POİNCARÉ KONİKLERİNİN DENKLEMLERİ VE SINIFLANDIRILMASI

Nilgün SÖNMEZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, AFYON

ÖZET

Poincaré üst yarı düzlem geometrisi Henri Poincaré tarafından ortaya atılmıştır. Poincaré üst yarı düzlem geometrisi, Öklid düzlem geometrisinin on üç aksiyomu içinden paralellik postulatını sağlamadığından dolayı, Öklidyen olmayan bir geometridir [2,4,9]. Bu geometride, doğrular ve uzaklık fonksiyonu farklı olduğundan Öklid düzlemindeki uzaklık kavramıyla ilgili konuların Poincaré benzerlerini çalışmak oldukça ilginçtir. Üstelik iki nokta arasındaki d_H Poincaré uzaklığı, Öklidyen uzaklıktan daha kısa olan bir uzaklıktır. Bu konularla ilgili benzer çalışmaların, Taksi geometrisi için de yapıldığı [1,2,3,5,6,7] ve Poincaré üst yarı düzlemiyle ilgili bazı problemlerin de çalışıldığı bilinmektedir [8,10]. Bu çalışmada Poincaré yarı düzlem geometrisi üzerine yaptığım doktora tezinin [8] bir kısmı olan *iki odaklı Poincaré konikleri ve odak doğrultman Poincaré konikleri* konusu incelenmektedir.

Anahtar Kelime: Poincaré uzaklığı, Poincaré üst yarı düzlemi, Poincaré doğruları

GENERAL EQUATION FOR POINCARE CONICS AND THEIR CLASSIFICATION

ABSTRACT

The Poincaré upper half plane geometry has been introduced by Henri Poincaré. Poincaré upper half plane geometry is a non-Euclidean, since it fails to satisfy the parallel postulate within the thirteen axioms of the Euclidean plane geometry [2,4,9]. In Poincaré upper half plane geometry, the lines and the function of distance are different, therefore, it seems

interesting to study the Poincaré analogues of the topics that include the concept of distance in the Euclidean geometry. Besides, the Poincaré distance d_H between two points is the lenght of the shortest than Euclidean distance. As it is known there are alternative approachs to obtain conics in the Taxicab geometry [1,2,3,5,6,7] and a few problems related with the Poincaré upper half plane geometry have been studied and developed [8,10]. In this work, we examine *Poincaré conics with two-foci and focus directed Poincaré conics* , which are included in my Phd-thesis [8].

Key Words: Poincaré distance, Poincar'e upper half plane, Poincar'e lines.

1. GİRİŞ

Poincaré üst yarı düzlemindeki noktalar, $\Re^2$ Öklid analitik düzleminin üst yarısındaki noktalarla aynı olmasına karşın, doğrular ve iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonu farklıdır. Poincaré üst yarı düzlemindeki doğrular,

$${}_aL=\{(x,y)\in\Re^2 \mid x=a,\ y>0,\ a\in\Re,\ a\ sabit\}\ \text{yarı-doğrular}$$

(I. Tip Doğrular)

ve

$${}_cL_r=\{(x,y)\in\Re^2 \mid (x-c)^2+y^2=r^2,\ y>0,\ c,r\in\Re,\ c,r\ sabit\}$$

yarı-çemberler
(II. Tip Doğrular)

şeklinde tanımlanmaktadır. $A=(x_1, y_1)$ ve $B=(x_2, y_2)$ herhangi iki nokta ise, bu takdirde verilen noktalar arasındaki Poincaré uzaklığı,

$$d_H(A,B)=\begin{cases}\left|\ln\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)\right| & x_1=x_2\ ise\\[2ex] \left|\ln\left(\dfrac{y_2(x_1-c+r)}{y_1(x_2-c+r)}\right)\right| & x_1\neq x_2\ ise\end{cases}$$

biçimindedir.

$$c = \left(y_2^{\,2} - y_1^{\,2} + x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right) \Big/ 2\left(x_2 - x_1\right)$$

$$r = \sqrt{\left(x_1 - c\right)^2 + y_1^{\,2}} = \sqrt{\left(x_2 - c\right)^2 + y_2^{\,2}}$$

2. POİNCARÉ KONİKLERİNİN DENKLEMLERİ

Bu bölümde, iki-odaklı ve odak-doğrultman Poincaré koniklerinin denklemleri incelenmiştir.

Yardımcı Teorem 1: Poincar'e üst yarı düzleminde, herhangi bir P=(x_1,y_1) noktasından geçen ve L=${}_a$L veya L=${}_c$L${}_r$ ye dik olan bir doğru çizelim. P noktasının doğruları kestiği noktaya X=(x_0,y_0) diyelim. Bu takdirde P=(x_1,y_1) noktasının ${}_a$L veya ${}_c$L${}_r$ doğrularına olan d_H uzaklıkları,

$$d_H\left(P,L\right) = \begin{cases} \left|\ln\left(y_1 \big/ y_0\right)\right|, & L={}_cL_r \quad ve \quad x_1 = c \quad ise \\ \left|\ln \dfrac{y_0\left(x_1 - k + t\right)}{y_1\left(x_0 - k + t\right)}\right|, & diger \quad hallerde \end{cases}$$

formülleri ile bellidir.

$$k = \frac{y_1^{\,2} - y_0^{\,2} + x_1^{\,2} - x_0^{\,2}}{2\left(x_1 - x_0\right)},$$

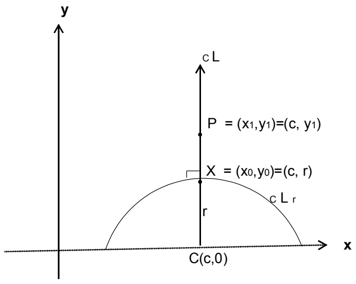
$$t = \sqrt{\left(x_1 - k\right)^2 + y_1^{\,2}} = \sqrt{\left(x_0 - k\right)^2 + y_0^{\,2}}$$

İspat: i) L= ${}_c$L${}_r$ ve x_1=c ise;

P=(x_1,y_1) =(c, y_1) noktasından geçen ve ${}_c$L${}_r$ doğrusuna dik olan doğru I tipindeki ${}_a$L doğrusudur. ${}_a$L doğrusu ile ${}_c$L${}_r$ doğrusunun kesiştiği nokta X=(x_0,y_0) =(c,r) olur (Bkz.Şekil 1). O halde,

$$d_H(P,X)=\left|\ln\frac{y_1}{y_0}\right|$$

dir.



Şekil 1

ii) L= $_c\mathrm{L}_r$ ve $x_1 \neq c$ veya L= $_a\mathrm{L}$ ise;

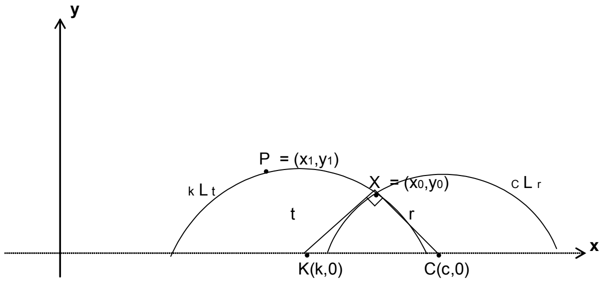
P=(x_1,y_1) noktasını ve $_c\mathrm{L}_r$ doğrusunu alalım. P=(x_1,y_1) noktasından geçen ve $_c\mathrm{L}_r$ doğrusuna dik olan doğru II tipindeki $_k\mathrm{L}_t$ doğrusudur (Bkz. Şekil 2). $_c\mathrm{L}_r$ doğrusu ile $_k\mathrm{L}_t$ doğrusunun kesim noktası X=(x_0,y_0) idi. O halde,

$$d_H(P,X)=\left|\ln\frac{y_0(x_1-k+t)}{y_1(x_0-k+t)}\right|$$

dir.

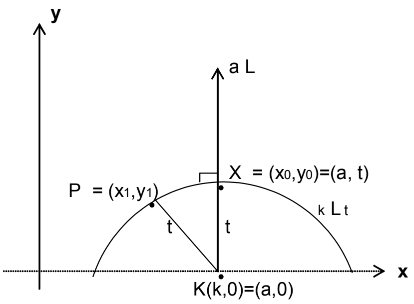
$$(k=\frac{y_1^{\;2}-y_0^{\;2}+x_1^{\;2}-x_0^{\;2}}{2(x_1-x_0)},$$

$$t=\sqrt{(x_1-k)^2+y_1^{\;2}}=\sqrt{(x_0-k)^2+y_0^{\;2}}\;)$$



Şekil 2

P=(x_1,y_1) noktası ve L=${}_a$L doğrusunu alalım. P=(x_1,y_1) noktasından geçen ve ${}_a$L doğrusuna dik olan doğru II. tip bir doğru olacağından üstteki formülü kullanabiliriz.(Bkz. Şekil 3)



Şekil 3

Teorem 1: (x_1,y_1), (x_2,y_2) odaklı *Poincaré koniklerinin denklemi,* u∈{-1,1} ve v≥0 olmak üzere,

$$x_1 = x_2 \text{ iken } \quad \left|\ln\frac{y_1}{y}\right| + u\left|\ln\frac{y_2}{y}\right| = v$$

veya

$$x_1 \neq x_2 \text{ iken } \quad \left|\ln\frac{y_1(x-c+r)}{y(x_1-c+r)}\right| + u\left|\ln\frac{y_2(x-d+s)}{y(x_2-d+s)}\right| = v$$

şeklindedir.

$$c = \frac{y_1^{\,2} - y^2 + x_1^{\,2} - x^2}{2(x_1 - x)}, \; r = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^{\,2}}$$

$$d = \frac{y_2^{\,2} - y^2 + x_2^{\,2} - x^2}{2(x_2 - x)}, \; s = \sqrt{(x_2 - d)^2 + y_2^{\,2}}$$

İspat: $x_1 = x_2$ iken, (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları yarı-doğrular üzerinde olduklarından, *Poincaré koniğinin denklemi,*

$$\left|\ln\frac{y_1}{y}\right| + u\left|\ln\frac{y_2}{y}\right| = v \tag{1}$$

ve

$x_1 \neq x_2$ iken, (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları yarı-çemberler üzerinde olduğundan, *Poincaré koniğinin denklemi,*

$$\left|\ln\frac{y_1(x - c + r)}{y(x_1 - c + r)}\right| + u\left|\ln\frac{y_2(x - d + s)}{y(x_2 - d + s)}\right| = v \tag{2}$$

biçimindedir.

Teorem 2: F= (x_1, y_1) odaklı ve ${}_aL$ veya ${}_cL_r$ doğrultmanlı Poincaré koniklerinin denklemleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{cases} \left|\ln\dfrac{y_1}{y}\right| + e\left|\ln\dfrac{y}{y_0}\right| = 0 & (e\langle 0) \\ (x_1, y_1) \ \ odak \ \ ve \ \ L{=}_c L_r \ \ ise & \\ \left|\ln\dfrac{y_1(x-d+s)}{y(x_1-d+s)}\right| + e\left|\ln\dfrac{y}{y_0}\right| = 0 & (e\langle 0) \\ (x_1 y_1) \ \ odak \ \ ve \ \ L{=}_c L_r \ \ ise & \\ \left|\ln\dfrac{y_1}{y}\right| + e\left|\ln\dfrac{y_0(x-k+t)}{y(x_0-k+t)}\right| = 0 & (e\langle 0) \\ (x_1, y_1) \ \ odak \ \ ve \ \ L{=}_c L_r \ \ veya \ \ L{=}_a L \ \ ise & \\ \left|\ln\dfrac{y_1(x-d+s)}{y(x_1-d+s)}\right| + e\left|\ln\dfrac{y_0(x-k+t)}{y(x_0-k+t)}\right| = 0 & (e\langle 0) \end{cases} \tag{3}$$

$(x_1, y_1) \ \ odak \ \ ve \ \ L{=}_c L_r \ \ veya \ \ L{=}_a L \ \ ise$

$$d = \frac{y_1^{\,2} - y^2 + x_1^{\,2} - x^2}{2(x_1 - x)}, \ s = \sqrt{(x_1 - d)^2 + y_1^{\,2}}$$

$$k = \frac{y_0^{\,2} - y^2 + x_0^{\,2} - x^2}{2(x_0 - x)}, \ r = \sqrt{(x_0 - k)^2 + y_0^{\,2}}$$

(Burada, e koniğin dış merkezliğini gösterir).

İspat: Yardımcı Teorem 1, Poincaré uzaklığı ve dış merkezliği kullanılarak ispatlanabilir.

$$\left|\ln\frac{y_1}{y}\right| + e\left|\ln\frac{y}{y_0}\right| = 0 \qquad (x = x_1 = c, \ \ L{=}_c L_r \ \ ise)$$

$$\left|\ln\frac{y_1(x-d+s)}{y(x_1-d+s)}\right| + e\left|\ln\frac{y}{y_0}\right| = 0 \qquad (x_1 \neq c = x, \ \ L{=}_c L_r \ \ ise)$$

$$\left|\ln\frac{y_1}{y}\right| + e\left|\ln\frac{y_0(x-k+t)}{y(x_0-k+t)}\right| = 0 \qquad (x = x_1 \neq c, \quad L={}_cL_r \quad veya \quad x = x_1, \quad L={}_aL \quad ise)$$

$$\left|\ln\frac{y_1(x-d+s)}{y(x_1-d+s)}\right| + e\left|\ln\frac{y_0(x-k+t)}{y(x_0-k+t)}\right| = 0 \qquad (x \neq x_1 = c, x \neq x_1 \neq c \quad L={}_cL_r \quad veya \quad x \neq x_1, \quad L={}_aL \quad ise)$$

I. Durum: P=(x,y) herhangi bir nokta, L= ${}_cL_r$ olsun.

A) x_1=c

i) x= x_1=c

$$\left|\ln\frac{y_1}{y}\right| = e\left|\ln\frac{y}{y_0}\right|$$

$$y = \sqrt[e+1]{y_1 {y_0}^e}$$

Bu denklem, (c,y) noktasını gösterir.

ii) x≠ x_1=c

$$\left|\ln\frac{y_1(x-d+s)}{y(x_1-d+s)}\right| + e\left|\ln\frac{y_0(x-k+t)}{y(x_0-k+t)}\right| = 0$$

$$\left(d = \frac{{y_1}^2 - y^2 + {x_1}^2 - x^2}{2(x_1-x)}, \ s = \sqrt{(x_1-d)^2 + {y_1}^2}\right)$$

$$\left(\frac{y_1 y^{e-1}(x_0-k+t)^e}{(y_0(x-k+t))^e}\right)\left(1 - \frac{2(x_1-x)^2}{(x_1-x)^2 + y^2 - {y_1}^2 + \sqrt{\left[(x_1-x)^2 + y^2 - {y_1}^2\right]^2 + 4{y_1}^2(x_1-x)^2}}\right) - 1 = 0$$

B) x_1 ≠c

i) x= x_1 ≠c

$$\left|\ln\frac{y_1}{y}\right| = e\left|\ln\frac{y_0(x-k+t)}{y(x_0-k+t)}\right|$$

$$\left(\frac{y_1 y^{e-1}(x_0-k+t)^e}{(y_0(x-k+t))^e}\right) - 1 = 0$$

Bu denklem (x_1,y) noktasını gösterir.

ii) $x_1 \neq x = c$

$$\left|\ln\frac{y_1(x-d+s)}{y(x_1-d+s)}\right| = e\left|\ln\frac{y}{y_0}\right|$$

$$\left(d = \frac{{y_1}^2 - y^2 + {x_1}^2 - x^2}{2(x_1-x)},\ s = \sqrt{(x_1-d)^2 + {y_1}^2}\right)$$

$$\frac{y_1 {y_0}^e}{y^{e+1}}\left(1 - \frac{2(x_1-x)^2}{(x_1-x)^2 + y^2 - {y_1}^2 + \sqrt{\left[(x_1-x)^2 + y^2 - {y_1}^2\right]^2 + 4{y_1}^2(x_1-x)^2}}\right) - 1 = 0$$

Bu denklem (c,y) noktasını gösterir.

iii) $x \neq c \neq x_1$

Bu durum A nın ii) durumuyla aynıdır.

II. Durum: P=(x,y) herhangi bir nokta, L= $_a$L olsun.

i) $x = x_1$

Bu durum B nın i) durumuyla aynıdır.

ii) $x \neq x_1$

Bu durum A nın ii) durumuyla aynıdır.

3. POİNCARÉ KONİKLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

İki-odaklı Poincaré konikleri Teorem 1' de verilmiştir. Bu denklemlerde, u=1 ise bu koniklere iki-odaklı Poincaré elipsleri ve u=-1 ise iki-odaklı Poincaré hiperbolleri denir. Benzer olarak, odak-doğrultman Poincaré konikleri Teorem 2 de verilmiştir. Bu konikler, 0<e<1, e=1, e>1 ise sırasıyla odak-doğrultman Poincaré elipsleri, odak-doğrultman Poincaré parabolleri, odak-doğrultman Poincaré hiperbolleri olarak adlandırılırlar. Bu kısımda bütün Poincaré konikleri sınıflandırılmaktadır.

İlk önce bu kısımda kullanılacak kavramlar ve kısaltmaları verelim. Poincaré üst yarı düzleminde $x_1 \leq x_2$ olacak şekilde $F_1=(x_1,y_1)$, $F_2= (x_2,y_2)$ sabit iki nokta (iki-odak) ve m, F_1F_2 doğrusunun eğimini göstersin. F_1F_2 doğrusu y-eksenine paralel ise m=∞ dır. H-çemberi aynı zamanda Öklid çemberini [2], H-elipsi ve H-hiperbolü, iki-odaklı Poincaré elipsi ve iki-odaklı Poincaré hiperbolünü göstermektedir. Konkav ve konveks eğriler aşağıdaki şekildedir:


konveks eğri


konkav eğri

Teorem 3: (1) ve (2) denklemleriyle verilen iki-odaklı Poincaré konikleri, u, v katsayıları, $F_1=(x_1,y_1)$ ve $F_2 = (x_2,y_2)$ noktalarıyla belli olup, Tablo 1a, Tablo 1b,Tablo 2 de verilmiştir.

Teorem 4: (3) denklemiyle verilen odak-doğrultman Poincaré konikleri, e dış merkezliği, L= ${}_aL$ veya L= ${}_cL_r$ doğrultmanı ve F= $F_1=(x_1,y_1)$ odağı ile belli olup, Tablo 3a and Tablo 3b verilmiştir.
Bu kısımda, $d_H(F_1,F_2)=\delta$ ile gösterilmiştir.

Tablo 1a. İki-odaklı Poincaré elipsleri (u=1)

$\left\|\ln\frac{y_1(x-c+r)}{y(x_1-c+r)}\right\|+\left\|\ln\frac{y_2(x-d+s)}{y(x_2-d+s)}\right\|=v \qquad v\geq 0,\quad x_1\neq x_2$		
$F_1,\ F_2,\ m$ *in durumu*	v	*Geometrik Yer*
$F_1=F_2$	$v=0$	(x_1,y_1) *noktası*
$F_1\neq F_2$	$v=0$	*II. tip dogru*
$F_1=F_2$	$v\rangle 0$	$H-$*çemberi*
$m=0$	$v=\delta$	$[F_1F_2]$ $H-$*dogru parçası*
$m\neq\mp 1$	$v=\delta$	*Boş küme*
$m\neq 0,\mp 1,\infty$	$v=\delta$	*Odaklararası uzaklık hariç H-doğru parçası*
$m=0,\mp 1$ ve $m\neq 0,\mp 1,\infty$	$\delta\langle v$	*H-elipsi*
Diğer bütün durumlar için	$v\langle\delta$	*Boş küme*

Tablo 1b. İki-odaklı Poincaré elipsleri (u=1)

$\left\|\ln \frac{y_1}{y}\right\| + \left\|\ln \frac{y_2}{y}\right\| = v \qquad v \geq 0, \quad x_1 = x_2$		
$F_1, \ F_2, \ m$ *in durumu*	v	*Geometrik Yer*
$F_1 \neq F_2$	$v = 0$	$y = \sqrt{y_1 y_2}$
$F_1 = F_2$	$v \rangle 0$	$y = y_1 e^{v/2}$
$m = \infty$	$v = \delta$	(x_1, y_1) *veya* (x_2, y_2) *noktası*
$m = \infty$	$\delta \langle$ v	$y = \sqrt{e^{-v} y_1 y_2}$
Diğer bütün durumlar için	$v \langle \delta$	*Boş küme*

Tablo 2. İki-odaklı Poincaré hiperbolleri (u=-1)

$\left\|\ln \frac{y_1(x-c+r)}{y(x_1-c+r)}\right\| - \left\|\ln \frac{y_2(x-d+s)}{y(x_2-d+s)}\right\| = \mp v \qquad v \leq 0, \quad x_1 \neq x_2$		
$F_1, \ F_2, \ m$ *in durumu*	v	*Geometrik Yer*
$m = 0$	$v = 0$	*Boş küme*
$m \neq 0, \mp 1, \infty \ \ m = \mp 1$	$v = 0$	*II. tip dogru*
$m = 0$	$v = \delta$	$[F_1 F_2]$ *H – dogru parçası*
$m = \mp 1$	$v = \delta$	*Boş küme*
$m \neq 0, \mp 1, \infty$	$v = \delta$	*Odaklararası uzaklık hariç H-doğru parçası*
$m = 0$ ve $m \neq 0, \mp 1, \infty$	$-v \langle \delta$	*H-hiperbolü*
$m = \mp 1$	$-v \langle \delta$	*Eğri*
Diğer bütün durumlar için	$v \langle \delta$	*Boş küme*

İki-odaklı Poincaré hiperbollerinin ikinci durumu Tablo 1b ile aynıdır.

Tablo 3a. Odak-doğrultman Poincaré konikleri (w=e)

$\left|\ln \dfrac{\frac{x-d+s}{y}}{\frac{x_1-d+s}{y_1}}\right| = ed_H(P,L)$ ve $\left|\ln \dfrac{y}{y_1}\right| = ed_H(P,L)$			
e	Doğrultman	x_1 in durumu	Geometrik Yer
$0\langle e\langle 1$	${}_cL_r$ ${}_aL$	$x_1 = c$ ve $x_1 \neq c$	Konveks eğri ve (c, y) veya (x_1, y) noktası
e=1	${}_cL_r$ ${}_aL$	$x_1 = c$ ve $x_1 \neq c$	H-parabolü ve (c, y) veya (x_1, y) noktası
$e\rangle 1$	${}_c\mathrm{L}_r$	$x_1 = c$ ve $x_1 \neq c$	Konkav eğri, (3.4) deki eğri ile y=0 doğrusunun sınırladığı konveks bölge- $\{y = 0\}$ ve nokta
$e\rangle 1$	${}_a\mathrm{L}$	$x_1 \neq x$ ve $x_1 = x$	İki tane eğri ve (x_1, y) noktası

F odağı, L doğrultmanı üzerinde olmayan Poincaré konikleri Table 3a da verilmiştir. (3) denklemiyle verilen odak-doğrultman Poincar'e koniklerinde eğer F odağı, L doğrultmanı üzerinde ise bu tip koniklere dejenere odak-doğrultman Poincaré konikleri denir. Bu konikler Tablo 3b de gösterilmiştir.

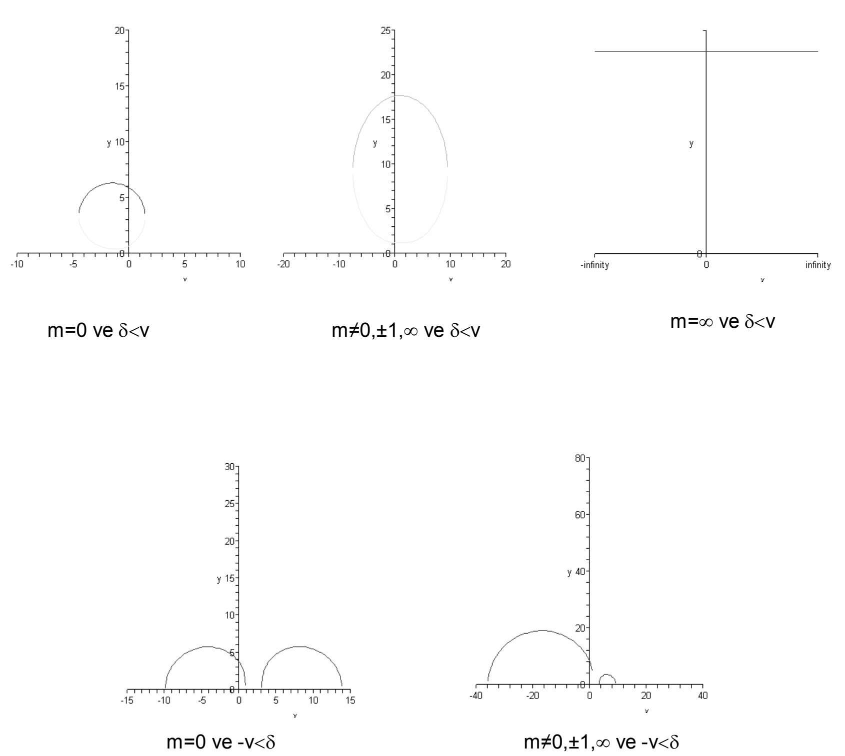
Tablo 3b. Dejenere odak-doğrultman Poincaré konikleri (w=e)

$\left\lvert \ln \dfrac{\dfrac{x-d+s}{y}}{\dfrac{x_1-d+s}{y_1}} \right\rvert = ed_H(P,L) \quad ve \quad \left\lvert \ln \dfrac{y}{y_1} \right\rvert = ed_H(P,L)$		
e	Doğrultman	Geometrik Yer
$0\langle e\langle 1$	${}_cL_r$ ${}_aL$	$(x_1,y_1)=(c,y_1)$ noktası
$0\langle e\langle 1$	${}_c\mathrm{L}_r$	F noktasından geçen bir çift eğri ve (x_1,y_1) noktası
e=1	${}_c\mathrm{L}_r$	$(x_1,y_1)=(c,y_1)$ noktası
e=1	${}_cL_r$ ${}_aL$	II. tip doğru ve (x_1,y_1) noktası
$e\rangle 1$	${}_c\mathrm{L}_r$	(c,y_1) ve (x_1,y_1) noktası
$e\rangle 1$	${}_a\mathrm{L}$	F noktasından geçen eğri

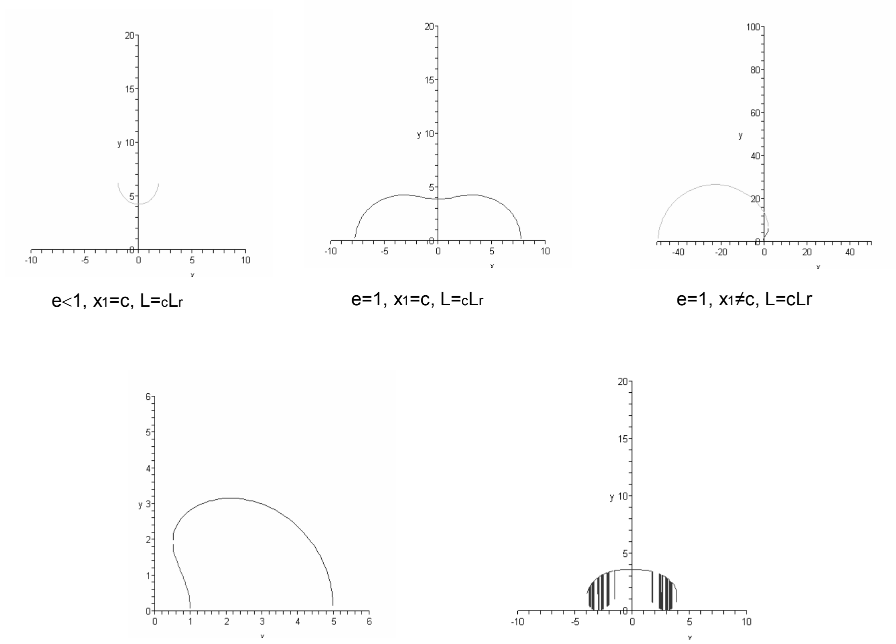
İspat: Teorem 1, Teorem 2, Teorem 3 ve Teorem 4 ü kullanarak ispatlanabilir.

4. UYGULAMALAR: POİNCAR'E KONİKLERİNİN GRAFİKLERİ

Poincaré konikleri, Teorem 1 ve Teorem 2 de verilen denklemlerle gösterilirse, kolayca çizilebilir. Poincaré koniklerinin grafikleri Şekil 4a ve Şekil 4b de verilmektedir.



Şekil 4a: İki-Odaklı Poincaré konikleri



$e<1$, $x_1=c$, $L={}_cL_r$ $e=1$, $x_1=c$, $L={}_cL_r$ $e=1$, $x_1\neq c$, $L=cLr$

$e=1$, $L={}_aL$ $e>1$, $x_1=c$, $L={}_cL_r$

Şekil 4b: Odak-doğrultman Poincaré konikleri

KAYNAKÇA

1. Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, İ. ve Özcan M., *General equation for Taxicab conics and their classification*, Mitt. Math. Ges Hamburg 19, 135-148, (2000)
2. Krause, E.F., *Taxicab geometry*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 88 sf (1875)
3. Laatsch, R., *Piramidal sections in Taxicab geometry*, Math. Magazine Vol. 55, No 4, 205-212, (1982)
4. Millman R. S., Parker G. D., *Geometry; A Metric Approach with Models,* Springer-Verlag New York, Inc. (1991)
5. Moser, J.,M. and Kramer F., *Lines and parabolas in Taxicab geometry*, Pi-Mu Epsilon Journal, Vol 7, No 7, (1982)
6. Phoebe Ho, Y. and Liu, Y., *Parabolas in Taxicab Geometry*, Missouri Journal of Mathematical Sciences, Vol 8, No 2, 63-72, (1996)
7. Reynolds, B.E., *Taxicab geometry*, Pi Mu Epsilon Journal, 77-80, (1980)

8. Sönmez, N., *Poincare Yarı Düzlem Geometrisi Üzerine, Doktora Tezi*, Matematik Bölümü, Osmangazi Üniversitesi, 96, (2006)
9. Stahl, S., *The Poincaré half plane a gateway to modern geometry*, Jones and Barlett Publishers, Boston, 298 sf (1993)
10. http://www1.kcn.ne.jp/~iittoo/us41_anal.htm