GÜÇLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nurila TOIGOMBAEVA

Danışman
Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül 2021

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜÇLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR

Nurila TOIGOMBAEVA

Danışman
Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül 2021

TEZ ONAY SAYFASI

Nurila TOIGOMBAEVA tarafından hazırlanan "Güçlü Genelleştirilmiş Konveks Fonksiyonlar" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 03/09/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Başkan : Prof. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK
Konya Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../ 2021 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

03/09/2021

Nurila TOIGOMBAEVA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GÜÇLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR

Nurila TOIGOMBAEVA
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Hasan ÖGÜNMEZ

Bu araştırma altı bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde giriş, ikinci bölümde ise temel kavramlar verildi. Üçüncü bölümde konveks fonksiyonlar, Hermite-Hadamard tipi ve Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizliklerle ilgili temel kavramlar verildi. Dördüncü bölümde genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar ve bunlarla ilgili bazı integral eşitsizlikler verildi. Beşinci bölümde ise ana konumuz olan güçlü genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar, Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizlikler gösterildi. Altıncı bölüm ise tartışma ve sonuçtan oluşmuştur.

2021, vi +52 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyonlar, Genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar, Güçlü konvekslik, η-Konveks fonksiyonlar, Hermite-Hadamard eşitsizlikleri, İntegral eşitsizlikler.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON STRONGLY GENERALIZED CONVEX FUNCTIONS

Nurila TOIGOMBAEVA
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Hasan ÖĞÜNMEZ

This research consists of six parts. In the first chapter, introduction, in the second chapter basic concepts are given. In the third chapter, basic concepts about convex functions, Hermite-Hadamard type and Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities are given. In the fourth chapter, generalized convex functions and some integral inequalities are given. In the fifth chapter, strongly generalized convex functions, Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities are shown. The sixth chapter consists of discussion and conclusion.

2021, vi + 52 pages

Keywords: Convex functions, Generalized convex functions, Strongly convex functions, η-convex functions, Hermite-Hadamard type inequalities, Integral inequalities.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, bilimsel çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ'e, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Öğr. Gör. Ahmet HASÇELİK ve Eşi Elmira TOIGOMBAEVA(HASÇELİK)'e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma, maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Nurila TOIGOMBAEVA
Afyonkarahisar 2021

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER

Simgeler	
R	Reel sayılar kümesi
$\in$	Elemanıdır
μ	Mü
η	Eta
$\subseteq$	Alt küme
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\geq$	Büyük veya eşittir
$>$	Büyüktür
$<$	Küçüktür
$\subset$	Öz alt küme
$\int$	İntegral
$\| \ \|$	Mutlak değer
$[.,.]$	Kapalı aralık
$(.,.)$	Açık aralık
$\langle .,. \rangle$	İki vektörün iç çarpımı
I	R'de herhangi bir aralık
I^0	I nın içi
$\|x\|$	x Vektörünün normu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Matematikte en önemli konulardan biri olan konvekslilik kavramı son yıllarda birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir. Ama bu kavram yeni değildir. Konveks kavram hakkında temel bilgiler Arşimet (M.Ö. 287-212) ve Öklid (M.Ö. 325-270) zamanından bugüne ulaştığı bilinmektedir. Sonradan 19 ve 20.yüzyıllarda bu tür fonksiyonlar farklı bilim dallarında kullanılarak daha da geliştirildi. Konveks fonksiyonlar kavramı optimizasyon, matematik modelleme, matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve hatta tıp, sanat ve mühendislik gibi bilim dallarında önemli bir şekilde yer aldı.

Güçlü konvekslik kavramı konvekslik kavramının daha küçük bir sınıfıdır (Awan vd. 2018). Güçlü konveks hakkında ilk bilgiler B. T. Polyak (1964) tarafından tanıtıldı.

Güçlü konvekslik kavramı, konvekslik kavramının güçlendirilmesidir. Polyak $f\colon I \to R^{+}$ fonksiyonu için $f(x) - \frac{\mu}{2}\|x\|^2$ olacak şekilde konveks fonksiyonu varsa, f, $\mu > 0$ sabitine göre güçlü konveks fonksiyon olacağını ispatladı ve optimizasyon kavramının gelişiminde büyük katkı sağladı. Daha sonra Nesterov güçlü konveks fonksiyonların minimizasyon algoritmasının, konveks fonksiyonların minimizasyon algoritmasına göre daha hızlı yakınsar olduğunun gösterdi. 1975 de Plish. A güçlü konveks kümeler kavramını tanıttı. Güçlü konvekslik kavramı hakkında daha fazla bilgi için bu kaynaklara bakılabilir (Angulo vd. 2011, Polovkin 1996, Polyak 1966).

Güçlü Konveks fonksiyonlar, uygulamalı ekonomide, ayrıca doğrusal olmayan optimizasyonda ve saf ve uygulamalı matematiğin diğer dallarında yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu tezin amacı güçlü genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar sınıfını tanıtıp, bu tür fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizliklerinin ispatlarını göstermek ve bazı lemmalardan yararlanarak, yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri elde etmektir. Ayrıca $\mu > 0$ mödülüne göre güçlü $s - \eta$-konveks fonksiyonunu gösterip, güçlü $s - \eta$-konveks fonksiyonlar için de Hermite-Hadamard tipi ve Hermite-Hadamar-Fejer tipi eşitsizliklerini elde etmektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 (Konveks Fonksiyon) Eğer $\forall x, y \in [a, b], t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f: I \to R$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.2. (η-konveks Fonksiyon) Eğer $\forall x, y \in [a, b], t \in [0, 1]$ için $\eta: R \times R \to R$ olacak şekilde

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(y) + t\eta\big(f(x), f(y)\big) \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlanırsa. $f: [a, b] \to R$ fonksiyonuna η-konveks fonksiyon denir (Gordji vd. 2016).

Tanım 2.3 (Jensen Eşitsizliği) Eğer $\forall x, y \in I$ için $f: I \to R$ fonksiyonu

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \tag{2.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna, J-konveks veya mid-konveks fonksiyon denir (Pachpatte 2005a).

Tanım 2.4 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f: I \in [a, b] \to R$ konveks fonksiyon olsun. Herhangi bir $x \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanır ise bu eşitsizliğe Hermite-Hadamard eşitsizliği denir.

Teorem 2.1 (Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği) $f: I \in [a, b] \to R$ konveks fonksiyon ve $g: I \in [a, b] \to R^+$ integrallenebilir ve $x = \frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik fonksiyon olsun. $x \in [a, b]$ ve $a < b$ olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx \tag{2.5}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği denir. (2.5) eşitsizliğinde $g \equiv 1$ alınırsa, eşitsizlik Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Tanım 2.5 İki bağımsız değişkeni olan fonksiyonlara "çift değişkenli fonksiyonlar" ya da "bifonksiyon" denir.

Tanım 2.6 $f:[0,\infty) \to R$ fonksiyonu her $x, y \in R$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve bazı $s \in (0,1]$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \ \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Hudzık ve Maligranda.1994).

Tanım 2.7 $f:[0,\infty) \to R$ fonksiyonu için, her $x, y \in [0,\infty]$, $t \in [0,1]$ ve $s \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Hudzik ve Maligranda. 1994).

Lemma 2.1 $f:[a,b] \to R$ diferansiyellenebilir, $g:[a,b] \to R^+$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik fonksiyon ve f' $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirse,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$= \frac{b-a}{4}\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\left\{f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)+f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right\}dudt$$

eşitsizliği sağlanır (Gordji vd. 2015).

3. KONVEKS FONKSİYONLAR VE KONVEKS FONKSİYONLAR İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

3.1 Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1 $f: I \subseteq R \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. Herhangi bir $x, y \subset I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa,

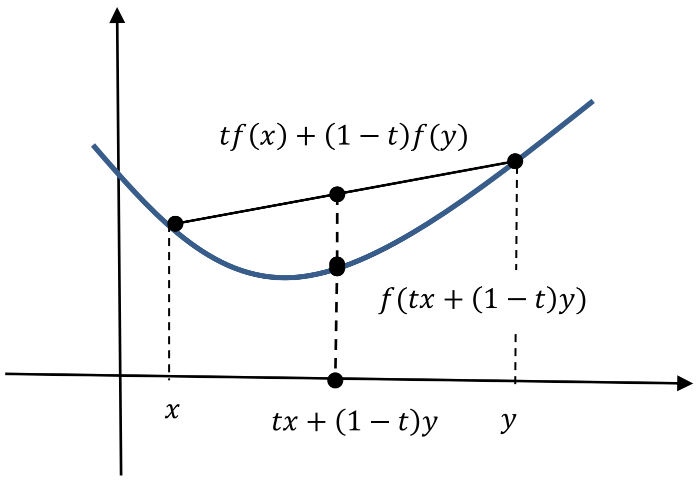
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad (3.1.1)$$

f fonksiyonuna I üzerinde konveks fonksiyon denir.

Bunun tam tersi konkavdır. Eğer (3.1.1)'de

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \qquad (3.1.2)$$

olursa, o zaman (3.1.2) eşitsizliğine kesin konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonunun koordinat sisteminde görünümü Şekil 3.1.1 deki gibidir.



Şekil 3.1.1 Konveks Fonksiyonlar

Örnek 3.1.1 $f(x) = x^2$ fonksiyonun konveks olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) = (tx + (1-t)y)^2 &= t^2x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2 \\ &\leq t^2x^2 + t(1-t)[x^2 + y^2] + (1-t)^2y^2 \\ &= t^2x^2 + t(1-t)x^2 + t(1-t)y^2 + (1-t)^2y^2 \\ &= x^2(t^2 + t - t^2) + y^2(1-t)(t + 1 - t) \\ &= t^2x^2 + (1-t)y^2 = tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

Burada $a^2 + b^2 \geq 2ab$ temel eşitsizliği kullanıldı.

(3.1.1) eşitsizliği tam tersi olduğu zaman fonksiyon konkav bir fonksiyona dönüşür. Kesin konveks fonksiyon minimum noktasına sahip olmayabilir. Örneğin; $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu monoton olarak gittikçe sıfıra yaklaşır ama global minimumu yoktur. Güçlü konveks fonksiyonlar her zaman benzersiz minimum noktasına sahiptir. Daha sonraki bölümlerde güçlü konvekslik hakkında genel bilgiler verilecektir.

Konveks fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir.

I. Konveks fonksiyonların toplamı da konveks fonksiyondur.

Gerçekten f ve g fonksiyonları konveks fonksiyonlar olsun. O zaman bunların toplamı $h = f + g$ olduğuna göre;

$$
\begin{aligned}
&h(tx + (1-t)y) = (f+g)(tx + (1-t)y) \\
&= f(tx + (1-t)y) + g(tx + (1-t)y) \\
&\leq tf(x) + (1-t)f(y) + tg(x) + (1-t)g(y) \\
&= t[f+g](x) + (1-t)[f+g](y) = th(x) + (1-t)h(y)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

II. Konveks fonksiyonun sürekli olmayabilir.

Gerçekten,

$$
f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x < 2 \\ 3 & x = 5 \end{cases}
$$

fonksiyonu sürekli olmamasına rağmen konvekstir.

III. Konveks fonksiyonların türevlenebilir olması gerekmez.

Gerçekten, $f(x) = |x|$ fonksiyonu konveks bir fonksiyondur. Ama $x = 0$ noktasında türevlenebilir değildir.

3.2 Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizliği

Hermite-Hadamard eşitsizliği konveks fonksiyonlar için en temel integral eşitsizliklerden biridir. Bu eşitsizlik üzerinde birçok çalışmalar ve araştırmalar yapılmaktadır. Bu eşitsizlik ilk olarak Hermite tarafından 1881 yılında Mathesis dergisinde yayınlanmıştır.

Teorem 3.2.1 $f \in Q(I)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. $[a,b] \in I$ ve $a < b$ olmak üzere, eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebiliyorsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{3.2.1}$$

bu eşitsizliğe Hermite-Hadamard eşitsizliği denir (Niculescu ve Persson 2003).

İspat: f fonksiyonu *I* aralığında konveks olduğundan,

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b) \tag{3.2.2}$$

eşitsizliğinin $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt$$

$$= f(a)\left(\frac{t^2}{2}\right)\bigg|_0^1 + f(b)\left(-\frac{(1-t)^2}{2}\right)\bigg|_0^1 = \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.3}$$

elde edilir. Buradan $x = ta + (1-t)b$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin diğer kısmını elde etmek için, verilen fonksiyonun *I* aralığında konveksliğini kullanarak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{4} + \frac{a+b+t(b-a)}{4}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right] \tag{3.2.5}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında *t* ye göre integrali alınırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right]dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.2.6}$$

bulunur. (3.2.4) ve (3.2.6) eşitsizliklerinden, (3.2.1) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış oldu.

3.3 Hermite-Hadamard-Fejer Tipi Eşitsizliği

Fejer (1880-1959), 1906 yılında Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genellemesi olarak Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğini gösterdi.

Teorem 3.3.1 $f:[a,b]\to R$ konveks fonksiyon, $g:[a,b]\to R$, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir, negatif olmayan, $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik bir fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx \qquad (3.3.1)$$

dir.

İspat: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan, tüm $t\in[0,1]$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{(ta+(1-t)b)+(tb+(1-t)a)}{2}\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\big(f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a)\big) \qquad (3.3.2)$$

eşitsizliğinin her iki tarafını da $g(tb+(1-t)a)$ çarpıp, t'ye göre $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 g(tb+(1-t)a)dt$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^1 \big(f(ta+(1-t)b)\, g(tb+(1-t)a)$$

$$+ f(tb+(1-t)a)\, g(tb+(1-t)a)\big)dt$$

elde edilir. Burada $x=tb+(1-t)a$ ve $dx=(b-a)dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{1}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx$$

$$\le \frac{1}{2(b-a)}\left(\int_a^b f(a+b-x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g(x)dx\right) \qquad (3.3.3)$$

bulunur. f fonksiyonu *I* aralığında $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olduğundan,

$$f(x)=f(a+b-x) \qquad (3.3.4)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik, (3.3.3) eşitsizliğinde yerine yazılır ve eşitsizliğin her iki tarafı $(b-a)$ ile çarpılırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g(x)dx\right) = \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (3.3.5)$$

elde edilir. Böylece (3.3.1) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir.

Sağ tarafını elde etmek için, f fonksiyonu I aralığında konveks fonksiyon olduğundan, her $t \in [0,1]$ için,

$$f(ta+(1-t)+f(tb+(1-t)a)$$

$$\leq tf(a)+(1-t)f(b)+tf(b)+(1-t)f(a) \qquad (3.3.6)$$

$$= f(a)+f(b)$$

eşitsizliğinin her iki tarafını $g(tb+(1-t)a)$ ile çarpar ve $[0,1]$ de t ye göre integre edilirse

$$\int_0^1 (f(ta+(1-t)g(tb+(1-t)a) \ + f(tb+(1-t)a)g(tb+(1-t)a)\ )dt$$

$$\leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 g(tb+(1-t)a)\, dt \qquad (3.3.7)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada değişken değiştirme ve f in I aralığında $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olduğu kullanılırsa,

$$\int_a^b f(x)g(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\, dx \qquad (3.3.8)$$

bulunur.

Böylece verilen eşitsizliğin sağ tarafı elde edilmiş oldu. (3.3.8) ve (3.3.5) eşitsizliklerinden (3.3.1) elde edilir. Buda teoremin ispatıdır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR

4.1 η-Konveks Fonksiyonu

Genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar konveks kavramı üzerinde çalışmalara ve uygulamalara bağlı olarak genelleştirilmesidir. Bu genellemelerden bazıları yarı-dışbükey (quasi-konveks), h-konveks, s-konveks , η-konveks, güçlü konveks v.b dir. Bu bölümde genelleştirilmiş konveks fonksiyonlardan η-konveks, s-konveks ve $s-\eta$-konveks fonksiyonları ve bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 4.1.1 $f: I \to R$ fonksiyonu ve $\eta: R \times R \to R$ bi-fonksiyonu verildiğine göre, her $x, y \in I$ ve her $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(y) + t\eta\big(f(x), f(y)\big) \qquad (4.1.1)$$

sağlanırsa, f fonksiyonuna η-konveks fonksiyon denir (Gordji vd. 2016).

Tanım 4.1.2 $f: I \to R$ fonksiyonu, $\forall\, x, y \in I$ ve $\forall\, t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq max\{f(y), f(y) + t\eta\big(f(x), f(y)\big)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna η-quasi konveks fonksiyon denir (Gordji vd. 2016).

Tanım 4.1.1 de f geometrik olarak I üzerinde η-konveks fonksiyon ise fonksiyonun herhangi *x* ve *y* arasındaki grafiği $\big(y, f(y)\big)$ den başlayan ve $\Big(x, f(y) + \eta\big(f(x), f(y)\big)\Big)$ de biten eğrinin altında veya üstünde bulunur (Gordji vd. 2016).

Tanıma 4.1.1 de $\eta(x, y) = x - y$ ise

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(y) + t\big(f(x) - f(y)\big) = tf(x) + (1-t)f(y)$$

η-konveks fonksiyonu normal konveks fonksiyonuna indirgenir.

Eğer (4.1.1) de $\forall\, x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için, $x = y$ ise

$$f(tx + (1-t)x) = f(x) \leq f(x) + t\eta(f(x), f(y))$$

olur, buradan

$$t\eta\big(f(x), f(y)\big) \geq 0 \qquad (4.1.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer (4.1.2) de $\forall\, x, y \in I$ için, $t = 1$ alırsak,

$$f(x) - f(y) \leq \eta\big(f(x), f(y)\big) \tag{4.1.3}$$

elde edilir. O halde

$$\eta(x, y) \geq x - y \tag{4.1.4}$$

olduğu görülür. O zaman

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(y) + t[f(x) - f(y)] \leq f(y) + t\eta\big(f(x), f(y)\big) \tag{4.1.5}$$

eşitsizliği, f in η-konveks olduğunu gösterir.

Örnek 4.2.1 $f(x) = x^2$ ve $\eta(x, y) = 4x + 3y$ ise, tüm $x, y \in R$ ve $t \in [0,1]$ için f fonksiyonu bir η-konveks fonksiyon mudur?

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= (tx + (1-t)y)^2 \\ &\leq y^2 + tx^2 + t(1-t)12xy \\ &\leq y^2 + tx^2 + t(1-t)(3x^2 + 3y^2) \\ &\leq y^2 + t(x^2 + 3x^2 + 3y^2) \\ &= y^2 + t(4x^2 + 3y^2) \\ &= y^2 + t(4x^2 + 3y^2) \\ &= f(y) + t\eta\big(f(x), f(y)\big) \end{aligned}$$

Ayrıca, $x^2 \leq y^2 + t(4x^2 + 3y^2)$ eşitsizliği sırasıyla $t = 1$ ve $t = 0$ için sağlanır. Bu da f fonksiyonun η-konveks fonksiyon olduğunu gösterir.

Not. $f(x) = x^2$ fonksiyonu $a \geq 1$ ve $b \geq -1$ olmak üzere, her $\eta(x, y) = ax + by$ fonksiyonu için η-konveks fonksiyondur.

Şimdi bu örneğin η-konveks fonksiyon olduğunu, başka bir açıdan gösterelim.

$$f(tx + (1-t)y) = (tx + (1-t)y)^2 \leq y^2 + t(4x^2 + 3y^2)$$

eşitsizliği, $t = 1$ ise

$$x^2 - y^2 \leq 4x^2 + 3y^2$$

$t = 0$ ise

$$y^2 \leq y^2$$

$x = y$ ise

$$x^2 \leq x^2 + t(4x^2 + 3y^2)$$

$$t(4x^2 + 3y^2) \geq 0$$

olur. Buda bize verilen fonksiyonun η-konveks fonksiyon olduğunu gösterir.

Dikdörtgende tanımlanan η-konveks fonksiyonun koordinat η-konveks olduğu ve genel olarak tersinin doğru olmadığını, S.Z. Ullah (2019) birkaç örnek vererek göstermiş ve koordinat η-konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliğini elde etmiştir (Ullah vd. 2019).

Gordji ve diğerleri (2016) η-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliğini aşağıdaki şekilde göstermiştir (Gordji vd. 2016).

Teorem 4.1.1 $f: I \to R$ η-konveks fonksiyon ve $f(I) \times f(I)$ üzerinde üst sınır olsun. Her $a, b \in I$, $a < b$ için

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M_\eta \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(b) + \frac{1}{2}\eta\big(f(a), f(b)\big) \tag{4.1.6}$$

burada M_η, $f([a,b]) \times f([a,b])$ üzerinde η nın bir üst sınırı olsun.

Yani; $M_\eta \geq \eta\big(f(a), f(b)\big)$ dir (Gordji vd. 2016).

İspat: f fonksiyonu I aralığında η-konveks fonksiyon olduğundan onun üst sınırı için,

$$f(at + (1-t)b) \leq f(b) + t\eta\big(f(a), f(b)\big) \leq f(b) + M_\eta \tag{4.1.7}$$

yazarız. f η-konveks fonksiyonunun alt sınırı için, $[a,b]$ aralığında $\frac{a+b}{2} - t$ herhangi bir nokta olsun.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{4} + \frac{t}{2} + \frac{a+b}{4} - \frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} - t\right)\right)$$

$$\leq f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + \frac{1}{2}\eta\left(f\left(\frac{a+b}{2} + t\right), f\left(\frac{a+b}{2} - t\right)\right) \leq f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + \frac{1}{2}M_\eta$$

yani

$$f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}M_\eta \tag{4.1.8}$$

$m = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}M_\eta$ dir.

$$f(at + (1-t)b) \leq f(b) + t\eta\big(f(a), f(b)\big)$$

eşitsizliğinde $x = at + (1-t)b$ değişken değişimi uygularsak, $t = \frac{b-x}{b-a}$ olur ve bunlar eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$f(x) \leq f(b) + \frac{b-x}{b-a}\,\eta\big(f(a), f(b)\big) \tag{4.1.9}$$

elde edilir. (4.1.9) un her iki tarafını, $\frac{1}{b-a}$ çarpar ve $[a,b]$ da x e göre integrali alınırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(b)dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{b-x}{b-a}\,\eta\big(f(a), f(b)\big)dx$$

$$= \frac{1}{b-a} f(b)(b-a) + \frac{\eta\big(f(a), f(b)\big)}{2(b-a)^2}(b-a)^2 = f(b) + \frac{1}{2}\eta\big(f(a), f(b)\big) \tag{4.1.10}$$

elde edilir. Böylece (4.1.6) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Sol tarafı için f fonksiyonunun I aralığında η-konveksliği kullanılarak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{4} + \frac{t(b-a)}{4} + \frac{a+b}{4} - \frac{t(b-a)}{4}\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)$$

$$\leq f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right) + \frac{1}{2}\eta\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right), f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)$$

$$\leq f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right) + \frac{1}{2}M_\eta \tag{4.1.11}$$

bulunur. Burada $[0,1]$ aralığında t ye göre integral alırsak,

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}M_\eta \tag{4.1.12}$$

elde edilir. (4.1.12) eşitsizliğinin her iki tarafına da $f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)$ ekler ve $[0,1]$ de t ye göre integrali alınırsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right]$$

$$= \int_0^1 \left[f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)\right]dt$$

$$\geq \int_0^1 \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}M_\eta + f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)\right)dt$$

$$= \int_0^1 f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)dt + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}M_\eta$$

$$\geq m + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}M_\eta = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M_\eta \tag{4.1.13}$$

elde edilir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Gordji ve Dragomir η-konveks fonksiyonlar ile ilgili çalışmasında aşağıdaki sonuçları elde etmiştir ve Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinin orta ve sağ terimleri arasındaki farkı göstermişlerdir.

Lemma 4.1.1 $f: I \subseteq R \to R,\ I$ üzerinde differensiyellenebilir bir eşleme olsun $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Dragomir ve Aragwal. 1998).

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt \qquad (4.1.14)$$

Lemma 4.1.2 $f: [a, b] \to R$ differensiyellenebilir fonksiyon olsun. $g: [a, b] \to R^+$ Sürekli fonksiyon ve f', $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonsa

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^x g(u)f'(x)du\,dx - \frac{1}{2}\int_a^b \int_x^b g(u)f'(x)du\,dx \qquad (4.1.15)$$

eşitsizlşiği sağlanır (Gordji vd. 2015).

Lemma 4.1.3 $f: [a, b] \to R$ differensiyellenebilir fonksiyon olsun. $g: [a, b] \to R^+$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ göre simetrik fonksiyon ve f', $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonsa

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$$
$$= \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1 \left(\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)du\right) f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)dt\right.$$
$$\left. + \int_0^1 \left(\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)du\right) f'\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right)dt\right\} \qquad (4.1.16)$$

eşitsizliği sağlanır (Gordji vd 2015). Lemma 4.1.3'ü η-konveks fonksiyon için uygulayacak olursak,

Teorem 4.1.2 $f:[a,b]\to R$ diferensiyellenebilir fonksiyon ve $g:[a,b]\to R^{+}$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ve $|f'|$ fonksiyonu η-konveks fonksiyon olsun. Burada η $[a,b]$ ile sınırlanmış üst sınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}[2|f'(b)|+|\eta(f'(a),f'(b)|]\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)dudt \qquad (4.1.17)$$

eşitsizliği sağlanır (Gordji vd. 2015).

İspat: Lemma 4.1.3 te $|f'|$ fonksiyonun η-konveks fonksiyon olduğunu kullanacak olursak,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\left[\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|+\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|\right]$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\Big[|f'(b)|+\frac{1+t}{2}\eta(|f'(a)|,|f'(b)|)$$

$$+|f'(b)|+\frac{1-t}{2}\eta(|f'(a)|,|f'(b)|)\Big]$$

$$=\frac{b-a}{4}[2|f'(b)|+|\eta(f'(a),f'(b)|]\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)dudt \qquad (4.1.18)$$

elde edilir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

4.2. S-Konveks Fonksiyon

Hudzik ve Maligranda, 1994'de ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

Tanım 4.2.1 Eğer $f:[0,\infty)\to R$ fonksiyonu için, her $x,y\in[0,\infty]$, $t\in[0,1]$ ve $s\in[0,1]$ olmak üzere,

$$f(tx+(1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) \tag{4.2.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Hudzik ve Maligranda 1994).

Eğer (4.2.1) de $s=1$ olursa, o zaman eşitsizlik $[0,\infty)$ aralığında konveks fonksiyona indirgenir. Dragomir ve Fitzpatric 1999'da ikinci anlamdaki s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini gösterdi.

Teorem 4.2.1 $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ ikinci anlamda s-konveks fonksiyon olsun. Burada $s \in (0,1)$ ve $a,b \in [0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere. $f \in L([a,b])$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Dragomir ve Fitzpatric 1999).

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{4.2.2}$$

İspat: f fonksiyonu ikinci anlamda s-konveks fonksiyon olduğundan,

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b) \tag{4.2.3}$$

(4.2.3) eşitsizliğinin her iki tarafının, $[0,1]$ aralığında t ye göre integralin alınırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \int_0^1 t^s f(a)dt + \int_0^1 (1-t)^s f(b)dt$$

$$= f(a)\left(\frac{t^{s+1}}{s+1}\right)\Bigg|_0^1 + f(b)\left(-\frac{(1-t)^{s+1}}{s+1}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{4.2.4}$$

bulunur. (4.2.3) eşitsizliği midkonveks şeklinde yazılırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2^s} \tag{4.2.5}$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafı 2^{s-1} ile çarpılırsa,

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{4} - \frac{t(b-a)}{4} + \frac{a+b}{4} + \frac{t(b-a)}{4}\right)$$

$$= 2^{s-1} f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right) \tag{4.2.6}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı, $[0,1]$'de t ye göre integrali alınırsa

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)dt$$

$$\geq 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{4.2.7}$$

bulunur. (4.2.4) ve (4.2.7) eşitsizliklerinden (4.2.2) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

(2013)'de M. E. Özdemir ve diğerleri ikinci anlamda s-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin sol tarafına ilişkin bazı yeni sonuçlar elde ettiler.

Lemma 4.2.1 $f: I \subset R \to R$, I üzerinde türevlenebilir konveks fonksiyon olsun, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere. $f'' \in L[a,b]$ ise, aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Özdemir vd. 2013).

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{16}\left[\int_0^1 t^2 f''\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-t)^2 f''\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt\right]. \tag{4.2.8}$$

İspat: f fonksiyonu türevlenebilir olduğundan,

$$\big(f(tx + (1-t)y)\big)''_x = t^2 f''(tx + (1-t)y)$$

$$\big(f(ty + (1-t)x)\big)''_x = (1-t)^2 f''(ty + (1-t)x)$$

olur. Bu eşitliklerden yola çıkarak,

$$I_1 = \int_0^1 t^2 f''\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt \tag{4.2.9}$$

$$I_2 = \int_0^1 (1-t)^2 f''\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt \tag{4.2.10}$$

elde edilir. Bu iki integralin kısmi integrallerini alırsak,

$$I_1 = \int_0^1 t^2 f''\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt$$

$$= \frac{2t^2}{b-a} f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\Bigg|_0^1 - \frac{4}{b-a}\int_0^1 t f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt$$

$$= \frac{2}{b-a} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{b-a}\left[\frac{2t}{b-a} f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\Big|_0^1 \right.$$

$$\left. - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt\right]$$

$$= \frac{2}{b-a} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{8}{(b-a)^2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+ \frac{8}{(b-a)^2}\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt \qquad (4.2.11)$$

bulunur. (4.2.9) da $t \in [0,1]$ için $x = \left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)$ değişken değişimi yapar ve her tarafı $\frac{(b-a)^2}{16}$ ile çarparsak,

$$\frac{(b-a)^2}{16}\int_0^1 t^2 f''\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt$$

$$= \frac{b-a}{8} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx \qquad (4.2.12)$$

bulunur. Benzer şekilde aynı işlemleri (4.2.10) için de uygularsak,

$$\frac{(b-a)^2}{16}\int_0^1 (1-t)^2 f''\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt$$

$$= -\frac{b-a}{8} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx \qquad (4.2.13)$$

bulunur.

(4.2.12) ve (4.2.13) eşitliklerini toplarsak (4.2.8) elde edilir, böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu lemmadan yararlanarak birçok Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Şimdi s-konveks fonksiyonu için bu lemmayı kullanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.2 $f: I \subset R \to R$ fonksiyonu $f'' \in L[a,b]$ olacak şekilde I aralığında $|f''|$ türevlenebilir s-konveks fonksiyon olsun $a, b \in R$ ve $a < b$ olmak üzere.$s \in (0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Özdemir vd. 2013).

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{|f''(a)| + (s+2)(s+3)\left|f''^{\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right| + |f''(b)|\right\} \qquad (4.2.14)$$

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{[1+(s+2)2^{1-s}](b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\{|f''(a)|+|f''(b)|\}. \qquad (4.2.15)$$

İspat: Lemma 4.2.1'den

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{16}\left[\int_0^1 t^2\left|f''\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 (1-t)^2\left|f''\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\right]$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{16}\int_0^1\left[t^2t^s\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+t^2(1-t)^s|f''(a)|\right]dt$$
$$+\frac{(b-a)^2}{16}\int_0^1\left[(1-t)^2t^s|f''(b)|+(1-t)^2(1-t)^s\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]dt$$
$$=\frac{(b-a)^2}{16}\left[\frac{1}{s+3}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}|f''(a)|\right]$$
$$+\frac{(b-a)^2}{16}\left[\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}|f''(b)|+\frac{1}{s+3}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]$$
$$=\frac{(b-a)^2}{16}\left[\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}[|f''(a)|+|f''(b)|]+\frac{2}{s+3}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]$$
$$=\frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{|f''(a)|+|f''(b)|+(s+1)(s+2)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right\}$$
$$\times\left\{|f''(a)|+|f''(b)|+(s+1)(s+2)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right\} \qquad (4.2.16)$$

bulunur. Böylece (4.2.14) eşitsizliği ispatlandı.

Burada,

$$\int_0^1 t^{s+2}dt = \int_0^1 (1-t)^{s+2} = \frac{1}{s+3}$$
$$\int_0^1 t^2(1-t)^s dt = \int_0^1 t^s(1-t)^2 dt = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

(4.2.15) eşitsizliğini ispatlamak için, $|f''|$, $[a,b]$ üzerinde herhangi $t\in[0,1]$ için s-konveks fonksiyon olduğundan (4.2.2)'den

$$\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le 2^{1-s}\frac{|f''(a)|+|f''(b)|}{s+1} \tag{4.2.17}$$

elde edilir. (4.2.17) eşitsizliği (4.2.16) da kullanılırsa,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{|f''(a)|+|f''(b)|+(s+1)(s+2)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right\}$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{|f''(a)|+|f''(b)|+(s+2)2^{1-s}\big||f''(a)|+|f''(b)|\big|\right\}$$

$$= \frac{(b-a)^2[1+(s+2)2^{1-s}]}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\{|f''(a)|+|f''(b)|\}$$

bulunur. Böylece (4.2.15) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.1 Eğer Teorem 4.2.2 de $s=1$ seçersek

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{192}\left\{|f''(a)|+12\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|f''(b)|\right\} \tag{4.2.18}$$

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{(b-a)^2}{48}\{|f''(a)|+|f''(b)|\} \tag{4.2.19}$$

(4.2.18) ve (4.2.19) konveks fonksiyonlar olur.

Özdemir s-konveks ve s-konkav fonksiyonlarla ile ilgili bazı Hermite-Hadamard eşitsizliklerini aşağıdaki teoremlerde göstermiştir.

Teorem 4.2.3 $f: I \subset [0,\infty) \to R$ fonksiyonu $f'' \in L[a,b]$ olacak şekilde I aralığında türevlenebilir olsun $a,b \in R$ ve $a<b$ olmak üzere. Eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ üzerinde s-konveks fonksiyon ise, $s \in (0,1]$, $q \ge 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{(b-a)^2}{16}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\left(|f''(a)|^q+\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \tag{4.2.20}$$

Teorem 4.2.4 $f: I \subset [0,\infty) \to R$, I üzerinde $f'' \in L[a,b]$ olacak şekilde $a, b \in R$ ve $a < b$ olmak üzere diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f''|^{q}$, $q \geq 1$, $[a,b]$ üzerinde s-konveks fonksiyon ise, bazı sabit $s \in (0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}|f''(a)|^q + \frac{1}{s+3}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{s+3}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \quad (4.2.21)$$

4.3. $s - \eta$ –Konveks Fonksiyon

Bu bölümde konveks fonksiyonların genellemesi olarak $s-\eta$-konveks fonksiyonlar kavramı tanıtıldı.

Rangel-Oliveros ve Cortez 2018 deki makalesinde $s-\eta$-konveks fonksiyonunu tanımladı ve Osrowski tipi eşitsizlikler elde ettiler. 2019 da aynı yazarlar tarafından‘‘An inequalty related to $s-\eta$-convex functions’’ adlı makalede $s-\eta$ -konveks fonksiyonlar kavramını kullanarak, türevlenebilir kümeler için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğindeki orta ve sağ terimler arasındaki tahmini farkı gösterildi.

Burada $s-\eta$-konveks fonksiyonu, s-konveks ve η-konveks fonksiyonların birleşmesinden oluşur.

Tanım 4.3.1 $f: I \subset R \to R$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx+(1-t)y) \leq f(y) + t^s\eta\big(f(x), f(y)\big) \quad (4.3.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu $s-\eta$-konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Burada $s \in (0,1)$ ve $\eta: R \times R \to R$ bifonksiyondur (Rangel-Oliveros vd. 2018).

Sonuç 4.3.1 Eğer (4.3.1) de $s = 1$ alınırsa, eşitsizlik η-konveks fonksiyona dönüşür.

Sonuç 4.3.2 Eğer (4.3.1) de $\eta(x,y) = x - y$ alınırsa, eşitsizlik s-konveks fonksiyona dönüşür.

Örnek 4.3.1 $f(x) = x^2$, $s = \frac{1}{3}$, ve $\eta(f(x), f(y)) = 2x + y$ ise f fonksiyonunun $s - \eta$-konveks fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Verilenleri yerine yazarsak

$$f(tx + (1-t)y) = (tx + (1-t)y)^2$$

$$= x^2t^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2 \le y^2 + tx^2 + 2txy = y^2 + t^{\frac{2}{3}}\left(t^{\frac{1}{3}}x^2 + 2t^{\frac{1}{3}}xy\right)$$

olur. Diğer yandan,

$$0 < t < 1 \Rightarrow 0 < t^{\frac{1}{3}} < 1$$

$$\Rightarrow t^{\frac{1}{3}}x^2 + 2t^{\frac{1}{3}}xy \le t^{\frac{1}{3}}x^2 + t^{\frac{1}{3}}x^2 + t^{\frac{1}{3}}y^2 = t^{\frac{1}{3}}(2x^2 + y^2)$$

Olduğundan,

$$f(tx + (1-t)y) \le y^2 + t^{\frac{1}{3}}(2x^2 + y^2) = f(y) + t^s\eta(f(x), f(y))$$

elde edilir. Böylece $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $s - \eta$-konveks fonksiyon olduğu gösterilmiş oldu.

Şimdi Teorem 4.1.2 yi $s - \eta$-konveks fonksiyonu için uygulayarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.3.1 $f: [a, b] \to R$ diferensiyellenebilir olduğunu varsayalım. $g: [a, b] \to R^+$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ göre simetrik fonksiyondur. $|f'|$, $s - \eta$-konveks fonksiyondur. Burada η, $[a, b]$ üzerinde üst sınır ise,

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\le \frac{b-a}{4}\left[2|f'(b)| + N|\eta(f'(a), f'(b)|\right]\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)dudt \qquad (4.3.2)$$

burada $N = max_{t\in[0,1]}\left|\left(\frac{1+t}{2}\right)^s + \left(\frac{1-t}{2}\right)^s\right|$ (Cortez ve Oliveros 2020).

İspat: f fonksiyonu $s - \eta$-konveks olduğundan,

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\le \frac{b-a}{4}\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\left[\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right| + \left|f'\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right)\right|\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\left[|f'(b)| + \left(\frac{1+t}{2}\right)^s \eta(|f'(a)|,|f'(b)|)\right.$$

$$\left. + |f'(b)| + \left(\frac{1-t}{2}\right)^s \eta(|f'(a)|,|f'(b)|)\right]$$

$$= \frac{b-a}{4}\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\left[2|f'(b)| + \left(\left(\frac{1+t}{2}\right)^s + \left(\frac{1-t}{2}\right)^s\right)\eta(|f'(a)|,|f'(b)|)\right]$$

$$= \frac{b-a}{4}[2|f'(b)| + N|\eta(f'(a),f'(b)|]\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)dudt \qquad (4.3.3)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Burada $s-\eta$-konveks fonksiyonu için,

$$f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) \leq f(b) + \left(\frac{1+t}{2}\right)^s \eta\big(f(a),f(b)\big) \qquad (4.3.4)$$

eşitsizliği kullanılmıştır.

Sonuç 4.3.3 Eğer teorem 4.3.1 de $g \equiv 1$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{8}[2|f'(b)| + N|\eta(f'(a),f'(b)|] \qquad (4.3.5)$$

olur.

Sonuç 4.3.4 Eğer teorem 4.3.1 de $s=1$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}[2|f'(b)| + |\eta(f'(a),f'(b)|]\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)dudt \qquad (4.3.6)$$

olur.

5. GÜÇLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ KONVEKS FONKSİYONLAR

5.1 Güçlü Konveks Fonksiyonlar

Konvekslik matematikteki en önemli ve temel kavramlardan biridir. Son zamanlarda güçlü konveks fonksiyonlar ile ilgili birçok çalışmalar yapılmıştır ve neticede güçlü quasi konveks, güçlü konveks, güçlü m-konveks, güçlü η-konveks ve benzeri gibi yeni sonuçlar elde edilmiştir (Song vd. 2018).

1966 yılında rus matematikçisi Polyak $\mu > 0$ modülüne göre güçlü konveks fonksiyon kavramını tanıttı.

Güçlü konveks kavramı, kesin konveks kavramını genişletir. Polyak ‘‘optimizasyona giriş’’ kitabında bunları belirlemiştir.

Konveks fonksiyonun ya da kesin konveks fonksiyonun grafiği, hiper düzlemin üzerinde bulunurken, bir güçlü konveks fonksiyonun grafiği paraboloidin üzerinde bulunur (Şekil 5.1.1).

Güçlü konveks fonksiyon her zaman yerel minimum noktasına sahiptir. O yüzden kademeli küçültme ya da gradyan gibi işlemlerde her zaman önemli yer almaktadır.

Optimizasyon alanında gradyan inişi makine öğrenme alanında popüler bir yöntemdir. Güçlü konveks fonksiyonun diferensiyellenebilir olmasını gerektirmez ve pürüssüz olmadığında gradyan alt gradyan ile değiştirilir.

Optimizasyon algoritmalarını analiz ederken, bazen konvekslik tanımını genelleştiren güçlü konveks fonksiyonlar ile çalışmak daha kolaydır. Güçlü konvekslik biraz simetrik bir kavramdır.

Güçlü konvekslik konveks fonksiyonlara daha iyi alt sınır oluşturmayı sağlayan konvekslik kavramının bir parçasıdır. Alt gradyanların kullanılmasıyla doğrusal alt sınır yerine, ikinci dereceden alt sınır oluşacaktır (Şekil 5.1.1). Kısacası güçlü konvekslik ikinci dereceden alt sınıra sahiptir.

Tanım 5.1.1 $f: I \to R$ fonksiyonu $\mu > 0$ olsun. Her $x, y \in R$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \mu t(1-t)\|x-y\|^2 \qquad (5.1.1)$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu güçlü konveks fonksiyon olarak adlandırılır.

Burada $\mu > 0$ güçlülük parametresidir.

Lemma 5.1.1 $f: I \to R$ konveks fonksiyonu için $f(x) = g(x) + \mu\|x\|^2$ olacak şekilde $g: I \to R$ fonksiyonu varsa, her $x, y \in R$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \mu t(1-t)\|x-y\|^2$$

eşitsizliği sağlanır (Nesterov 2010).

İspat: $g(x)$ konveks fonksiyon olduğundan,

$$f(tx + (1-t)y) = g(tx + (1-t)y) + \mu\|(tx + (1-t)y)\|^2$$
$$\leq tg(x) + (1-t)g(y) + \mu\|(tx + (1-t)y)\|^2$$
$$= t(f(x) - \mu\|x\|^2) + (1-t)(f(y) - \mu\|y\|^2) + \mu\|(tx + (1-t)y)\|^2$$
$$= tf(x) + (1-t)f(y) - \mu t\|x\|^2 - \mu(1-t)\|y\|^2$$
$$+\mu t^2\|x\|^2 + 2\mu t(1-t)\|x\|\|y\| + \mu(1-t)^2\|y\|^2$$
$$= tf(x) + (1-t)f(y) - \mu t(1-t)(\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2)$$
$$= tf(x) + (1-t)f(y) - \mu t(1-t)\|x-y\|^2$$

elde edilir ve böylece lemma ispatlanmış olur.

Lemma 5.1.2 Her $x, y \in R$, $t \in [0,1]$ ve $\mu > 0$ için $f: I \to R$ güçlü konveks fonksiyon ise

$$f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y-x) + \mu\|y-x\|^2 \tag{5.1.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (5.1.1) eşitsizliğini, $y_t = ty + (1-t)x$ olarak yeniden yazarsak,

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x) - \mu t(1-t)\|y-x\|^2$$
$$f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t\big(f(y) - f(x)\big) - \mu t(1-t)\|y-x\|^2$$
$$t\big(f(y) - f(x)\big) \geq f\big(x + t(y-x)\big) - f(x) + \mu t(1-t)\|y-x\|^2$$

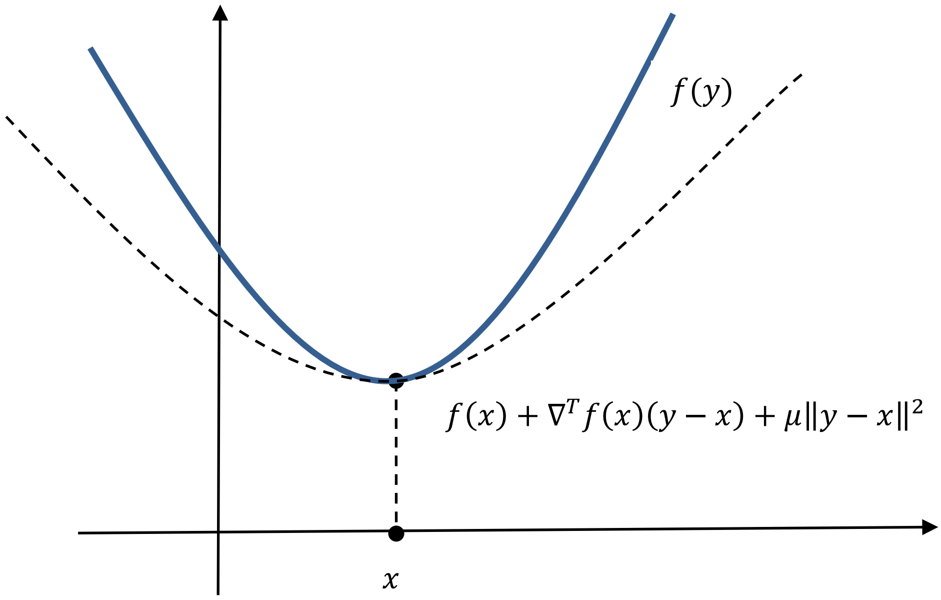
son eşitsizliğin iki tarafını da t ye bölerek ve $t \to 0$ için limit alırsak,

$$\lim_{t\to 0}\big(f(y) - f(x)\big) \geq \lim_{t\to 0}\frac{f\big(x + t(y-x)\big) - f(x)}{t} + \lim_{t\to 0}\mu(1-t)\|y-x\|^2$$

yani,

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), (y-x)\rangle + \mu\|y-x\|^2$$

bulunur. $f(x)$'i karşı tarafa atar ve düzenlersek, (5.1.2) eşitsizliği elde edilir. Böylece lemma ispatlanmış olur.



Şekil 5.1.1 Güçlü Konveks Fonksiyonlar

Burada güçlü konveks fonksiyonunun ikinci dereceden bir alt sınırı olduğunu göstermektedir. Bu Taylor formülünün $n = 2$ olduğu durumu hatırlatır. Bu da güçlü konveks fonksiyonun kesinlikle konveks olduğunu gösterir. Çünkü ikinci dereceden bir alt sınır büyümesi doğrusal büyümeden kesinlikle büyüktür.

Eğer f iki kez türevlenebilirse, güçlü konveksliğin eşdeğer bir tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 5.1.3 $f: I \to R$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $x \in R$ için

$$\nabla^2 f(x) \geq \mu I \qquad (5.1.3)$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyona güçlü konveks fonksiyon denir. Burada $\mu > 0$ güçlü konvekslik modülüdür.

Güçlü konveks fonksiyon kesin konveks ve konveks fonksiyon olur. Ama tersi her zaman doğru olmaz.

Teorem 5.1.2 $f: I \to R$ güçlü konveks fonksiyon olsun. $\mu > 0$ olmak üzere, her $x, y \in R$ ve $t \in [0,1]$ için

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y) + \mu t(1-t)\|y-x\|^2 \qquad (5.1.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: İlk olarak her $x, y \in R$ ve $t \in [0,1]$ için, (5.1.4) eşitsizliği aşağıdaki şekilde olacağını varsayalım,

$$f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y-x) + \mu\|y-x\|^2 \tag{5.1.5}$$

$$f(x) \geq f(y) + \nabla^T f(y)(x-y) + \mu\|x-y\|^2 \tag{5.1.6}$$

bu eşitsizlikleri $x_t = tx + (1-t)y$ şeklinde yeniden yazarak,

$$f(y) \geq f(tx+(1-t)y) + \nabla^T f(tx+(1-t)y)\big(y-(tx+(1-t)y)\big)$$
$$+\mu\|y-(tx+(1-t)y)\|^2 = f(x_t) + \mathrm{t}\nabla^T f(x_t)(y-x) + \mu t^2\|y-x\|^2 \tag{5.1.7}$$

$$f(x) \geq f(tx+(1-t)y) + \nabla^T f(tx+(1-t)y)(x-(tx+(1-t)y))$$
$$+\mu\|x-(tx+(1-t)y)\|^2 = f(x_t) + (1-\mathrm{t})\nabla^T f(x_t)(x-y) + \mu(1-t)^2\|x-y\|^2 \tag{5.1.8}$$

elde edilir. Şimdi bu son iki eşitsizliği sırasıyla $(1-t)$ ve t ile çarparsak,

$$(1-t)f(y) \geq (1-t)f(x_t) + t(1-t)\nabla^T f(x)(y-x) + \mu t^2(1-t)\|y-x\|^2 \tag{5.1.9}$$

$$tf(x) \geq tf(x_t) + t(1-\mathrm{t})\nabla^T f(x_t)(x-y) + \mu t(1-t)^2\|x-y\|^2 \tag{5.1.10}$$

bunların toplamı (5.1.4) eşitsizliğini verir. Böylece Teorem ispatlanmış olur.

Güçlü konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği aşağıdaki teoremde gösterilmiştir.

Teorem 5.1.3 $f: I \to R$, $\mu > 0$ modülüne göre güçlü konveks fonksiyon olsun. Her $x, y \in R$, $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\mu}{12}(b-a)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\mu}{6}(b-a)^2 \tag{5.1.11}$$

eşitsizliği sağlanır (Merentes ve Nicodem. 2010).

İspat: f fonksiyonu güçlü konveks fonksiyon olduğundan

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) - \mu t(1-t)(b-a)^2 \tag{5.1.12}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\mu}{4}(b-a)^2 \tag{5.1.13}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2} + \frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{\mu}{4}\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}-\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)-\frac{\mu}{4}t^2(b-a)^2 \tag{5.1.14}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ de t ye göre integralin alınırsa,

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)dt-\frac{\mu}{4}(b-a)^2\int_0^1 t^2dt$$

bulunur. Buradan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \frac{1}{2}\int_0^1\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)dt$$

$$-\frac{\mu}{12}(b-a)^2 \tag{5.1.15}$$

olur. (5.1.15) de değişken değişimi yapılırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\frac{\mu}{12}(b-a)^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\mu}{12}(b-a)^2\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{5.1.16}$$

elde edilir. Böylece (5.1.11) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanır, sağ tarafı için (5.1.12) eşitsizliğinin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\leq f(a)\int_0^1 tdt+f(b)\int_0^1(1-t)dt-\mu(b-a)^2\int_0^1 t(1-t)dt$$

$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\mu}{6}(b-a)^2 \tag{5.1.17}$$

bulunur. (5.1.17) eşitsizliğinde de değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\mu}{6}(b-a)^2 \tag{5.1.18}$$

elde edilir. Böylece (5.1.11) eşitsizliğinin sağ tarafı bulunur. (5.1.16) ve (5.1.18) eşitsizliklerini birleştirip yeniden yazarsak (5.1.11) eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Aşağıdaki teorem ise güçlü konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğidir.

Teorem 5.1.4 $f: I \to R,\ \mu > 0$ modülüne göre güçlü konveks fonksiyon, $g: I \to R$, negatif olmayan, I üzerinde integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx + \frac{\mu}{4}\int_a^b f(2x-a-b)g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx\ - \mu\int_a^b (x-a)(b-x)\, g(x)dx \qquad (5.1.19)$$

dir.

İspat: f güçlü konveks fonksiyon olduğundan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{at+(1-t)b+bt+(1-t)a}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\big(f(at+(1-t)b)+f(bt+(1-t)a)\big) - \frac{\mu}{4}(bt+(1-t)a-at-(1-t)b)^2$$

$$= \frac{1}{2}\big(f(at+(1-t)b)+f(bt+(1-t)a)\big) - \frac{\mu}{4}(2t-1)^2(b-a)^2 \qquad (5.1.20)$$

olur. (5.1.20) eşitsizliğinin her iki tarafını da $g(tb+(1-t)a)$ fonksiyonu ile çarpar ve $[0,1]$ de t ye göre integralini alırsak,

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) g(tb+(1-t)a)dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \big(f(at+(1-t)b)+f(bt+(1-t)a)\big) g(tb+(1-t)a)dt$$

$$-\frac{\mu}{4}\int_0^1 (2t-1)^2\, g(tb+(1-t)a)(b-a)^2 dt \qquad (5.1.21)$$

bulunur. $x = tb+(1-t)a$ ve $dx = (b-a)dt$ değişken değişimi yaparsak,

$$\frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2(b-a)}\left(\int_a^b f(a+b-x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g(x)dx\right)$$

$$-\frac{\mu}{4(b-a)}\int_0^1 \left(\frac{2(x-a)}{b-a}-1\right)^2 (b-a)^2 g(x)dx \qquad (5.1.22)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $b-a$ ile çarpıp sadeleştirildiğinde ve yukarıda verilen şarta göre x in $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olduğunu da göz önüne alırsak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{\mu}{4}\int_a^b (2x-a-b)^2 g(x)dx$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx + \frac{\mu}{4}\int_a^b (2x-a-b)^2 g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (5.1.23)$$

elde edilir. Böylece (5.1.19) un sağ tarafı gösterilir, sol tarafı için (5.1.12) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & f(ta+(1-t)b) + f(tb+(1-t)a) \\ & \leq tf(a) + (1-t)f(b) - \mu t(1-t)(b-a)^2 \\ & + tf(b) + (1-t)f(a) - \mu t(1-t)(b-a)^2 \\ & = f(a) + f(b) - 2\mu t(1-t)(b-a)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını da $g(tb+(1-t)a)$ fonksiyonu ile çarpıp, $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \big(f(ta+(1-t)b) + f(tb+(1-t)a)\big) g(tb+(1-t)a)dt \\ & \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 g(tb+(1-t)a)dt \\ & - 2\mu\int_0^1 t(1-t)(b-a)^2 g(tb+(1-t)a)dt \qquad (5.1.24) \end{aligned}$$

bulunur. Burada yine $x = tb+(1-t)a$ ve $dx = (b-a)dt$ değişken değişimi yapılarak,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a}\int_a^b f(a+b-x)g(x)dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \\ & \leq \frac{f(a)+f(b)}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{2\mu}{b-a}\int_a^b (x-a)(b-x)\, g(x)dx \qquad (5.1.25) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $b-a$ ile çarpıp, sadeleştirildiğinde,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx - \mu\int_a^b (x-a)(b-x)\, g(x)dx \qquad (5.1.26)$$

bulunur. Böylece (5.1.26) ile verilen eşitsizliğin sağ tarafını göstermiş oluruz. (5.1.23) ve (5.1.26) eşitsizlikleri birleştirip yeniden yazarsak (5.1.19) da istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5.2 Güçlü η-Konveks Fonksiyon

Bu bölümde genelleştirilmiş konveks fonksiyonlardan biri olan η-konveks fonksiyonunun $\mu \geq 0$ modülüne göre güçlü hali tanıtılacak ve güçlü η-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizlikler gösterilecektir.

Tanım 5.2.1 $f: I \subseteq R \to R$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(y) + t\eta\big(f(x), f(y)\big) \tag{5.2.1}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna η-konveks fonksiyon denir.

Tanım 5.2.2 $f: I \to R$ fonksiyonu her $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ ve $\eta: R \times R \to R$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(y) + t\eta\big(f(x), f(y)\big) - \mu t(1-t)(y-x)^2 \tag{5.2.2}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mu \geq 0$ modülüne göre güçlü η-konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Awan vd. 2017).

Sonuç 5.2.1 (5.2.2) eşitsizliğinde $x = y$ alırsak

$$0 \leq \eta(f(x), f(y)) \tag{5.2.3}$$

bu eşitsizlikte $t = 1$ yazarsak

$$f(x) - f(y) \leq \eta(f(x), f(y)) \tag{5.2.4}$$

yine burada $\eta(x, y) = x - y$ alırsak da

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq f(y) + t\big(f(x) - f(y)\big) - \mu t(1-t)(y-x)^2 \\ &= tf(x) + (1-t)f(y) - \mu t(1-t)(y-x)^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerden,

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) - \mu t(1-t)(y-x)^2 \\ &\leq f(y) + t\eta\big(f(x), f(y)\big) - \mu t(1-t))(y-x)^2 \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

bulunur. Bu da güçlü η-konveks fonksiyonunun güçlü konveks fonksiyonlardan daha büyük olduğunu gösterir.

Awan vd. (2017) tarafından elde edilen güçlü η-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği aşağıdaki teoremde gösterildi.

Teorem 5.2.1 $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu $\mu\geq 0$ modülüne göre güçlü η-konveks fonksiyon ve $\eta(f(a),f(b))$, $f([a,b])\times f([a,b])$ üzerinde üstten sınırlı olsun. Bu durumda,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{M_\eta}{2}+\frac{\mu}{12}(b-a)^2\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{\eta\big(f(a),f(b)\big)+\eta\big(f(b),f(a)\big)}{4}-\frac{\mu}{6}(b-a)^2$$

$$\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{M_\eta}{2}-\frac{\mu}{6}(b-a)^2 \qquad (5.2.6)$$

eşitsizliği sağlanır (Awan. vd. 2017).

İspat: f fonksiyonu güçlü η-konveks fonksiyon olduğundan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq f(b)+\frac{1}{2}\eta\big(f(a),f(b)\big)-\frac{\mu}{4}(b-a)^2 \qquad (5.2.7)$$

olur. (5.2.7) de $a_t=b+(a-b)t$ ve $b_t=a+(b-a)t$ değişken değişimi yaparsak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{at+(1-t)b+bt+(1-t)a}{2}\right)$$

$$\leq f(bt+(1-t)a)+\frac{1}{2}\eta(f(at+(1-t)b),f(bt+(1-t)a)$$

$$-\frac{\mu}{4}\big((bt+(1-t)a)-(at+(1-t)b)\big)^2 \qquad (5.2.8)$$

bulunur. (5.2.8) eşitsizliğini sadeleştirirsek,

$$f(bt+(1-t)a)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\eta(f(at+(1-t)b),f(bt+(1-t)a)}{2}$$

$$-\frac{\mu}{4}(2t-1)^2(b-a)^2\geq\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}M_\eta+\frac{\mu}{4}(2t-1)^2(b-a)^2 \qquad (5.2.9)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$f(at+(1-t)b)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\eta(f(bt+(1-t)a),f(at+(1-t)b)}{2}$$

$$-\frac{\mu}{4}(2t-1)^2(b-a)^2\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}M_\eta+\frac{\mu}{4}(2t-1)^2(b-a)^2 \qquad (5.2.10)$$

eşitsizliğini yazarız. Şimdi bu son iki eşitsizliği toplayıp, değişken değiştirmesi yaparsak ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integral alırsak,

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\geq\int_0^1\left[2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-M_\eta+\frac{\mu}{2}(2t-1)^2(b-a)^2\right]dt$$

$$= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M_\eta + \frac{\mu}{6}(b-a)^2 \tag{5.2.11}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği sadeleştirirsek,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{M_\eta}{2} + \frac{\mu}{12}(b-a)^2 \tag{5.2.12}$$

bulunur. Böylece teoremin sol tarafı elde edilir. Şimdi teoremin sağ tarafı için f nin güçlü η-konveks fonksiyon olduğunu kullanarak,

$$f(at+(1-t)b) \leq f(b) + t\eta(f(a), f(b)) - \mu t(1-t))(b-a)^2$$

$$f(bt+(1-t)a) \leq f(a) + t\eta(f(a), f(b)) - \mu t(1-t))(b-a)^2$$

yazarız. Burada $[0,1]$ aralığında t ye göre integral alırsak,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(b) + \frac{1}{2}\,\eta(f(a), f(b)) - \frac{1}{6}\mu(b-a)^2 \tag{5.2.13}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(a) + \frac{1}{2}\,\eta(f(a), f(b)) - \frac{1}{6}\mu(b-a)^2 \tag{5.2.14}$$

bulunur. Bunların toplamı,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\eta(f(a), f(b) + \eta(f(b), f(a)}{4} - \frac{1}{6}\mu(b-a)^2 \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{M_\eta}{2} - \frac{1}{6}\mu(b-a)^2
\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

olur. (5.2.12) ve (5.2.15) eşitsizliklerini birleştirip yeniden yazarsak,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{M_\eta}{2} + \frac{\mu}{12}(b-a)^2 &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\eta(f(a), f(b) + \eta(f(b), f(a)}{4} - \frac{1}{6}\mu(b-a)^2 \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{M_\eta}{2} - \frac{1}{6}\mu(b-a)^2
\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.2.2 Teorem 5.2.1 de, eğer $\mu = 0$ ise η-konveks fonksiyonlar için yapılan Hermite-Hadamard tipi eşitsizliğe indirgenir (Gordji vd. 2015).

Eğer $\eta(x, y) = x - y$ ise, güçlü konveks fonksiyonlar için yapılan Hermite-Hadamard tipi eşitsizliğe indirgenir (Merentes ve Nicodem 2010).

Eğer $\mu = 0$ ve $\eta(x, y) = x - y$ ise konveks fonksiyonlar için yapılan Hermite-Hadamard tipi eşitsizliğe indirgenir.

Güçlü η-konveks fonksiyonlsar için Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizlik aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 5.2.2 $f: [a, b] \to R$ güçlü η-konveks fonksiyon ve $\eta(f(a), f(b))$, $f([a, b]) \times f([a, b])$ üzerinde üst sınırlı olsun. $g: [a, b] \to R^+$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx - \frac{\mu}{4}(a + b - 2x)^2 g(x) + L_\eta(a, b) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq \frac{f(a) + f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx - \frac{\mu}{b-a}\int_a^b (b-a)(x-a)g(x)dx + R_\eta(a, b) \qquad (5.2.17)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$L_\eta(a, b) = \frac{1}{2}\int_a^b \eta(f(a + b - x, f(x))g(x)dx$$

$$R_\eta(a, b) = \frac{\eta(f(a), f(b)) + \eta(f(b), f(a))}{2(b-a)}\int_a^b (b - x)g(x)dx$$

dir.

İspat: f güçlü η-konveks fonksiyon olduğundan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{(1-t)b + at}{2} + \frac{(1-t)a + bt}{2}\right)$$

$$\leq f\big((1-t)a + bt\big) + \frac{1}{2}\eta\Big(f\big((1-t)b + at\big), f\big((1-t)a + bt\big)\Big)$$

$$-\frac{\mu}{4}\Big[\big((1-t)a + bt\big) - \big((1-t)b + at\big)\Big]^2$$

$$= f(bt + (1-t)a) + \frac{1}{2}\eta\big(f(at + (1-t)b), f(bt + (1-t)a)\big)$$

$$-\frac{\mu}{4}(1 - 2t)^2(b - a)^2 \qquad (5.2.18)$$

bulunur. $g: [a, b] \to R^+$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olduğundan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 g\big((1-t)a+bt\big)(b-a)dt$$

$$\leq \int_0^1 f\big((1-t)a+bt\big)g\big((1-t)a+bt\big)(b-a)dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \eta\left(f\big((1-t)b+at\big), f\big((1-t)a+bt\big)\right)g\big((1-t)a+bt\big)(b-a)\,dt$$

$$-\frac{\mu}{4}\int_0^1 (1-2t)^2 g\big((1-t)a+bt\big)(b-a)^3 dt$$

$$= \int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b \eta(f(a+b-x), f(x))g(x)dx$$

$$-\frac{\mu}{4}\int_a^b (a+b-2x)^2 g(x)dx \tag{5.2.19}$$

bulunur. Böylece teoremin sağ tarafı elde edilir. Sol tarafı için,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_0^1 f(ta+(1-t)b))g(ta+(1-t)b))(b-a)dt$$

$$\leq (b-a)\int_0^1 f(b)g(ta+(1-t)b)dt$$

$$+\int_0^1 t\eta\big(f(a), f(b)\big)g(ta+(1-t)b)(b-a)dt$$

$$-\int_0^1 \mu t(1-t)(b-a)^2\ g(ta+(1-t)b)(b-a)dt \tag{5.2.20}$$

yazarız. Benzer şekilde,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq (b-a)\int_0^1 f(a)g(ta+(1-t)b))dt$$

$$+\int_0^1 t\eta\big(f(b), f(a)\big)g(ta+(1-t)b)(b-a)dt$$

$$-\int_0^1 \mu t(1-t)(b-a)^3\ g(ta+(1-t)b)dt \tag{5.2.21}$$

bulunur. Şimdi bunları toplarsak,

$$2\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (b-a)[f(a)+f(b)]\int_0^1 g(ta+(1-t)b))dt$$

$$+\int_0^1 \left[\eta\big(f(a),f(b)\big)+\eta\big(f(b),f(a)\big)\right]tg(ta+(1-t)b)(b-a)dt$$

$$-2\mu(b-a)^2\int_0^1 t(1-t)\ g(ta+(1-t)b)(b-a)dt \qquad (5.2.22)$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafını ikiye böler ve değişken değişimi yaparsak,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx+\frac{\eta\big(f(a),f(b)\big)+\eta\big(f(b),f(a)\big)}{2}\int_a^b g(x)dx$$

$$-\mu\int_a^b (x-b)(a-x)g(x)dx \qquad (5.2.23)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5.3 Güçlü s-Konveks Fonksiyon

Güçlü genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar, genelleştirilmiş konveks fonksiyonların güçlendirilmesidir. 2011 de H. Angulo güçlü h-konveks fonksiyonlar hakkındaki makalesinde güçlü s-konveks fonksiyonu, güçlü h-konveks fonksiyonun bir durumu olduğunu göstererek güçlü s-konveks fonksiyonunun tanımladı. 2017'de Öğünmez ve Erdem (2017a) güçlü s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri gösterdi. Güçlü s-konveks fonksiyonu birçok araştırmacının ilgisini çekti ve son yıllarda bu konu üzerinde birçok makaleler yayınlandı.

Tanım 5.3.1 $f: I \to R$ fonksiyonu her $x, y \in R$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx+(1-t)y) \leq t^s f(x)+(1-t)^s f(y)-\mu t(1-t)(b-a)^2 \qquad (5.3.1)$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonuna $\mu > 0$ modülüne göre güçlü s-konveks fonksiyon denir (Angulo vd. 2010).

Angulo vd. tarafından güçlü h-konveks fonksiyonu için, Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edildi ve $h(t) = t^s$ olduğunda o eşitsizlik güçlü s-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği elde edileceği gösterildi. Aşağıda ise güçlü s-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlik verildi.

Teorem 5.3.1 $f: I \to R$ fonksiyonu $\mu > 0$ göre ikinci anlamda güçlü s-konveks fonksiyon olsun $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere,

$$2^{s-1}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\mu}{12}(b-a)^2\right] \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} - \frac{\mu}{6}(b-a)^2 \qquad (5.3.2)$$

dir.

İspat: f fonksiyonu güçlü s-konveks fonksiyon olduğundan,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \int_0^1 [t^s f(a) + (1-t)^s f(b) - \mu t(1-t)(b-a)^2]dt$$

$$= f(a)\frac{t^{s+1}}{s+1}\bigg|_0^1 + f(b)\frac{-(1-t)^{s+1}}{s+1}\bigg|_0^1 - \mu(b-a)^2\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\bigg|_0^1$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{s+1} - \frac{\mu}{6}(b-a)^2 \qquad (5.3.3)$$

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (5.3.4)$$

yazarız. (5.3.4) eşitliğini, (5.3.3) de yerinde yazarsak (5.3.2) nin sağ tarafı elde edilir. Yani,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} - \frac{\mu}{6}(b-a)^2 \qquad (5.3.5)$$

elde edilir. (5.3.2) nin sol tarafı için, f güçlü s-konveks fonksiyonunu orta nokta için yazarsak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2^s}\big(f(a)+f(b)\big) - \frac{\mu}{4}(b-a)^2 \qquad (5.3.6)$$

bulunur. (5.3.6) eşitsizliğinde değişken değişimi yaparsak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{4} + \frac{a+b+t(b-a)}{4}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2^s}\left(\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)\right)$$

$$-\frac{\mu}{4}\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}-\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2^{s+1}}\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)-\frac{\mu}{4}t^2(b-a)^2 \qquad (5.3.7)$$

bulunur. (5.3.7) eşitsizliğini, $[0,1]$ aralığında t ye göre integralini alırsak,

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2^s}\int_0^1\left(\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)\right)dt$$

$$-\frac{\mu}{16}(b-a)^2\int_0^1 t^2dt$$

$$=\frac{1}{2^s}\int_0^1\left(\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)\right)dt$$

$$-\frac{\mu}{12}(b-a)^2 \qquad (5.3.8)$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)dt \qquad (5.3.9)$$

eşitliğini kullanarak bunu (5.3.8) de yerine yazarsak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{2}{2^s(b-a)}\int_a^b f(x)dx-\frac{\mu}{12}(b-a)^2 \qquad (5.3.10)$$

bulunur. Bu eşitsizliği yeniden düzenlersek,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\geq 2^{s-1}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\mu}{12}(b-a)^2\right] \qquad (5.3.11)$$

olur. Böylece (5.3.2) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilmiş olur.

Şimdi yukarıda bulduğumuz (5.3.5) ile (5.3.11) birleştirip yeniden yazarsak, (5.3.2) eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 5.3.1 Teorem 5.3.1 de $s=1$ alırsak, klasik güçlü konveks fonksiyon için yapılan Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.3.2 $f: I \subset [0,\infty) \to R$ fonksiyonu I üzerinde $f'' \in L([a,b])$ olacak şekilde iki kez türevlenebilir eşleme olsun. $a,b \in I$ ve $a<b$ olmak üzere eğer $|f''|$, $[a,b]$ üzerinde $\mu > 0$ modülüne göre güçlü s-konveks fonksiyon ise, bazı $s \in (0,1]$ sabiti için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{|f''(a)|+(s+1)(s+2)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|f''(b)|\right\}$$

$$-\frac{\mu}{160}(b-a)^2$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{[1+(s+2)2^{1-s}][|f''(a)|+|f''(b)|]\right.$$

$$\left.-\frac{[1+(s+1)(s+2)2^{1-s}]}{12}\mu(b-a)^2\right\}-\frac{\mu}{160}(b-a)^2. \qquad (5.3.12)$$

İspat: Lemma 4.2.1 in her iki tarafından mutlak alarak ve $|f''|$ fonksiyonunun güçlü s-konveks fonksiyon olduğunu kullanarak,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{16}\left[\int_0^1 t^2\left|f''\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1(1-t)^2\left|f''\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16}\left[\int_0^1 t^2\left(t^s\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+(1-t)^s|f''(a)|-\mu t(1-t)(b-a)^2\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1(1-t)^2\left(t^s|f''(b)|+(1-t)^s\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|-\mu t(1-t)(b-a)^2\right)dt\right]$$

$$=\frac{(b-a)^2}{16}\left[\int_0^1\left(t^{s+2}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+t^2(1-t)^s|f''(a)|-\mu t^3(1-t)(b-a)^2\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1\left(t^s(1-t)^2|f''(b)|+(1-t)^{s+2}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|-\mu t(1-t)^3(b-a)^2\right)dt\right]$$

$$(5.3.13)$$

bulunur. Burada

$$\int_0^1 t^{s+2}dt = \frac{t^{s+3}}{s+3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{s+3}$$

$$\int_0^1 t^2(1-t)^s dt = -\frac{t^2(1-t)^{s+1}}{s+1}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{2t(1-t)^{s+1}}{s+1}dt$$

$$= \frac{2}{s+1}\left[-\frac{t(1-t)^{s+2}}{s+2}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{s+2}}{s+2}dt\right]$$

$$= \frac{-2(1-t)^{s+3}}{(s+1)(s+2)(s+3)}\bigg|_0^1 = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

elde edilir. Aynı işlemleri diğer integraller için de kullanırsak,

$$\int_0^1 t^{s+2}dt = \int_0^1 (1-t)^{s+2}dt = \frac{1}{s+3} \tag{5.3.14}$$

$$\int_0^1 t^2(1-t)^s dt = \int_0^1 (1-t)^2 t^s dt = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{5.3.15}$$

$$\int_0^1 t^3(1-t)dt = \int_0^1 t(1-t)^3 dt = \frac{1}{20} \tag{5.3.16}$$

$(5.3.14) - (5.3.16)$ sonuçlarını (5.3.13) de yerine yazarsak,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16}\left[\frac{2}{s+3}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}[|f''(a)| + |f''(b)|] - \frac{\mu}{10}(b-a)^2\right]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{|f''(a)| + (s+1)(s+2)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f''(b)|\right\} - \frac{\mu}{160}(b-a)^2 \tag{5.3.17}$$

bulunur. Böylece (5.3.12) nin sol tarafı ispatlanmış olur.

(5.3.12) nin sağ tarafı için, (5.3.2) de $|f''|$ nin güçlü s-konveks fonksiyon olduğunu kullanarak,

$$2^{s-1}\left[\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{\mu}{12}(b-a)^2\right] \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{s+1} - \frac{\mu}{6}(b-a)^2 \tag{5.3.18}$$

yazarız. Buradan,

$$\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq 2^{1-s}\left(\frac{|f''(a)|+|f''(b)|}{s+1}-\frac{\mu}{6}(b-a)^2\right)-\frac{\mu}{12}(b-a)^2 \qquad (5.3.19)$$

bulunur. (5.3.19) eşitsizliğini, (5.3.17) de yerine yazarsak,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\{|f''(a)|+|f''(b)|$$

$$+(s+1)(s+2)\left\{2^{1-s}\left[\frac{|f''(a)|+|f''(b)|}{s+1}-\frac{\mu}{6}(b-a)^2\right]-\frac{\mu}{12}(b-a)^2\right\}\Bigg\}$$

$$-\frac{\mu}{160}(b-a)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\Big\{[|f''(a)|+|f''(b)|][1+2^{1-s}(s+2)]$$

$$-\frac{\mu}{12}(b-a)^2[1+2^{2-s}(s+1)(s+2)]\Big\}-\frac{\mu}{160}(b-a)^2 \qquad (5.3.20)$$

bulunur. (5.3.17) ve (5.3.20) eşitsizliklerin birleştirip yeniden yazarsak, (5.3.12)'de istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5.4 Güçlü $s-\eta$-Konveks Fonksiyon

Bu bölümde güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonlar sınıfı tanıtılıp, bu fonksiyonlar için Hermite –Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizlikler elde edilir. Ayrıca bu tür fonksiyonlar yardımıyla türevlenebilir dönüşümler için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinde orta ve sağ terimler arasındaki fark tahmin edilerek, Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizlik gösterilir.

Tanım 5.4.1 $f: I \to R$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx+(1-t)y) \leq f(y)+t^s\eta\big(f(x),f(y)\big)-\mu t(1-t)(y-x)^2 \qquad (5.4.1)$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $\mu > 0$ modülüne göre güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Burada $\eta: R \times R \to R$ bir bifonksiyondur.

Sonuç 5.4.1 Eğer (5.4.1) eşitsizliğinde $s = 1$ olduğunda, o zaman eşitsizlik güçlü η-konveks fonksiyona indirgenir.

Eğer (5.4.1) eşitsizliğinde $\eta(f(x), f(y)) = x - y$ olduğunda, o zaman eşitsizlik güçlü s-konveks fonksiyona indirgenir.
Eğer (5.4.1) eşitsizliğinde $s = 1$ ve $\eta(f(x), f(y)) = x - y$ olduğunda, o zaman eşitsizlik klasik güçlü konveks fonksiyona indirgenir.

Güçlü $s - \eta$-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği aşağıdaki teoremde gösterilmiştir.

Teorem 5.4.1 $f: I \to R$ fonksiyonu güçlü $s - \eta$-konveks fonksiyon olsun. O zaman her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2^{s+1}}\eta(L(a,b)) + \frac{\mu}{12}(b-a)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq f(b) + \frac{1}{s+1}\eta(f(a), f(b)) - \frac{\mu}{6}(b-a)^2 \qquad (5.4.2)$$

olur. Burada $L(a,b) = \eta(f(a), f(b)) + \eta(f(b), f(a))$ 'dır.

İspat f fonksiyonu I aralığında güçlü $s - \eta$-konveks fonksiyon olduğundan,

$$f(ta + (1-t)b) \leq f(b) + t^s\eta(f(a), f(b)) - \mu t(1-t)(b-a)^2 \qquad (5.4.3)$$

yazarız. (5.4.3) eşitsizliğinin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında, t ye göre integralini alırsak,

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt \leq \int_0^1 \left(f(b) + t^s\eta(f(a), f(b)) - \mu t(1-t)(b-a)^2\right)dt$$

$$= \left(f(b) + \frac{t^{s+1}}{s+1}\eta(f(a), f(b)) - \mu(b-a)^2\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\right)\Bigg|_0^1$$

$$= f(b) + \frac{1}{s+1}\eta(f(a), f(b)) - \frac{\mu}{6}(b-a)^2 \qquad (5.4.4)$$

bulunur. Böylece verilen eşitsizliğin sağ tarafını elde ederiz. Sol tarafı için (5.4.3)'den

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(b) + \frac{1}{2^s}\eta(f(a), f(b)) - \frac{\mu}{4}(b-a)^2 \qquad (5.4.5)$$

yazarız. (5.4.5) eşitsizliğinden,

$$f(b) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2^s}\eta(f(a), f(b)) + \frac{\mu}{4}(b-a)^2 \qquad (5.4.6)$$

$$f(a) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2^s}\,\eta\big(f(b), f(a)\big) + \frac{\mu}{4}(b-a)^2 \tag{5.4.7}$$

bulunur. Bunları taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2^{s+1}}\eta\big(L(a,b)\big) + \frac{\mu}{4}(b-a)^2 \tag{5.4.8}$$

yazarız. Burada $a_t = \frac{a+b-t(b-a)}{2}$ ve $b_t = \frac{a+b+t(b-a)}{2}$ değişken değiştirmesi yaparak,

$$\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)$$

$$\geq f\left(\frac{a+b-t(b-a)+a+b+t(b-a)}{4}\right) - \frac{1}{2^{s+1}}\eta\big(L(a,b)\big)$$

$$+\frac{\mu}{4}\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2} - \frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)^2$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2^{s+1}}\eta\big(L(a,b)\big) + \frac{\mu}{4}t^2(b-a)^2 \tag{5.4.9}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin $[0,1]$'de t ye göre integralini alırsak,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)dt$$

$$\leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2^{s+1}}\eta\big(L(a,b)\big) + \frac{\mu}{12}(b-a)^2 \tag{5.4.10}$$

elde edilir.

Şimdi,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 (ta+(1-t)b)dt$$

eşitliğini, (5.4.4) de yerine yazarak ve (5.4.10) eşitliğiyle birleştirerek yeniden yazarsak (5.4.2) de istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonraki teoremimiz $s-\eta$-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğidir.

Teorem 5.4.2 $f\colon I \to R$ güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyon olsun. $g\colon I \to R^+$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$'ye göre simetrik fonksiyon olduğunu varsayalım. O zaman her

$a, b \in I$, $s \in [0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanacaktır.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx - \frac{M_\eta}{2^s}\int_a^b g(x)dx + \frac{\mu}{4}\int_a^b (2x-a-b)^2 g(x)dx$$
$$\leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx + \frac{M_\eta}{2(b-a)^s}\int_a^b (x-a)^s g(x)dx$$
$$-\mu\int_a^b (x-a)(b-x)g(x)dx \qquad (5.4.11)$$

Burada M_η, η fonksiyonunun bir üst sınırıdır.

İspat: f fonksiyonu güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyon olduğundan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{at+b(1-t)+bt+a(1-t)}{2}\right)$$
$$\leq f(bt+a(1-t)) + \frac{1}{2^s}\,\eta\big(f(at+b(1-t)), f(bt+a(1-t))\big)$$
$$-\frac{\mu}{4}(bt+a(1-t)-at-b(1-t))^2$$
$$= f(bt+a(1-t)) + \frac{1}{2^s}\,\eta\big(f(at+b(1-t)), f(bt+a(1-t))\big)$$
$$-\frac{\mu}{4}(2t-1)^2(b-a)^2$$
$$\leq f\big(bt+a(1-t)\big) + \frac{1}{2^s}M_\eta - \frac{\mu}{4}(2t-1)^2(b-a)^2 \qquad (5.4.12)$$

yazarız. Burada (5.4.12) eşitsizliğinin her iki tarafı $g\big(bt+a(1-t)\big)$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 g\big(bt+a(1-t)\big)dt$$
$$\leq \int_0^1 f\big(bt+a(1-t)\big)g\big(bt+a(1-t)\big)\,dt$$
$$+\int_0^1 \frac{1}{2^s}\,M_\eta\, g\big(bt+a(1-t)\big)dt$$
$$-\int_0^1 \frac{\mu}{4}(2t-1)^2(b-a)^2 g\big(bt+a(1-t)\big)dt \qquad (5.4.13)$$

olur. Burada $x = bt + a(1-t)$ ve $dt = \frac{1}{b-a}dx$ değişken değişimini uygularsak,

$$\frac{1}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \frac{M_\eta}{2^s(b-a)}\int_a^b g(x)dx$$

$$-\frac{\mu}{4(b-a)}\int_a^b \left(2\frac{x-a}{b-a}-1\right)^2 (b-a)^2\, g(x)dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \frac{M_\eta}{2^s(b-a)}\int_a^b g(x)dx$$

$$-\frac{\mu}{4(b-a)}\int_a^b (2x-a-b)^2\, g(x)dx \qquad (5.4.14)$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $(b-a)$ ile çarpıp yeniden yazarsak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)dx - \frac{M_\eta}{2^s}\int_a^b g(x)dx - \frac{\mu}{4}\int_a^b (2x-a-b)^2\, g(x)dx$$

$$\leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad (5.4.15)$$

böylece verilen eşitsizliğin sol tarafı elde edilmiş olur. Sağ tarafı için (5.4.3) eşitsizliğini kullanarak,

$$f(ta+(1-tb)) + f(tb+(1-t)a) \leq f(b) + t^s\eta\big(f(a),f(b)\big) - \mu t(1-t)(b-a)^2$$

$$+f(a) + t^s\eta\big(f(b),f(a)\big) - \mu t(1-t)(b-a)^2$$

$$= [f(a)+f(b)] + t^s\left(\eta\big(f(a),f(b)\big) + \eta\big(f(b),f(a)\big)\right)$$

$$-2\mu t(1-t)(b-a)^2$$

$$\leq [f(a)+f(b)] + t^s M_\eta - 2\mu t(1-t)(b-a)^2 \qquad (5.4.16)$$

bulunur. Burada (5.4.16) eşitsizliğinin her iki tarafını $g(tb+(1-t)a)$ ile çarpıp, $[0,1]$ aralığında t ye göre integralin alırsak,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(tb+(1-t)a)dt$$

$$+\int_0^1 f(ta+(1-tb)g(tb+(1-t)a)dt$$

$$\leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 g(tb+(1-t)a)dt + M_\eta\int_0^1 t^s g(tb+(1-t)a)dt$$

$$-2\mu(b-a)^2\int_0^1 t(1-t)g(tb+(1-t)a)dt \qquad (5.4.17)$$

bulunur. Burada yine $x = tb+(1-t)a$ ve $dx = (b-a)dt$ değişken değişimi kullanarak,

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{b-a}\int_a^b g(x)dx + \frac{M_\eta}{b-a}\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s g(x)dx$$

$$-\frac{2\mu(b-a)^2}{b-a}\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right) g(x)dx$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{b-a}\int_a^b g(x)dx + \frac{M_\eta}{(b-a)^{s+1}}\int_a^b (x-a)^s g(x)dx$$

$$-\frac{2\mu}{b-a}\int_a^b (x-a)(b-x)g(x)dx \qquad (5.4.18)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\frac{b-a}{2}$ ile çarparak yeniden yazarsak,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx + \frac{M_\eta}{2(b-a)^s}\int_a^b (x-a)^s g(x)dx$$

$$-\mu\int_a^b (x-a)(b-x)g(x)dx \qquad (5.4.19)$$

bulunur. Böylece verilen eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir.

Burada (5.4.15) ve (5.4.19) eşitsizliklerini birleştirip yeniden yazarsak, (5.4.11) eşitsizliği elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.4.3 $f:[a,b]\to R$ diferansiyellenebilir, $|f'|$ güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyon, $g:[a,b]\to R^+$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik fonksiyon ve η, $[a,b]$ üzerinde üstten sınırlı ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\Big[2|f'(b)| + N|\eta(f'(a),f'(b)|$$

$$-\frac{\mu}{3}(b-a)^2\Big]\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)dudt \qquad (5.4.20)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $N = max_{t\in[0,1]} \left|\left(\frac{1+t}{2}\right)^s + \left(\frac{1-t}{2}\right)^s\right|$ dir.

İspat: Lemma 2.1. deki eşitsizliğin her iki tarafının mutlak değerini alırsak ve $|f'|$ güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyon olduğundan,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\left[\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right| + \left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)[|f'(b)| + \left(\frac{1+t}{2}\right)^s \eta(|f'(a)|,|f'(b)|)$$

$$-\mu\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)(b-a)^2$$

$$+|f'(b)| + \left(\frac{1-t}{2}\right)^s \eta(|f'(a)|,|f'(b)|) - \mu\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)(b-a)^2\Bigg]dudt$$

$$= \frac{b-a}{4}\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)[2|f'(b)|$$

$$+\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)^s + \left(\frac{1-t}{2}\right)^s\right)\eta(|f'(a)|,|f'(b)|) - \frac{\mu(1-t^2)}{2}(b-a)^2\Bigg]$$

$$= \frac{b-a}{4}\Big[2|f'(b)| + N|\eta(f'(a),f'(b)|$$

$$-\frac{\mu}{3}(b-a)^2\Big]\int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)dudt \qquad (5.4.21)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Burada güçlü $s-\eta$ -konveks fonksiyonu için,

$$\left|f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|$$

$$\leq |f'(b)|+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{s}\eta(|f'(a)|,|f'(b)|)-\mu\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)(b-a)^{2} \qquad (5.4.22)$$

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|$$

$$\leq |f'(b)|+\left(\frac{1+t}{2}\right)^{s}\eta(|f'(a)|,|f'(b)|)-\mu\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)(b-a)^{2} \qquad (5.4.23)$$

eşitsizlikleri kullanılmıştır.

6. TARTIŞMA ve SONUÇ

Konveks fonksiyonlar ile yeni sonuçlar elde etmek için genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar ve güçlü genelleştirilmiş konveks fonksiyonlara ihtiyaç duyulmaktadır. Son yıllarda genelleştirilmiş konveks fonksiyonların birleşimlerinden bazı yeni genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar elde edildi. Örneğin $s-h$-konveks, $s-m$-konveks, $s-\eta$-konveks vb. Daha sonra bu tür konveks fonksiyonların güçlendirilmiş versiyonları yani güçlü genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı ortaya çıkmaya başladı.

Biz bu çalışmada genelleştirilmiş konveks fonksiyonların güçlendirilmiş halini yani güçlü genelleştirilmiş fonksiyonlar kavramını tanıttık ve bununla beraber güçlü genelleştirilmiş fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi, Hermite Hadamard-Fejer tipi eşitsizlikleri elde ettik.

İlk olarak genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar kavramından η-konveks, s-konveks ve $s-\eta$-konveks fonksiyonlarını tanıtımı ile birlikte bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi ve Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizlikler oluşturduk. Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler için elde edilen bazı lemmalar için yukarıda belirttiğimiz fonksiyonları uygulayarak yeni eşitsizlikler elde ettik. Daha sonra o fonksiyonların güçlendirilmiş hali tanıtıldı. Ayrıca güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonunu elde ettik. Güçlü s-konveks, güçlü η-konveks ve elde ettiğimiz güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonları için de ayrı ayrı Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler ile beraber birkaç lemmadan yararlanarak yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri elde ettik. Bununla biz genelleştirilmiş ve güçlü genelleştirilmiş fonksiyonlar için bu tür eşitsizliklerin uygulama şekillerinin farkını ve benzer taraflarını gösterdik.

Araştırmacılar ileride güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonlar sınıfını kullanarak ve bu fonksiyonlar için, bazı lemmalardan yararlanarak, yeni integral eşitsizlikleri elde edebileceklerini öneriyoruz.

6. KAYNAKLAR

Angulo H, Gimenez J, Moros A M, Nikodem K, 2011, On Strongly *h*-convex Function. Ann. Funct Anal, 2, 85–91.

Arrow H J, Enthowen A N D, 1961, Quasi Concave Programming, The Econometrica Society, 29, 779–800.

Awan M U, Noor M A, Noor K I, Safdar F, 2017, On Strongly Generalized Convex Functions, Filomat, 31, 5783–5790.

Dragomir S S, Agarwal R P, 1998, Two Inequalities for Differentiable Mapings and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula, App. Math. Lett, 11(5), 91–95.

Dragomir S S, Fitzpatrick S, 1999, The Hadamard's Inequality in the second sense, Demonstratio Mathematica, 32(4), 687–696.

Erdem Y, Öğünmez H, Budak H, 2017a, Some Generalized Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Strongly S-Convex Functions, Biska, New Trends in mathematical sciences, 5(3,) 22–32.

Erdem Y, Öğünmez H, Budak H, 2017, On Some Hermite-Hadamard Type Inequalities for Strongly s-convex Functions, Biska, New Trends in Mathematical Sciences, **5**(3), 154–161.

Gordji M E, Delavar M R, Dragomir S S, 2015, Some Inequalities Related to η-convex Functions, Research Group in Mathematical inequalities and Applications, 18(8), 1–14.

Gordji M E, Dragomir S S, Delavar M R, 2015, An Inequality Related to η-convex Functions (II), Analysis and Applications, 6(2), 26–32.

Gordji M E, Delavar M R, Sen M D L, 2016, On φ-convex Functions, Journal of Mathematical Inequalities, 10(1), 173–183.

Hudziki H, Maligranda L, 1994, Some Remarks on s-convex Functions. Aequationes Mathematicae. 48, 100–111.

Merentes N, Nicodem K, 2010, Remarks on Strongly Convex Functions. Aequationes Mathematicae, 80, 193–199.

Niculescu C P, Persson L E, 2003, Old and New on The Hermite-Hadamard Inequality. Real Analysis Exchange, 29, 663–685.

Özdemir M E, Yıldız C, Akdemir A O, Set E, 2013, On some Inequalities for S-Convex Functions and Applications, Journal of Inequalities and Applications, 2013(333).

Pachpatte B G, 2005a, 57 Shri Niketan Colony Near Abhinay Talkies Aurangabad 431 001 Maharashtra India, 67(6), 12.

Pecaric J E, Proschan F, Tong Y L, 1992, Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Boston, 187, 467.

Polovinkin E S, 1996, Strongly Convex Analysis, Mat. Sb, 2(187), 103–130.

Polyak B T, 1966, Existence Theorems and Convergence of Minimizing Sequences in Extremum Problems With Restrictions. Soviet Math. Dokl, 7, 72–75.

Rangel-Oliveros Y, Vivas-Cortez M, 2018, Ostrowski Type Inequalities for Functions Whose Second Derivative are Convex Generalized, Applied Mathematics and Information Sciences, 12(6), 1055–1064.

Song Y Q, Khan M A, Ullah S Z, Chu Y M, 2018, Integral Inequality Involving Strongly Convex Functions, Journal of Functions Spaces, Article ID 6595921, 8.

Ullah S Z, Khan M A, Chu Y M, 2019, A Note of Generalized Convex Functions, Journal of Inequalities and Applications, 2019–291.

Vivas-Cortez M, Rangel-Oliveros Y, 2020, An Inequality Related to $s-\varphi$-convex Functions, Applied Mathematics and Information Sciences, 14(1), 151−154.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Nurila TOIGOMBAEVA
Doğum Yeri ve Tarihi	: Kırgızistan, Calal-Abad 07.04.1994
Yabancı Dili	: Türkçe, İngilizce, Rusça
İletişim (Telefon / e-posta)	:+905541886464 / nurila.toigombaeva@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Kok-Cangak №6 M.V. Lomonosov Lisesi, (2000 – 2011)
Lisans	: Celal-Abad Devlet Üniversitesi, Matematik Bölümü, (2011-2016)
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, (2019 – 2021)

Çalıştığı Kurum/ Kurumlar ve Yıl

: Kırgızistan, Calal-Abad Şehri, №14 S. Davletov Okul Lisesi, Matematik Öğretmeni (2016 –2018)

Yayınları (SCI ve diğer) : Öğünmez H, Toigombaeva N, 2021, Güçlü $s-\eta$-Konveks Fonksiyonlar için Bazı Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, ID: 846228, 21, 800–804.