Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **18**(2018) 011302 (477-485) AKU J. Sci. Eng. **18** (2018) 011302 (477-485)

DOİ: 10.5578/fmbd.67451

Küme Dizilerinin Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanan Asimptotik $\mathcal{I}$-İnvaryant İstatistiksel Denkliği

Nimet P. Akın[1]

Erdinç Dündar[2*]

[1] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Afyonkarahisar.*

[2] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar.*

e-posta: npancaroglu@aku.edu.tr, edundar@aku.edu.tr

[*] *Sorumlu Yazar / Corresponding Author*

Geliş Tarihi:12.01.2018 ; Kabul Tarihi:30.08.2018

Anahtar kelimeler
Asimptotik denklik; Modülüs fonsiyonu; $\mathcal{I}$-yakınsaklık; $\mathcal{I}$-İnvaryant denklik.

Özet

Bu çalışmada küme dizileri için kuvvetli asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik, f-asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik, kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denklik ve asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant istatistiksel denklik tanımları verildi. Daha sonra, verilen bu yeni kavramlar arasındaki ilişkiler incelendi.

Asymptotically $\mathcal{I}$-Invariant Statistical Equivalence of Sequences of Set Defined By A Modulus Function

Keywords
Asymptotic equivalence; Modulus function; $\mathcal{I}$-convergence; $\mathcal{I}$-Invariant equivalence

Abstract

In this study, the definitions of strongly asymptotically $\mathcal{I}$-invariant equivalence, f-asymptotically $\mathcal{I}$-invariant equivalence, strongly f-asymptotically $\mathcal{I}$-invariant equivalence and asymptotically $\mathcal{I}$-invariant statistical equivalence for sequences of sets were given. Then after, relationships among this new concepts were examined .

1. Giriş

Bu çalışmada $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini $\mathbb{R}$ de reel sayılar kümesini gösterir. Reel sayılarda yakınsaklık kavramı Fast (1951), Schoenberg (1959) ve birçok yazar tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramına genişletilip incelenmiştir. $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı ilk defa Kostyrko vd. (2000) tarafından tanımlanmıştır. Nuray ve Rhoades (2012) küme dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamış ve aralarındaki ilişkileri incelemişlerdir. Kişi ve Nuray (2013) küme dizileri için Wijsman $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramını tanımlamıştır.

İnvaryant yakınsaklık ile ilgili tanım, teorem ve özellikler Raimi (1963), Mursaleen (1979, 1983), Mursaleen ve Edely (2009), Nuray ve Savaş (1994), Nuray vd. (2011), Pancaroğlu ve Nuray (2013a), Savaş (1989a, 1989b), Savaş ve Nuray (1993) ve Schaefer (1972) gibi birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Kuvvetli σ-yakınsaklık kavramı Mursaleen (1983) tarafından tanımlanmıştır. Savaş (1989) tarafından kuvvetli σ-yakınsaklık kavramı genelleştirilmiştir. Savaş ve Nuray (1993), σ-istatistiksel yakınsaklık ve lacunary σ-istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanımlamış ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Nuray vd. (2011) σ-düzgün yoğunluk ve $\mathcal{I}_\sigma$-yakınsaklık kavramlarını tanımlamıştır ve ayrıca $\mathcal{I}_\sigma$-yakınsaklık ile invaryant yakınsaklık ve $[V_\sigma]_p$-yakınsaklık arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Reel sayı dizileri için asimptotik denklik kavramı tanımları ve asimptotik regüler matrisler için bazı temel tanımlar ve özellikler Marouf (1993) tarafından vermiştir. Son zamanlarda Patterson (2003), Savaş (2013), Ulusu ve Nuray (2013), Ulusu ve Gülle (yayın aşamasında) gibi birçok araştırmacı asimptotik denklik kavramı ve ilgili kavramları bazı özellikleriyle birlikte çalışmışlardır.

Modülüs foksiyonu Nakano (1953) tarafından tanımlanmıştır. Maddox (1986), Pehlivan ve Fisher (1995), Pancaroğlu ve Nuray (2014), Kumar ve Sharma (2012), Kişi vd. (2015) ve birçok yazar tarafından modülüs fonksiyonu çalışılmıştır.

2. Temel Kavramlar

Şimdi bazı temel tanım ve kavramları vereceğiz (Bakınız [Baronti ve Papini (1986), Beer (1985, 1994), Kara vd. (2016, 2017), Kişi vd. (2015), Kostyrko vd. (2000), Lorentz (1948), Maddox (1986), Marouf (1993), Nuray vd. (2011), Pancaroğlu ve Nuray (2013b), Pancaroğlu vd. (2013), Patterson (2003), Pehlivan ve Fisher (1995), Ulusu ve Dündar (2018), Wijsman (1964, 1966)]).

Negatif olmayan iki $x=(x_n)$ ve $y=(y_n)$ dizisi için eğer

$$\lim_n \frac{x_n}{y_n}=1$$

limiti sağlanıyorsa, x ve y dizilerine asimptotik denk diziler denir. Bu denklik $x\sim y$ şeklinde sembolize edilir.

Negatif olmayan iki $x=(x_n)$ ve $y=(y_n)$ dizisini alalım. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_m \frac{1}{m}\left|\left\{n\le m: \left|\frac{x_n}{y_n}-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

limiti sağlanıyorsa, x ve y dizilerine L katlı asimptotik istatistiksel denk diziler denir. Bu denklik $x\overset{S_L}{\sim}y$ şeklinde sembolize edilir. Eğer $L=1$ olarak alınırsa, $x=(x_n)$ ve $y=(y_n)$ dizilerine asimptotik istatistiksel denk diziler denir.

(X,ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x\in X$ noktası ve boş kümeden farklı herhangi bir $A\subset X$ kümesi için, x noktası ile A kümesi arasındaki uzaklık

$$d(x,A)=\inf_{a\in A}\rho(x,a)$$

ile tanımlanır.

Bu çalışma boyunca (X,ρ) bir metrik uzay ve A, B, A_k ve B_k $(k=1,2,\ldots)$, X in boş olmayan kapalı alt kümeleri olarak alınacaktır.

Her $x\in X$ için $\lim_{k\to\infty} d(x,A_k)=d(x,A)$ ise, $\{A_k\}$ dizisine Wijsman anlamında yakınsaktır denir ve $W-\lim A_k=A$ ile gösterilir.

Her $x\in X$ için $\sup_k d(x,A_k)<\infty$ ise, $\{A_k\}$ dizisine sınırlıdır denir ve $\{A_k\}\in L_\infty$ ile gösterilir.

$d(x,A_k)>0$ ve $d(x,B_k)>0$ olmak üzere, her $x\in X$ için

$$\lim_k \frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}=1$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine asimptotik denktir denir ve $A_k\sim B_k$ ile gösterlir.

$d(x,A_k)>0$ ve $d(x,B_k)>0$ olmak üzere, her $x\in X$ ve $\varepsilon>0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k\le n: \left|\frac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı asimptotik istatistiksel denktir denir ve $A_k \overset{WS_L}{\sim} B_k$ şeklinde sembolize edilir. Eğer $L=1$ olarak alınırsa, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine asimptotik istatistiksel denk diziler denir.

σ dönüşümünü, pozitif tamsayılar kümesi üzerinde bir dönüşüm olarak alalım. ℓ_∞ üzerinde tanımlı sürekli bir lineer ϕ fonksiyoneli eğer aşağıdaki şartları sağlarsa, invaryant ortalama veya σ-ortalama olarak adlandırılır;

1) Her n için $x_n\ge 0$ şartını sağlayan $x=(x_n)$ dizisi için $\phi(x)\ge 0$,
2) $e=(1,1,1,\dots)$ için $\phi(e)=1$ ve
3) Her $x\in\ell_\infty$ için $\phi\big(x_{\sigma(n)}\big)=\phi(x_n)$.

σ dönüşümünün n deki m. ötelemesi $\sigma^m(n)$ şeklinde sembolize edilmek üzere, her $n>0$ ve $m>0$ şartını sağlayan tamsayılar için $\sigma^m(n)\ne n$ şartını gerçekleyen birebir dönüşüm olarak kabul edilir. Bu durumda, ϕ yakınsak olan dizilerin uzayı c üzerindeki limit fonksiyonelinin bir genişlemesidir. Bu durum ise, $x\in c$ için $\phi(x)=\lim x$ şeklinde ifade edilir.

Özel olarak σ dönüşümü, $\sigma(n)=n+1$ şeklinde alınırsa, invaryant ortalamaya genel olarak Banach limiti denir.

X in boştan farklı kapalı alt kümeleri A_k, B_k için $d(x;A_k,B_k)$ ifadesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır;

$$d(x;A_k,B_k)=\begin{cases}\dfrac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}, & x\notin A_k\cup B_k,\\ L, & x\in A_k\cup B_k.\end{cases}$$

Her $x\in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|d\big(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)}\big)-L\right|=0$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı kuvvetli asimptotik invaryant denktir denir ve $A_k \overset{[WV]_\sigma^L}{\sim} B_k$ şeklinde sembolize edilir. Eğer $L=1$ olarak alınırsa, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine kuvvetli asimptotik invaryant denk diziler denir.

Her $x\in X$, her $\varepsilon>0$ için ve m ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k\le n: \left|d\big(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)}\big)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı kuvvetli asimptotik invaryant istatistiksel denktir denir ve $A_k \overset{WS_\sigma^L}{\sim} B_k$ şeklinde sembolize edilir. Eğer $L=1$ olarak alınırsa, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine kuvvetli asimptotik invaryant istatistiksel denk diziler denir.

Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{I}\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ sınıfına bir "ideal" denir;

1) $\emptyset\in\mathcal{I}$,
2) Her $U,V\in\mathcal{I}$ için $U\cup V\in\mathcal{I}$,
3) Her $U\in\mathcal{I}$ ve her $V\subseteq U$ kapsaması için $V\in\mathcal{I}$.

Eğer $\mathcal{I}$ ideali için $\mathbb{N}\notin\mathcal{I}$ oluyorsa, $\mathcal{I}$ idealine non-trivial (gerçek) ideal ve non-trivial bir $\mathcal{I}$ ideali her $n\in\mathbb{N}$ için $\{n\}\in\mathcal{I}$ şartını sağlıyorsa, $\mathcal{I}$ idealine admissible (uygun) ideal denir.

Bu çalışma boyunca tüm idealler admissible (uygun) ideal olarak alınacaktır.

Her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x; A_k, B_k - L| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı kuvvetli asimptotik $\mathcal{I}$-denktir denir ve $\{A_k\} \overset{\mathcal{I}_{W(\omega)}}{\sim} \{B_k\}$ şeklinde sembolize edilir. Eğer $L = 1$ olarak alınırsa, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine kuvvetli asimptotik $\mathcal{I}$-denk diziler denir.

$U \subseteq \mathbb{N}$ için

$$s_m = \min_n |U \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \ldots, \sigma^m(n)\}| \quad \text{ve}$$

$$S_m = \max_n |U \cap \{\sigma(n), \sigma^2(n), \ldots, \sigma^m(n)\}|$$

olsun. Eğer

$$\underline{V}(U) = \lim_{m \to \infty} \frac{s_m}{m}, \qquad \overline{V}(U) = \lim_{m \to \infty} \frac{S_m}{m},$$

limitleri sağlanıyorsa, bu limitlere sırasıyla U kümesinin düzgün alt σ-yoğunluğu ve düzgün üst σ-yoğunluğu adı verilir. Eğer $\underline{V}(U) = \overline{V}(U)$ ise,

$$V(U) = \underline{V}(U) = \overline{V}(U)$$

ifadesine U kümesinin düzgün σ-yoğunluğu denir.

$V(U) = 0$ eşitliğini gerçekleyen $U \subseteq \mathbb{N}$ kümelerinin sınıfı $\mathcal{I}_\sigma$ ile sembolize edilir.

Şimdi düzgün σ-yoğunluk kavramını kullanarak reel sayıların keyfi bir $x = (x_k)$ dizisinin $\mathcal{I}_\sigma$-yakınsaklık tanımını ifade edelim;

$$A_\varepsilon = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}_\sigma$ ya ait, yani $V(A_\varepsilon) = 0$ eşitliği sağlanıyor ise, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına $\mathcal{I}_\sigma$-yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_\sigma - \lim x_k = L$ şeklinde sembolize edilir.

Her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$A_{\varepsilon,x}^{\sim} = \{k : |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}_\sigma$ ya ait, yani $V\left(A_{\varepsilon,x}^{\sim}\right) = 0$ eşitliği sağlanıyor ise, bu durumda $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denk diziler denir ve $A_k \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L}{\sim} B_k$ şeklinde sembolize edilir.

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu

i. $f(u) = 0$ ancak ve ancak $u = 0$,

ii. $f(u + v) \leq f(u) + f(v)$,

iii. f artan,

iv. f fonksiyonu 0^+ noktasında sürekli

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir.

f modülüs fonksiyonu sınırlı ya da sınırsız olabilir.

f modülüs fonksiyonu olmak üzere, her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : f(|d(x; A_k, B_k - L|) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı f-asimptotik $\mathcal{I}$-denktir denir ve $A_k \overset{\mathcal{I}_{W(f)}}{\sim} B_k$ şeklinde sembolize edilir. Eğer $L = 1$ olarak alınırsa, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine f-asimptotik $\mathcal{I}$-denk diziler denir.

f modülüs fonksiyonu olmak üzere, her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|d(x; A_k, B_k) - L|) \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-denktir denir ve $A_k \overset{\mathcal{I}_{W(f)}}{\sim} B_k$ şeklinde sembolize edilir. Eğer $L = 1$ olarak alınırsa, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-denk diziler denir.

Lemma 2.1 f modülüs fonksiyonu ve $0 < \delta < 1$ olmak üzere, her $x \geq \delta$ için

$$f(x) \leq 2f(1)\delta^{-1}x$$

eşitsizliği sağlanır.

3. Küme Dizilerinin Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanan Asimptotik $\mathcal{I}$-İnvaryant İstatistiksel Denkliği

Tanım 3.1 Her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |d(x; A_k, B_k) - L| \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı kuvvetli asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denktir denir ve $A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L]}{\sim} B_k$ şeklinde sembolize edilir. Eğer $L = 1$ olarak alınırsa, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine kuvvetli asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denk diziler denir.

Tanım 3.2 f modülüs fonksiyonu olmak üzere, her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N}: f(|d(x; A_k, B_k) - L|) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı f-asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denktir denir ve $A_k \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)}{\sim} B_k$ şeklinde sembolize edilir. Eğer $L = 1$ olarak alınırsa, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine f-asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denk diziler denir.

Tanım 3.3 f modülüs fonksiyonu olmak üzere, her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x; A_k, B_k) - L|) \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}_\sigma$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denktir denir ve $A_k \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)}{\sim} B_k$ şeklinde sembolize edilir. Eğer $L = 1$ olarak alınırsa, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine kuvvetli f-asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant denk diziler denir.

Teorem 3.1 f modülüs fonksiyonu olmak üzere, her $x \in X$ için

$$A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L]}{\sim} B_k \Rightarrow A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k$$

dır.

İspat: $A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L]}{\sim} B_k$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $0 < \delta < 1$ ve $0 \leq t \leq \delta$ için $f(t) < \varepsilon$ seçelim. Her $x \in X$ ve keyfi $m \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\left|d\left(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}\right) - L\right|\right) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ \left|d\left(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}\right) - L\right| \leq \delta}}^{n} f\left(\left|d\left(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}\right) - L\right|\right)$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ \left|d\left(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}\right) - L\right| > \delta}}^{n} f\left(\left|d\left(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}\right) - L\right|\right)$$

ve Lemma 2.1 den, $m = 1,2, \dots$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\left|d\left(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}\right) - L\right|\right)$$

$$< \varepsilon + \left(\frac{2f(1)}{\delta}\right)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|d\left(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}\right) - L\right|$$

elde edilir. Bu durumda, her $\gamma > 0$ ve her $x \in X$ için m ye göre düzgün olarak

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\left|d\left(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}\right) - L\right|\right) \geq \gamma\right\}$$

$$\subseteq \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|d\left(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}\right) - L\right| \geq \frac{(\gamma - \varepsilon)\delta}{2f(1)}\right\}$$

kapsaması geçerlidir. $A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L]}{\sim} B_k$ olduğu için yukarıdaki kapsayan küme $\mathcal{I}_\sigma$ ya ait olduğundan kapsanan küme de $\mathcal{I}_\sigma$ ya aittir. Böylece,

$$A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k$$

elde edilir.

Teorem 3.2 Eğer $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\alpha>0$ ise, bu durumda

$$A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L]}{\sim} B_k \Leftrightarrow A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k$$

dır.

İspat: Eğer $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\alpha>0$ ise, her $t\geq 0$ için $f(t)\geq \alpha t$ elde edilir. Kabul edelim ki $A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k$ olsun. Her $x\in X$ ve $m=1,2,\ldots$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\left|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L\right|)$$

$$\geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha(\left|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L\right|)$$

$$=\alpha(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|d\left(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)}\right)-L\right|)$$

dir ve buradan, her $\varepsilon>0$ ve $m=1,2,\ldots$için

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|\geq\varepsilon\right\}$$

$$\subseteq\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|)\geq\alpha\varepsilon\right\}$$

kapsaması geçerlidir. $A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k$ olduğu için yukarıdaki kapsayan küme $\mathcal{I}_\sigma$ ya ait olduğundan kapsanan kümede $\mathcal{I}_\sigma$ ya aittir. Böylece,

$$A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L]}{\sim} B_k$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L]}{\sim} B_k \Rightarrow A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k$ gerçeği Teorem 3.1 de ispatlanmıştır.

Tanım 3.4 Her $x\in X$, her $\varepsilon>0$ ve her $\gamma>0$ için

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}|\{k\leq n:|d(x;A_k,B_k)-L|\geq\varepsilon\}|\geq\gamma\right\}$$

kümesi $\mathcal{I}_\sigma$ ya ait ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine L katlı asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant istatistiksel denktir denir ve $A_k \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)}{\sim} B_k$ ile gösterilir. $L=1$ olması durumunda asimptotik $\mathcal{I}$-invaryant istatistiksel denklik elde edilir.

Teorem 3.3 f modülüs fonksiyonu olmak üzere, her $x\in X$ için

$$A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k \Rightarrow A_k \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(S)}{\sim} B_k$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k$ olsun ve $\varepsilon>0$ verilsin. Her $x\in X$ ve $m=1,2,\ldots$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\left|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L\right|)$$

$$\geq\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\ \left|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L\right|\geq\varepsilon}}^{n} f(\left|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L\right|)$$

$$\geq f(\varepsilon).\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n:\left|d\left(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)}\right)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. Her $x\in X$ ve ve her $\gamma>0$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n:\left|d\left(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)}\right)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\geq\frac{\gamma}{f(\varepsilon)}\right\}$$

$$\subseteq\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|)\geq\gamma\right\}$$

kapsaması geçerlidir. Bu durumda,

$$A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k$$

olduğu için yukarıdaki kapsayan küme $\mathcal{I}_\sigma$ ya ait olduğundan kapsanan kümede $\mathcal{I}_\sigma$ ya aittir. Böylece,

$$A_k \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(S)}{\sim} B_k$$

elde edilir.

Teorem 3.4 f modülüs fonksiyonu olsun. Her $x\in X$ için f sınırlı ise,

$$A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k \Leftrightarrow A_k \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(S)}{\sim} B_k$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki f sınırlı ve $A_k \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(S)}{\sim} B_k$ olsun. f sınırlı olduğundan, her $x\in X$ için

$$\sup f(t)\leq M$$

olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı vardır. $m=1,2,\ldots$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\left|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L\right|)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\ \left|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L\right|\geq\varepsilon}}^{n} f(\left|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L\right|)$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\ \left|d\left(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)}\right)-L\right|<\varepsilon}}^{n} f(\left|d\left(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)}\right)-L\right|)$$

$$\leq\frac{M}{n}\left|\left\{k\leq n:\left|d\left(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)}\right)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|+f(\varepsilon)$$

kapsaması geçerlidir. Bu durumda, $A_k \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(S)}{\sim} B_k$ olduğu için yukarıdaki kapsayan küme $\mathcal{I}_\sigma$ ya ait olduğundan kapsanan kümede $\mathcal{I}_\sigma$ ya aittir. Böylece,

$$A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $A_k \overset{[W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(f)]}{\sim} B_k \Rightarrow A_k \overset{W_{\mathcal{I}_\sigma}^L(S)}{\sim} B_k$ gerçeği Teorem 3.3 de ispatlanmıştır.

4. Kaynaklar

Baronti M., and Papini P., 1986. Convergence of sequences of sets, In: Methods of functional analysis in approximation theory (pp. 133-155), ISNM 76, Birkhäuser, Basel.

Beer G., 1985. On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society,* **31**, 421-432.

Beer G., 1994. Wijsman convergence: A survey. *Set-Valued Analysis,* **2** , 77-94.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2**, 241-244.

Kara E. E., Daştan M., İlkhan M., 2016. On almost ideal convergence with respect to an Orlicz function. *Konuralp Journal of Mathematics,* **4**(2), 87-94.

Kara E. E., Daştan M., İlkhan M., 2017. On Lacunary ideal convergence of some sequences. *New Trends in Mathematical Sciences*, **5**(1), 234-242.

Kişi, Ö. and Nuray, F., 2013. A new convergence for sequences of sets. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 852796.

Kişi Ö., Gümüş H. and Nuray F., 2015. $\mathcal{I}$-Asymptotically lacunary equivalent set sequences defined by modulus function. *Acta Universitatis Apulensis*, **41**, 141-151.

Kostyrko P., Šalát T. and Wilczyński W., 2000. $\mathcal{I}$-Convergence. *Real Analysis Exchange*, **26**(2), 669-686.

Kumar V. and Sharma A., 2012. Asymptotically lacunary equivalent sequences defined by ideals and modulus function. *Mathematical Sciences*, **6**(23), 5 pages.

Lorentz G., 1948. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Mathematica*, **80**, 167-190.

Maddox J., 1986. Sequence spaces defined by a modulus. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **100**, 161-166.

Marouf, M., 1993. Asymptotic equivalence and summability. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **16**(4), 755-762.

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H., 2009. On the invariant mean and statistical convergence. *Applied Mathematics Letters*, **22**(11), 1700-1704.

Mursaleen, M., 1983. Matrix transformation between some new sequence spaces. *Houston Journal of Mathematics*, **9**, 505-509.

Mursaleen, M., 1979. On finite matrices and invariant means. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **10**, 457-460.

Nakano H., 1953. Concave modulars. *Journal of the Mathematical Society Japan,* **5** ,29-49.

Nuray F. and Rhoades B. E., 2012. Statistical convergence of sequences of sets. *Fasiciculi Mathematic*i, **49** , 87-99.

Nuray, F. and Savaş, E., 1994. Invariant statistical convergence and A-invariant statistical convergence. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **25**(3), 267-274.

Nuray, F., Gök, H. and Ulusu, U., 2011. $\mathcal{I}_\sigma$-convergence. *Mathematical Communications*, **16**, 531-538.

Pancaroğlu, N. and Nuray, F., 2013a. Statistical lacunary invariant summability. *Theoretical Mathematics and Applications*, **3**(2), 71-78.

Pancaroğlu N. and Nuray F., 2013b. On Invariant Statistically Convergence and Lacunary Invariant Statistically Convergence of Sequences of Sets. *Progress in Applied Mathematics*, **5**(2), 23-29.

Pancaroğlu N. and Nuray F. and Savaş E., 2013. On asymptotically lacunary invariant statistical equivalent set sequences. *AIP Conf. Proc.* **1558**(780) http://dx.doi.org/10.1063/1.4825609

Pancaroğlu N. and Nuray F., 2014. Invariant Statistical Convergence of Sequences of Sets with respect to a Modulus Function. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 818020, 5 pages.

Patterson, R. F., 2003. On asymptotically statistically equivalent sequences. *Demostratio Mathematica*, **36**(1), 149-153.

Pehlivan S., and Fisher B., 1995. Some sequences spaces defined by a modulus. *Mathematica Slovaca,* **45**, 275-280.

Raimi, R. A., 1963. Invariant means and invariant matrix methods of summability. *Duke Mathematical Journal*, **30**(1), 81-94.

Savaş, E., 1989a. Some sequence spaces involving invariant means. *Indian Journal of Mathematics*, **31**, 1-8.

Savaş, E., 1989b. Strongly σ-convergent sequences. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, **81**, 295-300.

Savaş, E., 2013. On $\mathcal{I}$-asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Advances in*

Difference Equations, **111**(2013), 7 pages. doi:10.1186/1687-1847-2013-111.

Savaş, E. and Nuray, F., 1993. On σ-statistically convergence and lacunary σ-statistically convergence. *Mathematica Slovaca*, **43**(3), 309-315.

Schaefer, P., 1972. Infinite matrices and invariant means. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **36**, 104-110.

Schoenberg I. J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. *American Mathematical Monthly*, **66**, 361-375.

Ulusu U. and Nuray F., 2013. On asymptotically lacunary statistical equivalent set sequences. *Journal of Mathematics*, Article ID 310438, 5 pages.

Ulusu U. and Gülle E., Asymptotically $\mathcal{I}_\sigma$-equivalence of sequences of sets. (yayın aşamasında).

Ulusu U. and Dündar E., 2018. Asymptotically $\mathcal{I}$-Ces`aro Equivalence of Sequences of Sets. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, **1**(2), 101-105.

Wijsman R. A., 1964. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. Bulletin *American Mathematical Society,* **70**, 186-188.

Wijsman R. A., 1966. Convergence of Sequences of Convex sets, Cones and Functions II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **123**(1) , 32-45.