklid çemberi ile O' merkezli, r' yarıçaplı Öklid çemberinin birbirine göre konumunda eğer $|OO'| = r - r'$ ise bu iki çembere iç-teğet çemberler denir. Maksimum düzleminde ise bu özellik korunmuyor. Bunu sağladığını göstermek için $M=(a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 maksimum çemberi ile $M'=(a'_1, a'_2)$ merkezli, r' yarıçaplı C_2 maksimum çemberinin kenarsal teğet olduğunu ve M' noktasının C_1 çemberinin içinde kaldığını kabul edelim. O halde C_2 , C_1 e ya bir kenar parçası boyunca ya da iki kenar parçası boyunca teğettir.

(1) C_2 , C_1 e $y = a_2 + r$ kenarında teğet olsun (Şekil 3.27).

Bu durumda $a_1 < a'_1$ ve $a_2 < a'_2$ olsun. Diğer taraftan,

$A'_2 = (a'_1 + r', a'_2 + r')$, $A'_3 = (a'_1 - r', a'_2 + r')$ köşe noktaları $y = a_2 + r$ üzerinde olacağından

$$a'_2 + r' = a_2 + r \Rightarrow a'_2 - a_2 = r - r'$$

olur. Buna göre,

i) $m > 1$ ise $\left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} > 1 \right)$

$$\begin{aligned} d_M(M, M') &= \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \} \\ &= |a_2 - a'_2| \\ &= a'_2 - a_2 \\ &= r - r' \end{aligned}$$

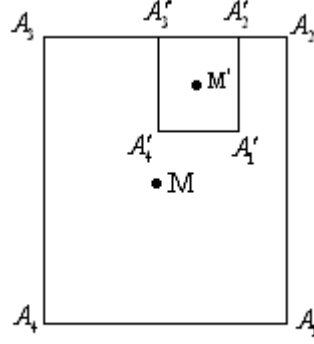
ii) $m=1$ ise $\left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} = 1 \right)$

$$\begin{aligned} d_M(M, M') &= \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \} \\ &= |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2| \\ &= r - r' \end{aligned}$$

iii) $m < 1$ ise $\left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} < 1 \right)$

$$d_M(M, M') = \max \{|a_1 - a_1'|, |a_2 - a_2'|\} = |a_1 - a_1'|$$

$$= a_1' - a_1$$



Şekil 3.27

(2) C_2, C_1 e $x = a_1 + r$ kenarında teğet olsun (Şekil 3.28).

Bu durumda $a_1' > a_1$ ve $a_2' > a_2$ olur. Ayrıca

$A_1' = (a_1' + r', a_2' - r')$, $A_2' = (a_1' + r', a_2' + r')$ köşe noktaları $x = a_1 + r$ üzerinde olacağından

$$a_1' + r' = a_1 + r \Rightarrow a_1' - a_1 = r - r'$$

dir. Buna göre

i) $m > 1$ ise $\left(\frac{a_2' - a_2}{a_1' - a_1} > 1 \right)$

$$d_M(M, M') = \max \{|a_1 - a_1'|, |a_2 - a_2'|\}$$

$$= |a_2 - a_2'|$$

$$= a_2' - a_2$$

ii) $m=1$ ise $\left(\frac{a_2' - a_2}{a_1' - a_1} = 1 \right)$

$$d_M(M, M') = \max \{|a_1 - a_1'|, |a_2 - a_2'|\}$$

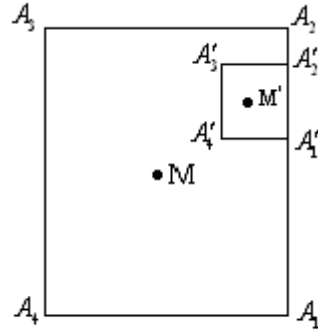
$$= |a_1 - a_1'| = |a_2 - a_2'|$$

$$= a_1' - a_1 = a_2' - a_2 = r - r'$$

$$= r - r'$$

$$\text{iii) } m < 1 \text{ ise } \left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} < 1 \right)$$

$$\begin{aligned} d_M(M, M') &= \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \} \\ &= |a_1 - a'_1| \\ &= a'_1 - a_1 \\ &= r - r' \end{aligned}$$



Şekil 3.28

sonuçları ortaya çıkar.

(3) C_2, C_1 e $y = a_2 - r$ kenarında teğet olsun (Şekil 3.29).

Bu durumda $a'_1 > a_1$ ve $a'_2 < a_2$ olsun. Ayrıca

$A'_1 = (a'_1 + r', a'_2 - r')$, $A'_4 = (a'_1 - r', a'_2 - r')$ köşe noktaları $y = a_2 - r$

üzerinde olacağından

$$a'_2 - r' = a_2 - r \Rightarrow a_2 - a'_2 = r - r'$$

dir. Buna göre

$$\text{i) } m > 1 \text{ ise } \left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} > 1 \right)$$

$$\begin{aligned} d_M(M, M') &= \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \} \\ &= |a_2 - a'_2| \\ &= a_2 - a'_2 \\ &= r - r' \end{aligned}$$

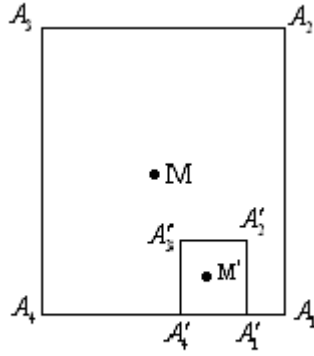
$$\text{ii) } m=1 \text{ ise } \left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} = 1 \right)$$

$$\begin{aligned} d_M(M, M') &= \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \} \\ &= |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2| \\ &= a'_1 - a_1 = a_2 - a'_2 \\ &= r - r' \end{aligned}$$

$$\text{iii) } m < 1 \text{ ise } \left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} < 1 \right)$$

$$\begin{aligned} d_M(M, M') &= \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \} \\ &= |a_1 - a'_1| = a'_1 - a_1 \end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 3.29

(4) C_2, C_1 e $x = a_1 - r$ kenarında teğet olsun (Şekil 3.30).

Bu durumda $a'_1 < a_1$ ve $a'_2 < a_2$ olsun. Ayrıca

$$A'_3 = (a'_1 - r', a'_2 + r'), A'_4 = (a'_1 - r', a'_2 - r')$$

köşe noktaları $x = a_1 - r$

$$\text{üzerinde olacağından}$$

$$a'_1 - r' = a_1 - r \Rightarrow a_1 - a'_1 = r - r'$$

dir. Buna göre

$$\text{i) } m > 1 \text{ ise } \left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} > 1 \right)$$

$$d_M(M, M') = \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \}$$

$$= |a_2 - a'_2|$$

$$= a_2 - a'_2$$

$$\text{ii) } m=1 \text{ ise } \left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} = 1 \right)$$

$$d_M(M, M') = \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \}$$

$$= |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2|$$

$$= a_1 - a'_1 = a_2 - a'_2$$

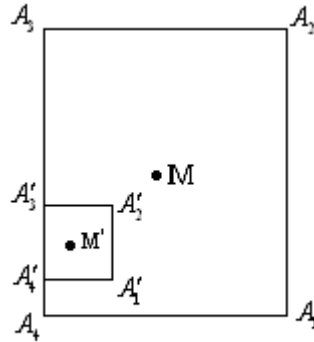
$$= r - r'$$

$$\text{iii) } m < 1 \text{ ise } \left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} < 1 \right)$$

$$d_M(M, M') = \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \}$$

$$= |a_1 - a'_1|$$

$$= a_1 - a'_1 = r - r'$$



Şekil 3.30

(5) C_2, C_1 e $x = a_1 + r$ kenarında hem de $y = a_2 + r$ kenarında teğet olsun

(Şekil 3.31).

Bu durumda $a'_1 > a_1$ ve $a'_2 > a_2$ olur. Ayrıca $A'_1 = (a'_1 + r', a'_2 - r')$,

$A'_2 = (a'_1 + r', a'_2 + r')$, $A'_3 = (a'_1 - r', a'_2 + r')$, köşe noktaları $M(a_1, a_2)$ merkezli, r

yarıçaplı C_1 maksimum çemberi üzerinde olduğundan ve A'_1 ve A'_2 noktaları

$x = a_1 + r$ üzerinde olacağından

$$a'_1 + r' = a_1 + r \Rightarrow a'_1 - a_1 = r - r'$$

bulunur. A'_2 ve A'_3 noktaları $y = a_2 + r$ üzerinde olduğundan

$$a'_2 + r' = a_2 + r \Rightarrow a'_2 - a_2 = r - r'$$

ve buna göre

$$d_M(M, M') = \max \{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\} \text{ dir.}$$

$$\text{i) } m > 1 \text{ ise } \left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} > 1 \right)$$

$$\begin{aligned} d_M(M, M') &= \max \{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\} \\ &= |a_2 - a'_2| \\ &= a'_2 - a_2 \\ &= r - r' \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{ii) } m=1 \text{ ise } \left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} = 1 \right)$$

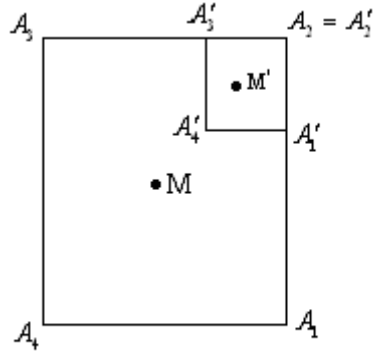
$$\begin{aligned} d_M(M, M') &= \max \{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\} \\ &= |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2| \\ &= a'_1 - a_1 = a'_2 - a_2 \\ &= r - r' \end{aligned}$$

olur.

$$\text{iii) } m < 1 \text{ ise } \left(\frac{a'_2 - a_2}{a'_1 - a_1} < 1 \right)$$

$$\begin{aligned} d_M(M, M') &= \max \{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\} \\ &= |a_1 - a'_1| \\ &= a'_1 - a_1 \\ &= r - r' \end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 3.31

(6) C_2, C_1 e hem $x = a_1 + r$ hem de $y = a_2 - r$ kenarında teğet olsun (Şekil 3.32).

Bu durumda $a'_1 > a_1$ ve $a_2 > a'_2$ olur. Ayrıca $A'_1 = (a'_1 + r', a'_2 - r')$,

$A'_2 = (a'_1 + r', a'_2 + r')$, $A'_4 = (a'_1 - r', a'_2 - r')$, köşe noktaları $M(a_1, a_2)$ merkezli, r

yarıçaplı C_1 maksimum çemberi üzerinde olduğundan ve A'_1 ve A'_2 noktaları

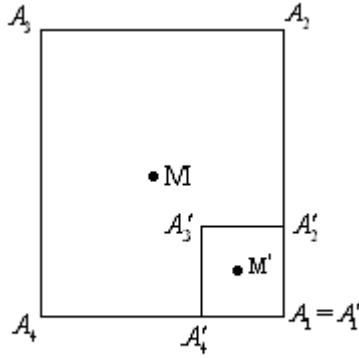
$x = a_1 + r$ üzerinde olacağından

$$a'_1 + r' = a_1 + r \Rightarrow a'_1 - a_1 = r - r'$$

bulunur. A'_1 ve A'_4 noktaları $y = a_2 - r$ üzerinde olduğundan

$$a'_2 - r' = a_2 - r \Rightarrow a_2 - a'_2 = r - r'$$

olur.



Şekil 3.32

Buna göre,

$$d_M(M, M') = \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \}$$

olup

i) $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r - r'$

ii) $m = 1$ ise $d_M(M, M') = a'_1 - a_1 = a_2 - a'_2 = r - r'$

iii) $m < 1$ ise $d_M(M, M') = a'_1 - a_1 = r - r'$

sonuçları ortaya çıkar.

7) C_2, C_1 e hem $x = a_1 - r$ hem de $y = a_2 - r$ kenarında teğet olsun (Şekil 3.33).

Bu durumda $a'_1 < a_1$ ve $a_2 > a'_2$ olur. Ayrıca $A'_1 = (a'_1 + r', a'_2 - r')$,

$A'_3 = (a'_1 - r', a'_2 + r')$, $A'_4 = (a'_1 - r', a'_2 - r')$, köşe noktaları $M(a_1, a_2)$ merkezli, r

yarıçaplı C_1 maksimum çemberi üzerinde olduğundan ve A'_1 ve A'_4 noktaları

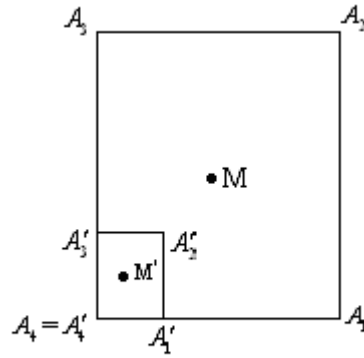
$y = a_2 - r$ üzerinde olacağından

$$a'_2 - r' = a_2 - r \Rightarrow a_2 - a'_2 = r - r'$$

bulunur. A'_3 ve A'_4 noktaları $x = a_1 - r$ üzerinde olduğundan

$$a'_1 + r' = a_1 - r \Rightarrow a_1 - a'_1 = r - r'$$

dir. Buradan



Şekil 3.33

$$d_M(M, M') = \max \{ |a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2| \}$$

olup

i) $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r - r'$

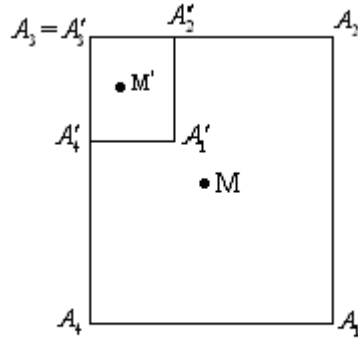
ii) $m = 1$ ise $d_M(M, M') = a_1 - a'_1 = a_2 - a'_2 = r - r'$

iii) $m < 1$ ise $d_M(M, M') = a_1 - a'_1 = r - r'$

bulunur.

8) C_2, C_1 e hem $y = a_2 + r$ hem de $x = a_1 - r$ kenarında teğet olsun (Şekil 3.34).

Bu durumda $a'_1 < a_1$ ve $a_2 < a'_2$ olur. Ayrıca $A'_2 = (a'_1 + r', a'_2 + r')$,
 $A'_3 = (a'_1 - r', a'_2 + r')$, $A'_4 = (a'_1 - r', a'_2 - r')$, köşe noktaları $M(a_1, a_2)$ merkezli, r
yarıçaplı C_1 maksimum çemberi üzerinde olduğundan ve A'_2 ve A'_3 noktaları
 $y = a_2 + r$ üzerinde olacağından
 $a'_2 + r' = a_2 + r \Rightarrow a_2 - a'_2 = r - r'$
olur. A'_3 ve A'_4 noktaları $x = a_1 - r$ üzerinde olduğundan
 $a'_1 - r' = a_1 - r \Rightarrow a_1 - a'_1 = r - r'$
olur. Buradan



Şekil 3.34

$$d_M(M, M') = \max \{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$$

olup

i) $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r - r'$

ii) $m = 1$ ise $d_M(M, M') = a_1 - a'_1 = a_2 - a'_2 = r - r'$

iii) $m < 1$ ise $d_M(M, M') = a_1 - a'_1 = r - r'$

elde edilir.

Sonuç 3.3.1.1 : Maksimum düzlemde kenarsal teğet olan $M(a_1, a_2)$ merkezli, r
yarıçaplı C_1 maksimum çemberi ile $M' = (a'_1, a'_2)$ merkezli, r' yarıçaplı C_2
maksimum çemberi için M' noktasının C_1 in iç bölgesinde kalması durumunda

$$d_M(M, M') = |MM'| = r - r'$$

özellği her zaman sağlanmaz.

3.3.2 Dıştan Teğet Maksimum Çemberleri

Öklid düzleminde O merkezli, r yarıçaplı Öklid çemberi ile O' merkezli, r' yarıçaplı Öklid çemberinin birbirine göre konumunda eğer $|OO'| = r + r'$ ise bu iki çember birbirine dıştan teğet oluyordu. Maksimum düzleminde birbirine köşesel veya kenarsal teğet olan iki maksimum çemberi verildiğinde bu özellik her zaman sağlanmamaktadır. Şimdi bunu gösterelim. Bunun için $M(a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 Maksimum çemberi ile $M' = (a'_1, a'_2)$ merkezli, r' yarıçaplı C_2 Maksimum çemberi verilsin.

$$B_1 = \{(x, y) : \max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} = r\}$$

$$B_2 = \{(x, y) : \max\{|x - a'_1|, |y - a'_2|\} = r'\}$$

bölgelerini düşünelim. $M' \notin B_1$ ve $M \notin B_2$ olmak üzere C_1 ve C_2 nin birbirine teğet olduğunu düşünelim.

(I) Bu durumda C_1 in $x = a_1 + r$ kenarı üzerinde çalışalım. C_2 maksimum çemberi, $K \neq L$ olmak üzere $K = (d_1, e_1)$, $L = (d_2, e_2)$ köşe noktalarının belirttiği kenar üzerindeki parça boyunca C_1 e teğet olsun.

(i) $x = a_1 + r$, $a_1 < a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ olsun.

$$K = (d_1, e_1) = (a_1 + r, e_1) = (a'_1 - r', a'_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_1 + r = a'_1 - r' \text{ ve } e_1 = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r'$$

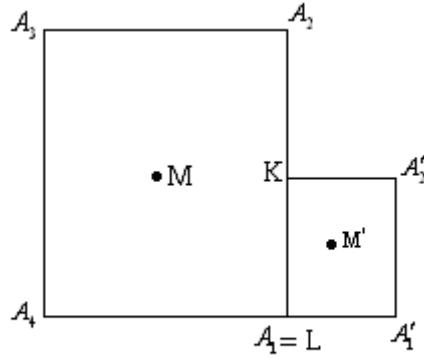
$$L = (d_2, e_2) = (a_1 + r, a_2 - r) = (a'_1 - r', a'_2 - r')$$

$$\Rightarrow a_1 + r = a'_1 - r' \text{ ve } a_2 - r = a'_2 - r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r' \text{ ve } a_2 - a'_2 = r - r'$$

olur. O halde K ve L noktaları $x = a_1 + r$ üzerinde olduğundan

$$d_1 = a_1 + r \text{ ve } d_2 = a_1 + r \text{ iken (Şekil 3.35)}$$



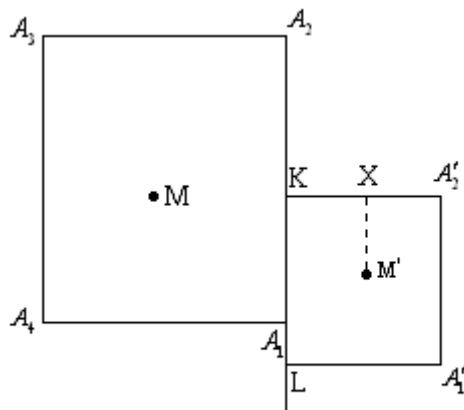
Şekil 3.35

$$d_M(M, M') = \max \{|a_1 - a_1'|, |a_2 - a_2'|\}$$

dir. Buradan

- $m < 1$ iken $d_M(M, M') = \max \{|a_1 - a_1'|, |a_2 - a_2'|\}$
 $= |a_1 - a_1'| = a_1' - a_1$
 $= r + r'$
- $m = 1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a_1'| = |a_2 - a_2'|$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a_2'| = a_2 - a_2' = r - r'$

olur. $d_1 = a_1 + r$ ve $d_2 = a_1' - r'$ iken (Şekil 3.36)



Şekil 3.36

(Yani KA_1 doğrusu boyunca teğettir.)

$a_1 < a_1'$ ve $a_2 > a_2'$ dir. Buna göre

$$K=(d_1, e_1) = (a_1 + r, e_1) = (a'_1 - r', a'_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_1 + r = a'_1 - r' \text{ ve } e_1 = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r'$$

$$L=(d_2, e_2) = (a_1 + r, e_2) = (a'_1 - r', a'_2 - r')$$

$$\Rightarrow a_1 + r = a'_1 - r' \text{ ve } e_2 = a'_2 - r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r'$$

olur. Buradan

- $m < 1$ iken $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$

$$= |a_1 - a'_1|$$

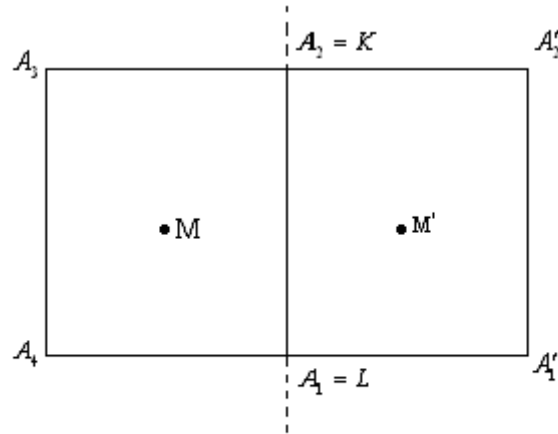
$$= a'_1 - a_1$$

$$= r + r'$$

- $m = 1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2|$

- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = d_M(X, M') = \max\{|a'_1 - a_1|, |a'_2 + r' - a'_2|\} = r'$

elde edilir. $d_1 = a_1 + r$ ve $d_2 = a_1 + r$ iken (Şekil 3.37) A_1 ve A_2 noktaları M' merkezli maksimum çemberinin köşe noktalarıdır. Buna göre



Şekil 3.37

$$a_1 \neq a'_1 \text{ ve } a_2 = a'_2 \text{ olur.}$$

$$a_1 + r = a'_1 - r' \text{ ve } a_2 + r = a'_2 - r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r' \text{ ve } a'_2 - a_2 = r + r'$$

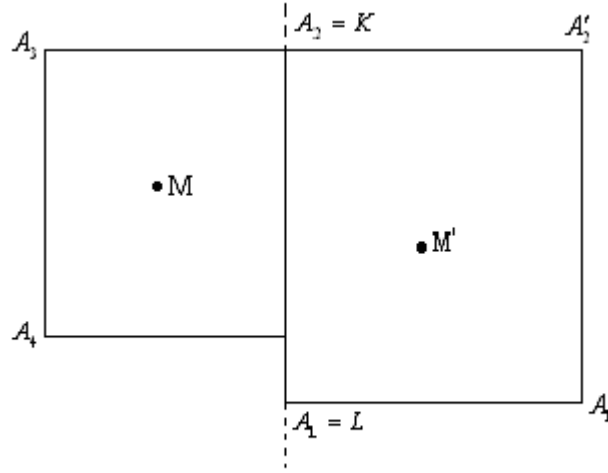
bulunur ve

- $m < 1$ iken $d_M(M, M') = \max \{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$
 $= |a_1 - a'_1|$
 $= a'_1 - a_1$
 $= r + r'$

- $m = 1$ iken $d_M(M, M') = a'_1 - a_1 = a'_2 - a_2 = r + r'$

- $m > 1$ iken $d_M(M, M') = \max \{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$
 $= |a_2 - a'_2|$
 $= r + r'$

şeklindedir. $d_1 = a_1 + r$ ve $d_2 = a_1 + r$ iken (Şekil 3.38) A_2 noktası M' merkezli maksimum çemberinde köşe noktasıdır. Buradan



Şekil 3.38

$a_1 < a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ bulunur.

$$K = (d_1, e_1) = (a_1 + r, a_2 + r) = (a'_1 - r', a'_2 + r') \Rightarrow a_1 + r = a'_1 - r' \text{ ve } a_2 + r = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r' \text{ ve } a_2 - a'_2 = r' - r$$

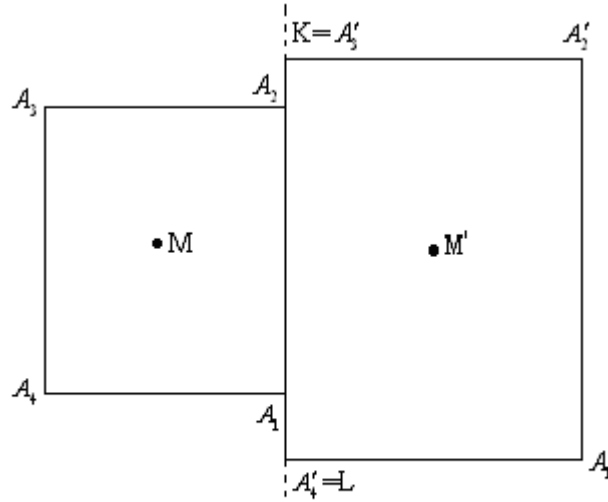
$$L = (d_2, e_2) = (a_1 + r, e_2) = (a'_1 - r', a'_2 - r') \Rightarrow a_1 + r = a'_1 - r' \text{ ve } a_2 + r = e_2$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r'$$

olur. O halde

- $m < 1$ iken $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$
 $= |a_1 - a'_1|$
 $= a'_1 - a_1$
 $= r + r'$
- $m = 1$ iken $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2|$
- $m > 1$ iken $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$
 $= a_2 - a'_2$
 $= r' - r$

elde edilir. $d_1 = a_1 + r$ ve $d_2 = a_1 + r$ iken (Şekil 3.39) A_1 ve A_2 noktaları M' merkezli maksimum çemberinde üzerinde olduğundan



Şekil 3.39

$a_1 < a'_1$ ve $a_2 = a'_2$ olur. O halde

$$\begin{aligned} K = (d_1, e_1) &= (a_1 + r, e_1) = (a'_1 - r', a'_2 + r') \Rightarrow a_1 + r = a'_1 - r' \\ &\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r' \end{aligned}$$

olduğundan

- $m < 1$ iken $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$

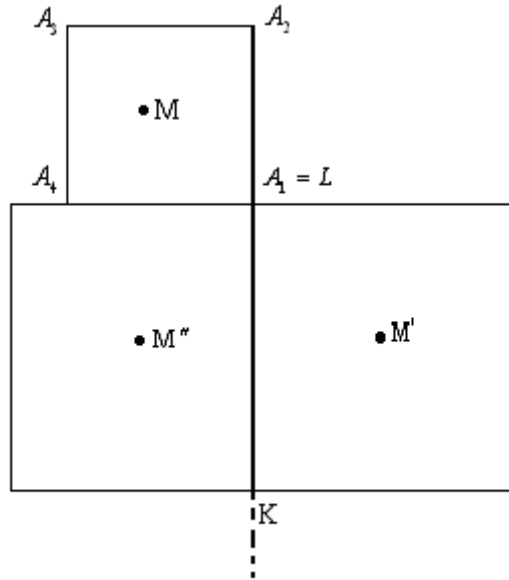
$$\begin{aligned}
&= |a_1 - a'_1| \\
&= a'_1 - a_1 \\
&= r + r'
\end{aligned}$$

- $m=1$ iken $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2|$
- $m > 1$ iken $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$
 $= |a_2 - a'_2|$
 $= 0$

elde edilir.

(ii) $x = a_1 + r$, $d_1 = d_2 = a_1 + r$ olsun.

$d_1 = d_2 = a_1 + r$ iken (Şekil 3.40) M' ve M'' merkezli aynı yarıçaplı iki maksimum çemberi vardır, öyle ki $M' \notin B_1$ ve $M'' \notin B_1$ dir. M' merkezli maksimum çemberi A_1 den geçen köşesal teğet maksimum çemberini, M'' merkezli maksimum çemberi $y = a_2 - r$ kenarı üzerinde kenarsal teğet maksimum çemberini belirtir ve $a_1 < a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ iken



Şekil 3.40

$$\begin{aligned}
L = (d_2, e_2) &= (a_1 + r, a_2 - r) = (a'_1 - r', a'_2 + r') \\
\Rightarrow a_1 + r &= a'_1 - r' \quad \text{ve} \quad a_2 - r = a'_2 + r'
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r' \text{ ve } a_2 - a'_2 = r + r'$$

olup

- $m < 1$ ise $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$

$$= |a_1 - a'_1|$$

$$= r + r'$$
- $m = 1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2| = r + r'$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r + r'$

elde edilir. $a_1 = a''_1$ ve $a_2 > a''_2$ iken

$$L = (d_2, e_2) = (a_1 + r, a_2 - r) = (a''_1 + r', a''_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_1 + r = a''_1 + r' \text{ ve } a_2 - r = a''_2 + r'$$

$$\Rightarrow a_1 - a''_1 = r' - r \text{ ve } a_2 - a''_2 = r + r'$$

olup

- $m < 1$ ise $d_M(M, M'') = \max\{|a_1 - a''_1|, |a_2 - a''_2|\}$

$$= |a_1 - a''_1|$$

$$= r' - r = 0$$
- $m = 1$ ise $d_M(M, M'') = |a_1 - a''_1| = |a_2 - a''_2|$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M'') = a_2 - a''_2 = r + r'$

bulunur.

(iii) $x = a_1 + r$, $a_1 \leq d_1 \leq a_1 + r$ ve $a_1 \leq d_2 \leq a_1 + r$ (Şekil 3.41) olsun.

$a_1 < a'_1$ ve $a_2 = a'_2$ dir. $d_1 = a_1 + r$ ve $d_2 = a_1 + r$ olsun. Bu durumda

$$K = (d_1, e_1) = (a_1 + r, e_1) = (a'_1 - r', a'_2 - r') \Rightarrow a_1 + r = a'_1 - r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r'$$

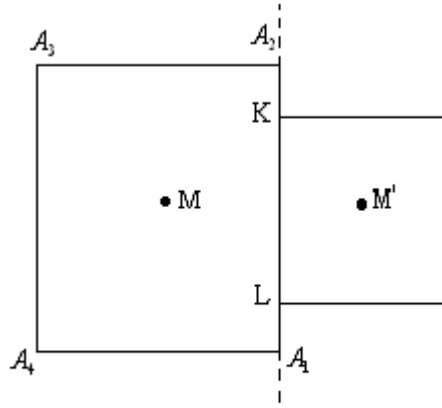
$$L = (d_2, e_2) = (a_1 + r, e_2) = (a'_1 - r', a'_2 + r') \Rightarrow a_1 + r = a'_1 - r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r'$$

olup

- $m < 1$ ise $d_M(M, M') = \max \{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$
 $= a'_1 - a_1$
 $= r + r'$
- $m = 1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2| = r + r'$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2|$

olur.



Şekil 3.41

(2) C_1 maksimum çemberinin $y = a_2 - r$ kenarı üzerinde çalışalım. O halde C_2 maksimum çemberi, $K \neq L$ olmak üzere $K = (d_1, e_1)$, $L = (d_2, e_2)$ köşe noktalarının belirttiği kenar üzerindeki parça boyunca C_1 e teğet olsun.

(i) $y = a_2 - r$, $d_1 > d_2 \ni d_2 = a_1 + r$ ve $d_1 > a_1 + r$ olsun.

$d_1 > a_1 + r$ ve $d_2 = a_1 + r$ iken (Şekil 3.42) M' ve M'' merkezli aynı yarıçaplı iki maksimum çemberi vardır, öyle ki $M' \notin B_1$ ve $M'' \notin B_1$ dir. M' merkezli maksimum çemberi C_1 e A_1 noktasından köşesal teğet olurken, M'' merkezli maksimum çemberi C_1 e $x = a_1 + r$ den kenarsal teğet maksimum çemberini belirtir.

$a_1 < a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ olsun. Bu durumda

$$A_1 = L = (d_2, e_2) = (a_1 + r, a_2 - r) = (a'_1 - r', a'_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_1 + r = a'_1 - r' \text{ ve } a_2 - r = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r + r' \text{ ve } a_2 - a'_2 = r + r'$$

olup

- $m < 1$ ise $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$
 $= a'_1 - a_1$
 $= r + r'$
- $m = 1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2| = r + r'$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r + r'$

dir. $a_1 < a''_1$ ve $a_2 = a''_2$ olsun. Bu durumda

$$L = (d_2, e_2) = (a_1 + r, a_2 - r) = (a''_1 - r'', a''_2 - r'')$$

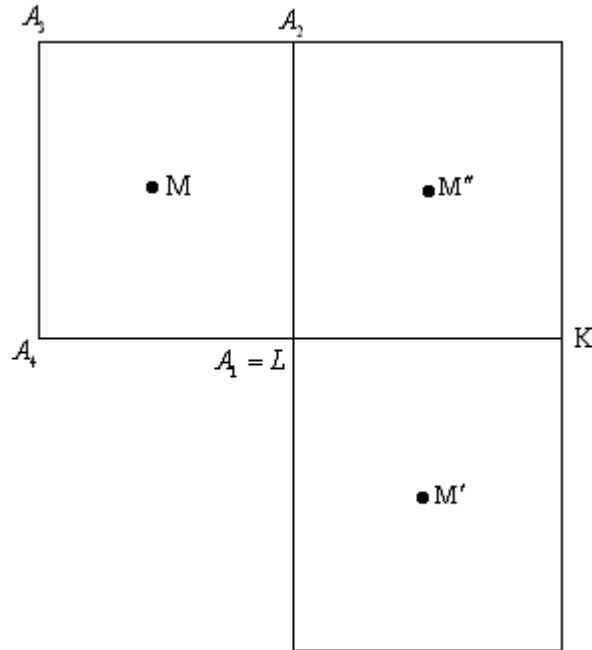
$$\Rightarrow a_1 + r = a''_1 - r'' \text{ ve } a_2 - r = a''_2 - r''$$

$$\Rightarrow a''_1 - a_1 = r + r'' \text{ ve } a_2 - a''_2 = r - r''$$

$$d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a''_1|, |a_2 - a''_2|\}$$

$$= |a_1 - a''_1|$$

$$= r + r''$$



Şekil 3.42

$d_1 > a_1 + r$ ve $a_1 - r < d_2 < a_1$ iken (Şekil 3.43) A_1 , M' merkezli maksimum çemberi üzerinde ve $a_1 < a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ olsun. Bu durumda

$K=(d_1, e_1) = (a'_1 + r', a'_2 + r') = (d_1, a_2 - r)$, $d_1 > a_1 + r$ olduğundan

$$\Rightarrow a'_2 + r' = a_2 - r \text{ ve } a'_1 + r' > a_1 + r$$

$$\Rightarrow a_2 - a'_2 = r + r' \text{ ve } a'_1 - a_1 > r - r'$$

$L=(d_2, e_2) = (d_2, a_2 - r) = (a'_1 - r', a'_2 + r')$

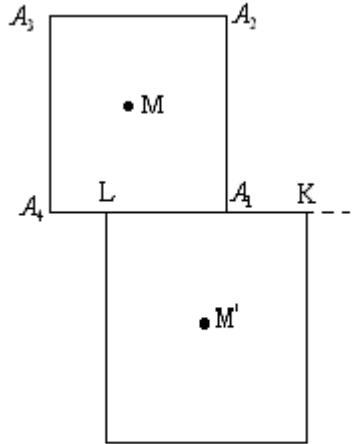
$$\Rightarrow a_2 - r = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a_2 - a'_2 = r + r'$$

olup

- $m < 1$ ise $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$
 $= a'_1 - a_1$
- $m = 1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2| = r + r'$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r + r'$

şeklindedir.



Şekil 3.43

$d_1 > a_1 + r$ ve $d_2 < a_1 - r$ iken (Şekil 3.44) A_1 ve A_4 , M' merkezli maksimum çemberi üzerinde ve $a_1 = a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ olsun.

$K=(d_1, e_1) = (a'_1 + r', a'_2 + r') = (d_1, a_2 - r)$

$$\Rightarrow a'_2 + r' = a_2 - r$$

$$\Rightarrow a_2 - a'_2 = r + r'$$

$$L = (d_2, e_2) = (d_2, a_2 - r) = (a'_1 - r', a'_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_2 - r = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a_2 - a'_2 = r + r'$$

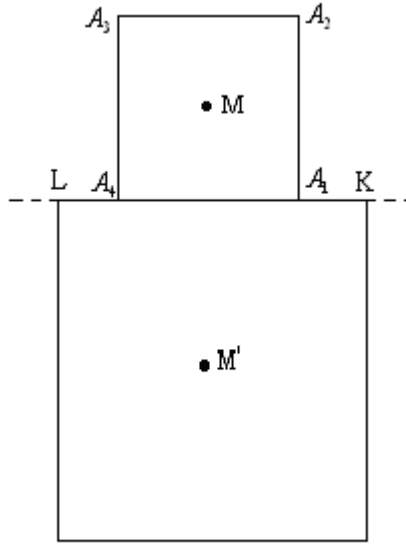
olup

- $m < 1$ ise $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$

$$= |a_1 - a'_1| = 0$$

- $m = 1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2|$

- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r + r'$



Şekil 3.44

(ii) $y = a_2 - r$, $d_1 > d_2 \ni d_1 \leq a_1 + r$ ve $d_2 < a_1 + r$ olsun.

$d_1 = a_1 + r$ ve $a_1 - r < d_2 < a_1$ iken (Şekil 3.45), $a_1 < a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ olsun.

$$K = (d_1, e_1) = (a_1 + r, a_2 - r) = (a'_1 + r', a'_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_1 + r = a'_1 + r' \text{ ve } a_2 - r = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r - r' \text{ ve } a_2 - a'_2 = r + r'$$

$$L = (d_2, e_2) = (d_2, a_2 - r) = (a'_1 - r', a'_2 + r')$$

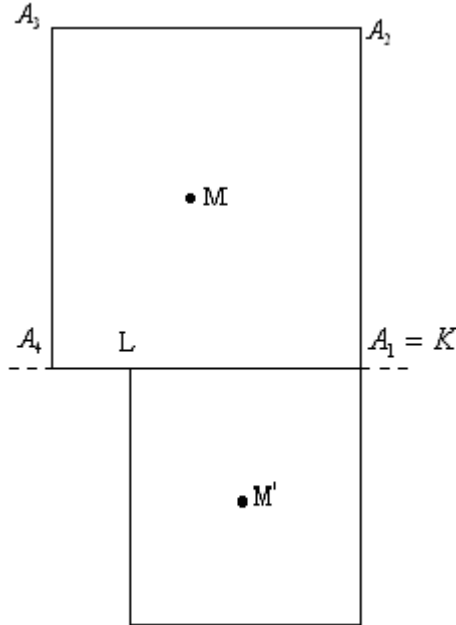
$$\Rightarrow a_2 - r = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a_2 - a'_2 = r + r'$$

olup

- $m < 1$ ise $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$
 $= a'_1 - a_1 = r - r'$
- $m = 1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2|$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r + r'$

şeklindedir.



Şekil 3.45

$d_1 = a_1 + r$ ve $d_2 < a_1 - r$ iken (Şekil 3.46), $a_1 > a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ olsun.

$$K = (d_1, e_1) = (a_1 + r, a_2 - r) = (a'_1 + r', a'_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_1 + r = a'_1 + r' \text{ ve } a_2 - r = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a'_1 - a_1 = r - r' \text{ ve } a_2 - a'_2 = r + r'$$

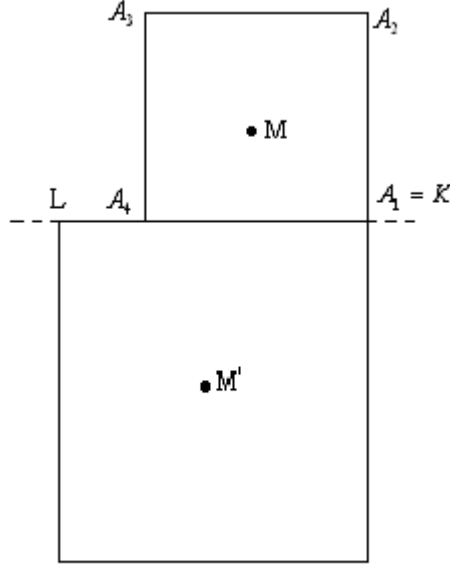
olup

- $m < 1$ ise $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\}$

$$= a'_1 - a_1 = r - r'$$

- $m=1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2|$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = r + r'$

elde edilir.



Şekil 3.46

$a_1 < d_1 < a_1 + r$ ve $a_1 - r < d_2 < a_1$ iken (Şekil 3.47) A_1 ve A_4 noktaları $y = a_2 - r$ doğrusu üstünde olduğundan

$$K = (d_1, e_1) = (d_1, a_2 - r) = (a'_1 + r', a'_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_2 - r = a'_2 + r' \Rightarrow a_2 - a'_2 = r + r'$$

$$L = (d_2, e_2) = (d_2, a_2 - r) = (a'_1 - r', a'_2 + r')$$

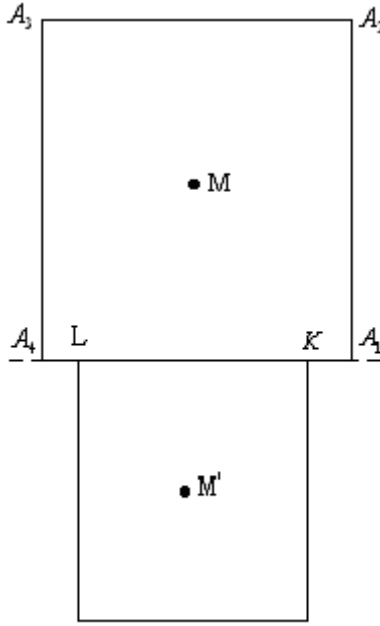
$$\Rightarrow a_2 - r = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a_2 - a'_2 = r + r'$$

bulunur. $a_1 = a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ olsun. O halde

- $m < 1$ ise $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\} = |a_1 - a'_1| = 0$
- $m=1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2|$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r + r'$

olur.



Şekil 3.47

$a_1 < d_1 < a_1 + r$ ve $d_2 < a_1 - r$ iken (Şekil 3.48) A_1 ve A_4 noktaları $y = a_2 - r$ doğrusu üstünde olduğundan

$$K = (d_1, e_1) = (d_1, a_2 - r) = (a'_1 + r', a'_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_2 - r = a'_2 + r' \Rightarrow a_2 - a'_2 = r + r'$$

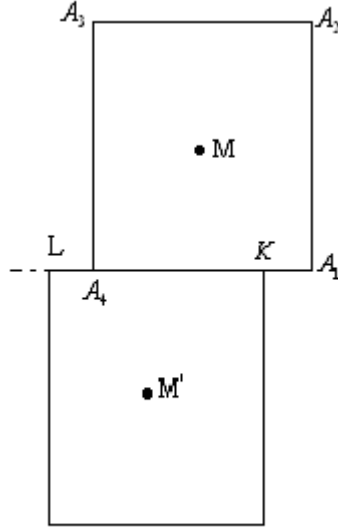
$$L = (d_2, e_2) = (d_2, a_2 - r) = (a'_1 - r', a'_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_2 - r = a'_2 + r' \Rightarrow a_2 - a'_2 = r + r'$$

$a_1 > a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ olsun. O halde

- $m < 1$ ise $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\} = |a_1 - a'_1| = a_1 - a'_1$
- $m = 1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2|$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r + r'$

elde edilir.



Şekil 3.48

$d_1 < a_1 - r$ ve $a_1 < d_2 < a_1 + r$ iken K ve L noktalarının rollerinin değiştirilmesine karşılık gelir.

$d_1 \leq a_1 - r$ ve $d_2 \leq a_1 - r$ olması durumunda $d_1 = a_1 - r$ yada $d_2 = a_1 - r$ olmak zorundadır. M' ve M'' merkezli aynı yarıçaplı iki maksimum çemberi vardır, öyle ki $M' \notin B_1$ ve $M'' \notin B_1$ dir. M' merkezli maksimum çemberi C_1 e A_4 noktasından teğet olurken, M'' merkezli maksimum çemberi C_2 ye kenarsal teğet olan maksimum çemberini belirtir (Şekil 3.49). Bununla birlikte

$a_1 > a'_1$ ve $a_2 > a'_2$ olsun.

$$K=(d_1, e_1) = (a_1 - r, a_2 - r) = (a'_1 + r', a'_2 + r')$$

$$\Rightarrow a_1 - r = a'_1 + r' \quad \text{ve} \quad \Rightarrow a_2 - r = a'_2 + r'$$

$$\Rightarrow a_1 - a'_1 = r + r' \quad \text{ve} \quad \Rightarrow a_2 - a'_2 = r + r'$$

O halde

- $m < 1$ ise $d_M(M, M') = \max\{|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|\} = a_1 - a'_1 = r + r'$
- $m = 1$ ise $d_M(M, M') = |a_1 - a'_1| = |a_2 - a'_2| = r + r'$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M') = |a_2 - a'_2| = a_2 - a'_2 = r + r'$

bulunur. $a_1 > a''_1$ ve $a_2 > a''_2$ olsun. A_1 ve A_4 noktaları $y = a_2 - r$ doğrusu üzerinde olduğundan

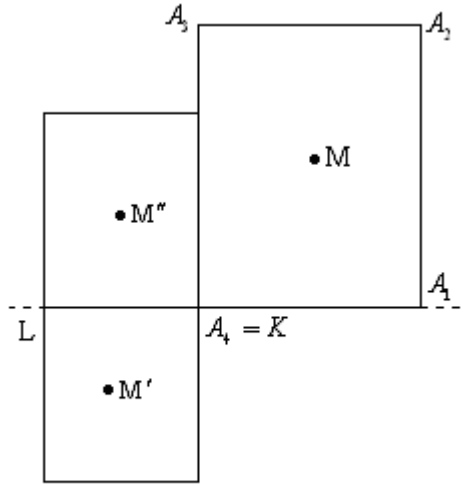
$$K=(d_1, e_1) = (a_1 - r, a_2 - r) = (a_1'' + r', a_2'' - r')$$

$$\Rightarrow a_1 - r = a_1'' + r' \text{ ve } \Rightarrow a_2 - r = a_2'' - r'$$

$$\Rightarrow a_1 - a_1'' = r + r' \text{ ve } \Rightarrow a_2 - a_2'' = r - r'$$

Buradan

- $m < 1$ ise $d_M(M, M'') = \max\{|a_1 - a_1''|, |a_2 - a_2''|\} = a_1 - a_1'' = r + r'$
- $m = 1$ ise $d_M(M, M'') = |a_1 - a_1''| = |a_2 - a_2''|$
- $m > 1$ ise $d_M(M, M'') = a_2 - a_2'' = r - r'$



Şekil 3.49

elde edilir. $d_2 = a_1 - r$ olması K ve L nin yer değiştirmesine karşılık gelir. C_1 in diğer kenarları üzerinde çalışıldığında, C_2 nin C_1 e dıştan teğet olması durumunda $d_M(M, M') = r + r'$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir. Buna göre $M \notin B_2$ ve $M' \notin B_1$ olmak üzere C_2 maksimum çemberi C_1 e kenarsal veya köşesel teğet iken çemberlerin merkezleri arasındaki maksimum uzaklık, maksimum çemberlerinin yarıçapları toplamına eşittir. Fakat $d_M(M, M') = r + r'$ eşitliği her zaman sağlanmaz.

Sonuç 3.3.2.1 : Düzlemde $M=(a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı maksimum çemberini C_1 , $M'=(a_1', a_2')$ merkezli, r' yarıçaplı maksimum çemberini C_2 ile gösterelim.

$$B_1 = \{(x, y) : \max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} = r\}$$

$$B_2 = \{(x, y) : \max\{|x - a'_1|, |y - a'_2|\} = r'\}$$

bölgelerinde $M \notin B_2$ ve $M' \notin B_1$ olmak üzere C_1 ve C_2 birbirlerine köşesel veya kenarsal teğet olması durumunda,

$$d_M(M, M') = r + r'$$

olur. (Bu özelliği sağlayan C_1 ve C_2 maksimum çemberlerine dıştan teğet maksimum çemberleri olarak tanımlayalım). Fakat bu eşitlik her zaman sağlanmaz.

3.3.3 Bir Maksimum Çemberine Üzerindeki Bir Noktadan Çizilen Teğet Maksimum Çemberleri

İki maksimum çemberi köşe noktalarında veya kenar parçası boyunca kesiştiklerinde teğet olabildiğini gördük. Şimdi bir maksimum çemberinin köşe noktalarındaki teğet maksimum çemberlerini araştıralım. Buna göre $M=(a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı C çemberinin köşeleri

$$A_1 = (a_1 + r, a_2 - r), A_2 = (a_1 + r, a_2 + r), A_3 = (a_1 - r, a_2 + r), A_4 = (a_1 - r, a_2 - r)$$

şeklinindedir. Şimdi C ye A_1 noktasında teğet olan maksimum çemberlerini bulalım.

Varsayalım ki böyle bir çemberin A_1 'i kapsayan kenarı KL olsun. Buna göre

$K=(d_1, e_1)$, $L=(d_2, e_2)$ noktaları ya $x = a_1 + r$ üzerinde ya da $y = a_2 - r$ üzerindedir.

(1) $K \neq L$, $K=(d_1, e_1)$ ve $L=(d_2, e_2)$ olmak üzere $x = a_1 + r$ veya $y = a_2 - r$

$d_1 = d_2 \Rightarrow d_1 = d_2 = a_1 + r$ ve olsun (Şekil 3.50).

$d_1 = d_2 = a_1 + r$ iken $A_1=L$ olur. Bu durumda,

$$\text{i) } \max \left\{ \left| x - \left(d_1 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_1 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

veya

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_2 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_2 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

maksimum çemberleri C ye A_1 den kenarsal teğet olan maksimum çemberleridir.

Üstelik bu çemberler C ile dıştan teğettir.

ii) $d_1 = d_2 = a_1 + r$ iken

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_1 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_1 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

veya

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_2 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_2 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

maksimum çemberleri $d_1 = d_2 = a_1 + r$ iken C nin içinde kalan kenarsal teğet çemberleridir.

iii) $d_1 = d_2 = a_1 + r$ iken

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_1 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_1 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

veya

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_2 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_2 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

maksimum çemberleri bulunur, öyle ki bu çemberler C ye dıştan teğettir.

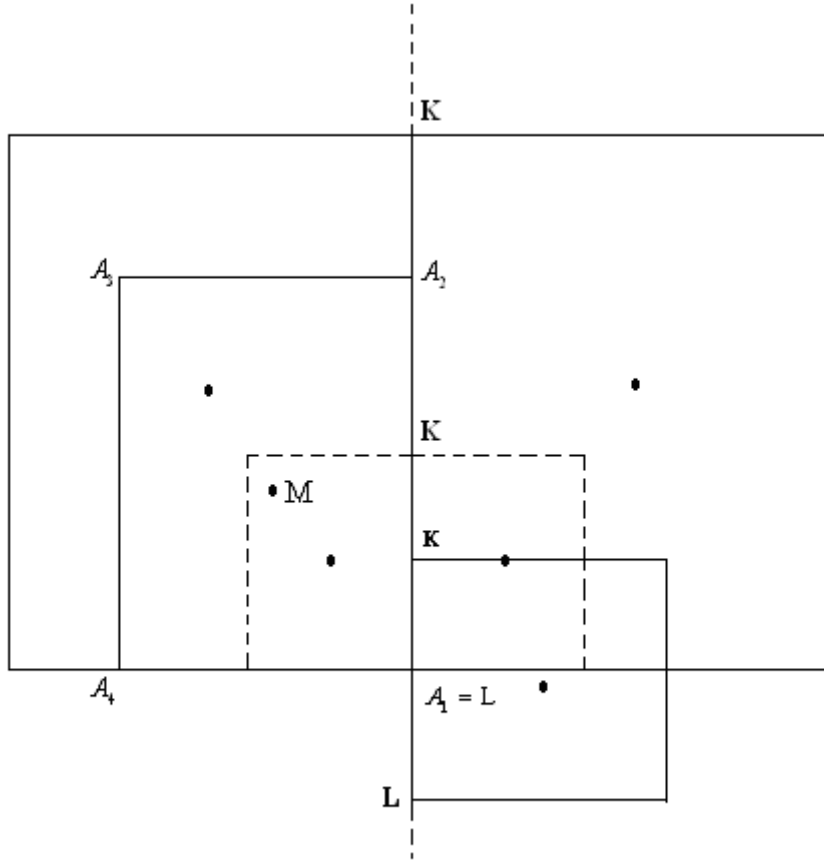
iv) $d_1 = d_2 = a_1 + r$ iken

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_1 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_1 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

veya

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_2 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_2 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

maksimum çemberleri C nin içten teğet olduğu çemberlerdir.



Şekil 3.50

2) $K \neq L$, $K=(d_1, e_1)$ ve $L=(d_2, e_2)$ olmak üzere $x = a_1 + r$ veya $y = a_2 - r$

$d_1 = d_2 \ni d_1 = d_2 = a_1 + r$ olsun (Şekil 3.51).

i) $d_1 = d_2 = a_1 + r$ iken $A_1=L$ dir. Bu durumda

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_1 + \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_1 + \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right|$$

veya

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_2 + \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_2 - \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right|$$

maksimum çemberleri bulunur, öyle ki bu maksimum çemberleri C ye A_1 de köşesel teğet olup, dolayısıyla dıştan teğettir.

$$\text{ii) } \max \left\{ \left| x - \left(d_1 - \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_1 + \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right|$$

veya

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_2 - \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_2 - \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right|$$

maksimum çemberlerinin bir kenarı $y = a_2 - r$ kenarı üzerinde olduğundan bunlar C ye A_1 den kenarsal, üstelik dıştan teğettir.

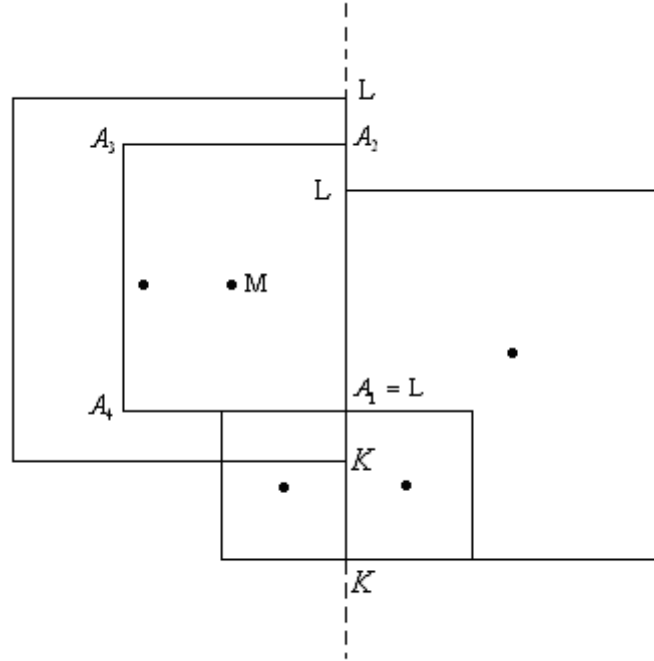
iii) $d_1 = d_2 = a_1 + r$ iken

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_1 - \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_1 + \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right|$$

veya

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_2 - \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_2 - \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_2 - e_1}{2} \right|$$

maksimum çemberleri C nin içten teğet olduğu çemberlerdir.



Şekil 3.51

A_2 , A_3 ve A_4 noktalarından geçen C ye teğet olan köşesal ve kenarsal teğet maksimum çemberleri benzer şekilde elde edilir. Şimdi C ye köşe noktası olmayan bir noktadan nasıl teğet maksimum çemberi çizileceğini inceleyelim (Şekil 3.52):

$P=(x_0, y_0)$ noktası A_1A_2 (veya A_3A_4) kenarı üzerinde köşe noktalarından farklı bir nokta olsun. $P \neq A_1$ ve $P \neq A_2$ (veya $P \neq A_3$ ve $P \neq A_4$) olduğundan P noktasından köşesel teğet maksimum çemberi geçmez. O halde P den geçen kenarsal teğet maksimum çemberleri incelenmelidir. Kabul edelim ki böyle bir çemberin P yi kapsayan kenarı KL olsun. Buna göre $K=(d_1, e_1)$ ve $L=(d_2, e_2)$ noktaları C nin A_1A_2 (veya A_3A_4) kenarı üzerindedir. Buna göre

i) $d_1 = d_2 = x_0 = a_1 + r$ olmak üzere

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_1 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_1 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

veya

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_2 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_2 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

maksimum çemberleri C ye kenarsal, üstelik dıştan teğettir.

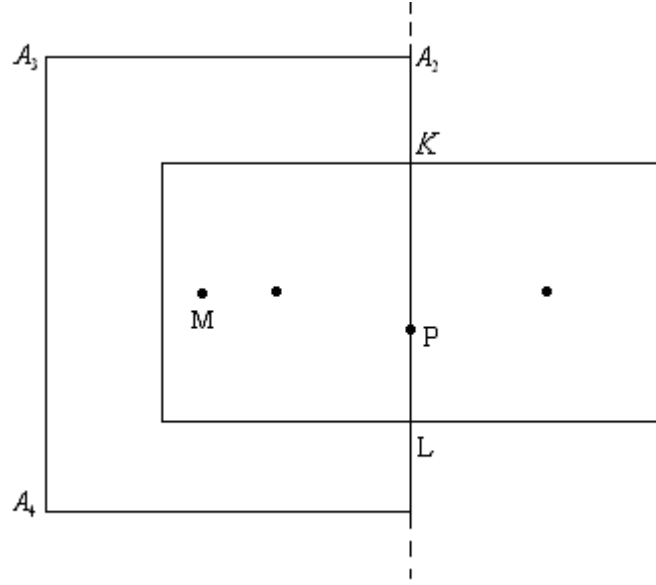
ii) $d_1 = d_2 = x_0 = a_1 + r$ iken

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_1 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_1 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

veya

$$\max \left\{ \left| x - \left(d_2 - \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right|, \left| y - \left(e_2 + \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right| \right) \right| \right\} = \left| \frac{e_1 - e_2}{2} \right|$$

maksimum çemberleri C ye kenarsal, üstelik içten teğettir.



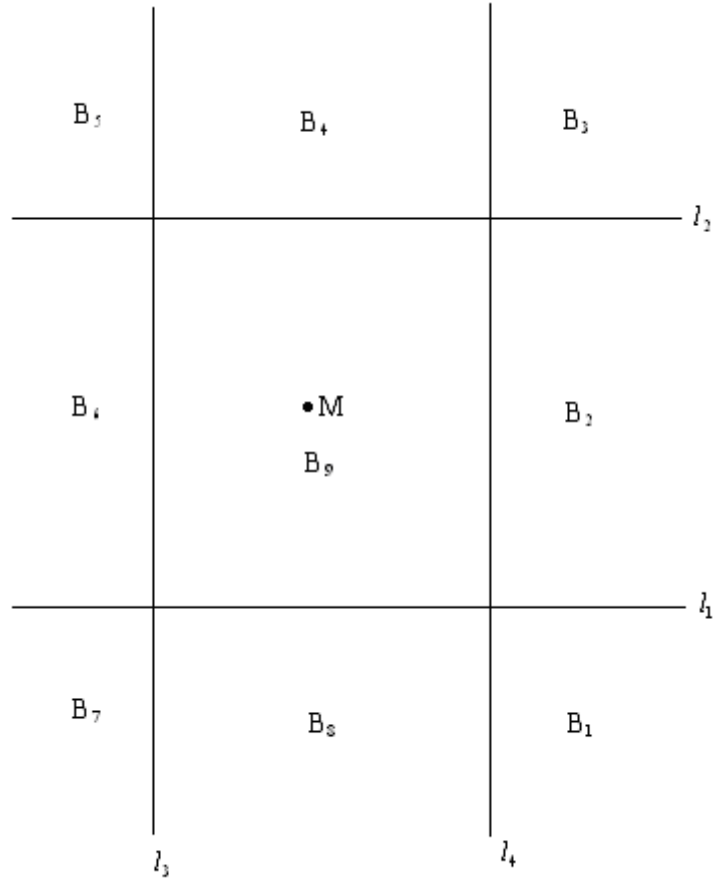
Şekil 3.52

P noktasının çemberin diğer kenarları üzerinde olması halinde benzer şekilde maksimum çemberleri elde edilir.

Sonuç 3.3.3.1: C bir maksimum çemberi ve A da C maksimum çemberi üzerinde bir nokta olsun. Eğer A bir köşe noktası değilse A da C ye kenarsal teğet olan sonsuz sayıda maksimum çemberleri vardır. Eğer A bir köşe noktası ise A da C ye kenarsal ve köşesel teğet olan sonsuz sayıda maksimum çemberleri vardır.

3.3.4 Bir Maksimum Çemberine Üzerinde Olmayan Bir Noktadan Çizilen Teğet Maksimum Çemberleri

Bir $M=(a_1, a_2)$ merkezli, r yarıçaplı maksimum çemberinin dışını şu şekilde bölgelere ayıralım.



Şekil 3.53

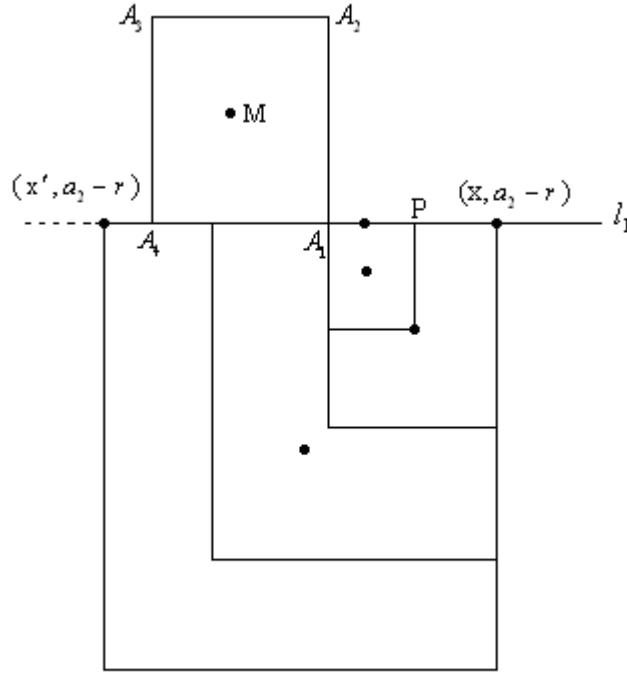
B_1, B_2, \dots, B_8 daha önce bölüm 3.2.3 de belirtilen bölgeler ve B_9 bölgesini

$$B_9 = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} y > a_2 - r \quad \text{ve} \quad y < a_2 + r \\ x > a_1 - r \quad \text{ve} \quad x < a_1 + r \end{array} \right\}$$

alalım. $P = (x_0, y_0)$ noktası çemberin dışında bir nokta olsun.

(I) $P \in B_1$ olsun. Bu durumda $P \circ l_1, P \circ l_4$, veya $P \notin l_1, P \notin l_4$ durumları söz konusudur.

(i) $P \circ l_1$ olsun.



Şekil 3.54

Şekil 3.54 de görüldüğü gibi P den geçen ve verilen maksimum çemberine teğet olan maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = \left(x - \left| \frac{x - x'}{2} \right|, a_2 - r - \left| \frac{x - x'}{2} \right| \right) \quad x > x_0 \text{ veya}$$

$$M' = \left(x' + \left| \frac{x - x'}{2} \right|, a_2 - r - \left| \frac{x - x'}{2} \right| \right) \quad x' < x_0$$

$$r' = \left| \frac{x - x'}{2} \right|$$

biçimindedir. Özel olarak $x' = a_1 + r$ olduğunda

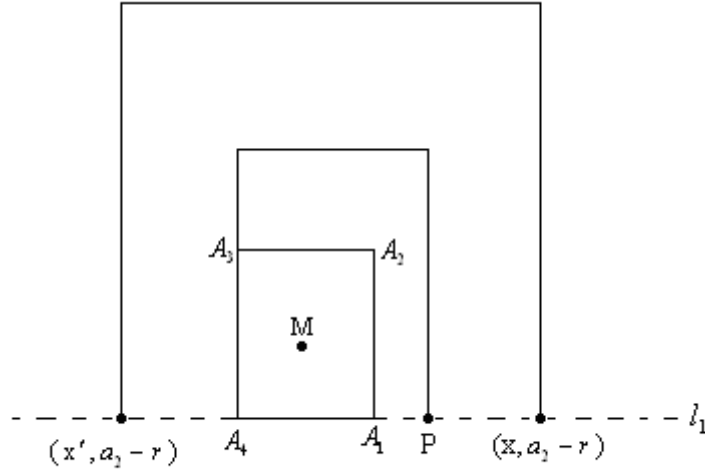
$$M' = \left(x - \left| \frac{x - a_1 - r}{2} \right|, a_2 - r - \left| \frac{x - a_1 - r}{2} \right| \right)$$

merkezli maksimum çemberi verilen maksimum çemberine köşesel teğettir.

$x' = a_1 - r$ olduğunda

$$M' = \left(x - \left| \frac{x - a_1 + r}{2} \right|, a_2 - r - \left| \frac{x - a_1 + r}{2} \right| \right)$$

merkezli maksimum çemberi verilen maksimum çemberine kenarsal teğettir.



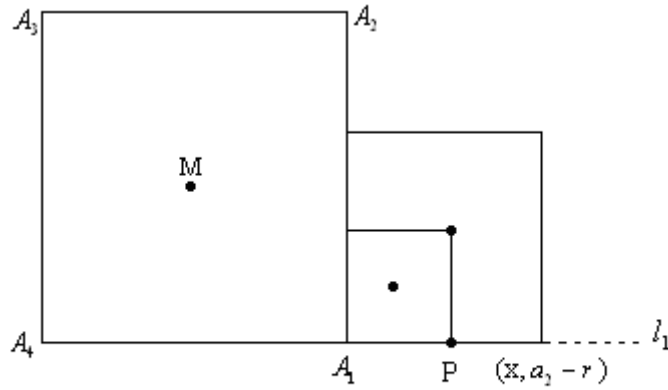
Şekil 3.55

Şekil 3.55 de P den geçen

$$M' = \left(x - \left| \frac{x - x'}{2} \right|, a_2 - r + \left| \frac{x - x'}{2} \right| \right) \ni a_2 - r + \left| \frac{x - x'}{2} \right| \geq y_0$$

$$r' = \left| \frac{x - x'}{2} \right|$$

merkezli ve yarıçaplı maksimum çemberleri, verilen maksimum çemberlerine kenarsal teğettir.



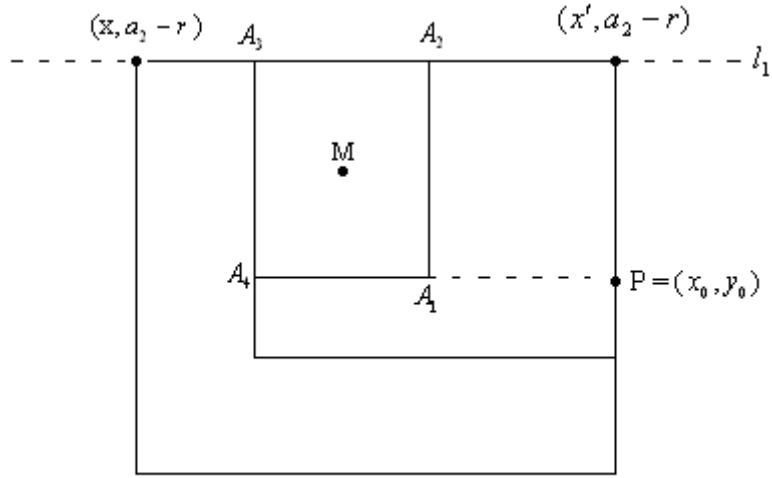
Şekil 3.56

Şekil 3.56 de P den geçen

$$M' = \left(x - \left| \frac{x - a_1 - r}{2} \right|, a_2 - r + \left| \frac{x - a_1 - r}{2} \right| \right), \quad x > x_0 \text{ ve } y_0 = a_2 - r \text{ iken}$$

$$r' = \left| \frac{x - a_1 - r}{2} \right|$$

merkezli ve yarıçaplı maksimum çemberleri verilen maksimum çemberine kenarsal teğettirler.



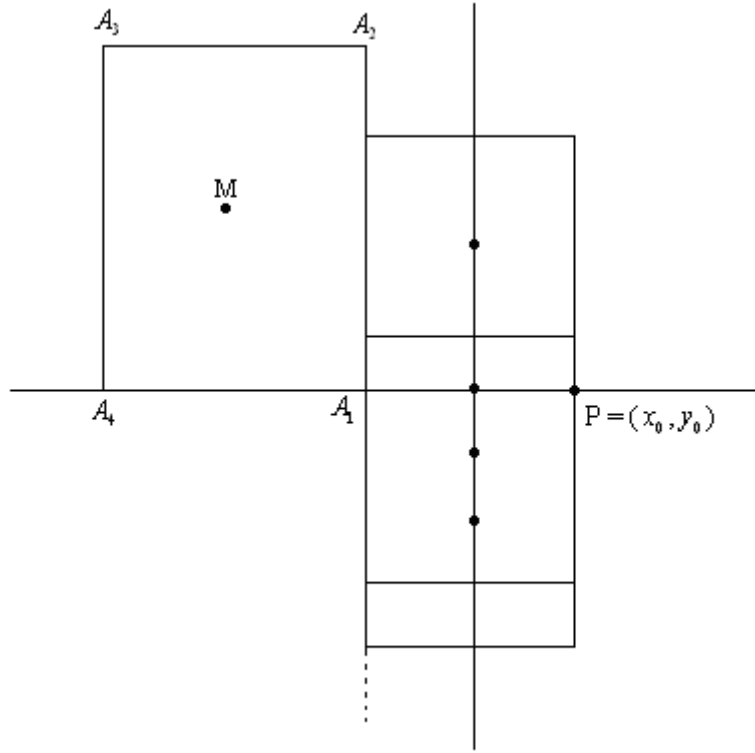
Şekil 3.57

Şekil 3.57 de P den geçen

$$M' = \left(x + \left| \frac{x' - x}{2} \right|, a_2 - r - \left| \frac{x' - x}{2} \right| \right), \quad x_0 > x \text{ ve } x' = x_0 \text{ iken}$$

$$r' = \left| \frac{x' - x}{2} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{2} \right|$$

merkezli ve yarıçaplı maksimum çemberleri verilen maksimum çemberine kenarsal teğettir.



Şekil 3.58

Şekil 3.58 da gösterildiği gibi P den geçen en küçük köşesal teğet maksimum

çemberinin merkezini $x = \left(\frac{x_0 - (a_1 + r)}{2} \right)$ doğrusu üzerinde yukarı doğru

kaydırdığımızda yine P den geçen kenarsal teğet maksimum çemberleri elde edilir, öyle ki bu maksimum çemberlerin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = \left(\frac{x_0 - (a_1 + r)}{2}, a_2 - r - \left| \frac{x_0 - (a_1 + r)}{2} \right| \right)$$

veya

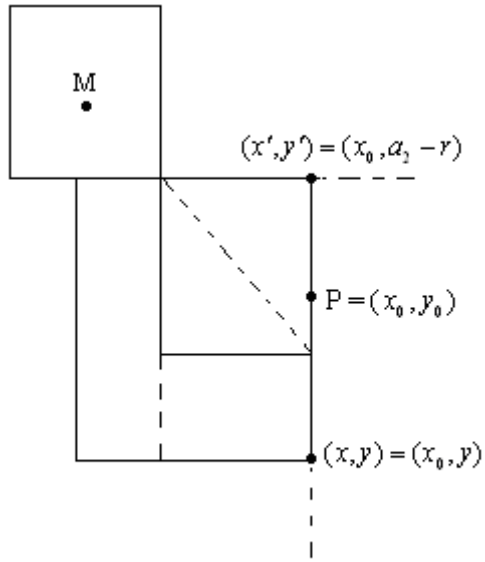
$$M' = \left(a_1 + r + \left| \frac{x_0 - (a_1 + r)}{2} \right|, a_2 - r - \left| \frac{x_0 - (a_1 + r)}{2} \right| \right) \ni a_1' \in [a_1 + r, x_0)$$

$$r' = \left| \frac{x_0 - (a_1 + r)}{2} \right|$$

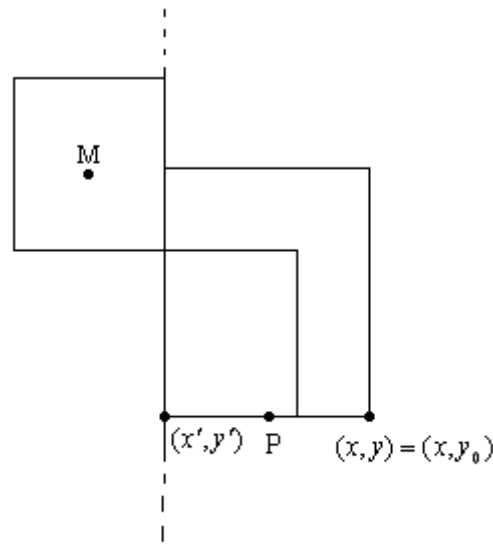
şeklindedir. Buna göre,

$P \in B_1$ ve Pol_1 veya Pol_4 iken P noktasından geçen, verilen maksimum çemberine teğet olan sonsuz sayıda köşesal ve sonsuz sayıda kenarsal teğet maksimum çemberleri vardır.

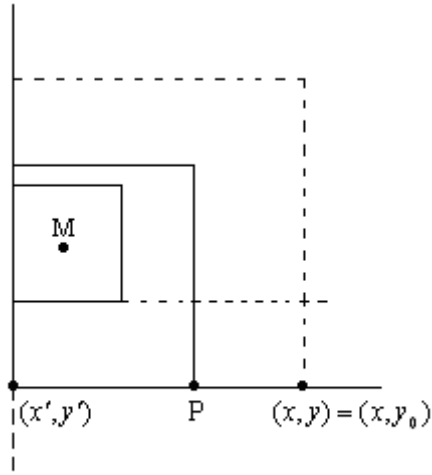
(ii) $P\beta_{l_1}$ ve $P\beta_{l_4}$ olsun.



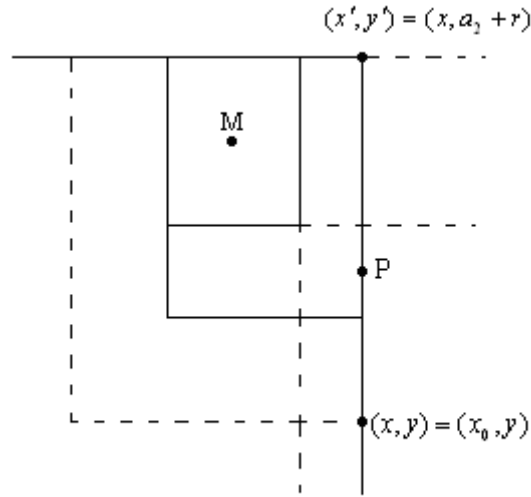
Şekil 3.59



Şekil 3.60



Şekil 3.61



Şekil 3.62

Şekil 3.59 da $(x', y') = (x_0, a_2 - r)$ olmak üzere P den geçen maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = \left(x_0 - \left| \frac{y' - y}{2} \right|, a_2 - r - \left| \frac{y' - y}{2} \right| \right)$$

$$r' = \left| \frac{y' - y}{2} \right|$$

olur ve burada

$x_0 > a_1$ için $y < a_2$ dir.

Özel olarak $x = a_1 + r$ olduğu zaman P den geçen köşesal teğet maksimum çemberleri elde edilir. Bu özel durum dışındaki teğet maksimum çemberleri kenarsaldır.

Şekil 3.60 da $(x', y') = (a_1 + r, y_0)$ olmak üzere P den geçen teğet maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{x - x'}{2} \right| = \left| \frac{x - (a_1 + r)}{2} \right|$$

$$M' = \left(\frac{x - a_1 - r}{2}, y_0 + \left| \frac{x - a_1 - r}{2} \right| \right)$$

ve $x_0 > a_1$ iken $y_0 < a_2 - r$ dir. Özel olarak $x = a_1 + r$ iken P den geçen köşesal teğet maksimum çemberlerinin hepsi kenarsaldır.

Şekil 3.61 de $(x', y') = (a_1 - r, y_0)$ olmak üzere P den geçen teğet maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{x - x'}{2} \right| = \left| \frac{x - a_1 + r}{2} \right|$$

$$M' = \left(\frac{x - a_1 + r}{2}, y_0 + \left| \frac{x - a_1 + r}{2} \right| \right)$$

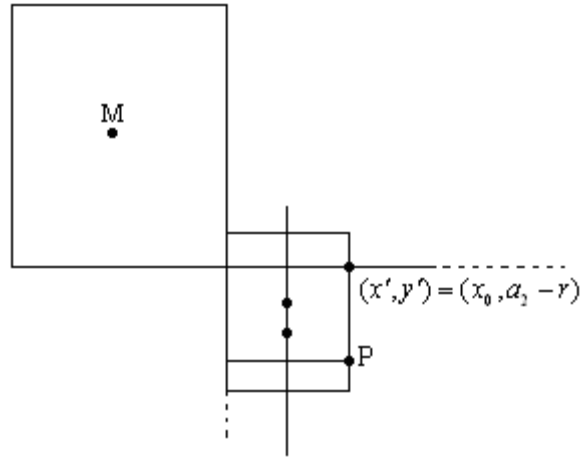
ve $x_0 > a_1$ iken $y < a_2 - r$ dir. Bu maksimum çemberlerinin hepsi kenarsal teğet maksimum çemberleridir.

Şekil 3.62 de $(x', y') = (x, a_2 + r)$ olmak üzere P den geçen teğet maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{y' - y}{2} \right|$$

$$M' = \left(x_0 - \left| \frac{y' - y}{2} \right|, a_2 + r - \left| \frac{y' - y}{2} \right| \right)$$

olur ve $x_0 > a_1$ iken $y < a_2 - r$ dir. Bu maksimum çemberlerinin hepsi kenarsal teğet maksimum çemberleridir.



Şekil 3.63

Şekil 3.63 de $(x', y') = (x_0, a_2 - r)$ olmak üzere $y_0 < a_2$ iken elde edilen en küçük köşesal teğet maksimum çemberi, merkezi $y = \frac{x_0 - a_1 - r}{2}$ doğrusu üstünde olacak biçimde kaydırıldığında elde edilen maksimum çemberleri verilen maksimum çemberine kenarsal teğet olan ve P den geçen çemberlerdir. Bunların yarıçapı ve merkezleri

$$r' = \left| \frac{x_0 - a_1 - r}{2} \right|$$

$$M' = \left(\frac{x_0 - a_1 - r}{2}, a_2 - r - \left| \frac{x_0 - a_1 - r}{2} \right| \right)$$

biçimindedir. Benzer şekilde $y_0 > a_2$ iken elde edilen en küçük köşesal teğet

maksimum çemberi, merkezi $y = \frac{x_0 - a_1 - r}{2}$ doğrusu üstünde olacak biçimde

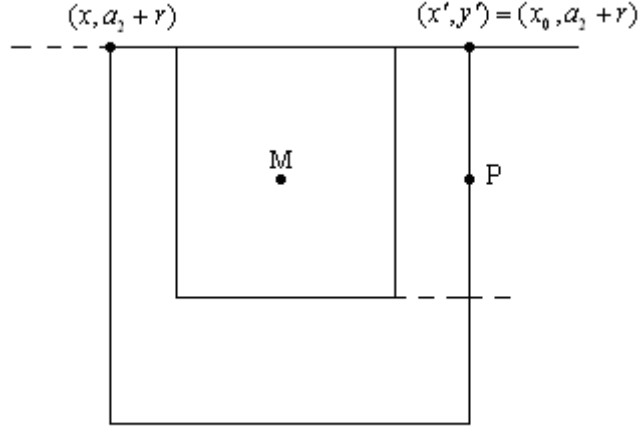
kaydırıldığında elde edilen maksimum çemberleri verilen maksimum çemberine kenarsal teğet olan ve P den geçen çemberlerdir. Bunların merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{x_0 - a_1 - r}{2} \right|$$

$$M' = \left(\frac{x_0 - a_1 - r}{2}, a_2 + r - \left| \frac{x_0 - a_1 - r}{2} \right| \right)$$

dir. Buna göre $P \in B_1$ ve $P \notin l_1, P \notin l_4$ iken P noktasından bir tane köşesal teğet çemberi, sonsuz sayıda kenarsal teğet maksimum çemberi geçer.

(2) $P \in B_2$ olsun.



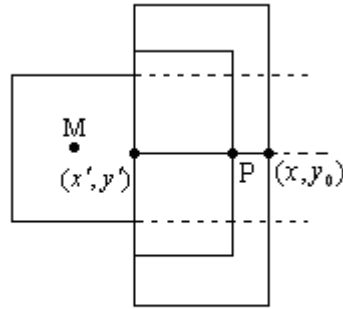
Şekil 3.64

Şekil 3.64 de $(x', y') = (x_0, a_2 + r)$ olmak üzere P den geçen bu maksimum çemberlerinin hepsi kenarsal teğettir. Bunların merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{x' - x}{2} \right|$$

$$M' = \left(x_0 - \left| \frac{x' - x}{2} \right|, a_2 + r - \left| \frac{x' - x}{2} \right| \right) \ni x \leq a_1 - r$$

biçimindedir.



Şekil 3.65

Şekil 3.65 de $(x', y') = (a_1 + r, y')$ olmak üzere P den geçen bu maksimum çemberlerinin hepsi verilen maksimum çemberine kenarsal teğettir. Bunların merkezleri ve yarıçapları ise

$$r' = \left| \frac{x - x'}{2} \right| = \left| \frac{x - a_1 - r}{2} \right|$$

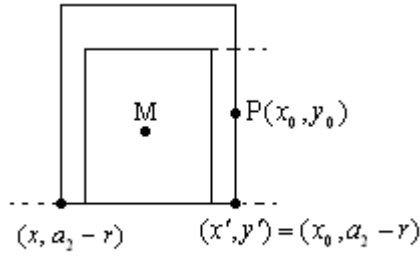
$$M' = \left(x - \left| \frac{x - x'}{2} \right|, y_0 + \left| \frac{x - x'}{2} \right| \right) \ni x > x_0$$

ve

$$r' = \left| \frac{x - x'}{2} \right|$$

$$M'' = \left(x - \left| \frac{x - x'}{2} \right|, y_0 - \left| \frac{x - x'}{2} \right| \right) \ni x > x_0$$

olur.



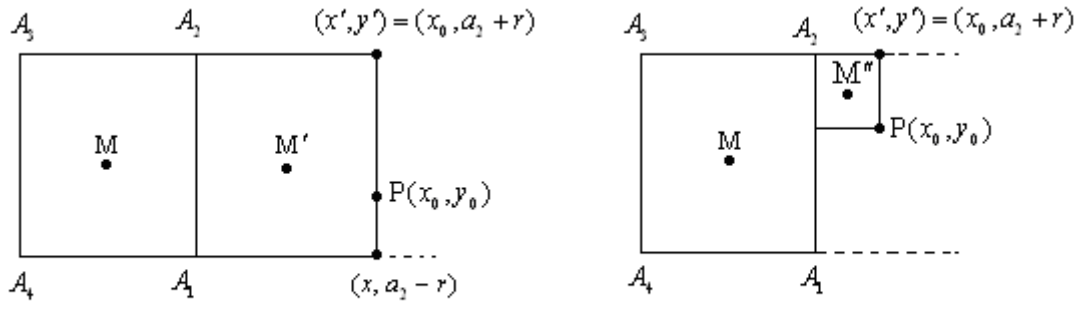
Şekil 3.66

Şekil 3.66 da $(x', y') = (x_0, a_2 - r)$ olmak üzere P den geçen maksimum çemberlerinin hepsi verilen maksimum çemberine kenarsal teğettir. Bunların merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{x' - x}{2} \right|$$

$$M' = \left(\left| \frac{x - x'}{2} \right|, y_0 \right) \ni x \leq a_1$$

olur.



Şekil 3.67

Şekil 3.67 de gösterildiği gibi $(x', y') = (x_0, a_2 + r)$ ve $x = x_0 = x'$ olmak üzere P noktası sırasıyla

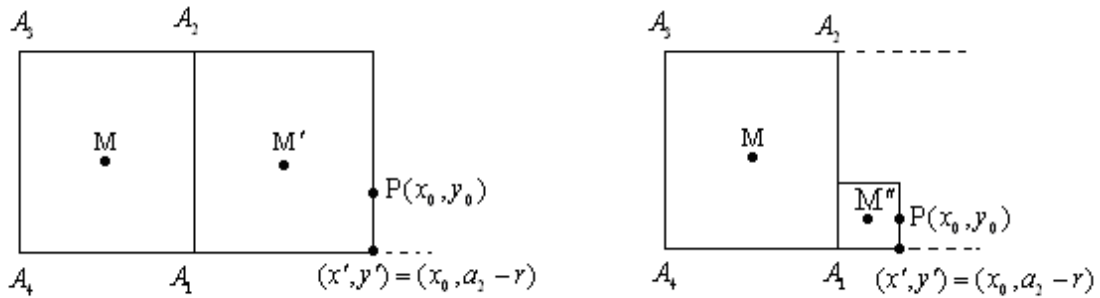
$$\{(x, y) : x > a_1 + r \text{ ve } y < a_2\} \text{ ve } \{(x, y) : x > a_1 + r \text{ ve } a_2 < y < a_2 + r\}$$

bölgelerinde iken verilen maksimum çemberine teğet olan maksimum çemberlerinin hepsi kenarsal teğettir. Bunların merkezleri ve yarıçapları ise

$$r' = \left| \frac{x_0 - a_1 - r}{2} \right|$$

$$M' = \left(\frac{x_0 - a_1 - r}{2}, a_2 \right) \text{ ve } M'' = \left(x_0 - \left| \frac{x_0 - a_1 - r}{2} \right|, a_2 + r - \left| \frac{x_0 - a_1 - r}{2} \right| \right)$$

dir.



Şekil 3.68

Şekil 3.68 de gösterildiği gibi $(x', y') = (x_0, a_2 - r)$ olmak üzere P noktası sırasıyla

$$\{(x, y) : x > a_1 + r \text{ ve } a_2 - r < y < a_2\} \text{ ve } \{(x, y) : x > a_1 + r \text{ ve } a_2 - r < y < a_2\}$$

bölgelerinde iken verilen maksimum çemberine teğet olan ve P noktasından geçen maksimum çemberlerinin hepsi kenarsal teğettir. Bunların merkezleri ve yarıçapları

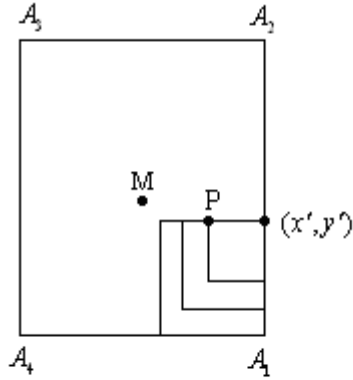
$$r' = \left| \frac{x_0 - a_1 - r}{2} \right| = \left| \frac{x' - a_1 - r}{2} \right|$$

$$M' = \left(\frac{x_0 - a_1 - r}{2}, a_2 \right) \text{ ve } M'' = \left(x_0 - \left| \frac{x_0 - a_1 - r}{2} \right|, a_2 - r + \left| \frac{x_0 - a_1 - r}{2} \right| \right)$$

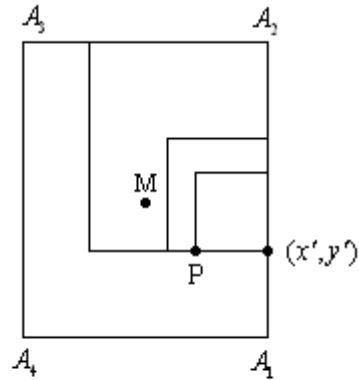
olur. Böylece:

$P \in B_2$ iken P noktasından, verilen maksimum çemberine kenarsal teğet olan sonsuz sayıda maksimum çemberi vardır.

(3) $P \in B_9$ olsun.



Şekil 3.69



Şekil 3.70

Şekil 3.69 da gösterildiği gibi $(x', y') = (a_1 + r, y_0)$ olmak üzere P noktası B_9 bölgesinin $\{(x, y) : x \geq a_1\}$ alt bölgesinde ise P den geçen maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{y' - a_2 + r}{2} \right|$$

$$M' = \left(x' - \left| \frac{y' - a_2 + r}{2} \right|, a_2 - r + \left| \frac{y' - a_2 + r}{2} \right| \right)$$

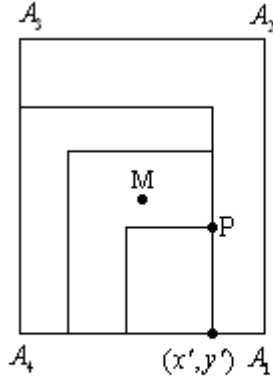
olur. Benzer şekilde Şekil 3.70 de gösterildiği gibi P noktası B_9 bölgesinin

$\{(x, y) : y \leq a_2\}$ alt bölgesinde ise P den geçen maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

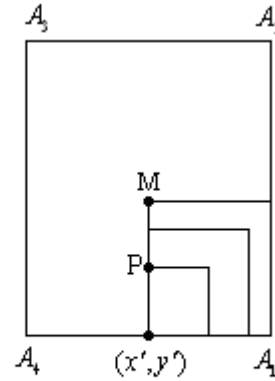
$$r' = \left| \frac{y' - a_2 - r}{2} \right|$$

$$M' = \left(x' - \left| \frac{y' - a_2 - r}{2} \right|, a_2 + r - \left| \frac{y' - a_2 - r}{2} \right| \right)$$

olmakta ve bu çemberlerin hepsi verilen maksimum çemberine kenarsal teğettir.



Şekil 3.71



Şekil 3.72

Şekil 3.71 de gösterildiği gibi $(x', y') = (x_0, a_2 - r)$ olmak üzere P noktası B_9 bölgesinin $\{(x, y) : x \geq a_1\}$ alt bölgesinde ise P den geçen maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{x' - a_1 + r}{2} \right|$$

$$M' = \left(x' - \left| \frac{x' - a_1 + r}{2} \right|, a_2 - r + \left| \frac{x' - a_1 + r}{2} \right| \right)$$

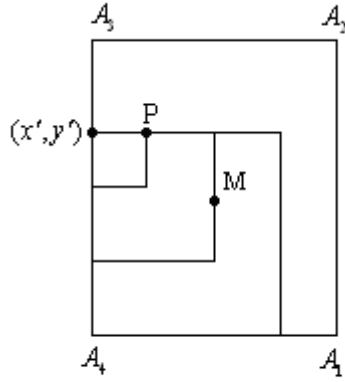
olmaktadır. Benzer şekilde Şekil 3.72 de gösterildiği gibi P noktası B_9 bölgesinin

$\{(x, y) : y \leq a_2\}$ alt bölgesinde ise P den geçen maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

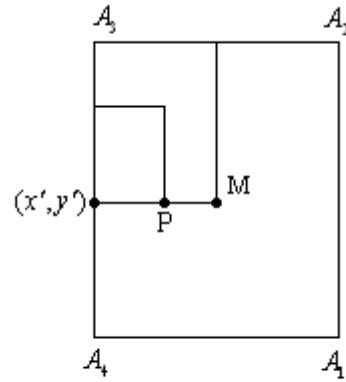
$$r' = \left| \frac{y' - a_2}{2} \right|$$

$$M' = \left(x' + \left| \frac{y' - a_2}{2} \right|, \frac{y' - a_2}{2} \right)$$

olur ve bu çemberlerin hepsi verilen maksimum çemberine kenarsal teğettir.



Şekil 3.73



Şekil 3.74

Şekil 3.73 de gösterildiği gibi $(x', y') = (a_1 - r, y')$ olmak üzere P noktası B_9 bölgesinin $\{(x, y) : y \geq a_2\}$ alt bölgesinde ise P den geçen maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{y' - a_2 + r}{2} \right|$$

$$M' = \left(x' + \left| \frac{y' - a_2 + r}{2} \right|, \frac{y' - a_2 + r}{2} \right)$$

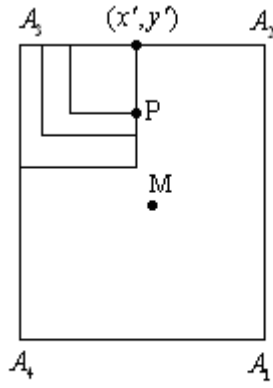
olur. Benzer şekilde Şekil 3.74 de gösterildiği gibi P noktası B_9 bölgesinin

$\{(x, y) : x \leq a_1\}$ alt bölgesinde ise P den geçen maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

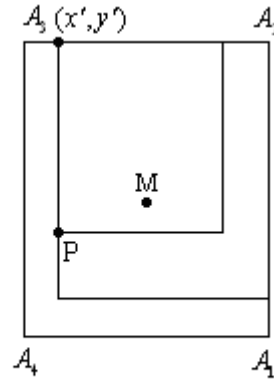
$$r' = \left| \frac{a_1 - x'}{2} \right|$$

$$M' = \left(x' + \frac{a_1 - x'}{2}, y' + \frac{a_1 - x'}{2} \right)$$

olmakta ve bu çemberlerin hepsi verilen maksimum çemberine kenarsal teğettir.



Şekil 3.75



Şekil 3.76

Şekil 3.75 de gösterildiği gibi $(x', y') = (x', a_2 + r)$ olmak üzere P noktası B_9 bölgesinin $\{(x, y) : y \geq a_2\}$ alt bölgesinde ise P den geçen maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{x' - a_1 + r}{2} \right|$$

$$M' = \left(x' - \left| \frac{x' - a_1 + r}{2} \right|, y' - \left| \frac{x' - a_1 + r}{2} \right| \right)$$

olmaktadır. Benzer şekilde Şekil 3.76 da gösterildiği gibi P noktası B_9 bölgesinin $\{(x, y) : x \leq a_1\}$ alt bölgesinde ise P den geçen maksimum çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$r' = \left| \frac{a_1 + r - x'}{2} \right|$$

$$M' = \left(x' + \left| \frac{a_1 + r - x'}{2} \right|, y' - \left| \frac{a_1 + r - x'}{2} \right| \right)$$

olur ve bu çemberlerin hepsi verilen maksimum çemberine kenarsal teğettir.

Yani, B_9 bölgesindeki her noktadan, verilen maksimum çemberine teğet olacak şekilde sonsuz sayıda kenarsal teğet maksimum çemberi geçer.

Sonuç 3.3.4.1: Verilen maksimum çemberine üzerinde bulunmayan bir noktadan çizilen teğet maksimum çemberleri hakkında aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- (a) B_1, B_3, B_5, B_7 bölgelerinin sınırlayıcı doğruları üzerinde bulunan noktadan, verilen maksimum çemberine teğet olan sonsuz sayıda kenarsal ve sonsuz sayıda köşesel teğet maksimum çemberi geçer.
- (b) B_1, B_3, B_5, B_7 bölgelerinin sınırlayıcı doğruları üzerinde bulunmayan noktadan, bir köşesel teğet ve sonsuz sayıda kenarsal teğet maksimum çemberi geçer.
- (c) B_2, B_4, B_6, B_8, B_9 bölgelerindeki her noktadan, verilen çembere teğet olan sonsuz sayıda kenarsal teğet maksimum çemberi geçer.
- Öklid düzleminde C, M merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. P_1 verilen çember üzerinde ve P_2 üzerinde olmayan birer nokta olsun. P_1 ve P_2 noktasından geçen C ye P_1 de teğet olan bir tek çember olduğu biliniyor. Maksimum çemberi için aşağıdaki sonucun geçerli olduğu daha önceki sonuçlardan elde edilir.

Sonuç 3.3.4.2: Düzlemde C, M merkezli, r yarıçaplı maksimum çemberi olsun. P_1 verilen çember üzerinde ve P_2 üzerinde olmayan birer nokta olsun. P_1 ve P_2 noktasından geçen C ye P_1 de teğet olan sonsuz sayıda maksimum çemberi vardır. Bu teğet maksimum çemberleri için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

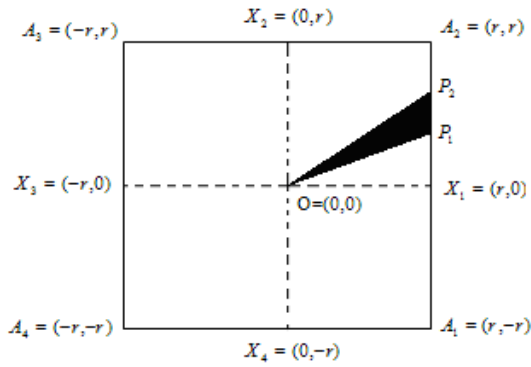
- (a) P_1 köşe noktası, P_2, P_1 in bulunduğu bölgedeki kenar doğruları üzerinde değil ise bir köşesel teğet, sonsuz sayıda kenarsal teğet maksimum çemberi vardır.
- (b) P_1 köşe noktası, P_2, P_1 in bulunduğu bölgedeki kenar doğruları üzerinde ise sonsuz sayıda köşesel ve kenarsal teğet maksimum çemberi vardır.
- (c) P_1 köşe noktası, P_2, P_1 in bulunduğu bölgede değil iken veya P_1 köşe noktasından farklı iken sonsuz sayıda kenarsal teğet maksimum çemberi vardır.

Bölüm 4

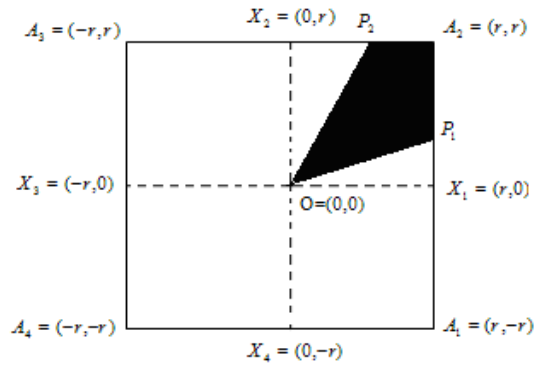
Bu bölümde maksimum daire diliminin alanı ile maksimum yay uzunluğu arasındaki ilişki Ekmekçi, S. [4] çalışması esas alınarak incelenmiştir.

Maksimum Daire Diliminin Alanı İle Maksimum Yay Uzunluğu Arasındaki İlişki

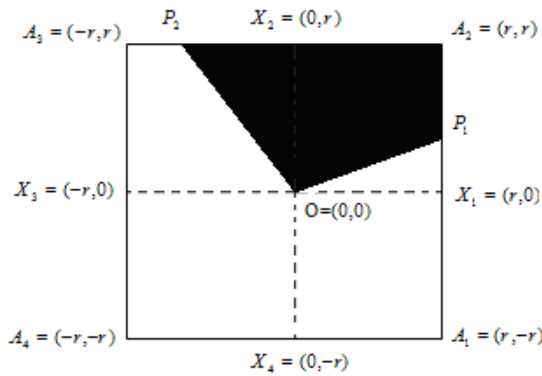
Öklid düzleminde, yarıçapı r olan bir daire diliminin alanı ona karşılık gelen yay uzunluğunun $r/2$ katıdır. r yarıçaplı bir maksimum daire diliminin alanı da ona karşılık gelen yay uzunluğunun $r/2$ katıdır. Düzlemde $O=(0,0)$ merkezli, r yarıçaplı maksimum çemberi verilsin. $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ verilen maksimum çemberi üzerinde iki nokta olsun. Saatin dönme yönünün tersi yönde hareket edildiğinde elde edilen maksimum yay uzunluğu ile karşılık gelen alanları hesaplayalım.



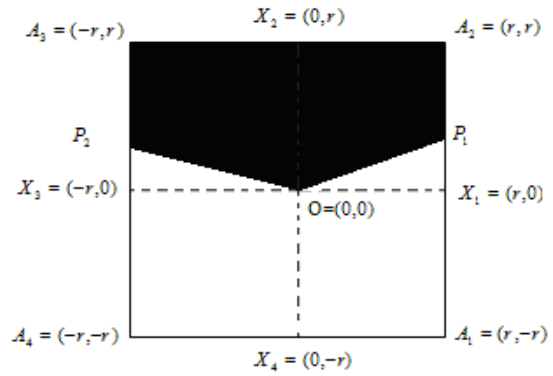
Şekil 4.1



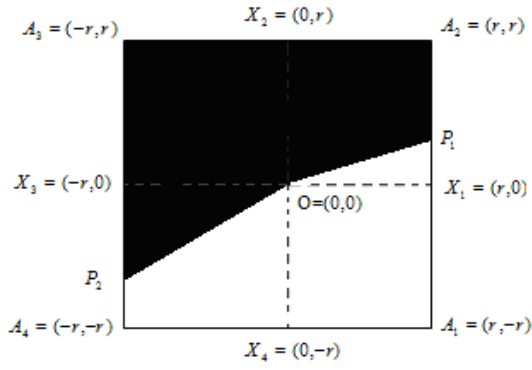
Şekil 4.2



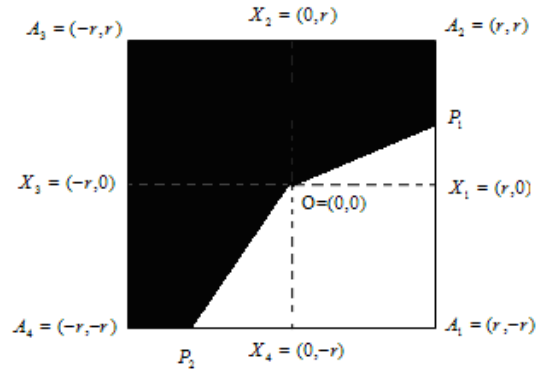
Şekil 4.3



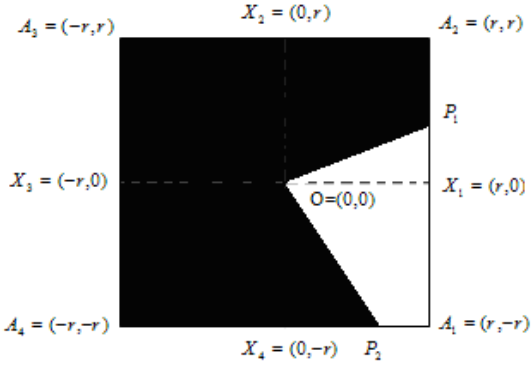
Şekil 4.4



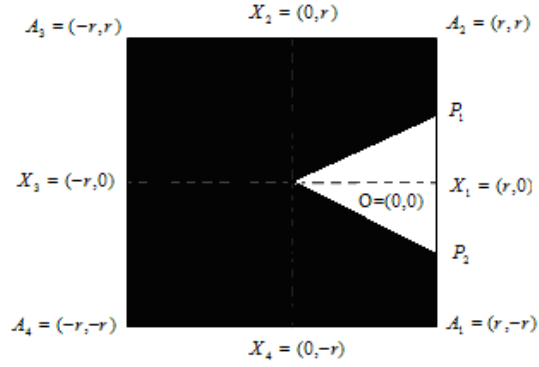
Şekil 4.5



Şekil 4.6



Şekil 4.7



Şekil 4.8

(i) Şekil 4.1 de görüldüğü gibi $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$ olsun.

Bu durumda $P_1 = (x_1, y_1) = (r, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (r, y_2)$ olur. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = \max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \}$$

$$d_M(P_1, P_2) = \max \{ |r - r|, |y_1 - y_2| \}$$

$$d_M(P_1, P_2) = \max \{ 0, |y_1 - y_2| \}$$

$$d_M(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$$

bulunur. $x_1 = x_2$ iken $y_2 > y_1$ olacağından $\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = y_2 - y_1$

dir. $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen OP_1P_2 maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1P_2) = A(OX_1P_2) - A(OX_1P_1)$$

$$A(OP_1P_2) = \frac{r}{2}(y_2 - y_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

$x_1 = x_2$ iken $y_1 > y_2$ olup, bu P_1 ve P_2 noktalarının yer değiştirmesine karşılık gelir. Bu durumda P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = y_1 - y_2$$

olmaktadır.

$\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen OP_1P_2 maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1P_2) = A(OX_1P_1) - A(OX_1P_2)$$

$$A(OP_1P_2) = \frac{r}{2}(y_1 - y_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

bulunur.

(ii) Şekil 4.2 de görüldüğü gibi $x_1, y_1, x_2, y_2 \geq 0$ olsun. Bu durumda

$P_1 = (x_1, y_1) = (r, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, r)$ dir. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_2) + d_M(A_2, P_2)$$

$$d_M(P_1, P_2) = \max\{|r - r|, |y_1 - r|\} + \max\{|r - x_2|, |r - r|\}$$

$$d_M(P_1, P_2) = |y_1 - r| + |r - x_2|$$

olmaktadır. $r > y_1$ ve $r > x_2$ olduğundan

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = 2r - y_1 - x_2$$

ve $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1A_2P_2$ maksimum daire diliminin alanı :

$$A(OP_1A_2P_2) = A(OX_1A_2X_2) - A(OX_1P_1) - A(OX_2P_2)$$

$$A(OP_1A_2P_2) = r.r - \frac{r.y_1}{2} - \frac{r.x_2}{2} = \frac{2r^2 - ry_1 - rx_2}{2} = \frac{r}{2}(2r - y_1 - x_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

bulunur. $x_1, y_1, x_2, y_2 \geq 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_2) + d_M(A_2, P_1) = r - y_2 + r - x_1 = 2r - y_2 - x_1$$

ve $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2 A_2 P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2 A_2 P_1) = A(OX_1 A_2 X_2) - A(OX_1 P_2) - A(OX_2 P_1)$$

$$A(OP_2 A_2 P_1) = r \cdot r - \frac{r \cdot y_2}{2} - \frac{r \cdot x_1}{2} = \frac{2r^2 - ry_2 - rx_1}{2} = \frac{r}{2} (2r - y_2 - x_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

olmaktadır.

(iii) Şekil 4.3 ile Şekil 4.2 nin uzunluk ve alanları eşittir.

(iv) Şekil 4.4 de görüldüğü gibi $x_1, y_1, y_2 \geq 0$ ve $x_2 < 0$ olsun. Bu durumda

$P_1 = (x_1, y_1) = (r, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (-r, y_2)$ dir. Buna göre $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_2) + d_M(A_2, A_3) + d_M(A_3, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = r - y_1 + 2r + r - y_2 = 4r - y_1 - y_2$$

dir. $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1 A_2 A_3 P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1 A_2 A_3 P_2) = A(OX_1 A_2 X_2) - A(OX_1 P_1) + A(OX_2 A_3 X_3) - A(OX_3 P_2)$$

$$A(OP_1 A_2 A_3 P_2) = r \cdot r - \frac{r \cdot y_1}{2} + r \cdot r - \frac{r \cdot y_2}{2} = \frac{r}{2} (4r - y_1 - y_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

ve $x_2, y_1, y_2 \geq 0$ ve $x_1 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = 4r - y_1 - y_2$$

olur. $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2 A_2 A_3 P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2 A_2 A_3 P_1) = r \cdot r - \frac{r \cdot y_2}{2} + r \cdot r - \frac{r \cdot y_1}{2} = \frac{r}{2} (4r - y_1 - y_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

dir.

(v) Şekil 4.5 ile Şekil 4.4 ün uzunluk ve alanları eşittir .

(vi) Şekil 4.6 da görüldüğü gibi $x_1, y_1 \geq 0$ ve $x_2, y_2 < 0$ olsun. Bu durumda

$P_1 = (x_1, y_1) = (r, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, -r)$ dir. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_2) + d_M(A_2, A_3) + d_M(A_3, A_4) + d_M(A_4, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = r - y_1 + 2r + 2r + r + x_2 = 6r - y_1 + x_2$$

ve $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1A_2A_3A_4P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1A_2A_3A_4P_2) = A(OX_1A_2X_2) - A(OX_1P_1) + A(OX_2A_3X_3) + A(OX_3A_4X_4) - A(OX_4P_2)$$

$$A(OP_1A_2A_3A_4P_2) = r \cdot r - \frac{r \cdot y_1}{2} + r \cdot r + r \cdot r - \frac{r \cdot (-x_2)}{2} = \frac{r}{2} (6r - y_1 + x_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

olur. $x_2, y_2 \geq 0$ ve $x_1, y_1 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_2) + d_M(A_2, A_3) + d_M(A_3, A_4) + d_M(A_4, P_1)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = r - y_2 + 2r + 2r + r + x_1 = 6r - y_2 + x_1$$

ve $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2A_2A_3A_4P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2A_2A_3A_4P_1) = A(OX_1A_2X_2) - A(OX_1P_2) + A(OX_2A_3X_3) + A(OX_3A_4X_4) - A(OX_4P_1)$$

$$A(OP_2A_2A_3A_4P_1) = r \cdot r - \frac{r \cdot y_2}{2} + r \cdot r + r \cdot r - \frac{r \cdot (-x_1)}{2} = \frac{r}{2} (6r - y_2 + x_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

biçimindedir.

(vii) Şekil 4.7 ile Şekil 4.6 nın uzunluk ve alanları eşittir.

(viii) Şekil 4.8 de görüldüğü gibi $x_1, y_1, x_2 \geq 0$ ve $y_2 < 0$ olsun. Bu durumda

$P_1 = (x_1, y_1) = (r, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (r, y_2)$ dir. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_2) + d_M(A_2, A_3) + d_M(A_3, A_4) + d_M(A_4, A_1) + d_M(A_1, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = r - y_1 + 2r + 2r + 2r + r + y_2 = 8r - y_1 + y_2$$

ve $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1 A_2 A_3 A_4 A_1 P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1 A_2 A_3 A_4 A_1 P_2) = A(A_1 A_2 A_3 A_4) - A(OX_1 P_1) - A(OX_1 P_2)$$

$$A(OP_1 A_2 A_3 A_4 A_1 P_2) = 4r^2 - \frac{r \cdot y_1}{2} - \frac{r \cdot (-y_2)}{2} = \frac{r}{2} (8r - y_1 + y_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

olur. $x_1, x_2, y_2 \geq 0$ ve $y_1 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine

karşılık gelen $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_2) + d_M(A_2, A_3) + d_M(A_3, A_4) + d_M(A_4, A_1) + d_M(A_1, P_1)$$

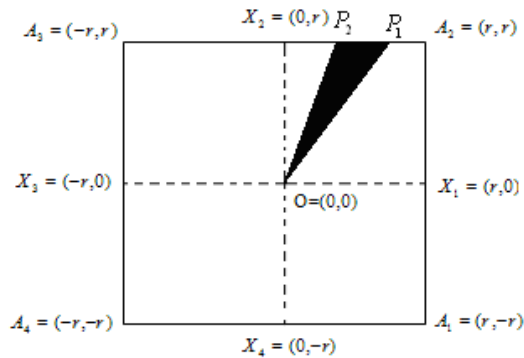
$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = r - y_2 + 2r + 2r + 2r + r + y_1 = 8r - y_2 + y_1$$

ve $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2 A_2 A_3 A_4 P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

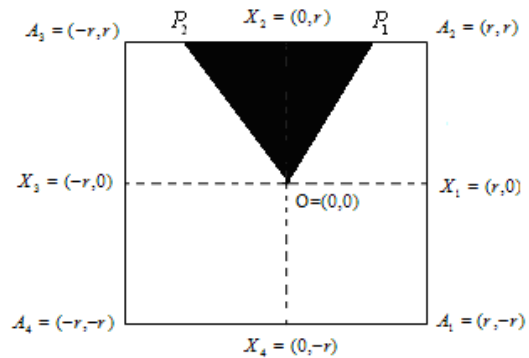
$$A(OP_2 A_2 A_3 A_4 A_1 P_1) = A(A_1 A_2 A_3 A_4) - A(OX_1 P_2) - A(OX_1 P_1)$$

$$A(OP_2 A_2 A_3 A_4 A_1 P_1) = 4r^2 - \frac{r \cdot y_2}{2} - \frac{r \cdot (-y_1)}{2} = \frac{r}{2} (8r - y_2 + y_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

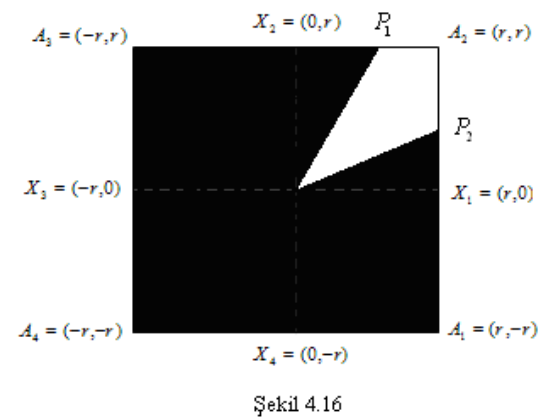
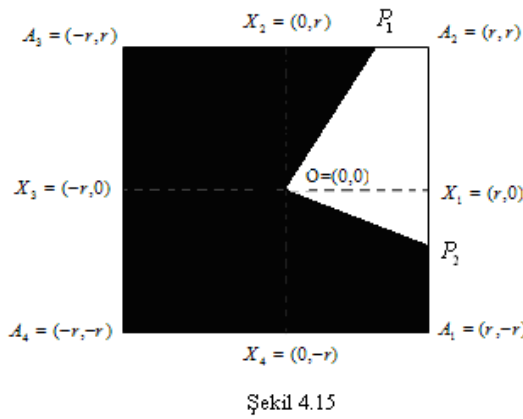
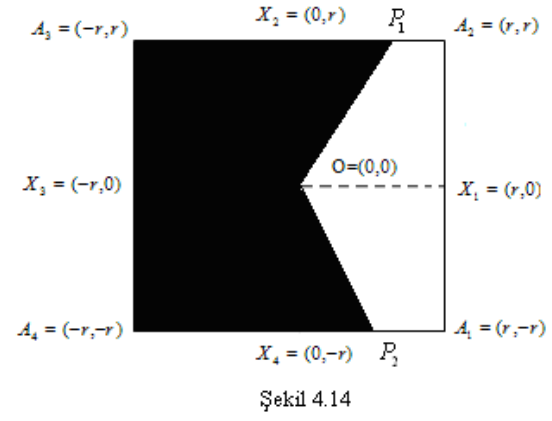
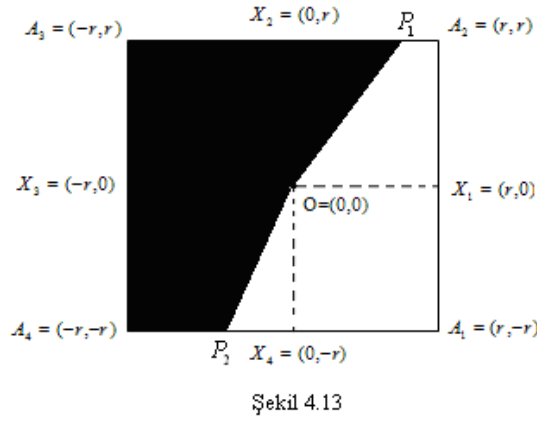
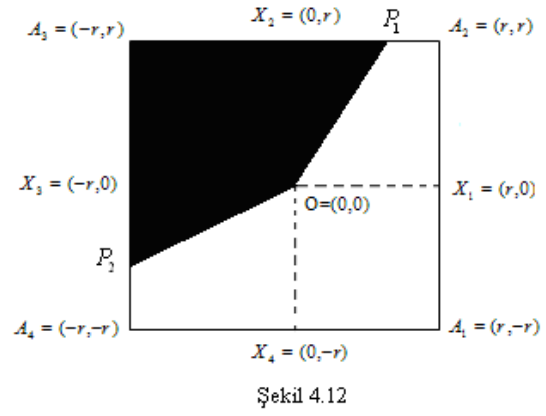
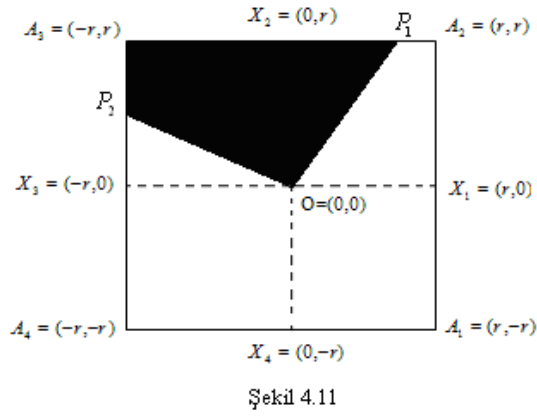
2)



Şekil 4.9



Şekil 4.10



(i) Şekil 4.9 da görüldüğü gibi $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, r)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, r)$ dir. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = \max \{ |x_1 - x_2|, |r - r| \} = |x_1 - x_2|$$

dir. $y_1 = y_2$ iken $x_1 > x_2$ olduğundan

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = x_1 - x_2 \text{ dir. } \widehat{P_1 P_2} \text{ yayına karşılık gelen } OP_1 P_2 \text{ maksimum daire diliminin alanı:}$$

$$A(OP_1 P_2) = A(OX_2 P_1) - A(OX_2 P_2) = \frac{r \cdot x_1}{2} - \frac{r \cdot x_2}{2} = \frac{r}{2} (x_1 - x_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

olur. $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = \max \{ |x_1 - x_2|, |r - r| \} = |x_1 - x_2|$$

ve $y_1 = y_2$ iken $x_2 > x_1$ olduğundan

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = x_2 - x_1 \text{ dir. } \widehat{P_1 P_2} \text{ yayına karşılık gelen } OP_1 P_2 \text{ maksimum daire diliminin alanı:}$$

$$A(OP_1 P_2) = A(OX_2 P_2) - A(OX_2 P_1) = \frac{r \cdot x_2}{2} - \frac{r \cdot x_1}{2} = \frac{r}{2} (x_2 - x_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

olmaktadır.

(ii) Şekil 4.10 ile Şekil 4.9 un uzunluk ve alanları eşittir.

(iii) Şekil 4.11 de görüldüğü gibi $x_1, y_1, y_2 \geq 0$ ve $x_2 < 0$ olsun. Bu durumda

$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, r)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (-r, y_2)$ dir. Buna göre $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_3) + d_M(A_3, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = x_1 + r + r - y_2 = 2r + x_1 - y_2$$

ve $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1 A_3 P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1 A_3 P_2) = A(OP_1 X_2) + A(OX_2 A_3 X_3) - A(OX_3 P_2)$$

$$A(OP_1 A_3 P_2) = \frac{r \cdot x_1}{2} + r \cdot r - \frac{r \cdot y_2}{2} = \frac{r}{2} (2r + x_1 - y_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

olmaktadır. $x_2, y_1, y_2 \geq 0$ ve $x_1 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_3) + d_M(A_3, P_1)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = x_2 + r + r - y_1 = 2r + x_2 - y_1$$

ve $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2 A_3 P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2 A_3 P_1) = A(OP_2 X_2) + A(OX_2 A_3 X_3) - A(OX_3 P_1)$$

$$A(OP_2 A_3 P_1) = \frac{r \cdot x_2}{2} + r \cdot r - \frac{r \cdot y_1}{2} = \frac{r}{2} (2r + x_2 - y_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

bulunur.

(iv) Şekil 4.12 ile Şekil 4.11 in uzunluk ve alanları eşittir.

(v) Şekil 4.13 de görüldüğü gibi $x_1, y_1 \geq 0$ ve $x_2, y_2 < 0$ olsun. Bu durumda

$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, r)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, -r)$ dir. Buna göre $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_3) + d_M(A_3, A_4) + d_M(A_4, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = x_1 + r + 2r + r + x_2 = 4r + x_1 + x_2$$

ve $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1 A_3 A_4 P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1 A_3 A_4 P_2) = A(OP_1 X_2) + A(OX_2 A_3 X_3) + A(OX_3 A_4 X_4) - A(OX_4 P_2)$$

$$A(OP_1 A_3 A_4 P_2) = \frac{r \cdot x_1}{2} + r \cdot r + r \cdot r - \frac{r \cdot (-x_2)}{2} = \frac{r}{2} (4r + x_1 + x_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

olmaktadır. $x_2, y_2 \geq 0$ ve $x_1, y_1 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = 4r + x_1 + x_2$$

ile $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2 A_3 A_4 P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2 A_3 P_1) = \frac{r}{2} (4r + x_1 + x_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

bulunur.

(vi) Şekil 4.14 ile Şekil 4.13 ün uzunluk ve alanları eşittir.

(vii) Şekil 4.15 de görüldüğü gibi $x_1, y_1, x_2 \geq 0$ ve $y_2 < 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, r)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (r, y_2)$ dir. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_3) + d_M(A_3, A_4) + d_M(A_4, A_1) + d_M(A_1, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = x_1 + r + 2r + 2r + r + y_2 = 6r + x_1 + y_2$$

ve $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1A_3A_4A_1P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1A_3A_4A_1P_2) = A(OP_1X_2) + A(OX_2A_3X_3) + A(OX_3A_4X_4) + A(OX_4A_1X_1) - d_M(OX_1P_2)$$

$$A(OP_1A_3A_4A_1P_2) = \frac{r \cdot x_1}{2} + r \cdot r + r \cdot r + r \cdot r - \frac{r \cdot (-y_2)}{2} = \frac{r}{2} (6r + x_1 + y_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

bulunur. $x_1, x_2, y_2 \geq 0$ ve $y_1 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_3) + d_M(A_3, A_4) + d_M(A_4, A_1) + d_M(A_1, P_1)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = x_2 + r + 2r + 2r + r + y_1 = 6r + x_2 + y_1$$

ile $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2A_3A_4A_1P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

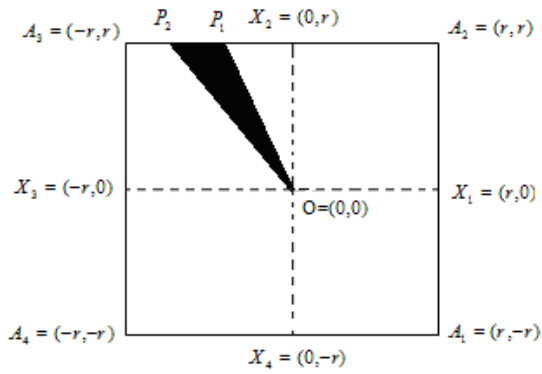
$$A(OP_2A_3A_4A_1P_1) = A(OP_2X_2) + A(OX_2A_3X_3) + A(OX_3A_4X_4) + A(OX_4A_1X_1) - d_M(OX_1P_1)$$

$$A(OP_2A_3A_4A_1P_1) = \frac{r \cdot x_2}{2} + r \cdot r + r \cdot r + r \cdot r - \frac{r \cdot (-y_1)}{2} = \frac{r}{2} (6r + x_2 + y_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

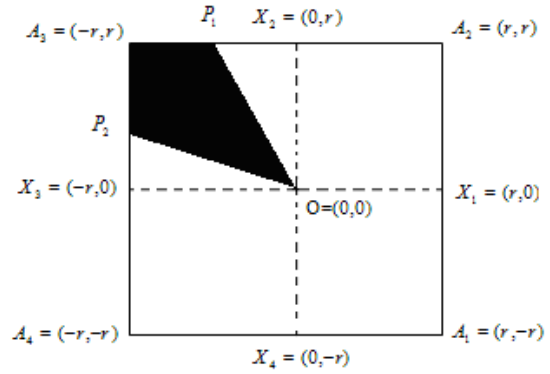
dir.

(viii) Şekil 4.16 ile Şekil 4.15 in uzunluk ve alanları eşittir.

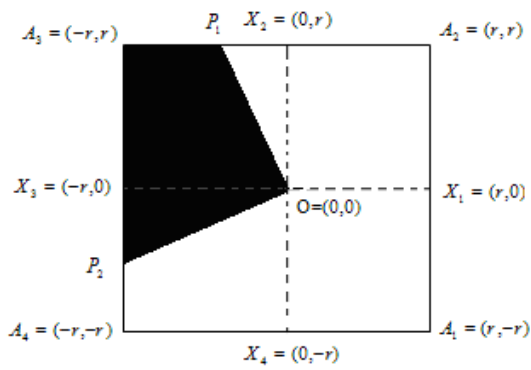
3)



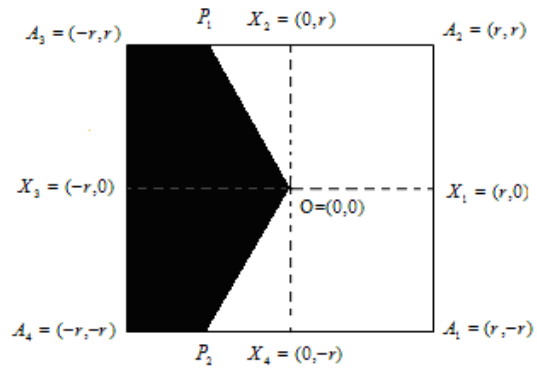
Şekil 4.17



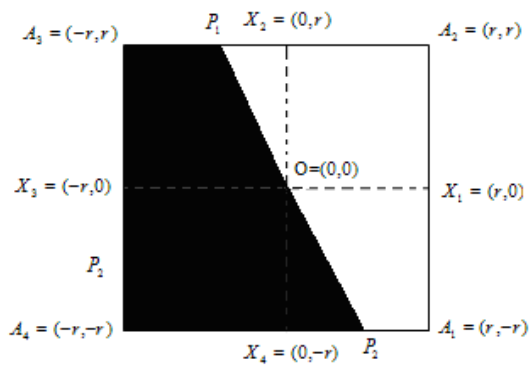
Şekil 4.18



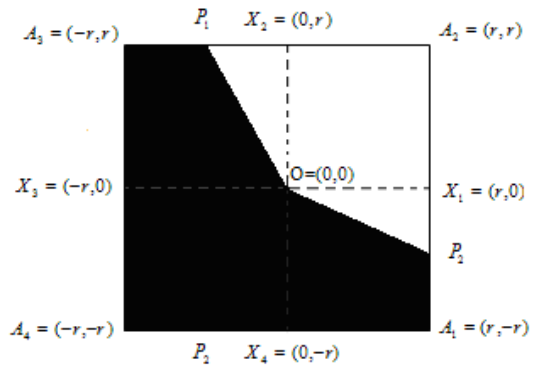
Şekil 4.19



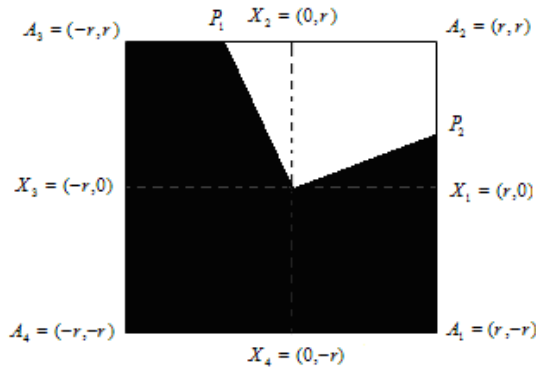
Şekil 4.20



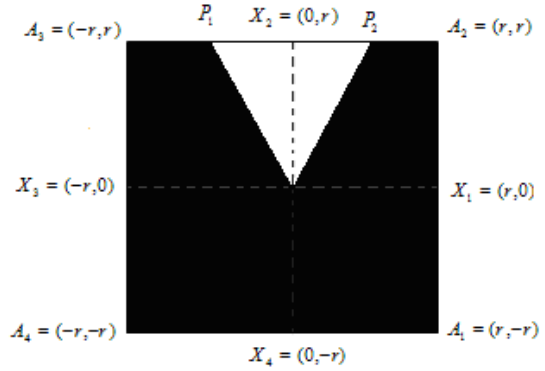
Şekil 4.21



Şekil 4.22



Şekil 4.23



Şekil 4.24

- (i) Şekil 4.17 ile Şekil 4.9 un uzunluk ve alanları eşittir.
- (ii) Şekil 4.18 ile Şekil 4.11 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (iii) Şekil 4.19 ile Şekil 4.11 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (iv) Şekil 4.20 ile Şekil 4.13 ün uzunluk ve alanları eşittir.
- (v) Şekil 4.21 ile Şekil 4.13 ün uzunluk ve alanları eşittir.
- (vi) Şekil 4.22 ile Şekil 4.15 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (vii) Şekil 4.23 ile Şekil 4.15 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (viii) Şekil 4.24 de görüldüğü gibi $y_1, x_2, y_2 \geq 0$ ve $x_1 < 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, r)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, r)$ dir. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_3) + d_M(A_3, A_4) + d_M(A_4, A_1) + d_M(A_1, A_2) + d_M(A_2, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = x_1 + r + 2r + 2r + 2r + r - x_2 = 8r + x_1 - x_2$$

ve $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1A_3A_4A_1A_2P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1A_3A_4A_1A_2P_2) = A(A_1A_2A_3A_4) - A(OX_2P_1) - A(OX_2P_2)$$

$$A(OP_1A_3A_4A_1A_2P_2) = 4r^2 - \frac{r \cdot (-x_1)}{2} - \frac{r \cdot x_2}{2} = \frac{r}{2} (8r + x_1 - x_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

$y_2, x_1, y_1 \geq 0$ ve $x_2 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_3) + d_M(A_3, A_4) + d_M(A_4, A_1) + d_M(A_1, A_2) + d_M(A_2, P_1)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = x_2 + r + 2r + 2r + 2r + r - x_1 = 8r + x_2 - x_1$$

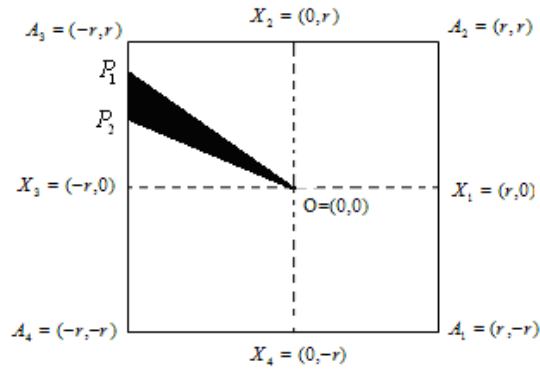
ile $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2A_3A_4A_1A_2P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2A_3A_4A_1A_2P_1) = A(A_1A_2A_3A_4) - A(OX_2P_2) - A(OX_2P_1)$$

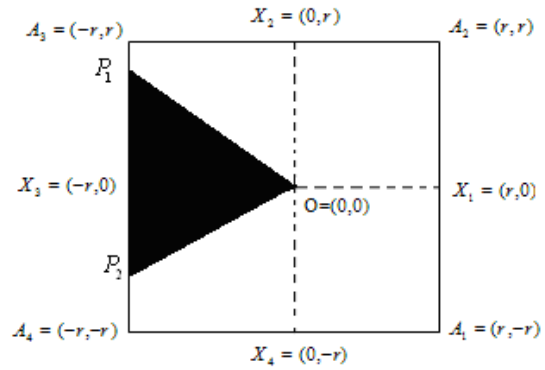
$$A(OP_2A_3A_4A_1A_2P_1) = 4r^2 - \frac{r \cdot (-x_2)}{2} - \frac{r \cdot x_1}{2} = \frac{r}{2} (8r + x_2 - x_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

olur.

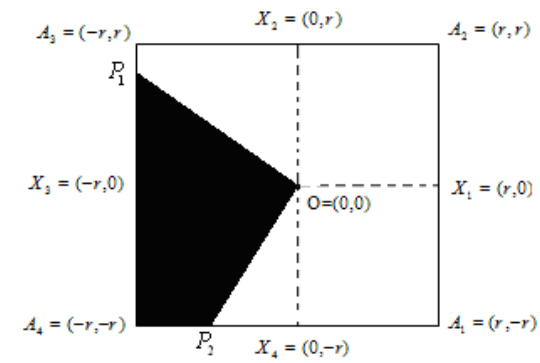
4)



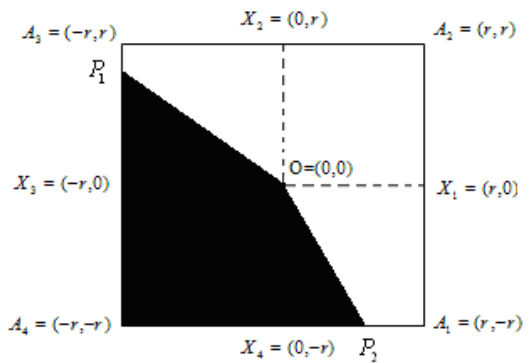
Şekil 4.25



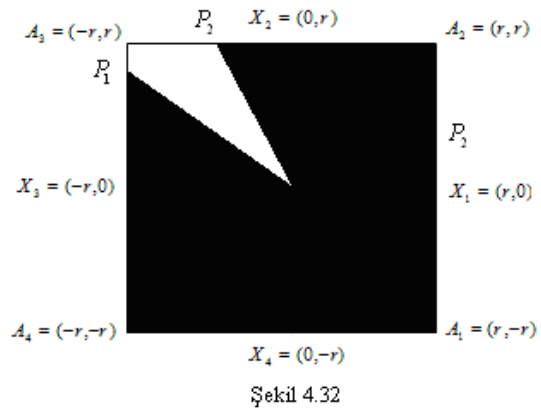
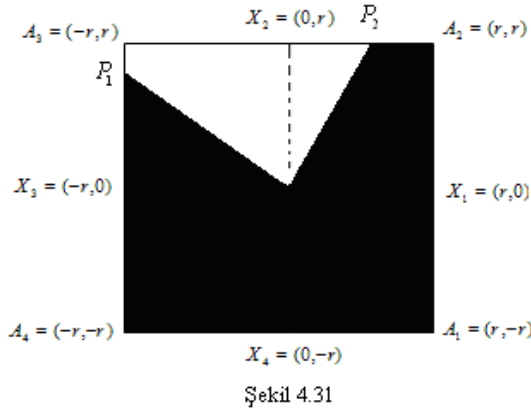
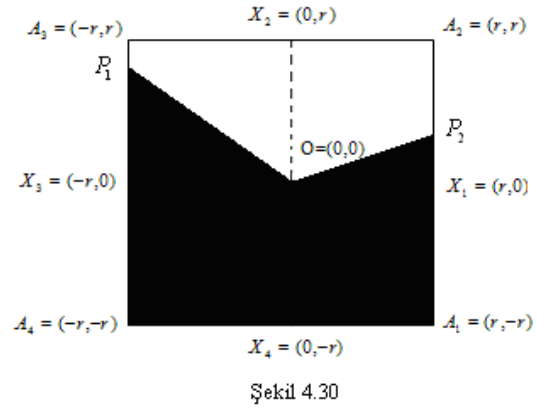
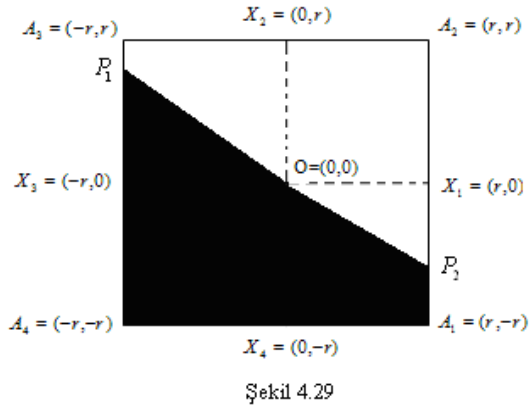
Şekil 4.26



Şekil 4.27



Şekil 4.28



- (i) Şekil 4.25 ile Şekil 4.1 nin uzunluk ve alanları eşittir.
(ii) Şekil 4.26 ile Şekil 4.11 in uzunluk ve alanları eşittir.
(iii) Şekil 4.27 de görüldüğü gibi $y_1 \geq 0$ ve $x_1, x_2, y_2 < 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1, y_1) = (-r, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, -r)$ dir. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_4) + d_M(A_4, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = r + y_1 + r + x_2 = 2r + y_1 + x_2$$

ve $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1A_4P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1A_4P_2) = A(OP_1X_3) + A(OX_3A_4X_4) - A(OP_2X_4)$$

$$A(OP_1A_4P_2) = \frac{r \cdot y_1}{2} + r \cdot r - \frac{r \cdot (-x_2)}{2} = \frac{r}{2} (2r + y_1 + x_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

olur. $y_2 \geq 0$ ve $x_1, x_2, y_1 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_4) + d_M(A_4, P_1)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = r + y_2 + r + x_1 = 2r + y_2 + x_1$$

ile $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2A_4P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2A_4P_1) = A(OP_2X_3) + A(OX_3A_4X_4) - A(OP_1X_4)$$

$$A(OP_2A_4P_1) = \frac{r \cdot y_2}{2} + r \cdot r - \frac{r \cdot (-x_1)}{2} = \frac{r}{2} (2r + y_2 + x_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

bulunur.

(iv) Şekil 4.28 ile Şekil 4.27 in uzunluk ve alanları eşittir.

(v) Şekil 4.29 de görüldüğü gibi $y_1, x_2 \geq 0$ ve $x_1, y_2 < 0$ olsun. Bu durumda

$P_1 = (x_1, y_1) = (-r, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (r, y_2)$ dir. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_4) + d_M(A_4, A_1) + d_M(A_1, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = r + y_1 + 2r + r + y_2 = 4r + y_1 + y_2$$

ve $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1A_4A_1P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1A_4A_1P_2) = A(OP_1X_3) + A(OX_3A_4X_4) + A(OX_4A_1X_1) - A(OP_2X_1)$$

$$A(OP_1A_4A_1P_2) = \frac{r \cdot y_1}{2} + r \cdot r + r \cdot r - \frac{r \cdot (-y_2)}{2} = \frac{r}{2} (4r + y_1 + y_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

$y_2, x_1 \geq 0$ ve $x_2, y_1 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_4) + d_M(A_4, A_1) + d_M(A_1, P_1)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = r + y_2 + 2r + r + y_1 = 4r + y_1 + y_2$$

ile $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2 A_4 A_1 P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2 A_4 A_1 P_1) = A(OP_2 X_3) + A(OX_3 A_4 X_4) + A(OX_4 A_1 X_1) - A(OP_1 X_1)$$

$$A(OP_2 A_4 A_1 P_1) = \frac{r \cdot y_2}{2} + r \cdot r + r \cdot r - \frac{r \cdot (-y_1)}{2} = \frac{r}{2} (4r + y_1 + y_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

olmaktadır.

(vi) Şekil 4.30 ile Şekil 4.29 un uzunluk ve alanları eşittir.

(vii) Şekil 4.31 de görüldüğü gibi $y_1, y_2, x_2 \geq 0$ ve $x_1 < 0$ olsun. Bu durumda

$$P_1 = (x_1, y_1) = (-r, y_1) \text{ ve } P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, r)$$

dir. Buna göre $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_4) + d_M(A_4, A_1) + d_M(A_1, A_2) + d_M(A_2, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = y_1 + r + 2r + 2r + r - x_2 = 6r + y_1 - x_2$$

ve $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1 A_4 A_1 A_2 P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1 A_4 A_1 A_2 P_2) = A(A_1 A_2 A_3 A_4) - A(OX_2 P_2) - A(OX_2 A_3 X_3) + A(OX_3 P_1)$$

$$A(OP_1 A_4 A_1 A_2 P_2) = 4r^2 - \frac{r \cdot x_2}{2} - r \cdot r + \frac{r \cdot y_1}{2} = \frac{r}{2} (6r + y_1 - x_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

olur. $x_1, y_1, y_2 \geq 0$ ve $x_2 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine

karşılık gelen $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_4) + d_M(A_4, A_1) + d_M(A_1, A_2) + d_M(A_2, P_1)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = y_2 + r + 2r + 2r + r - x_1 = 6r + y_2 - x_1$$

ile $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2 A_4 A_1 A_2 P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

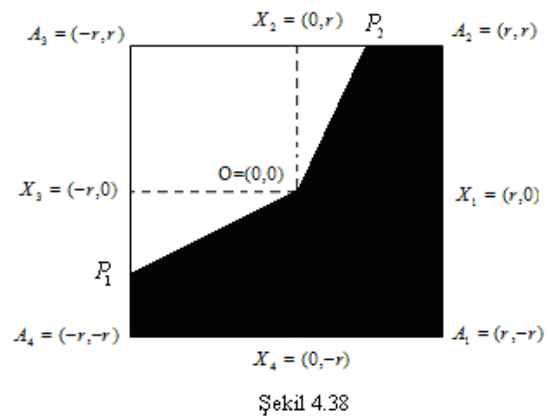
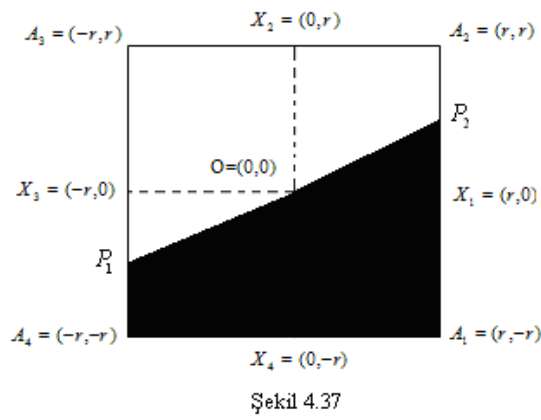
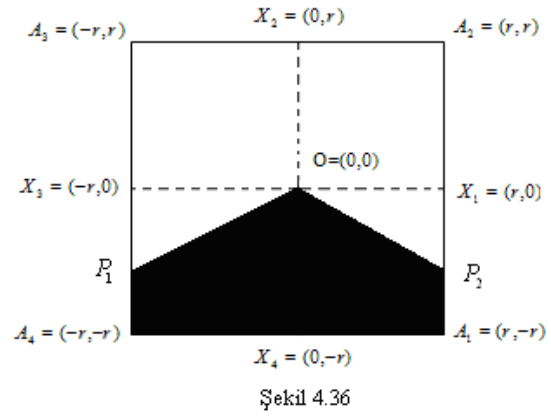
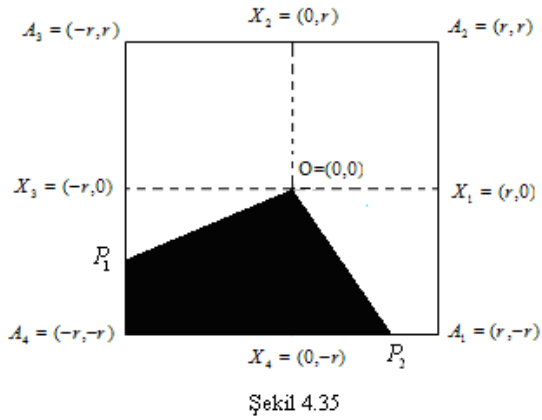
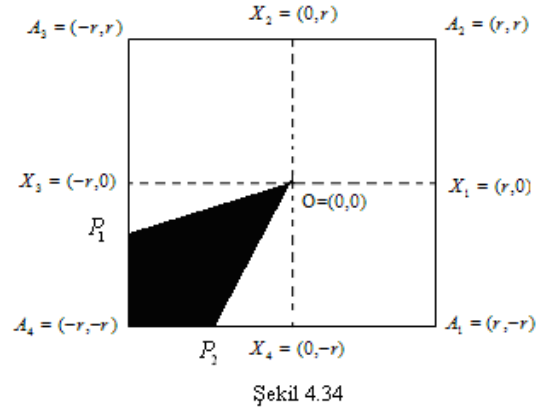
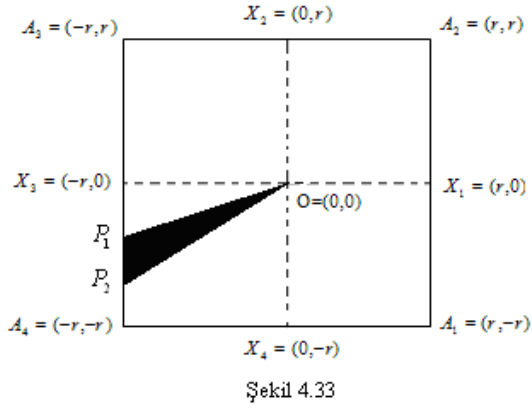
$$A(OP_2 A_4 A_1 A_2 P_1) = A(A_1 A_2 A_3 A_4) - A(OX_2 P_1) - A(OX_2 A_3 X_3) + A(OX_3 P_2)$$

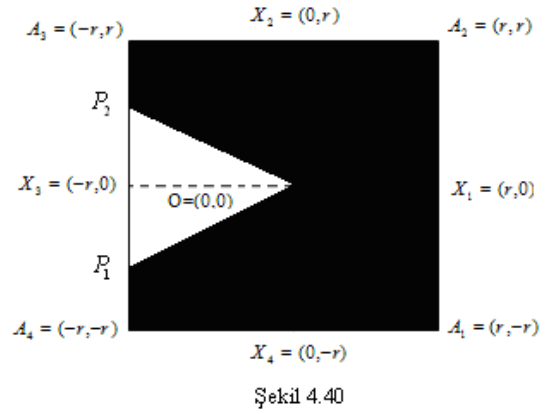
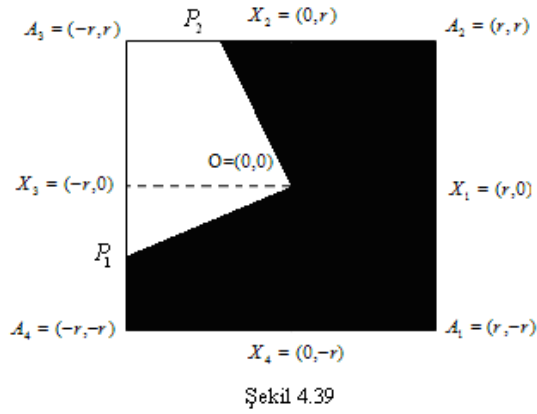
$$A(OP_2 A_4 A_1 A_2 P_1) = 4r^2 - \frac{r \cdot x_1}{2} - r \cdot r + \frac{r \cdot y_2}{2} = \frac{r}{2} (6r + y_2 - x_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

bulunur.

(viii) Şekil 4.32 ile Şekil 4.31 in uzunluk ve alanları eşittir.

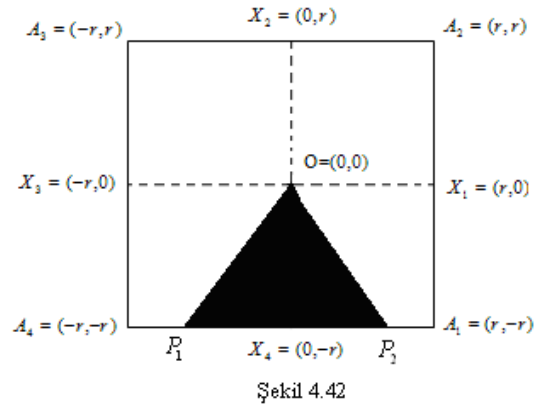
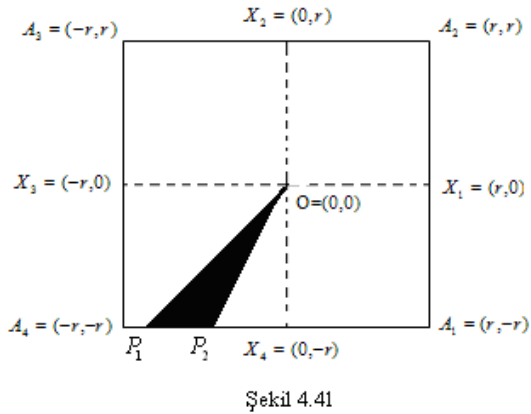
5)

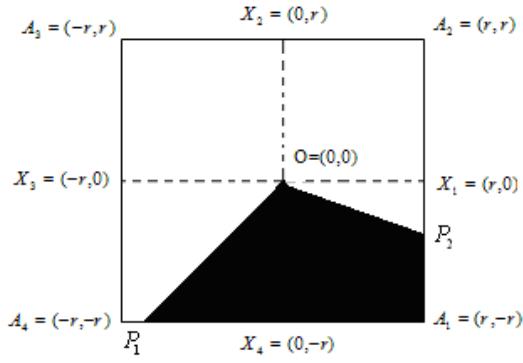




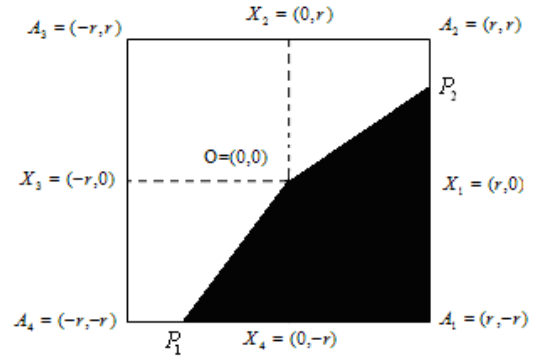
- (i) Şekil 4.33 ile Şekil 4.1 nin uzunluk ve alanları eşittir.
- (ii) Şekil 4.34 ile Şekil 4.27 nin uzunluk ve alanları eşittir.
- (iii) Şekil 4.35 ile Şekil 4.27 nin uzunluk ve alanları eşittir.
- (iv) Şekil 4.36 ile Şekil 4.29 un uzunluk ve alanları eşittir.
- (v) Şekil 4.37 ile Şekil 4.29 un uzunluk ve alanları eşittir.
- (vi) Şekil 4.38 ile Şekil 4.31 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (vii) Şekil 4.39 ile Şekil 4.31 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (viii) Şekil 4.40 ile Şekil 4.8 in uzunluk ve alanları eşittir.

6)

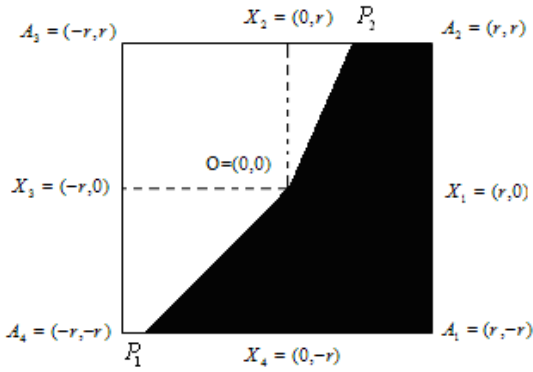




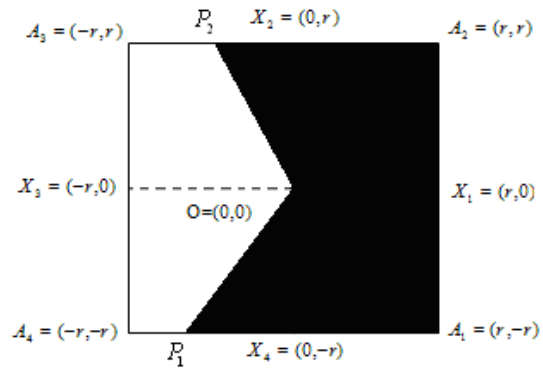
Şekil 4.43



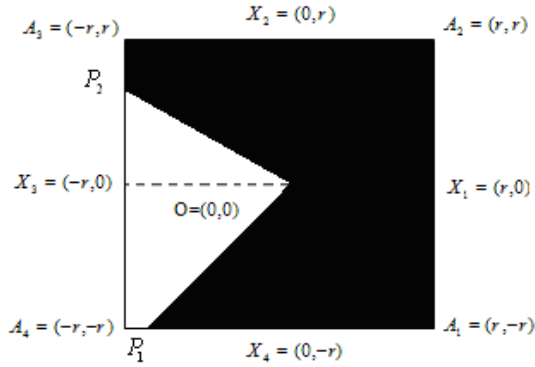
Şekil 4.44



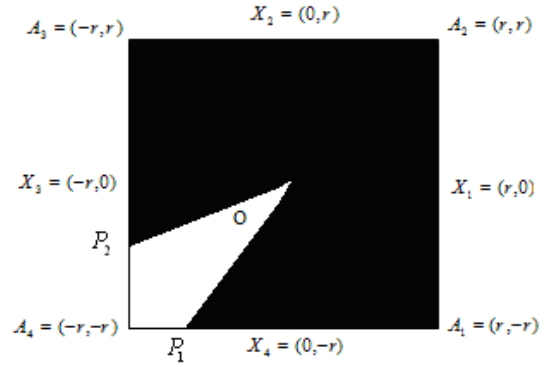
Şekil 4.45



Şekil 4.46



Şekil 4.47



Şekil 4.48

- (i) Şekil 4.41 ile Şekil 4.9 un uzunluk ve alanları eşittir.
- (ii) Şekil 4.42 ile Şekil 4.9 un uzunluk ve alanları eşittir.
- (iii) Şekil 4.43 de görüldüğü gibi $x_2 \geq 0$ ve $x_1, y_1, y_2 < 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, -r)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (r, y_2)$ dir. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_1) + d_M(A_1, A_2)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = r - x_1 + r + y_2 = 2r - x_1 + y_2$$

ve $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1 A_1 P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1 A_1 P_2) = A(OX_4 P_1) + A(OX_4 A_1 X_1) - A(OP_2 X_1)$$

$$A(OP_1 A_1 P_2) = \frac{r(-x_1)}{2} + r \cdot r - \frac{r(-y_2)}{2} = \frac{r}{2} (2r - x_1 + y_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

olmaktadır. $x_1 \geq 0$ ve $x_2, y_1, y_2 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_1) + d_M(A_1, P_1)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = r - x_2 + r + y_1 = 2r - x_2 + y_1$$

bulunur. Buna göre $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2 A_1 P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2 A_1 P_1) = A(OX_4 P_2) + A(OX_4 A_1 X_1) - A(OP_1 X_1)$$

$$A(OP_2 A_1 P_1) = \frac{r(-x_2)}{2} + r \cdot r - \frac{r(-y_1)}{2} = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M$$

olur.

(iv) Şekil 4.44 ile Şekil 4.43 ün uzunluk ve alanları eşittir.

(v) Şekil 4.45 de görüldüğü gibi $x_2, y_2 \geq 0$ ve $x_1, y_1 < 0$ olsun. Bu durumda

$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, -r)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, r)$ dir. Buna göre $P_1 P_2$ maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_1) + d_M(A_1, A_2) + d_M(A_2, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1 P_2} \right|_M = r - x_1 + 2r + r - x_2 = 4r - x_1 - x_2$$

ve $\widehat{P_1 P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1 A_1 A_2 P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1 A_1 A_2 P_2) = A(OX_4 P_1) + A(OX_4 A_1 X_1) + A(OX_1 A_2 X_2) - A(OX_2 P_2)$$

$$A(OP_1A_1A_2P_2) = \frac{r \cdot x_1}{2} + r \cdot r + r \cdot r - \frac{r \cdot x_2}{2} = \frac{r}{2} (4r - x_1 - x_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

olmaktadır. $x_1, y_1 \geq 0$ ve $x_2, y_2 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_1) + d_M(A_1, A_2) + d_M(A_2, P_1)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = r - x_2 + 2r + r - x_1 = 4r - x_1 - x_2$$

ile $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2A_1A_2P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2A_1A_2P_1) = A(OX_4P_2) + A(OX_4A_1X_1) + A(OX_1A_2X_2) - A(OX_2P_1)$$

$$A(OP_2A_1A_2P_1) = \frac{r(-x_2)}{2} + r \cdot r + r \cdot r - \frac{r \cdot x_1}{2} = \frac{r}{2} (4r - x_1 - x_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

olur.

(vi) Şekil 4.46 ile Şekil 4.45 ün uzunluk ve alanları eşittir.

(vii) Şekil 4.47 de görüldüğü gibi $y_2 \geq 0$ ve $x_1, x_2, y_1 < 0$ olsun. Bu durumda

$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, -r)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (-r, y_2)$ dir. Buna göre P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_1, A_1) + d_M(A_1, A_2) + d_M(A_2, A_3) + d_M(A_3, P_2)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = r - x_1 + 2r + 2r + r - y_2 = 6r - x_1 - y_2$$

ve $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_1A_1A_2A_3P_2$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_1A_1A_2A_3P_2) = A(OX_4P_1) + A(OX_4A_1X_1) + A(OX_1A_2X_2) + A(OX_2A_3X_3) - A(OX_3P_2)$$

$$A(OP_1A_1A_2A_3P_2) = \frac{r(-x_1)}{2} + r \cdot r + r \cdot r + r \cdot r - \frac{r \cdot y_2}{2} = \frac{r}{2} (6r - x_1 - y_2) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

$y_1 \geq 0$ ve $x_1, x_2, y_1 < 0$ olup P_1 ve P_2 noktalarının yerlerinin değiştirilmesine karşılık gelen P_1P_2 maksimum yay uzunluğu

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, A_1) + d_M(A_1, A_2) + d_M(A_2, A_3) + d_M(A_3, P_1)$$

$$\left| \widehat{P_1P_2} \right|_M = r - x_2 + 2r + 2r + r - y_1 = 6r - x_2 - y_1$$

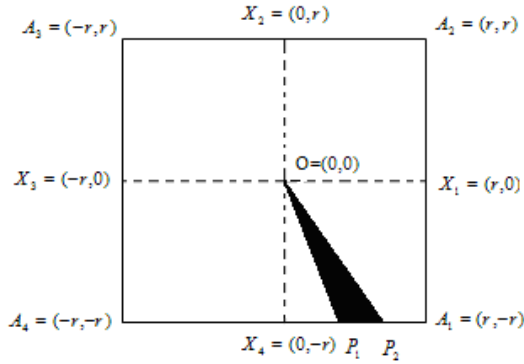
ile $\widehat{P_1P_2}$ yayına karşılık gelen $OP_2A_1A_2A_3P_1$ maksimum daire diliminin alanı:

$$A(OP_2A_1A_2A_3P_1) = A(OX_4P_2) + A(OX_4A_1X_1) + A(OX_1A_2X_2) + A(OX_2A_3X_3) - A(OX_3P_1)$$

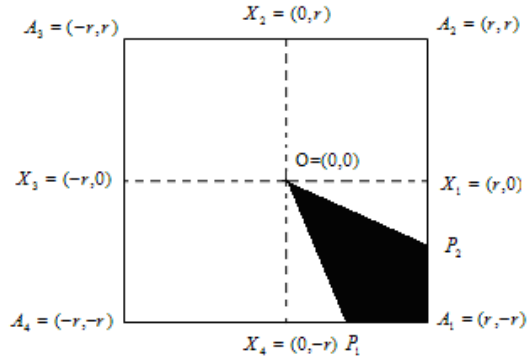
$$A(OP_2A_1A_2A_3P_1) = \frac{r(-x_2)}{2} + r.r + r.r + r.r - \frac{r.y_1}{2} = \frac{r}{2} (6r - x_2 - y_1) = \frac{r}{2} \left| \widehat{P_1P_2} \right|_M$$

(viii) Şekil 4.48 ile Şekil 4.47 nin uzunluk ve alanları eşittir.

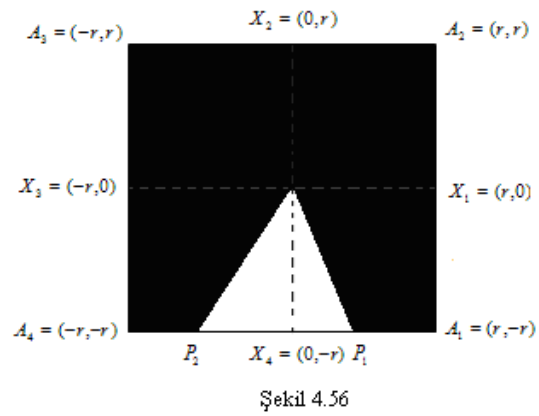
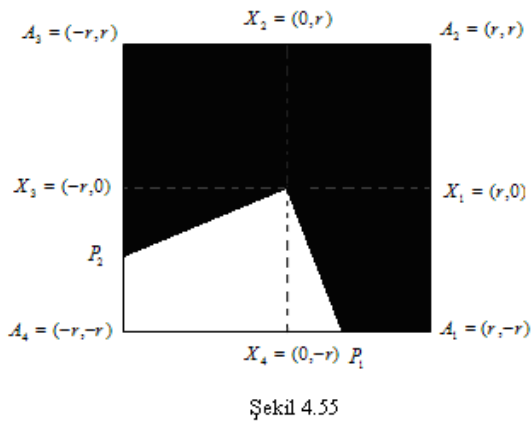
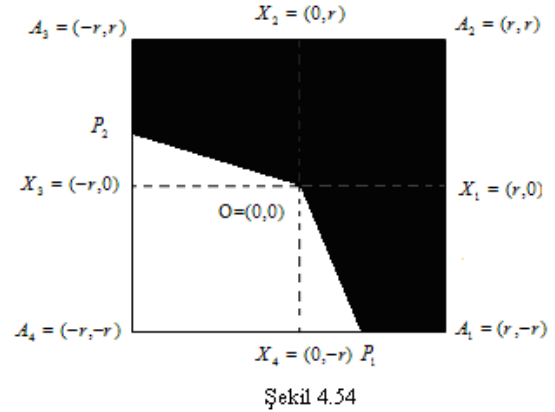
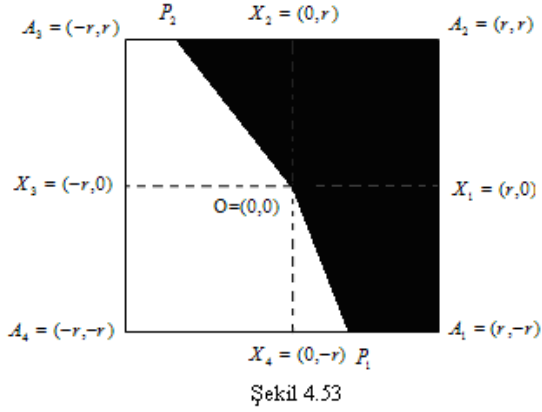
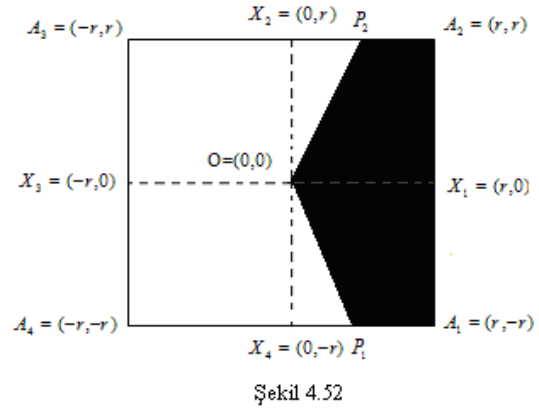
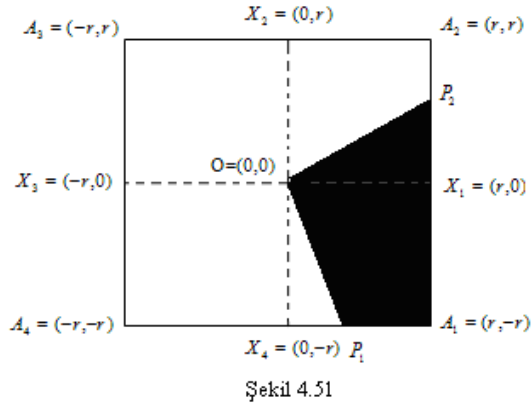
7)



Şekil 4.49



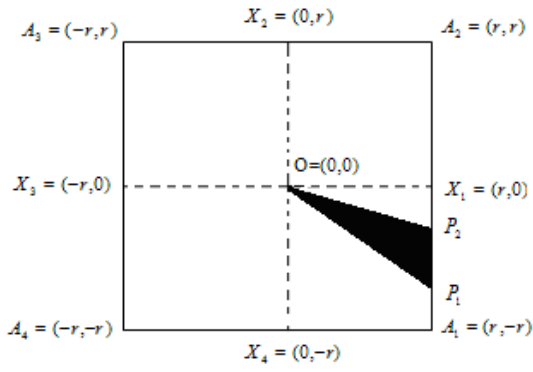
Şekil 4.50



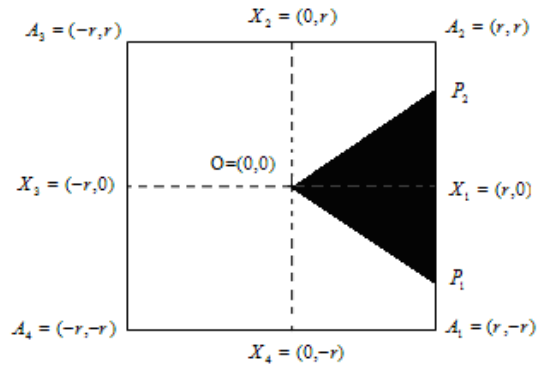
- (i) Şekil 4.49 ile Şekil 4.9 un uzunluk ve alanları eşittir.
- (ii) Şekil 4.50 ile Şekil 4.43 ün uzunluk ve alanları eşittir.
- (iii) Şekil 4.51 ile Şekil 4.43 ün uzunluk ve alanları eşittir.

- (iv) Şekil 4.52 ile Şekil 4.45 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (v) Şekil 4.53 ile Şekil 4.45 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (vi) Şekil 4.54 ile Şekil 4.47 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (vii) Şekil 4.55 ile Şekil 4.47 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (viii) Şekil 4.56 ile Şekil 4.24 ün uzunluk ve alanları eşittir.

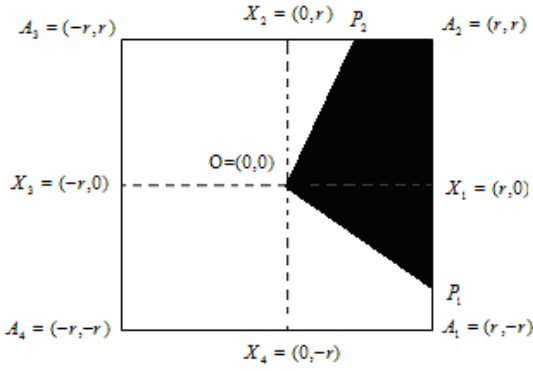
8)



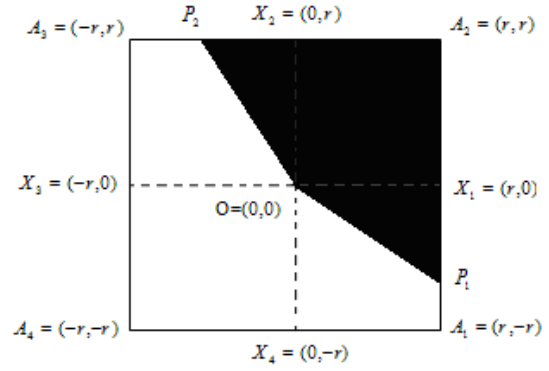
Şekil 4.57



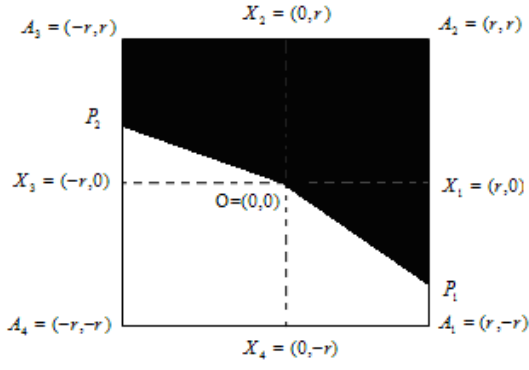
Şekil 4.58



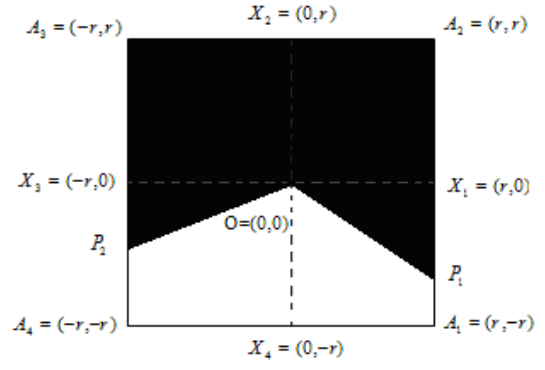
Şekil 4.59



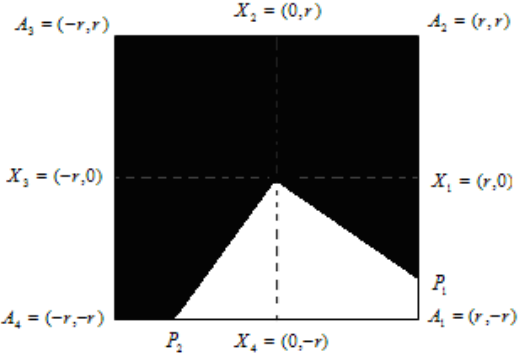
Şekil 4.60



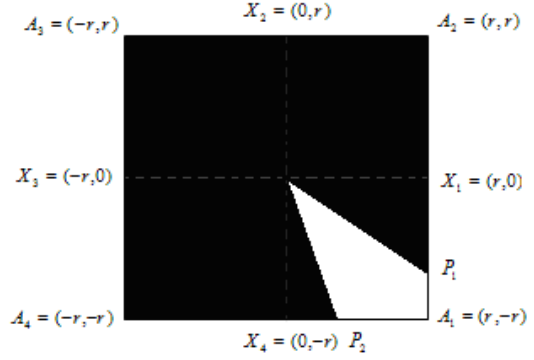
Şekil 4.61



Şekil 4.62



Şekil 4.63



Şekil 4.64

- (i) Şekil 4.57 ile Şekil 4.1 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (ii) Şekil 4.58 ile Şekil 4.1 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (iii) Şekil 4.59 ile Şekil 4.3 ün uzunluk ve alanları eşittir.
- (iv) Şekil 4.60 ile Şekil 4.3 ün uzunluk ve alanları eşittir.
- (v) Şekil 4.61 ile Şekil 4.5 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (vi) Şekil 4.62 ile Şekil 4.5 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (vii) Şekil 4.63 ile Şekil 4.6 in uzunluk ve alanları eşittir.
- (viii) Şekil 4.64 ile Şekil 4.6 in uzunluk ve alanları eşittir.

Sonuç 4.1: Düzlemde O merkezli r yarıçaplı maksimum çemberi üzerindeki herhangi bir maksimum yay uzunluğunun $\frac{r}{2}$ katı, aynı yaya karşılık gelen maksimum daire diliminin alanına eşittir. Aynı zamanda düzlemdeki ötelemeler, maksimum uzunluğunu değiştirirken alanları değiştirmez bıraktığından herhangi bir M merkezli, r yarıçaplı maksimum çemberinde de her maksimum yay uzunluğunun $\frac{r}{2}$ katı, yaya karşılık gelen maksimum daire diliminin alanına eşittir.

KAYNAKLAR

- [1] Chen, G.: Lines and Circles in the Taxicab Geometry, Master Thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Central Missouri State University,1992.
- [2] EKMEKÇİ, S. : Taksi Çemberleriyle İlgili Özellikler , Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (2001).
- [3] KAYA R. : Analitik Geometri,Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, (2002).
- [4] KRAUSE, E.F. : Taxicab Geometry,Addison-Wesley,Menlo Park (1975).
- [5] MARTİN, G.E. : The Foundation of geometry and Non-Euclidean Plane, Springer, 1998.
- [6] MİLLMAN,R.S.,PARKER,G.D. :Geometry a MetricApproach with Models, Springer,(1991).
- [7] SALİHOVA,S. :Maksimum Metriğinin Geometrisi Üzerine, Doktora Tezi, OGÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, (2006) .
- [8] SOWELL, K.O. :Taxicab Geometry-A New Slant, Mathematics Magazine, 62, 238-248 (1989) .
- [9] TIN, S. , So, S.S and CHEN, G. : Concerning Circles in Taxicab Geometry, Int. J. Math Educ. Sci. Technol. ,Vol.28, No.5, 727-733 (1997).
- [10] Kaya, R. : Projektif Geometri, Anadolu Üniversitesi yayınları, no. 551. (1992).
- [11] Demirel, O. : Hiperbolik Geometrinin Poincare Yuvar Modeli Üzerine Doktora Tezi, Afyonkocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, (2010).
- [12] Kaya, R. : Geçmişten Günümüze Geometri Öğretimi ve Öklid Dışı Geometrilerin Yeri ve Önemi, Matematik Derneği, (2004).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hüseyin ÇAPUTCU

Doğum Yeri : Afyonkarahisar

Doğum Tarihi : 27.10.1983

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : İstanbul Bahçelievler Dede Korkut Anadolu Lisesi, 2002.

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Uşak Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, 2007.