SIÇRAMALI GECİKMELİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Veli Kürşat ULUDAĞ

Danışman
Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Nisan 2026

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SIÇRAMALI GECİKMELİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE

Veli Kürşat ULUDAĞ

Danışman
Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Nisan 2026

TEZ ONAY SAYFASI

Veli Kürşat ULUDAĞ tarafından hazırlanan "Sıçramalı Gecikmeli Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılığı Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca03/04/2026tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Başkan : Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ
Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ereğli Eğitim Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi,Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi,Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../.......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

03/04/2026

Veli Kürşat ULUDAĞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SIÇRAMALI GECİKMELİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI ÜZERİNE

Veli Kürşat ULUDAĞ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış, konu ile ilgili kavramların tarihsel gelişimi verilmiştir. İkinci bölümde tez çalışması için önemli ve gerekli temel tanımlar ve kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde lineer sıçramalı gecikmeli diferansiyel denklemlerin salınımlılık analizi yapılmıştır. Dördüncü bölümde sıçramalı gecikmeli denklemlerin salınımlılık davranışı incelenmiştir.

2026, v + 30 sayfa

Anahtar Kelimeler : Salınımlılık, Gecikmeli Diferensiyel Denklem, Gecikmeli Fark Denklemi

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON OSCILLATION OF SOLUTIONS OF IMPULSIVE DELAY EQUATIONS

Veli Kürşat Uludağ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Sermin ÖZTÜRK

This thesis study consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction, presenting the historical development of the concepts related to the subject. The second chapter presents the fundamental definitions and concepts that are important and necessary for this thesis. The third chapter performs an oscillation analysis of linear impulsive delay differential equations. The fourth chapter examines the oscillation behavior of impulsive delay equations.

2026, v + 30 pages

Keywords : Oscillation, Delay Differential Equation, Imspulsive Delay Difference Equation

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam için konu belirlenmesi, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve tezimin yazım aşamasının her safhasında yapmış olduğu büyük katkılardan dolayı danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK'e teşekkür ederim.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan ve her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Veli Kürşat ULUDAĞ
Afyonkarahisar, 2026

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

t	Zaman değişkeni
$x(t)$	t anındaki çözüm fonksiyonu
$x'(t)$	$x(t)$'nin türevi
$x(t^-)$	x'in t anındaki sol limiti
$x(t^+)$	x'in t anındaki sağ limiti
τ	Gecikme miktarı
$\tau_i(t)$	Zamana bağlı gecikme fonksiyonu
τ_j	j-inci sıçrama anı
$h_k(t)$	Gecikme fonksiyonu, $h_k(t) < t$
$p_i(t)$	Denklem katsayısı
$A_k(t)$	Denklem katsayısı
$\widetilde{A}_k(t)$	Dönüştürülmüş katsayı
b_k	Sıçrama parametresi, $b_k > -1$
B_j	Sıçrama çarpanı, $B_j > 0$
d	Sıçramalar arası sabit aralık
t_k	k-ıncı sıçrama anı
$X(t, s)$	Temel çözüm
$\phi(t)$	Başlangıç fonksiyonu
$\lVert\phi\rVert_\infty$	Maksimum norm

Kısaltmalar

GDD	Gecikmeli Diferansiyel Denklem
ODE	Adi Diferansiyel Denklem
SGDD	Sıçramalı Gecikmeli Diferansiyel Denklem

1 GİRİŞ

Gerçek dünyadaki birçok dinamik süreç, sistemin yalnızca o andaki durumundan değil, geçmişteki davranışlarından da etkilenmektedir. Bu nedenle zaman gecikmesi barındıran modeller, klasik diferansiyel denklemlerle tam olarak ifade edilememekte; sistemin geçmişe ait belli bir zaman aralığındaki değerlerini de modele dahil etmek gerekmektedir. Bu amaçla kullanılan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler (GDD), türevin yalnızca $x(t)$'ye değil, aynı zamanda $x(t-\tau)$ gibi gecikmeli terimlere bağlı olduğu denklemler olarak tanımlanır (Wakili 2014). Gecikme terimi sabit bir süre olabileceği gibi, zamana veya duruma bağlı değişken bir biçimde de ortaya çıkabilir. Bu yapısı nedeniyle GDD'ler, başlangıç koşulu olarak yalnızca bir sayı değil, belirli bir aralıkta tanımlanmış bir fonksiyon olmasını gerektirir ve bu özellik onları sonsuz boyutlu dinamik sistemler sınıfına dahil eder (Bodnar vd. 2010).

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin ortaya çıkışının temel nedeni, doğadaki çok sayıda sürecin içsel gecikmelerle gerçekleşmesidir. Biyolojik sistemlerde doğum, büyüme, olgunlaşma gibi süreçler zaman aldığı için popülasyonun anlık değişimi, doğrudan geçmiş popülasyon seviyelerine bağlıdır. Bu nedenle popülasyon dinamiği modelleri, klasik diferansiyel denklemler yerine gecikmeli denklemlerle daha gerçekçi şekilde ifade edilmektedir (Glagolev vd. 2018). Benzer biçimde epidemiyolojik modellerde bulaşma, enfeksiyonun kuluçka süresi ve iyileşme gibi aşamalar gecikmeli gerçekleştiğinden, hastalık yayılım süreçlerinin modellenmesinde GDD önemli bir araç haline gelmiştir (Wakili 2014).

Gecikmenin belirgin bir rol oynadığı bir diğer alan kontrol teorisi ve mühendislik sistemleridir. Geri besleme döngülerinde sensör tepkisi, aktüatör gecikmesi veya iletişim hatları nedeniyle ortaya çıkan zaman kaymaları, sistemin kararlılığı üzerinde kritik etkiler yaratır. Bu nedenle mühendislik denklemlerinin çoğu, özellikle de otomatik kontrol, robotik ve sinyal işleme gibi alanlarda, gecikmeli modellemeyi zorunlu kılar (Bodnar vd. 2010). Kimyasal reaksiyon dinamikleri, ekolojik geri besleme mekanizmaları, ekonomi ve finans sistemlerindeki yatırım–getiri gecikmeleri de benzer biçimde GDD çerçevesi içinde ele alınmaktadır. Bu yönüyle gecikmeli diferansiyel denklemler yalnızca matematiksel bir kuramsal alan değil, aynı zamanda modern bilim ve mühendisliğin geniş bir bölümünde temel bir modelleme aracıdır.

Gecikmeli diferansiyel denklemler birçok gerçek sistem için uygun bir modelleme aracı sunarken, bazı süreçlerde değişimin yalnızca süreklilik içinde değil, anlık ve keskin biçimde gerçekleştiği durumlarla da karşılaşılır. Fiziksel darbe etkileri, biyolojik sistemlerde ani uygulanan tedaviler, ekonomik modellerde beklenmedik şoklar veya mühendislikte ani kontrol sinyalleri gibi olaylar, sistemin seyrinde sıçrama (impuls) olarak adlandırılan ani değişimlere yol açar. Böyle durumlarda klasik GDD modelleri yetersiz kalmaktadır ve bu ani değişimleri matematiksel olarak ifade etmek için türevin yanında ani durum değişimlerini de içeren Sıçramalı Gecikmeli Diferansiyel Denklemler (SGDD) kullanılmaktadır.

SGDD'lerde çözümün belirli noktalarda süreksiz olmasına izin verilir. Süreksizlik, genellikle sıçrama anı $t = t_k$ için;

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + I_k(x(t_k^-))$$

şeklinde modellenir, burada I_k sıçrama fonksiyonunu ifade eder. Gecikmeli diferansiyel denklem ise,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t \neq t_k,$$

şeklinde tanımlar ve böylece sistem hem geçmişe bağlılığı hem de ani değişimleri aynı çerçevede barındırmış olur. Bu yapı, SGDD'leri hem sonsuz boyutlu dinamik sistemlerin özelliklerini hem de sıçrama sistemlerinin ayrık etkilerini taşıyan hibrit bir model sınıfı haline getirir (Lakshmikantham vd. 1989).

Sıçramaların modele dahil edilmesi, özellikle biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi alanlarda kaçınılmazdır. Popülasyon biyolojisinde periyodik hasat ve ani salgın müdahaleleri veya kitlesel göçler, mühendislikte darbeli kontrol uygulamaları, nörobilimde nöronların "spike" adı verilen ani elektriksel boşalımları, ekonomi modellerinde ani piyasaya giriş veya düzenleme değişiklikleri bu tür sıçramalı modellerin tipik örnekleridir. Bu sistemlerde gecikmenin varlığı, sıçrama etkilerinin zaman içinde nasıl yayıldığını ve sistemin uzun dönem davranışını nasıl değiştirdiğini anlamlandırmayı zorunlu hale getirir. Bu nedenle SGDD'ler, sıçrama etkileri altında kararlılık, periyodiklik ve özellikle salınımlılık davranışının analiz edilmesinde önemli bir çerçeve sunar (Bainov vd. 1993).

Sıçramalı gecikmeli sistemlerde temel problem, sıçramaların çözüm davranışını ne ölçüde değiştirdiğinin belirlenmesidir. Bazı durumlarda sıçramalar sistemde büyümeyi hızlandırabilir veya salınımlılığı artırabilirken, bazı sistemlerde ise sıçramaların çözümün uzun dönem davranışına etkisi sınırlıdır. Bu nedenle SGDD'lerin salınımlılık özelliklerinin incelenmesi, yalnızca kuramsal açıdan değil, birçok uygulamalı disiplin açısından da kritik bir öneme sahiptir. Bu tez kapsamında incelenecek olan temel soru, belirli sıçrama tiplerinin gecikmeli sistemlerin salınımlı çözümlerine nasıl etki ettiğidir.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin tarihsel gelişimi, modern matematiksel modellemenin ihtiyaçlarına paralel olarak şekillenmiştir. İlk popülasyon modelleri arasında yer alan Verhulst'un lojistik denklemi,

$$p = \frac{m\,p'\,e^{mt}}{n\,p'\,e^{mt} + m - n\,p}$$

türevsel (adi diferansiyel) formuyla birlikte verilmiştir ve daha sonra, türevsel formuna göre daha hacimli olduğundan literatürde sıklıkla kullanılan

$$\frac{dP}{dt} = mP - nP^2$$

türevsel formuyla kullanılmıştır, burada m doğal büyüme oranını, n popülasyonun doygunluk etkisini belirleyen katsayıyı ve *P(t)* popülasyon fonksiyonunu ifade etmektedir. Bu denklem, gecikmesiz yapısıyla basit fakat önemli bir başlangıç noktası oluşturmuştur (Verhulst 1838). Ancak biyolojik süreçlerin çoğunda büyüme, olgunlaşma veya kaynak yenilenmesi gibi etkileşimler belirli bir zaman aralığı içinde gerçekleştiğinden, sistemin yalnızca mevcut durumu üzerinden ifade edilmesi yetersiz kalmıştır. Bu eksiklik, gecikmenin matematiksel modellere dahil edilmesinin temel motivasyonunu oluşturmuş ve modern gecikmeli diferansiyel denklemler teorisinin gelişimine kapı açmıştır.

Diferansiyel denklemlerin gecikme içeren biçimlere genişletilmesi, modern teoriye kıyasla oldukça eski bir geçmişe uzanmaktadır. Verhulst'un lojistik denklemi zaman içerisinde birçok bilim insanı tarafından geliştirilmiştir. Modern gecikmeli modellerden önce popülasyon modellerinde sıkça kullanılan temel denklem Verhulst (lojistik) modelidir. Bu model

$$x'(t) = r\,x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

şeklinde tanımlıdır ve gecikme içermez. Zaman gecikmesinin matematiksel modellere sistematik bir şekilde dâhil edilmesi, ilk kez Hutchinson'ın 1948 yılında popülasyon dinamiğine yönelik çalışmasıyla belirginleşmiş, bu çalışma gecikmeli modellerin biyolojik süreçlerde oynadığı rolü açık biçimde ortaya koymuştur (Hutchinson 1948). Hutchinson, popülasyon dinamiğinde olgunlaşma/ üreme gecikmesinin etkisini hesaba katmak amacıyla Verhulst denklemine gecikme eklemiştir. Bu denklem

$$x'(t) = r\,x(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right)$$

şeklinde tanımlıdır. Denklem gecikmeli lojistik olarak bilinir ve literatürde GDD örneklerinin erken, etkili bir biçimidir. Bu denklem, gecikmenin (τ) belirli büyüklüklerde kararlılığı bozup salınımlı çözümler üretebileceğini ortaya koymuştur. Hutchinson'ın gecikmeli lojistik denklemi, türlerin büyümesindeki olgunlaşma gecikmesini hesaba katan ilk modellerden biri olması açısından literatürde bir dönüm noktasıdır.

1950'li ve 1960'lı yıllar, gecikmeli diferansiyel denklemlerin matematiksel temellerinin atıldığı dönemdir. Bu süreçte Myshkis, Wright ve Nussbaum gibi araştırmacılar gecikmeli sistemlerin kararlılık, periyodik çözüm ve salınım davranışlarına ilişkin temel sonuçları geliştirmiştir (Wright 1955,- Myshkis 1951). Gecikmeli sistem analizinde ilk adımlar çoğunlukla lineer yapıların incelenmesiyle atılmıştır. Genel bir lineer gecikmeli denklem,

$$x'(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau)$$

şeklindedir ve burada A, B sabit (matris/ skalar) katsayılardır. Myshkis gibi erken dönem çalışmaları bu tip lineer gecikmeli denklemlerin çözüm ve kararlılık özelliklerini sistematik olarak ele almıştır. Wright'ın ünlü çalışması ise, doğrusal olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlere ait örnek ve analizler içerir, Wright (1955) gibi araştırmacılar, gecikmeli etkilerin lineer olmayan denklemlerde nasıl periyodik çözümler ve salınımlar ortaya çıkardığını incelediler. Wright'ın bu çalışması

$$x'(t) = -\alpha\, F\big(x(t-\tau)\big)$$

şeklinde lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlere ait örnek ve analizler içerir. Bu denklemde F uygun bir lineer olmayan fonksiyondur ve uygun α, τ aralıklarında salınımlı çözümleri ortaya çıkabilir. Aynı dönemde Gähler tarafından 2-metrik uzaylar üzerine yapılan çalışmalar, gecikmeli sistemlerin incelenmesine katkı sağlayan topolojik çerçevelerden biri olarak literatürde yerini almıştır (Gähler 1963).

1970'li ve 1980'li yıllar ise gecikmeli diferansiyel denklemler teorisinin olgunlaşması açısından kritik bir dönemdir. 1970'lerin başında Nussbaum belirli sınıf fonksiyonlar için gecikmeli sistemlerin periyodik çözümlerinin analitikliği, varlık ve düzenlilik özellikleri üzerine sonuçlar yayımladı; bu ilerlemeler, GDD'lerin sadece varlık/kararlılık değil, çözüm düzenliliği açısından da derin teorik yapı taşıdığını göstermiştir (Nussbaum 1973). Hale ve Verduyn Lunel'in çalışmalarıyla, gecikme terimi içeren sistemler için fonksiyonel analiz temelli genel bir kuramsal çerçeve oluşturulmuş, böylece gecikmeli denklemler klasik ODE'lerden ayrılmış bağımsız bir matematiksel alan hâline gelmiştir (Hale vd. 1993). Aynı dönemde Popov, Kolmanovskii ve Nosov gibi araştırmacılar kontrol teorisinde gecikmenin etkisini inceleyerek mühen-dislik uygulamalarında gecikmenin modelleme gerekliliğini ortaya koymuştur (Kolmanovskii vd. 1986).

Gecikmeli denklemlere sıçrama etkilerinin eklenmesi ise 20. yüzyılın son çeyreğinde sistematik bir araştırma konusu hâline gelmiştir. İlk çalışmalar, sıçrama etkilerinin nümerik yöntemlerde veya biyolojik süreçlerde ani değişimlerin modellenmesindeki rolüne odaklanmış; sıçrama–süreklilik etkileşimini açıklayan çerçeve Lakshmikantham, Bainov ve Simeonov tarafından 1980'lerin sonunda geliştirilmiştir (Lakshmikantham vd. 1989). Bu çalışmalar, ani müdahalelerin süreksiz değişimlere yol açtığı durumların matematiksel olarak modellenmesini mümkün kılmış-tır.

1990'lı yıllarda sıçrama teorisinin gecikmeli denklemlerle birleşmesiyle Sıçramalı Gecikmeli Diferansiyel Denklemler (SGDD) literatürde bağımsız bir araştırma alanı hâline gelmiştir. Bainov ve Simeonov'un periyodik çözümler üzerine yaptığı çalışmalar, sıçrama etkisinin dinamik sistemlerin uzun dönem davranışını nasıl dönüştürdüğünü gösteren ilk sonuçlar arasındadır (Bainov vd. 1993). Aynı dönemde sıçrama terimlerinin biyoloji, ekoloji, epidemiyoloji ve mühendislikte ani giriş–çıkış etkilerini gerçekçi biçimde modellemesi nedeniyle SGDD modellerinin uygulama alanı genişlemiştir.

2000'li ve 2010'lu yıllar boyunca gecikmeli ve sıçramalı sistemlerin hem teorisi hem de uygulamaları hızla gelişmiştir. Bodnar ve Piotrowska (2010), gecikmeli denklemlerin temel yapısını sistematik biçimde ele alarak dinamik sistemlerin sonsuz boyutlu doğasını matematiksel açıdan berraklaştırmış; Wakili (2014) ise gecikmeli modellerin özellikle biyolojik sistemlerdeki uygulamalarına ilişkin kapsamlı bir inceleme sunmuştur. Son yıllarda ise sıçrama etkileriyle gecikmenin birlikte incelendiği modellerde kararlılık kriterleri, periyodik çözüm koşulları ve salınım davranışları üzerine yapılan çalışmalar literatürde hızla artmış; hibrit sistemler yaklaşımı altında SGDD modelleri modern dinamik sistem araştırmalarının önemli bir parçası hâline gelmiştir.

Bu tarihsel gelişim çizgisi, gecikmeli ve sıçramalı sistemlerin günümüzde yalnızca teorik bir inceleme alanı olmanın ötesine geçerek biyoloji, mühendislik, ekonomi ve kontrol teorisi gibi çok çeşitli uygulama alanlarında temel bir modelleme aracı haline geldiğini göstermektedir. Bu tezde ele alınacak olan SGDD modelleri ve salınımlı çözümleri, söz konusu uzun tarihsel birikimin modern teorik çerçevesi içinde değerlendirilecektir.

2 TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN HAZIRLIK

Bu bölümde, çalışmanın daha anlaşılır olması için gerekli olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

Gecikmeli diferansiyel denklemler, klasik başlangıç-değer problemlerinden yapısal olarak ayrılır. Klasik bir adi diferansiyel denklemde çözümün ilerleyişi yalnızca $x(t_0)$ gibi tek bir başlangıç değerine bağlıdır. Buna karşın gecikmeli bir diferansiyel denklemde türev, geçmişteki değerlere bağlı olduğundan başlangıç koşulu bir nokta değeri değil, $[-h, 0]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak zorundadır. Bu durum, GDD'leri sonsuz boyutlu dinamik sistemler sınıfına dahil eder ve çözüm teorisinin fonksiyonel analiz çerçevesinde kurulmasını gerektirir. Sıçramalı gecikmeli diferansiyel denklemlerde ise bu yapıya ek olarak belirli zaman anlarında ani değişimlere izin verilir; bu da çözüm uzayının parçalı-sürekli fonksiyonları kapsayacak biçimde genişletilmesini zorunlu kılar. Aşağıdaki tanımlar bu çerçeveyi kurmak amacıyla verilmektedir.

Gecikmeli diferansiyel denklemler (GDD) ve sıçramalı gecikmeli diferansiyel denklemler (SGDD) teorisinde çözüm kavramı, klasik başlangıç–değer problemlerinden farklı olarak fonksiyonel bir yapıya dayanır. Bu nedenle notasyonların açık biçimde tanımlanması, daha sonraki bölümlerde yer alacak olan varlık–teklik, kararlılık ve salınımlılık analizlerinin tutarlı bir çerçevede yürütülebilmesi için gereklidir.

Bu bağlamda çözüm fonksiyonu

$$x : [t_0 - \overline{h}, T) \to \mathbb{R}$$

şeklinde olmak üzere gecikme terimi

$$x(t - h(t)), \quad h(t) \geq 0,$$

veya genel olarak

$$x(h_k(t)), \quad k = 1, ..., m$$

şeklinde ifade edilir. Burada $h_k(t)$ sistemin hafızasını belirleyen zaman-dönüşüm fonksiyonlarıdır. Sabit gecikme durumunda $h_k(t) = t - \tau_k$ olup $\tau_k > 0$ gecikme parametresidir.

Sıçramalı gecikmeli diferansiyel denklemlerde başlangıç koşulu, sıradan diferansiyel denklemlerde olduğu gibi tek bir nokta değeriyle verilemez. Bunun yerine, faz uzayı olarak adlandırılan

$$C([-\overline{h}, 0], \mathbb{R})$$

üstünde tanımlı bir başlangıç fonksiyonu

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\overline{h}, 0]$$

şeklinde belirlenir. Burada $\overline{h} = \sup_t h(t)$ sistemin en büyük efektif gecikmesidir. Bu yaklaşım, GDD'lerin sonsuz boyutlu dinamik sistemler olarak ele alınmasını gerektirir (Hale 1977, Diekmann vd. 1995).

Sıçramalı diferansiyel denklemler bağlamında, sistemin evrimi belirli zaman anlarında ani değişimlere maruz kalır. Bu zamanlar

$$\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \qquad \tau_1 < \tau_2 < ..., \quad \tau_k \to +\infty$$

şeklinde tanımlanır. Çözümün bu noktalardaki sağ ve sol limitleri

$$x(\tau_j^-) = \lim_{t\to\tau_j^-} x(t), \quad x(\tau_j^+) = \lim_{t\to\tau_j^+} x(t)$$

ile gösterilir. Sıçrama etkisi

$$x(\tau_j^+) = x(\tau_j^-) + I_j(x(\tau_j^-)$$

şeklinde veya çarpan tipi sıçramalar için

$$x(\tau_j^+) = B_j x(\tau_j^-)$$

ile gösterilir. Burada I_j sıçrama fonksiyonu, $B_j \neq 0$ ise sıçrama katsayısıdır (Lakshmikantham vd. 1989).

Tanım 2.1 Genel olarak bir gecikmeli diferansiyel denklem

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - h_1(t)), ..., x(t - h_m(t)))$$

şeklinde gösterilir. Burada $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ uygun bir fonksiyondur.

Bu sınıf, sabit gecikmeli sistemlerden, dağıtılmış gecikmeli modellere kadar geniş bir aileyi kapsar. Gecikme teriminin doğrudan türev içinde yer alması, çözümün mevcut durumunun geçmiş durumlara fonksiyonel bağımlılığını açık biçimde gösterir. Bu nedenle çözüm operatörü, sıradan diferansiyel denklemler için geçerli olan semigrup yapısından farklı olarak, genellikle bir "sunrise semigrup" ya da "integrated semigrup" yapısı oluşturur (Diekmann vd. 1995).

Lineer gecikmeli diferansiyel denklemler, teorik analizde merkezi bir konuma sahiptir ve

$$x'(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t)\, x(t - h_k(t)) = 0.$$

şeklinde gösterilir. Bu yapı, popülasyon dinamikleri (Hutchinson tipi modeller), kontrol teorisi (geri-besleme gecikmesi), epidemiyolojik modeller ve kimyasal kinetik gibi alanlarda yaygın olarak kullanılır (Kuang 1993, Burton 1985). Lineer GDD'lerde karakteristik denklem, kararlılık ve salınım analizi için temel bir araçtır.

Tanım 2.2 Sıçramalı Gecikmeli Sistemler

Sıçramalı sistemler, süreksiz değişimlerin belirli zaman anlarında modele dahil edildiği diferansiyel sistemlerdir. Gecikmeli yapı ile sıçrama yapısının birleşimi, çözüm uzayında hem süreksizlik hem de fonksiyonel bağımlılık barındıran hibrit bir dinamik ortaya çıkarır.

Genel SGDD modeli

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - h(t))), \qquad t \neq \tau_j,$$

şeklinde ifade edilir ve sıçrama anlarında

$$x(\tau_j^+) = x(\tau_j^-) + I_j(x(\tau_j^-)$$

şeklindedir. Daha özel bir sınıf olan çarpan tipi sıçramalarda ise

$$x(\tau_j^+) = B_j x(\tau_j^-) + \alpha_j$$

biçimi kullanılır. Bu modeller, özellikle biyolojik sistemlerde ani tedavi uygulamaları, ekonomik modellerde ani sermaye enjeksiyonları ve mühendislik sistemlerinde darbeli kontrol mekanizmaları için uygundur (Lakshmikantham 1989, Bainov vd. 1993) .

Tanım 2.3 Gecikmeli denklemlerin çözüm teorisi, fonksiyonel analiz temelli bir yaklaşım gerektirir. Klasik ODE'lerde başlangıç değeri tek bir noktada verilirken, GDD'lerde başlangıç koşulu bir fonksiyon olduğundan, çözüm operatörü

$$T(t) : C([-\overline{h}, 0]) \to C([-\overline{h}, 0])$$

şeklinde tanımlanır. Bu nedenle gecikme denklemleri sonsuz boyutlu dinamik sistemlerdir (Hale 1977).

Faz uzayı tipik olarak

$$C([-\overline{h}, 0], \mathbb{R})$$

olarak seçilir. Bu uzay, maksimum norm ile birlikte Banach uzayı yapısındadır:

$$\| \varphi \|_\infty = \sup_{s \in [-\overline{h}, 0]} | \varphi(s) | \, .$$

SGDD sistemlerinde faz uzayı yapısı korunur, ancak çözümün sürekliliği sıçrama noktalarında bozulduğundan,

$$PC([-\overline{h}, T]) = \{x : x \text{ parçalı-sürekli}, \ t \neq \tau_j\}$$

şeklindedir.

Fonksiyonel uzay yapısı, varlık teklik teoremlerinin, temel çözüm kavramının ve kararlılık analizlerinin matematiksel zemininin kurulmasında temel rol oynar (Diekmann vd. 1995).

Tanım 2.4 (Varlık ve Teklik) Gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözüm teorisi, klasik Picard–Lindelöf çerçevesinin fonksiyonel bir genellemesini gerektirir. Çünkü çözüm, yalnızca $x(t)$ değerine değil, başlangıç fonksiyonunun tümüne bağlıdır. Dolayısıyla varlık ve teklik teoremleri, fonksiyonel bağımlılığı dikkate alan özel koşullar altında formüle edilir.

Genel GDD formu,

$$x'(t) = f(t, x_t), \quad x_t(\theta) = x(t+\theta),\ \theta \in [-\overline{h}, 0]$$

şeklinde yazıldığında, f'in ikinci değişkeninde fonksiyonel bağımlılığı olduğu görülür. Hale (1977) ve Burton (1985), varlık ve tekliğin sağlanması için Lipschitz ve süreklilik koşullarının yeterli olduğunu göstermiştir. Her kompakt $K \subset C([-\overline{h}, 0], \mathbb{R}$ için:

$$\| f(t,\varphi) - f(t,\psi) \| \leq L \| \varphi - \psi \|_\infty$$

sağlayan bir $L > 0$ vardır. $f(t,\psi),\ t$ ve ψ değişkenlerinde süreklidir.

Bu koşullar altında

$$x(t) = \psi(t), \qquad t \in [-\overline{h}, 0],$$

$$x'(t) = f(t, x_t), \qquad t > 0,$$

başlangıç probleminin bir tek yerel çözümün var olduğu garanti edilir (Hale 1977).

Sıçramalı sistemlerde varlık–teklik problemi sıçrama operatörlerinin Lipschitz sürekliliği altında geçerlidir. Yani

$$\| I_j(u) - I_j(v) \| \ \leq\ M_j \| u - v \|$$

sağlandığında çözümün sıçrama noktalarında parçalı-sürekli bir şekilde tek olduğu bilinmektedir (Lakshmikantham 1989).

Tanım 2.5 Lineer gecikmeli sistemlerin analitik yapısının incelenmesinde temel çözüm (Cauchy fonksiyonu) merkezi bir rol oynar.

$$x'(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t)\, x(t - h_k(t)) = 0$$

şeklindeki bir lineer sistem ele alındığında, temel çözüm $X(t,s)$, başlangıç anı s olmak üzere

$$X(s,s) = 1, \qquad X(t,s), \quad t < s$$

koşullarını sağlayan özel bir çözüm olarak tanımlanır (Hale 1977, Burton 1985). Çözüm fonksiyonu

$$x(t) = X(t,0)\psi(0) + \int_{-\bar{h}}^{0} X(t,\theta)\psi'(\theta)d\theta,$$

şeklinde veya daha genel formda

$$x(t) = X(t,0)\psi(0) + \int_{0}^{t} X(t,s)\sum_{k=1}^{m} a_k(s)x(s-h_k(s))ds$$

ile gösterilir. Temel çözüm kararlılık, salınımlılık, periyodik çözüm varlığı, karakteristik denklem köklerinin analizi gibi tüm temel konularda ana araçtır.

Sıçramalı sistemlerde temel çözüm, sıçrama noktalarında

$$X(\tau_j^+, s) = B_j X(\tau_j^-, s),$$

ile gösterilir ve bu nedenle SGDD için temel çözüm parçalı tanımlıdır (Lakshmikantham vd. 1989).

Tanım 2.6 Gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözüm davranışını karakterize eden temel kavramlardan biri salınımlılık (oscillation) olup, bir çözümün uzun vadede işaret değiştirme özelliğine sahip olup olmadığını belirler. Genel olarak bir fonksiyonun salınımlı olarak adlandırılması, çözümün sonsuz zaman aralığında sık sık sıfırı kesmesi veya işaretini sonsuz kez değiştirmesi anlamına gelir (Hale 1977, Györi vd. 1991).

Lineer bir gecikmeli diferansiyel denklemin genel formunda çözüm

$$\forall T > 0 \; \exists \; t_1, t_2 > T \quad \text{öyle ki} \quad x(t_1) = 0, \; x(t_2) = 0$$

olmak üzere t_1 ile t_2 arasında işaret değiştiriyorsa bu denklemin bir çözümü salınımlıdır denir. Diğer bir deyişle,

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) > 0 \quad \text{ve} \quad \liminf_{t\to\infty} x(t) < 0$$

ise çözüm salınımlıdır. Bu tanım, gecikmenin varlığı nedeniyle çözümün davranışının yalnızca diferansiyel yapı ile değil, çözümün geçmiş değerleri ile birlikte belirlendiğini vurgular(Hale 1977, Györi vd. 1991).

Yeterince büyük bir $T > 0$ için

$$x(t) \cdot x(t_0) > 0, \qquad \forall t > T$$

eşitsizliği sağlanıyorsa tüm çözümler salınımsızdır denir. Bu durumda çözüm sonsuz kez sıfırdan geçmez, işaretini değiştirmeden tamamen pozitif veya tamamen negatif kalır (Myshkis 1955). Salınımlı olmayan çözümler özellikle kararlılık analizinde kritik rol oynar, çünkü bu çözümler belirli monotonluk ya da limit davranışlarını (örneğin $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$)) daha açık biçimde gösterir.

Sıçramalı gecikmeli diferansiyel denklemler için sıçrama anları çözümün süreksiz davranış oluşturmasına neden olur, ancak salınımlılık tanımı değişmez. Eğer sıçramalar dahil tüm süreklilik parçaları boyunca

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) > 0 \quad \text{ve} \quad \liminf_{t\to\infty} x(t) < 0$$

sağlanıyorsa SGDD'nin her çözümü salınımlıdır. Burada önemli olan, sıçramaların çözümü "yukarı" veya "aşağı" itmesine rağmen çözümün uzun vadeli davranışının işaret değiştirme özelliğini korumasıdır. Eğer sıçramalar çözümün işaretini kalıcı biçimde tek tarafa itiyorsa çözüm salınımlı olmayan sınıfa geçer (Lakshmikantham vd. 1989).

3 LİNEER SIÇRAMALI GECİKMELİ DENKLEMLERDE SALINIMLILIK ANALİZİ

Bu bölümde lineer sıçramalı gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı, kararlılığı ele alınacaktır. Bu incelemede temel kaynak olarak Yan ve Zhao (1998) alınmıştır.

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, x(t - \tau_i(t)) = 0, \qquad t \neq t_k \tag{3.1}$$

$$x(t_k^+) = (1 + b_k)\, x(t_k^-), \quad b_k > -1, \qquad k = 1, 2, ... \tag{3.2}$$

sıçramalı gecikmeli denklemini ele alalım. Burada $p_i(t)$ sürekli ve parçalı sürekli fonksiyonlar, $\tau_i(t)$ sürekli gecikme fonksiyonları olup $0 < \tau_i(t) \leq \tau_0$ ve $t \to \infty$ için t_k dizisi sıçrama anlarını gösterir. Aynı zamanda $x(t_k^-)$, t_k noktasındaki soldan limit; $x(t_k^+)$, t_k noktasındaki sağdan limit ve $b_k > -1$'dir.

Bu bölüm boyunca aşağıdaki koşulların sağlandığı kabul edilecektir:

(i) $p_i(t) \geq 0$ ve süreklidir.

(ii) Gecikme fonksiyonları sınırlıdır, $0 < \tau_i(t) < \tau_0$

(iii) $b_k > -1$'dir.

(3.1)–(3.2) sisteminde

$$y(t) \;=\; \prod_{t_k < t} (1 + b_k) \cdot x(t). \tag{3.3}$$

dönüşümünü yapalım. $b_k > -1$ olduğundan $(1 + b_k) > 0$ olur. Dolayısıyla

$$\prod_{t_k < t} (1 + b_k) \;>\; 0 \qquad \text{her } t \text{ için.}$$

olur. Buradan

$$\operatorname{sgn}\big(y(t)\big) \;=\; \operatorname{sgn}\big(x(t)\big) \qquad \text{her } t \text{ için}$$

elde edilir.

$t \neq t_k$ olduğunda $c(t) \overset{\text{def}}{=} \prod_{t_k<t}(1+b_k)$ sabiti tanımlayalım, yani $c'(t) = 0$'dır. (3.3)'ten $x(t) = [c(t)]^{-1}y(t)$ yazılabilir; benzer biçimde $x(t-\tau_i(t)) = [c(t-\tau_i(t))]^{-1}\, y(t-\tau_i(t))$. $y'(t) = c(t)\, x'(t)$ olduğundan (3.1)'i $c(t)$ ile çarptıktan sonra yerine koyarsak

$$y'(t) \ + \ \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, \frac{c(t)}{c(t-\tau_i(t))}\, y(t-\tau_i(t)) \ = \ 0.$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{c(t)}{c(t-\tau_i(t))} \ = \ \prod_{t_j \,\in\, (t-\tau_i(t),\, t)} (1+b_j).$$

olur. Dolayısıyla bu ifade yerine yazıldığında

$$y'(t) \ + \ \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \prod_{t_j \,\in\, (t-\tau_i(t),\, t)} (1+b_j) \cdot y(t-\tau_i(t)) \ = \ 0. \tag{3.4}$$

sıçramalı olmayan lineer gecikmeli denklem elde edilir.

Teorem 3.1 Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (3.1)–(3.2) sıçramalı gecikmeli denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(ii) (3.4) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat $(i) \Rightarrow (ii)$: Kabul edelim ki (3.1)–(3.2) denkleminin her çözümü salınımlı olsun. Dolayısıyla herhangi bir çözüm, yeterince büyük bir t için salınımlıdır. (3.3)'te verilen dönüşümden

$$y(t_k^+) = \prod_{t_j<t_k} (1+b_j)x(t_k^+) = \prod_{t_j<t_k} (1+b_j)x(t_k^-),$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla

$$y(t_k^+) = y(t_k^-)$$

olur. O halde $y(t)$ süreklidir. Ayrıca $(1+b_k) > 0$ olduğundan her k için

$$\mathrm{sgn}(y(t)) = \mathrm{sgn}(x(t))$$

olur. Yani işaret yapısı bozulmaz.

$x(t)$ salınımlı olduğundan

$$x(t_{n_1}) > 0, x(t_{n_2}) < 0, x(t_{n_3}) > 0, ...$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan

$$y(t_{n_k}) = C_{n_k} x(t_{n_k})$$

olduğundan ve tüm $C_{n_k} > 0$ olduğundan $y(t)$ de aynı noktalarda aynı işaret değişimini yapar, yani $y(t)$ de salınımlıdır, dolayısıyla (3.4) denklemi de salınımlıdır.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Bu kez kabul edelim ki (3.4) 'ün her çözümünün salınımlı olsun. (3.3) dönüşümünden

$$x(t) = \Big(\prod_{t_k<t}(1+b_k)\Big)^{-1} y(t) \tag{3.5}$$

yazılabilir. Her çarpan pozitif olduğundan işaret yine korunur, yani

$$\operatorname{sgn}(y(t)) = \operatorname{sgn}(x(t))$$

eşitliği sağlanır. O halde bu durum $y(t)$ salınımlıysa $x(t)$ de salınımlı demektir. Böylece ispat tamamlanır.

Her i için $\tau_i(t) \geq 0$, $p_i(t) \geq 0$ ve $0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_{\max}$. olsun. (3.1)-(3.2) sıçramalı gecikmeli diferansiyel denkleminde (3.3) dönüşümü uygulanırsa denklem

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\, y(t-\tau_i(t)) = 0 \tag{3.6}$$

denklemine dönüşür. Böylece

$$q_i(t) = p_i(t) \prod_{t_j \in (t-\tau_i(t),\, t)} (1+b_j).$$

olur.

Teorem 3.2: Kabul edelim ki, her t için

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau_{\max}}^{t} \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\, ds > 1 \tag{3.7}$$

sağlansın. O halde (3.1)–(3.2)'nin her çözümü salınımlıdır.

İspat. Durum 1: Çelişki için kabul edelim ki (3.1)–(3.2) denklemi salınımlı olmayan pozitif bir çözüme sahip olsun. Teorem 3.1 gereği sıçramalı denklemin salınımlılık davranışı (3.6) denklemiyle eşdeğerdir; bu nedenle yalnızca (3.6) üzerinde çalışmak yeterlidir. Yeterince büyük $t > 0$ için $y(t) > 0$ olduğunu varsayalım. (3.6) denkleminde $q_i(t) \geq 0$ ve $y(t - \tau_i(t)) > 0$ olduğundan

$$y'(t) \;=\; -\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\, y(t - \tau_i(t)) \;\leq\; 0. \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanır; yani y *azalan* bir pozitif fonksiyondur. y azalan ve $\tau_i(t) \leq \tau_{\max}$ olduğundan

$$y(t - \tau_i(t)) \;\geq\; y(t - \tau_{\max}) \qquad i = 1, \ldots, n \text{ için.}$$

yazılabilir. Buradan

$$y'(t) \;\leq\; -y(t - \tau_{\max}) \sum_{i=1}^{n} q_i(t). \tag{3.9}$$

olur. Bu eşitsizlik $[t - \tau_{\max},\, t]$ üzerinde integre edilirse

$$y(t) - y(t - \tau_{\max}) \;\leq\; -\int_{t-\tau_{\max}}^{t} y(s - \tau_{\max}) \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\, ds. \tag{3.10}$$

elde edilir. y azalan olduğundan $s \in [t - \tau_{\max}, t]$ için $y(s - \tau_{\max}) \geq y(t - \tau_{\max})$'dır. Bu son eşitsizlik (3.10)'da yerine yazılırsa

$$y(t) - y(t - \tau_{\max}) \;\leq\; -y(t - \tau_{\max}) \int_{t-\tau_{\max}}^{t} \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\, ds. \tag{3.11}$$

olur. Bu ifade $y(t - \tau_{\max}) > 0$ ile bölünürse

$$\frac{y(t) - y(t - \tau_{\max})}{y(t - \tau_{\max})} \;\leq\; -\int_{t-\tau_{\max}}^{t} \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\, ds. \tag{3.12}$$

yazılabilir. y azalan olduğundan $y(t) < y(t - \tau_{\max})$, yani pay negatiftir; dolayısıyla sol taraf negatiftir. Öte yandan $y(t) > 0$ ve $y(t - \tau_{\max}) > 0$ olduğundan

$$\frac{y(t)}{y(t - \tau_{\max})} > 0,$$

bu da

$$\frac{y(t) - y(t - \tau_{\max})}{y(t - \tau_{\max})} \;=\; \frac{y(t)}{y(t - \tau_{\max})} - 1 \;>\; -1$$

anlamına gelir. Dolayısıyla sol taraf $(-1,\, 0)$ aralığındadır:

$$-1 \;<\; \frac{y(t) - y(t - \tau_{\max})}{y(t - \tau_{\max})} \;\leq\; 0. \tag{3.13}$$

Teorem 3.2 varsayımına göre $\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau_{\max}}^{t} \sum q_i(s)\,ds > 1$ olduğundan yeterince büyük t için $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\int_{t-\tau_{\max}}^{t} \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\,ds \;\geq\; 1+\varepsilon. \tag{3.14}$$

(3.13) ve (3.14)'ü birleştirirsek

$$\frac{y(t)-y(t-\tau_{\max})}{y(t-\tau_{\max})} \;\leq\; -(1+\varepsilon) \;<\; -1$$

yazılabilir. Ancak (3.13)'e göre bu ifade -1'den büyük olmak zorundadır. Bu çelişki, pozitif çözümün var olamayacağını gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Durum 2: Çelişki için kabul edelim ki (3.1)-(3.2) denklemi salınımlı olmayan negatif bir $z(t)$ çözümüne sahip olsun. $z(t) = -y(t) > 0$ olduğundan z de (3.6)'yı sağlar ve Durum 1'deki argümanın tamamen aynısı uygulanarak yine çelişkiye ulaşılır. Dolayısıyla (3.1)–(3.2) sıçramalı gecikmeli diferansiyel denklemi salınımlıdır.

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i\, x(t-\tau_i) = 0 \tag{3.15}$$

$$x(t_k^+) = (1+b_k)x(t_k^-)$$

sabit katsayılı sıçramalı gecikmeli diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $p_i > 0$ ve $\tau_i > 0$'dir. Denklem, Teorem 3.1'deki dönüşümle

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\prod_{t_j\in(t-\tau_i,\,t)} (1+b_j) \right) y(t-\tau_i) = 0 \tag{3.16}$$

denklemine dönüşür. Burada

$$q_i(t) = p_i \prod_{t_j\in(t-\tau_i,\,t)} (1+b_j) \tag{3.17}$$

şeklindedir.

Sonuç 3.1 Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau_{\max}}^{t} \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\,ds > 1 \tag{3.18}$$

ise, (3.14)–(3.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 3.1

$$x'(t) + 0.4\,x(t-2) = 0 \qquad t \neq t_k, \tag{3.19}$$

$$x(t_k^+) = -\tfrac{1}{2}\,x(t_k^-), \qquad t_k = k \cdot 3 \tag{3.20}$$

Sıçramalı gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Teorem 3.1'e göre

$$y(t) = \prod_{t_k<t} (1+b_k)x(t), \quad \text{ve} \quad b_j = -\frac{1}{2}. \tag{3.21}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$1 + b_j = \frac{1}{2}$$

olur. Gecikme $\tau = 2$ ve sıçrama aralığı 3 olduğundan her $(2,3)$ aralığında en fazla bir sıçrama bulunabilir. Bu durumda

$$q(t) = 0.4 \cdot (1+b_j)^{N(t)} = 0.4 \cdot 2^{-N(t)} \tag{3.22}$$

elde edilir. Burada eğer $(t-2, t)$ aralığında sıçrama yoksa $N(t) = 0$ ve $q(t) = 0.4$; eğer tam bir sıçrama varsa $N(t) = 1$ ve $q(t) = 0.2$ olur.

$$\int_{t-2}^{t} q(s)\,ds \in [0.4, 0.8] \tag{3.23}$$

Buna ek olarak bazı aralıklarda bir sıçrama bulunmadığından ortalama genellikle 0.8'e yakın olacaktır. Teorem 3.2'deki salınımlılık koşulu

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-2}^{t} q(s)\,ds > 1$$

şeklindedir. Burada integral değeri 1'den küçük olduğu için şart sağlanmamaktadır. Ancak

$$x(t_k^+) = (1+b_k)x(t_k^-) = -\tfrac{1}{2}x(t_k^-) \implies x(t_k^-)x(t_k^+) < 0. \tag{3.24}$$

olacağından çözüm salınımlıdır.

Örnek 3.2

$$x'(t) + \tfrac{3}{2} \cdot x(t-1) = 0, \quad t \neq t_k, \tag{3.25}$$

$$x(t_k^+) = 2\,x(t_k^-), \quad t_k = 3k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.26}$$

sıçramalı gecikmeli diferansiyel denklemi ele alalım. Burada $p = \frac{3}{2}$, $\tau = 1$, sıçrama aralığı $d = 3$ ve $b_k = 2$'dir. Her sıçramada x iki katına çıkar; $1 + b_k = 3 > 0$ olduğundan işaret korunur ve dönüşüm (3.3) geçerlidir.

$\tau = 1 < d = 3$ olduğundan $(t-1,\, t)$ aralığı en fazla bir sıçrama içerir. Burada iki durum ortaya çıkar:

- $(t-1,\, t)$'de *sıçrama yoksa*: $q(t) = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$.
- $(t-1,\, t)$'de *bir sıçrama* t_k *varsa*: $q(t) = \frac{3}{2} \cdot (1 + b_k) = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$

şeklindedir.

$t \in (3k,\, 3k+1)$ için $(t-1,\, t)$ aralığı $t_k = 3k$'yı içerir. $s \in (t-1,\, t)$ üzerinde: $s \in (t-1,\, 3k)$ için $t_k \notin (s-1, s)$, dolayısıyla $q(s) = \frac{3}{2}$; $s \in (3k,\, t)$ için $t_k \in (s-1, s)$, dolayısıyla $q(s) = \frac{9}{2}$. Buradan

$$\begin{aligned}\int_{t-1}^{t} q(s)\, ds &= \tfrac{3}{2}\big(3k - (t-1)\big) + \tfrac{9}{2}(t - 3k) \\ &= \tfrac{3}{2}(3k - t + 1) + \tfrac{9}{2}(t - 3k) \\ &= \tfrac{3}{2} + 3(t - 3k).\end{aligned}$$

elde edilir. $t - 3k \in (0,1)$, $\int_{t-1}^{t} q(s)\, ds \in \left(\frac{3}{2},\, \frac{9}{2}\right)$ oluduğundan $t \in (3k+1,\, 3k+3)$ için $(t-1,\, t)$ hiçbir sıçrama içermez ve $\int_{t-1}^{t} q(s)\, ds = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$ olur.

Dolayısıyla

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-1}^{t} q(s)\, ds \;=\; \frac{3}{2} \;>\; 1.$$

yazılabilir. Buradan Teorem 3.2'nin koşulu sağlandığından (3.25)–(3.26) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 3.1'de integral kriteri sağlanmadığı hâlde $b_k = -\frac{1}{2} < 0$ nedeniyle her sıçramada işaret değiştiğinden salınım doğrudan garanti edilmekteydi. Örnek 3.2'de ise $b_k = 2 > 0$ olduğundan hiçbir sıçrama işaret değiştirmez; salınım yalnızca integral kriterinden kaynaklanmaktadır.

4 SIÇRAMALI GECİKMELİ DENKLEMLERDE SALINIMLILIK ANALİZİ

Bu bölümde SGDD üzerinde salınımlılık analizi yapılacaktır. Bu incelemede temel kaynak olarak Berezansky, Braverman (1995) alınmıştır.

$$x'(t) + \sum_{k=1}^{m} A_k(t)\, x(h_k(t)) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{4.1}$$

$$x(\tau_j) = B_j\, x(\tau_j - 0), \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $A_k : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $B_j > 0$, $h_k(t) < t$, $t - h_k(t) \leq H$ ve $0 < \tau_1 < \tau_2 < ...$ olup $\tau_j \to \infty$'dır.

(a1) $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ sabit noktalar ve $\lim_{j\to\infty} \tau_j = \infty$'dır.

(a2) A_k, f, $k = 1, \ldots, m$, her sonlu $[0, b]$ aralığında sınırlı Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlardır; $B_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \ldots$, burada $\mathbf{R}$, reel sayılar eksenini göstermektedir.

(a3) $h_k : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlardır ve $h_k(t) \leq t$ koşulunu sağlarlar.

(a4) $\varphi : (-\infty, t_0) \to \mathbf{R}$, Borel ölçülebilir sınırlı bir fonksiyondur.

(a5) Her $s > 0$ için

$$\mu_s = \min_k \ \operatorname*{vrai\,inf}_{t>s} h_k(t) > -\infty$$

gecikmeler sınırlıdır ve $t \geq s'$ iken $h_k(t) \geq s$ olacak şekilde bir $s' \geq s$ mevcuttur.

(4.1)–(4.2) sisteminde $k = 1, \ldots, m$ için ve $t \geq 0$ sabit tutularak $h_k(t) < \tau_j \leq t$ koşulunu sağlayan

$$\prod_{h_k(t)<\tau_j\leq t} B_j^{-1}. \tag{4.3}$$

çarpımını tanımlayalım. $B_j > 0$ olduğundan $B_j^{-1} > 0$, dolayısıyla bu çarpım her zaman pozitiftir. (4.3)'ü (4.1)'e uygularsak: $(h_k(t), t]$ aralığında tam olarak $M_k(t) = \#\{\, j : h_k(t) < \tau_j \leq t \,\}$ adet sıçrama bulunduğundan gecikme terimindeki $x(h_k(t))$ büyüklüğü, $h_k(t)$ ile t arasında gerçekleşen sıçramaların bileşik etkisini taşır. Dolayısıyla

$$x'(t) + \sum_{k=1}^{m} A_k(t) \prod_{h_k(t)<\tau_j\leq t} B_j^{-1} \cdot x(h_k(t)) = 0 \tag{4.4}$$

sıçramalı olmayan gecikmeli diferansiyel denklemine ulaşılır. Aynı notasyonla

$$\widetilde{A}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} A_k(t) \prod_{h_k(t)<\tau_j\leq t} B_j^{-1}$$

yazarsak (4.4),

$$x'(t) + \sum_{k=1}^{m} \widetilde{A}_k(t)\, x(h_k(t)) = 0$$

biçimini alır. Lineer gecikmeli denklemin temel çözümü $t < s$ için $X(t, s) = 0$, $t = s$ için $X(s, s) = 1$'dir. Genel çözüm ise

$$x(t) = X(t, s)x(s) + \int_s^t X(t, \xi) \sum_{k=1}^{m} A_k(\xi)x(h_k(\xi))\, d\xi. \tag{4.5}$$

şeklindedir.O halde (4.1)-(4.2) denkleminin salınımsız olması için gerek ve yeter koşul (4.5) denkleminin salınımsız olmasıdır.

Teorem 4.1 Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) (4.1)–(4.2) sıçramalı gecikmeli denklemi bir pozitif çözüme sahiptir.

(ii) (4.4) sıçramalı olmayan gecikmeli denklemi bir pozitif çözüme sahiptir.

(iii) İki denklem için de salınımlılık davranışı aynıdır.

$(i) \Rightarrow (ii)$: (4.1)–(4.2) denkleminin pozitif bir $x(t)$ çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. $B_j > 0$ olduğundan (4.3)'teki çarpım pozitiftir; dolayısıyla (4.4)'teki katsayı $\widetilde{A}_k(t) = A_k(t) \prod B_j^{-1} > 0$'dır ($A_k \geq 0$ varsayımı altında). (4.4) denkleminin çözümü $x(t)$'nin kendisi olduğundan bu denklemin de pozitif çözümü vardır.

$(ii) \Rightarrow (i)$: (4.4)'ün pozitif bir çözümü $x(t) > 0$ olsun. (4.2) koşulu $x(\tau_j) = B_j x(\tau_j - 0)$'ı verir; $B_j > 0$ olduğundan $x(\tau_j) > 0$ olur. Yani $x(t)$ aynı zamanda (4.1)–(4.2)'nin de pozitif çözümüdür.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$: Lineer gecikmeli denklemlerde salınımsızlık ile pozitif çözüm varlığının eşdeğer olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla (i) ve (ii)'nin eşdeğer olduğunu göstermek, (iii)'ün her ikisiyle de eşdeğer olduğunu doğrudan verir.

Teorem 4.2 (4.4) denkleminin salınımsız (pozitif) çözüm içermesi için gerekli ve yeterli şart,

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{h_k(t)}^{t} A_k(s)\prod_{h_k(s)<\tau_j\le s} B_j^{-1}\,ds \le \frac{1}{e}. \tag{4.6}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Yani bu eşitsizlik sağlanırsa (4.4) denkleminin tüm çözümleri salınımsızdır.

Teorem 4.3 (a1)-(a5) sağlansın, $A_k(t) \ge 0$ ve $B_j > 1$ olsun. Bu durumda

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{h(t)}^{t}\sum_{k=1}^{m} A_k(s)\prod_{h_k(s)<\tau_j\le s} B_j^{-1}\,ds > \frac{1}{e} \tag{4.7}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{\bar{h}(t)}^{t}\sum_{k=1}^{m} A_k(s)\prod_{h_k(s)<\tau_j\le s} B_j^{-1}\,ds > 1 \tag{4.8}$$

eşitsizliklerinden en az biri sağlanırsa (4.1)-(4.2) denklemi salınımlıdır.

İspat. ((4.7) Kriterinin İspatı): Teorem 4.1 gereği salınımlılık analizi (4.4) denklemi üzerinde yapılabilir. Yeterince büyük t için pozitif kalan bir çözüm $x(t) > 0$ olduğunu kabul edelim.

$\widetilde{A}_k(t) \ge 0$ ve $x(h_k(t)) > 0$ olduğundan (4.4)'ten

$$x'(t) = -\sum_{k=1}^{m}\widetilde{A}_k(t)\,x(h_k(t)) \;\le\; 0.$$

olacağından x azalan bir pozitif fonksiyondur. $h_k(t) \le h(t)$ olduğundan $x(h_k(t)) \ge x(h(t))$ ve

$$x'(t) \;\le\; -x(h(t))\sum_{k=1}^{m}\widetilde{A}_k(t).$$

şeklindedir. Bu son eşitsizlik $[h(t),\, t]$ üzerinde integre edilirse

$$x(t) - x(h(t)) \;\le\; -x(h(t))\int_{h(t)}^{t}\sum_{k=1}^{m}\widetilde{A}_k(s)\,ds.$$

olur. Bu ifade $x(h(t)) > 0$ ile bölünürse

$$\frac{x(t)}{x(h(t))} - 1 \;\le\; -\int_{h(t)}^{t}\sum_{k=1}^{m}\widetilde{A}_k(s)\,ds.$$

yazılabilir. x azalan olduğundan $x(t) \le x(h(t))$, yani $x(t)/x(h(t)) \le 1$'dir. Ayrıca $x(t) > 0$ olduğundan $x(t)/x(h(t)) > 0$ olur. Dolayısıyla sol taraf $(-1,\, 0]$ aralığındadır. Öte yandan (4.7)'den yeterince büyük t için

$$\int_{h(t)}^{t} \sum_{k=1}^{m} \widetilde{A}_k(s)\, ds \;>\; \frac{1}{e}.$$

olur. Bununla birlikte sol tarafın -1'den büyük olduğunu kullanarak

$$-1 \;<\; \frac{x(t)}{x(h(t))} - 1 \;\le\; -\int_{h(t)}^{t} \sum_{k=1}^{m} \widetilde{A}_k(s)\, ds \;<\; 0.$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik $x(t)/x(h(t)) \ge e^{-1}$ olmasını gerektirir (bkz. Győri & Ladas, 1991, Lemma 2.1.1); ancak $\int > 1/e$ ile birlikte bu durum çelişki doğurur. O halde (4.4) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Dolayısıyla Teorem 4.1'den (4.1)-(4.2) denklemi salınımlıdır.

İspat. ((4.8) Kriterinin İspatı): Yine (4.4) denkleminin pozitif azalan bir $x(t) > 0$ çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. $\bar{h}(t) = \min_k h_k(t)$ olduğundan $x(h_k(t)) \le x(\bar{h}(t))$ eşitsizliği sağlanır. (4.4) denklemi $[\bar{h}(t),\, t]$ üzerinde integre edilirse

$$\frac{x(t) - x(\bar{h}(t))}{x(\bar{h}(t))} \;\le\; -\int_{\bar{h}(t)}^{t} \sum_{k=1}^{m} \widetilde{A}_k(s)\, ds.$$

olur. Sol taraf $(-1,\, 0]$ aralığındadır. Sağ taraf ise (4.8) varsayımından < -1'dir. Bu çelişki pozitif çözümün var olamayacağını gösterir. O halde (4.4) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Dolayısıyla Teorem 4.1'den (4.1)-(4.2) denklemi salınımlıdır.

Örnek 4.1 $A(t) = \frac{3}{2}, \quad h(t) = t - 1, \quad B_j = \frac{1}{2}, \quad \tau_j = 2j$ olmak üzere

$$x'(t) + A(t)\, x(h(t)) = 0, \quad t \ne \tau_j, \tag{4.9}$$

$$x(\tau_j) = B_j\, x(\tau_j - 0), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{4.10}$$

denklemini göz önüne alalım.

Burada $p = \frac{3}{2}$, $\tau = 1$, sıçrama aralığı $d = 2$ ve her sıçramada x yarıya iner.

$(h(t),\, t] = (t-1,\, t]$ aralığı, $d = 2 > \tau = 1$ olduğundan, en fazla bir sıçrama içerir.

$M(t) = \#\{j : t - 1 < \tau_j \le t\}$ olmak üzere:

- $(t-1,\, t]$'de *sıçrama yoksa* ($M(t) = 0$): $\widetilde{A}(t) = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$.

- $(t-1,\, t]$'de *bir sıçrama varsa* $(M(t)=1)$: $\widetilde{A}(t) = \frac{3}{2} \cdot B_j^{-1} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$.

$t \in (2j,\, 2j+1)$ için $(t-1,\, t]$ aralığı $\tau_j = 2j$'yi içerir, $t \in (2j+1,\, 2j+2)$ için içermez. Bu iki durumu birleştirilirse

$$\int_{t-1}^{t} \widetilde{A}(s)\, ds \geq \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} \qquad \text{(sıçramasız aralık için),}$$
$$\int_{t-1}^{t} \widetilde{A}(s)\, ds \leq 3 \cdot 1 = 3 \qquad \text{(sıçramalı aralık için).}$$

olur. Dolayısıyla
$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-1}^{t} \widetilde{A}(s)\, ds \;=\; \frac{3}{2} \;>\; \frac{1}{e} \approx 0{,}368.$$
(4.7) sağlandığından (4.9)–(4.10) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

$\bar{h}(t) = t-1$ olduğundan $\limsup_{t\to\infty} \int_{t-1}^{t} \widetilde{A}(s)\, ds = 3 > 1$. O halde (4.8) de sağlanmaktadır. Yani (4.9)-(4.10) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

5 KAYNAKLAR

Agarwal R P, Karakoç F, Zafer A, 2010, A Survey on Oscillation of Impulsive Ordinary Differential Equations, *Hindawi Publishing Corporation Advances in Difference Equations.*

Anokhin A, Berezansky L, Braverman E, 1995, Exponential Stability of Linear Delay Impulsive Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.* 193, 923-941.

Atkinson F V, On second-order non-linear oscillations, 1955, *Pacific Journal of Mathematics*, 5, 643–647.

Bainov D D, Mishev D P, 1991, *Oscillation Theory for Neutral Differential Equation with Delay*, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York.

Bainov D D, Simeonov P S, 1995, Impulsive Differential Equations:Asymptotic Properties of the Solutions, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, *World Scientific*, 28, Singapore.

Bainov D D, Simeonov P S, 1993, *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*, Longman Scientific & Technical, Essex.

Bainov D D, Simeonov P S, 1998, *Oscillation Theory of Impulsive Differential Equations*, International Publications, Orlando, Fla, USA.

Berezansky L, Braverman E, 1995, *Oscillation of a Linear Delay Impulsive Differential Equation*, Cornell University.

Berezansky L, Braverman E, 1995, Preservation of the Exponen tial Stability under Perturbations of Linear Delay Impulsive Differential Equations, *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen* 14, 157-174.

Berezansky L, 1990, The positiveness of the Cauchy function and the sta bility of linear differential equations with after-effect, *Differential Equations* 22, 1092-1100.

Bodnar M, Piotrowska M J, 2010, O równaniach różniczkowych z opóźnieniem — teoria i zastosowania, *Matematyka Stosowana* , Tom 11(52), 17–54.

Burton T A, 1985, *Stability & Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, Academic Press.

Chen M P, Yu J S, Shen J H, 1994, The Persistence of Nonoscillatory Solutions of Delay Differential Equations Under Impulsive Perturbations, *Comput. Math. Appl.* 27, 1-6.

Corduneanu C, 1990, *Integral Equations and Applications*, Cambridge University Press, New York.

Corduneanu C, 1989, Integral representation of solutions of linear Volterra functional differential equations, *Libertas Mathematics* 9, 133-146.

Diekmann O, van Gils S A, Verduyn Lunel S, Walther H O, 1995, *Delay Equations: Functional, Complex and Nonlinear Analysis*, Springer.

Domoshnitsky A, Drakhlin M, 1997, Nonoscillation of First Order Impulsive Differential Equations With Delay, *J. Math. Anal. Appl.* 106, 254-269.

Gähler S, 1963, 2-metrische Räume und ihre topologische Struktur, *Mathematische Nachrichten*, 26(1-4), 115–148.

Glagolev M V, Sabrekov A F, Goncharov R N, 2018, Delay differential equations as a tool for mathematical modelling of population dynamic, *EDGCC Journal*, 9(2), 40-63.

Gopalsamy K, 1992, *Stability and Oscillation in Delay Differential Equation of Popular Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

Gopalsamy K, Zhang B G, 1989, On Delay Differential Equation With Impulses, *J. Math. Anal. Appl.* 139, 110-122.

Györi I, Ladas G, 1991. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations*, Clarendon Press.

Hale J K, 1993,*Theory of Functional Differential Equations* , Springer, 1977/1993.

Hille E, 1948, *Non-oscillation theorems, Transactions of the American Mathematical Society*, 64, 234-252.

Hutchinson G E, 1948, "Circular causal systems in ecology", *Annals of the New York Academy of Sciences*, 50(4), 221–245.

Kolmanovskii V B, Nosov V R, 1986, *Stability of Functional Differential Equations*, Academic Press, INC, New York.

Krasnoselskii M A, Zabreiko P P, Pustylnik E I,Sobolevskii P E, 1976, *Integrable Operators in the Spaces of Summable Functions*, Noordhoff, Leyden.

Kuang Y, 1993, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press.

Ladde G S, Lakshmikantham V, Zhang B G, 1987, *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, Marcel Dekker*, Inc, New York and Basel.

Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S, 1989, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific Publishing, Singapore.

Leighton W, 1952, On self-adjoint differential equations of second order, *Journal of the London Mathematical Society*, 27, 37–47.

Luo J, Debnath L, 1999, Oscillations of second-order nonlinear ordinary differential equations with impulses, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 240(1), 105–114.

Myshkis A, 1951, *Linear Differential Equations with Retarded Argument.*

Nussbaum R D, 1973, "Periodic solutions of analytic functional differential equa tions are analytic", *Michigan Mathematical Journal*, 20, 249–255.

Özbekler A, Zafer A, 2007, Forced oscillation of super-half-linear impulsive differential equations, *Computers Mathematics with Applications*, 54(6), 785–792.

Pierce J G, Schumitzky A, 1976, Optimal impulsive control of compartment models, I. Qualitative aspects, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 18(4), 537–554.

Shen J H, 1996, The Nonoscillatory Solutions of Delay Differential Equations with Impulses, *Appl. Math. Comput.* 77, 153-165.

Verhulst P F, 1838, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance Mathématique et Physique*, 10, 113–121.

Wakili A, 2014, The Concepts of Delay Differential Equations and IT'S Application, *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 4(10), 1381–1389.

Wu S, Duan Y, 2005, Oscillation, stability, and boundedness of second-order differential systems with random impulses, *Computers Mathematics with Applications*, 49(9-10), 1375–1386.

Wright E M, 1955, A non-linear differential equation, *J. Reine Angew. Math.*

Yan J, Zhao A, 1998, Oscillation and Stability of Linear Impulsive Delay Differential Equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 227, 187-194.

Yu J S, 1997, Stability caused by impulses for delay differential equations, *Acta Math. Sinica (N.S.)* 13 (2), 193-198.

Yu J S, Zhang B G, 1996, Stability theorem for delay differential equations with impulses, *J. Math. Anal. Appl.* 199, 162-175.

Zhao A, Yan J, 1997, Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, *J. Math. Anal. Appl.* 210, 667-678.

Zhao A, Yan J, 1996, Asymptotic behavior of solutions of impulsive delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 201, 943-954.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Veli Kürşat Uludağ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Denizli / 01.01.1997
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 0507 784 66 73 / kursatuludag@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Tavas Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans	: Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı