H-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ RIEMANN–LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN TRAPEZOİD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat Yücel AY

Danışman

Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2025

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

H-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ RIEMANN–LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN TRAPEZOİD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Murat Yücel AY

Danışman
Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2025

TEZ ONAY SAYFASI

Murat Yücel Ay tarafından hazırlanan "$h-$Konveks Fonksiyonlar İçin Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri İçeren Trapezoid Tipli Eşitsizlikler" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 26/12/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hasan KARA
Düzce Üniv., Fen Edebiyat Fak. .....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tuğba YALÇIN UZUN
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak. .....

Üye : Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak. .....

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/12/2025

.....

Murat Yücel Ay

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

H-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ RIEMANN–LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN TRAPEZOİD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Murat Yücel AY

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, konveks fonksiyonlar ve h-konvekslik kavramlarının temel tanımları ile bu kavramların matematiksel geçmişine ışık tutmaktadır. Ayrıca, koordinatlarda h-konveks fonksiyonlar çerçevesinde yapılan çalışmalara genel bir bakış sunulmuş ve bu tür fonksiyonların özellikleri tartışılmıştır. Bu bölüm, h-konvekslik kavramının, klasik konvekslikten nasıl genelleştirildiğini ve matematiksel eşitsizlikler teorisindeki önemini ortaya koymaktadır.

İkinci bölümde, koordinatlarda h-konveks fonksiyonların temel tanımları verilmiş ve bu fonksiyonların Riemann-Liouville kesirli integralleriyle ilişkilendirilmesi ele alınmıştır. h-konveks fonksiyonların koordinat düzleminde sağladığı temel özellikler ve bu özelliklerin matematiksel eşitsizliklere olan etkileri detaylı şekilde incelenmiştir. Ayrıca, bu bölümde h-konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilen temel teoremler ve

lemmalar sunulmuş, bu yapıların eşitsizlik teorisi üzerindeki katkıları açıklanmıştır.

Üçüncü bölüm, genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla koordinatlarda h-konveks fonksiyonlara dayalı yeni integral eşitsizliklerini kapsamaktadır. Bu bölümde, özellikle ağırlıklı integral eşitsizlikleri ve trapezoid tipi eşitsizlikler üzerinde durulmuş ve bu eşitsizliklerin h-konveks fonksiyonlar çerçevesinde nasıl genelleştirildiği açıklanmıştır. Literatürde yer alan mevcut sonuçlar ile önerilen yeni sonuçlar karşılaştırılarak, önerilen yöntemlerin avantajları ve yenilikçi yanları tartışılmıştır.

Dördüncü bölümde, koordinatlarda h-konveks fonksiyonların genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen yeni eşitsizlikler üzerindeki etkileri ele alınmıştır. Bu bölümde, h-konveks fonksiyonların özellikleri kullanılarak, literatürde yer alan klasik sonuçların genişletilmesi ve daha genel sonuçlara ulaşılması sağlanmıştır. Ayrıca, bu eşitsizliklerin matematiksel analiz ve uygulamalı matematikteki potansiyel kullanım alanları vurgulanmıştır.

Son bölüm olan beşinci bölümde, çalışma boyunca elde edilen sonuçların genel bir değerlendirmesi yapılmış ve literatürdeki mevcut çalışmalarla karşılaştırmalar sunulmuştur. Ayrıca, bu bölümde tez boyunca kullanılan kaynaklar listelenmiş ve gelecekte bu alanda yapılabilecek çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

2025, vii + 55 Sayfa

Anahtar Kelimeler : Konveks fonksiyonlar, h-konveks fonksiyonlar, Koordinatlarda konveks fonksiyonlar, Riemann-Liouville kesirli integralleri, Trapezoid tipli eşitsizlikler.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

TRAPEZOID TYPE INEQUALITIES CONTAINING
GENERALIZED RIEMANN–LIOUVILLE FRACTIONAL INTEGRALS
FOR h-CONVEX FUNCTIONS IN COORDINATES

Murat Yücel AY

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

This thesis consists of five chapters and focuses on trapezoid type integral inequalities obtained via generalized Riemann–Liouville fractional integrals for h-convex functions defined on the coordinates.

In the first chapter, fundamental concepts related to convex functions, h-convexity, and inequality theory are introduced, together with a brief historical background of these notions. Special attention is given to the motivation behind extending classical convexity concepts to more generalized forms.

The second chapter is devoted to the definitions and basic properties of h-convex functions in coordinates and their relationship with Riemann–Liouville fractional integrals. The structural characteristics of these functions on coordinate domains and their influence on integral inequalities are examined in detail.

In the third chapter, new trapezoid type integral inequalities are established by using generalized Riemann–Liouville fractional integrals. Weighted integral inequalities and coordinate-based generalizations are derived, and several known results in the literature are obtained as special cases of the proposed results.

The fourth chapter investigates further generalizations of the obtained inequalities and discusses their connections with existing classical inequalities. The effectiveness of h-convexity in producing more general and sharper results is emphasized.

In the final chapter, the main findings of the thesis are summarized, comparisons with existing studies in the literature are presented, and possible directions for future research are suggested.

2025, vii + 55 pages

Keywords : Convex functions, h-convex functions, Convex functions in coordinates, Riemann–Liouville fractional integrals, Trapezoid type inequalities.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam için konu belirlenmesi, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve tezimin yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Eyüp Kırış'a; araştırma ve yazım süresince yardımlarını ve desteğini hiç esirgemeyen Gözde Bayrak'a ve Tuğba Akça'ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan ve her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Lisansüstü eğitimimin en başından bu yana, çalışmalarımın her anında büyük bir sabır gösteren, sevgisi ve bitmek bilmeyen desteğiyle motivasyon kaynağım olan değerli eşim **Özlem Ay**'a, hayatın tüm yükünü benimle paylaştığı ve en yorgun zamanlarımda bana huzurlu bir çalışma ortamı sunduğu için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan aileme, anneme, babama, biricik kızlarım Ayşem Mira Ay ve Neziha Cemre Ay'a ve oğlum Abdurrahman Kayra Ay'a teşekkür ederim.

Murat Yücel Ay

Afyonkarahisar 2025

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET **i**

ABSTRACT **iii**

TEŞEKKÜR **v**

İÇİNDEKİLER DİZİNİ **1**

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ **1**

1 GİRİŞ **3**

2 TEMEL KAVRAMLAR **7**

2.1 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Tanım ve Teoremler 7

3 KOORDİNATLARDA KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN TRAPEZOİD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER **16**

4 BULGULAR **34**

5 SONUÇ ve ÖNERİLER **48**

5.1 Temel Bulgular ve Bilimsel Katkılar 48

5.2 Gelecek Çalışmalar İçin Öneriler ve Araştırma Potansiyeli 49

6 KAYNAKLAR **51**

ÖZGEÇMİŞ **54**

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$	İki boyutlu reel uzay
$[a, b]$	Kapalı reel aralık
$[a, b] \times [c, d]$	Dikdörtgensel bölge
f	Gerçel değerli fonksiyon
h	Konvekslik tanımında kullanılan yardımcı fonksiyon
$f(x, y)$	İki değişkenli fonksiyon
x, y	Reel değişkenler
a, b, c, d	Reel sabitler
α	Kesirli integral derecesi, $\alpha > 0$
$\Gamma(\alpha)$	Gamma fonksiyonu
I^{α}_{a+}	Sol taraftan Riemann–Liouville kesirli integrali
I^{α}_{b-}	Sağ taraftan Riemann–Liouville kesirli integrali
$I^{\alpha}_{a+,c+}$	İki değişkenli Riemann–Liouville kesirli integrali
$\int_a^b$	Belirli integral
$\int_c^d$	Belirli integral
$\leq$	Küçük veya eşit ilişkisi
$\geq$	Büyük veya eşit ilişkisi
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir tane vardır
$\lvert \cdot \rvert$	Mutlak değer

Kısaltmalar

R–L	Riemann–Liouville
h-konveks	h-konveks fonksiyon
kdd	Koordinatlarda dışbükeylik
trp. tip	Trapezoid tipli
s.y.	Simetrik yapı
İ.E.	İntegral eşitsizliği

1 GİRİŞ

Matematiksel analiz, doğanın ve evrenin karmaşık yapısını modellemek, soyut düşünceleri somut problemlere uyarlamak ve belirsizlikleri minimize etmek adına kullanılan en güçlü dillerden biridir. Matematiğin bu evrensel gücü, yüzyıllar boyunca fizik, mühendislik, ekonomi ve biyoloji gibi pek çok farklı disiplinin temel taşı olmuş; teorik altyapının pratik uygulamalara dönüşmesine öncülük etmiştir. Bu bağlamda, fonksiyonlar teorisi ve eşitsizlikler teorisi, modern matematiğin en dinamik ve üretken çalışma alanlarından biri olarak kabul edilmektedir. Eşitsizlikler, nicelikler arasındaki sınırları belirleyerek, kesin çözümün bulunmasının zor veya imkansız olduğu durumlarda, hata analizi ve yakınsama süreçleri için hayati araçlar sunmaktadır.

Bu tez çalışmasında, klasik analiz yöntemlerinin ötesine geçilerek, koordinatlarda h-konveks fonksiyonlar sınıfı ve genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri aracılığıyla literatüre yeni trapezoid tipli eşitsizlikler kazandırılması hedeflenmiştir. 19. yüzyıldan günümüze uzanan konvekslik teorisi ile son yıllarda popülaritesi hızla artan kesirli (fractional) analiz yöntemlerinin harmanlanması, bu çalışmanın özgünlüğünü ve güncelliğini ortaya koymaktadır.

Konveks Fonksiyonlar ve Eşitsizlikler Teorisindeki Yeri

Konveks fonksiyonlar, optimizasyon teorisinden oyun teorisine, istatistiksel mekanikten bilgi teorisine kadar uzanan geniş bir yelpazede merkezi bir rol oynamaktadır. Bir fonksiyonun konveksliği, sadece geometrik bir "dışbükeylik" ifade etmekle kalmaz; aynı zamanda sistemin kararlılığı, minimum enerji durumları ve denge noktaları hakkında derinlemesine bilgi sağlar. Özellikle varyasyonel analiz ve kontrol teorisinde, konveks yapıya sahip fonksiyonlar, global minimumun varlığını ve tekliğini garanti etmesi açısından vazgeçilmezdir.

Geometrik olarak konvekslik, fonksiyon grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının (kirişin), fonksiyon eğrisinin üzerinde veya üstünde kalması durumunu ifade eder.

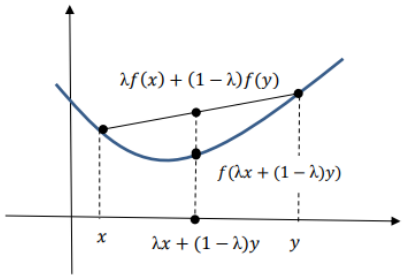

Figure 1: Konveks fonksiyon grafiği

Bu temel özellik, Hermite-Hadamard eşitsizliği gibi integral eşitsizliklerinin doğuşuna zemin hazırlamıştır. Hermite-Hadamard eşitsizliği, bir konveks fonksiyonun integral ortalamasının, uç noktalardaki fonksiyon değerlerinin aritmetik ortalaması ile orta noktadaki fonksiyon değeri arasında sıkıştığını gösteren zarif ve güçlü bir sonuçtur (Roberts ve Varberg 1973; Pečarić 1992). Son yıllarda yapılan akademik çalışmalar, bu klasik eşitsizliğin farklı konvekslik sınıfları ve farklı integral operatörleri ile genelleştirilmesi üzerine yoğunlaşmıştır (Dragomir ve Pearce 2000).

Koordinatlarda h-Konveks Fonksiyonlar

Matematiksel modellemelerin daha karmaşık hale gelmesi, klasik konvekslik tanımının bazı durumlarda yetersiz kalmasına veya problemin doğasını tam olarak yansıtamamasına neden olmuştur. Bu gereksinim, "genelleştirilmiş konvekslik" kavramlarının doğmasına yol açmıştır. h-konvekslik, klasik konvekslik, s-konvekslik, P-fonksiyonları ve Godunova-Levin sınıfı fonksiyonlar gibi birçok özel sınıfı, bünyesinde barındıran bir h fonksiyonu aracılığıyla birleştiren üst bir çatıdır. Bu esnek yapı, araştırmacılara daha geniş bir fonksiyon uzayında çalışma imkanı tanır.

Bu tezde özellikle üzerinde durulan "koordinatlarda konvekslik" (co-ordinated convexity) kavramı ise, çok değişkenli fonksiyonların analizinde kritik bir öneme sahiptir. İki değişkenli bir fonksiyonun koordinatlarda konveks olması, fonksiyonun her bir değişkene göre kısmi konvekslik özelliklerini taşıdığını ifade eder. Koordinatlarda h-konveks fonksiyonlar, klasik tek değişkenli analizden düzlemdeki dikdörtgensel bölgelere geçişte, integral eşitsizliklerinin yapısını koruyan ancak analiz sürecini daha sofistike hale getiren bir yaklaşımdır. Bu fonksiyon sınıfı üzerine yapılan incelemeler, çok katlı integraller ve yüzey optimizasyonu problemlerinde daha hassas üst ve alt sınırlar elde edilmesine olanak sağlamaktadır (Alomari ve Darus 2008).

Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri

Klasik Newton-Leibniz analizi, tam tamsayı mertebeli türev ve integraller üzerine kuruludur ve yerel (local) değişimleri mükemmel bir şekilde açıklar. Ancak, doğadaki birçok fenomen; hafıza etkisi (memory effect), kalıtsallık (heredity) ve yerel olmayan (non-local) etkileşimler barındırır. Örneğin, gözenekli ortamlardaki sıvı akışı, viskoelastik malzemelerin deformasyonu veya biyolojik popülasyonların yayılımı gibi süreçlerde, sistemin o anki durumu sadece o anki etkilere değil, geçmişteki tüm durumlara da bağlıdır. İşte bu noktada Kesirli Analiz (Fractional Calculus) devreye girer.

Kesirli analiz, türev ve integral mertebelerinin tamsayı olma zorunluluğunu ortadan kaldıran, 300 yılı aşkın bir geçmişe sahip olmasına rağmen son yıllarda "matematiğin geleceği" olarak nitelendirilen bir alandır. Bu alandaki en temel ve en yaygın kullanılan operatörlerden biri Riemann-Liouville kesirli integralidir. Riemann-Liouville yaklaşımı, Cauchy'nin tekrarlı integral formülünün genelleştirilmesiyle elde edilmiş olup, fonksiyonların ağırlıklı bir çekirdek (kernel) ile konvolüsyonunu içerir.

Bu tez çalışmasının merkezinde yer alan Genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri, klasik integral operatörlerini kapsayan ve parametrelerin değişimiyle

farklı integral türlerine indirgenebilen oldukça genel bir yapıdır. Bu integrallerin kullanılması, elde edilen eşitsizliklerin sadece belirli bir durum için değil, çok daha geniş bir problem sınıfı için geçerli olmasını sağlar. Koordinatlarda h-konveks fonksiyonların geometrik özellikleri ile Riemann-Liouville kesirli integrallerinin analitik gücünün birleştirilmesi, literatürdeki mevcut boşlukları dolduracak yeni ve kapsamlı sonuçların elde edilmesine imkan tanıyacaktır. Bu çalışma, söz konusu teorik altyapıyı kullanarak daha keskin hata sınırlarına sahip trapezoid tipli eşitsizlikler sunmayı amaçlamaktadır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm tezde yer alan bazı temel tanım, teorem ve teoremlerin ispatından oluşmaktadır.

2.1 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1. $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$(1-t)x + ty \in K$$

oluyorsa, $K \subseteq \mathbb{R}$ kümesine klasik anlamda *Konveks Küme* denir (Dragomir ve Pearce 2000).

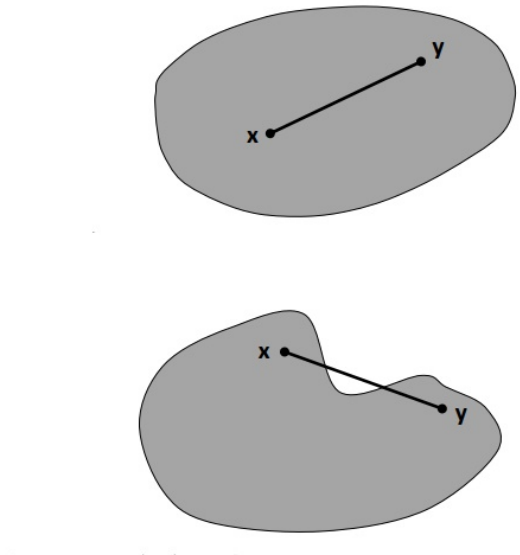

Figure 2: Konveks küme örneği

Tanım 2.2. $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

oluyorsa, $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *Konveks Fonksiyon* denir (Dragomir ve Pearce 2000).

Tanım 2.3. I kümesinin konveks bir küme olduğunu varsayalım. Fonksiyon $\psi : I \to \mathbb{R}$ eğer aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa I üzerinde konveks olarak tanımlanır:(Dragomir ve Pearce 2000)

$$\psi(\tau\chi + (1-\tau)\ \varphi) \leq \tau\psi(\chi) + (1-\tau)\psi(\varphi) \tag{2.1}$$

tüm $(\chi, \varphi) \in I$ ve $\tau \in [0,1]$ için. Fonksiyon ψ, I üzerinde konkav ise eşitsizlik (2.1) tersine döner.

Düz bir yüzeyde yer alan bir dikdörtgeni incelemeye başlayalım: $\Delta := [\sigma, \phi] \times [\varsigma, \rho]$ $\mathbb{R}^2$ içinde. Bir harita $\psi : \triangle \to \mathbb{R}$ için koordinatlı konveksliğin tanımını okuyucuya kolaylık sağlamak amacıyla aşağıdaki gibi veriyoruz:

Tanım 2.4. Fonksiyon $\psi : \Delta \to \mathbb{R}$ "Koordinatlı konveks" terimi ile tanımlanır.(Dragomir 2001) Δ, tüm $(\chi, \varphi), (\upsilon, \omega) \in \Delta$ ve $\tau, \xi \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır:

$$\begin{aligned} & \psi(\tau\chi + (1-\tau)\ \varphi, \xi\upsilon + (1-\xi)\ \omega) \\ \leq\ & \tau\xi\ \psi(\chi, \upsilon) + \tau(1-\xi)\psi(\chi, \omega) + \xi(1-\tau)\psi(\varphi, \upsilon) + (1-\tau)(1-\xi)\psi(\varphi, \omega). \end{aligned}$$

Tüm konveks fonksiyonların verilen koordinatlarla konveks olduğu açıktır. Ancak, koordinatlarda konveks olan her fonksiyonun mutlaka konveks olacağı durumu geçerli değildir (Dragomir 2001).

Tanım 2.5. $h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\psi : I \to \mathbb{R}$ bir h-konveks fonksiyon ise veya $\psi\ SX\,(h, I)$ Sınıfına ait ise, ψ negatif olmayan ve tüm $\chi, \varphi \in I, \tau \in (0,1)$ için şu eşitsizlik sağlanmalıdır:

$$\psi(\tau\chi + (1-\tau)\ \varphi) \leq h(\tau)\psi(\chi) + h(1-\tau)\psi(\varphi). \tag{2.2}$$

Eğer bu eşitsizlik tersine dönerse, ψ h-Konkav olarak tanımlanır (Varošanec 2007)

Tanım 2.6. Fonksiyon $\psi : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ üzerindeki koordinatlarda h-konveks olarak tanımlanırsa, aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır:

$$\begin{aligned} & \psi(\tau\chi + (1-\tau)\varphi, \xi\upsilon + (1-\xi)\omega) \\ \leq\ & h(\tau)h(\xi)\psi(\chi,\upsilon) + h(\tau)h(1-\xi)\psi(\chi,\omega) \\ & + h(\xi)h(1-\tau)\psi(\varphi,\upsilon) + h(1-\tau)h(1-\xi)\psi(\varphi,\omega). \end{aligned} \tag{2.3}$$

tüm $\forall(\tau,\xi) \in [0,1]$ ve $(\chi,\upsilon),(\chi,\omega),(\varphi,\upsilon),(\varphi,\omega) \in \Delta$ için geçerli olmalıdır (Latif and Alomari 2009).

Tanım 2.7. Gamma fonksiyonu ve Beta fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$\Gamma(\chi) := \int_0^\infty \tau^{x-1} e^{-\tau} d\tau$$

ve

$$B(\chi,\varphi) := \int_0^1 \tau^{x-1}(1-\tau)^{\varphi-1} d\tau,$$

sırasıyla. Burada, $0 < \chi, \varphi < \infty$.

Matematikte konveks haritaların analizi kapsamında, integral eşitsizlikler en sık kullanılan alanlardır. C. Hermite ve J. Hadamard tarafından formüle edilen bu eşitsizlikler, literatürde geniş bir şekilde alıntılanmaktadır (Dragomir ve Pearce 2000, Pecaric 1992, Iqbal vd. 2016). Yukarıda bahsedilen eşitsizlikler, eğer $\psi : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, reel sayıların I aralığında konveks ise ve $\sigma, \phi \in I$ ile $\sigma \leqslant \phi$ ise,

$$\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2}\right) \leq \frac{1}{\phi-\sigma}\int_\sigma^\phi \psi(\chi)d\chi \leq \frac{\psi(\sigma)+\psi(\phi)}{2}. \tag{2.4}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliği, bir fonksiyonun konveksliğinin, belirli bir aralık üzerindeki ortalama değeri ve integral değeri üzerindeki etkisini aydınlatan ünlü bir sonuçtur. Eşitsizlik, eğer bir fonksiyon ψ reel bir aralık I üzerinde konveks ise ve a ile b, I içinde iki nokta ise, ψ'nin σ ve ϕ'nin orta noktasındaki değeri, $[\sigma,\phi]$ aralığındaki ortalama değerden küçük veya ona eşit olduğunu belirtir. Hermite-Hadamard eşitsizliği, bir konveks fonksiyonun ortalama değerinin, aralıkta gözlemlenen uç noktalarındaki değerlerle karşılaştırılmasına olanak tanır.

Bu eşitsizlik, aralığın bir dikdörtgene dönüştüğü gibi daha yüksek boyutlara da genişletilebilir. Eşitsizlik, bir kısmı dikdörtgenin orta noktasını kullanan ve diğeri dikdörtgenin köşelerini kullanan iki bölümden oluşur. İkinci kısım, trapez şekline benzemesi nedeniyle trapezoid türü eşitsizlik olarak adlandırılır. Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir parçasını oluşturan trapezoid türü eşitsizlik, kapsamlı bir araştırma konusu olmuştur. Konveks fonksiyonlar için trapezoid türü eşitsizlikler, ilk olarak Dragomir ve Agarwal tarafından 1998'de formüle edilmiştir. Sarıkaya vd. 2013, kesirli integraller için eşitsizliklerin genelleştirilmesini sağlamış ve belirli orta nokta türü eşitsizliklerin geçerliliğini göstermiştir. Eşitsizlik, özellikle sıradan integrallerin genelleştirilmesi olan kesirli integraller bağlamında kapsamlı bir çalışma ve iyileştirme konusu olmuştur (Dragomir 2001, Sarikaya vd. 2012, Dragomir ve Agarwal 1998, Sarikaya vd. 2013, Sarikaya vd. 2019).

Teorem 2.1. $\psi : \Delta \to \mathbb{R}$ koordinatlı konveks ise, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2}, \frac{\varsigma+\rho}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\phi-\sigma}\int_{\sigma}^{\phi}\psi\left(\chi, \frac{\varsigma+\rho}{2}\right)d\chi + \frac{1}{\rho-\varsigma}\int_{\varsigma}^{\rho}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2}, \varphi\right)d\varphi\right] \\
&\leq \frac{1}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\int_{\sigma}^{\phi}\int_{\varsigma}^{\rho}\psi(\chi,\varphi)d\varphi d\chi \qquad (2.5) \\
&\leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\phi-\sigma}\int_{\sigma}^{\phi}\psi(\chi,\varsigma)d\chi + \frac{1}{\phi-\sigma}\int_{\sigma}^{\phi}\psi(\chi,\rho)d\chi\right. \\
&+ \left.\frac{1}{\rho-\varsigma}\int_{\varsigma}^{\rho}\psi(\sigma,\varphi)d\varphi + \frac{1}{\rho-\varsigma}\int_{\varsigma}^{\rho}\psi(\phi,\varphi)d\varphi\right] \\
&\leq \frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikler keskindir. Eşitsizlikler (2.5), ψ haritası koordinatlı konkav bir harita ise ters yönde geçerlidir.

Kesirli kalkülüs, türev veya integralin herhangi bir reel veya karmaşık sayı olarak kullanılmasına olanak tanıyan bir kalkülüs türünü tanımlar. Kesirli kalkülüsü tanımlamak için bir dizi farklı yaklaşım bulunmaktadır; bunlar arasında Caputo,

Riemann-Liouville ve Grünwall-Letnikov tanımları yer almaktadır. Bu tanımlar belirli avantajlar sunarken, bazı sorunlar da ortaya çıkarmaktadır. Örneğin, Riemann-Liouville tanımı, sabit bir fonksiyon için her zaman sıfır türev vermemektedir. Caputo tanımında, fonksiyon f türevlenebilir olmalıdır (Samko vd. 1993, Podlubny 1999, Miller ve Ross 1993, Akkurt vd. 2017). Ayrıca, bazı tanımlar, iki fonksiyon arasında bölme, çarpma ve bileşke alma işlemleri gibi geleneksel kalkülüs ilkelerinden sapmaktadır. Bu ve diğer sorunları ele almak amacıyla, Khalil ve arkadaşları, uyumlu kesirli türev olarak adlandırılan yeni bir kesirli kalkülüs tanımı önermiştir. Ayrıca, $(0 < \alpha \leq 1)$ arasındaki kuvvetler için uyumlu kesirli integral de tanıtılmıştır. Araştırmacılar, iki fonksiyonu çarpma ve bir fonksiyonun ortalama değerini hesaplama yöntemleri de dahil olmak üzere birkaç önemli bulgu göstermiştir. Ayrıca, kesirli kalkülüs ve üstel fonksiyonlar içeren denklemleri çözmüşlerdir (Khalil vd. 2014, Abdeljawad 2015, Hyder ve Soliman 2020, Zhao ve Luo 2017, Khan ve Khan M 2019, Sarikaya vd. 2019, Abdelhakim 2019).

Bu çalışmada kullanılan uyumlu kesirli kalkülüs ilkelerinin tanımları ve matematiksel temelleri aşağıda sunulmuştur:

Tanım 2.8. $\psi \in L_1[\sigma, \phi]$ için, $\alpha > 0$ sıralı Riemann-Liouville integralleri şu şekilde verilir:kilbas

$$J^{\alpha}_{\sigma+}\psi(\chi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sigma}^{\chi} (\chi - \tau)^{\alpha-1} \psi(\tau) d\tau, \quad \chi > \sigma \tag{2.6}$$

ve

$$J^{\alpha}_{\phi-}\psi(\chi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\chi}^{\phi} (\tau - \chi)^{\alpha-1} \psi(\tau) d\tau, \quad \chi < \phi. \tag{2.7}$$

Gerekli koşul $\alpha = 1$ olduğunda, Riemann-Liouville integralleri klasik karşılıklarıyla eşit olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.9. $\psi \in L_1([\sigma, \phi] \times [\varsigma, \rho])$ olsun. Sıralı Riemann-Liouville integralleri $J^{\theta,\vartheta}_{\sigma+,\varsigma^+}, J^{\theta,\vartheta}_{\sigma+,\rho^-}, J^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}$ ve $J^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}$ sırasıyla $\theta, \vartheta > 0$ ile $\sigma, \varsigma \geq 0$ olarak tanımlanır:(Sarikaya 2014)

$$J^{\theta,\vartheta}_{\sigma+,\varsigma^+}\psi(\chi,\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)} \int_{\sigma}^{\chi} \int_{\varsigma}^{\varphi} (\chi - \tau)^{\theta-1} (\varphi - \xi)^{\vartheta-1} \psi(\tau,\xi) d\xi d\tau, \quad \chi > \sigma, \varphi > \varsigma, \tag{2.8}$$

$$J^{\theta,\vartheta}_{\sigma+,\rho^-}\psi(\chi,\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_\sigma^\chi\int_\varphi^\rho(\chi-\tau)^{\theta-1}(\xi-\varphi)^{\vartheta-1}\psi(\tau,\xi)d\xi d\tau,\quad \chi>\sigma,\varphi<\rho, \tag{2.9}$$

$$J^{\theta,\vartheta}_{\phi-,\varsigma^+}\psi(\chi,\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_\chi^\phi\int_\varsigma^\varphi(\tau-\chi)^{\theta-1}(\varphi-\xi)^{\vartheta-1}\psi(\tau,\xi)d\xi d\tau,\quad \chi<\phi,\varphi>\varsigma, \tag{2.10}$$

$$J^{\theta,\vartheta}_{\phi-,\rho^-}\psi(\chi,\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_\chi^\phi\int_\varphi^\rho(\tau-\chi)^{\theta-1}(\xi-\varphi)^{\vartheta-1}\psi(\tau,\xi)d\xi d\tau,\quad \chi<\phi,\varphi<\rho, \tag{2.11}$$

Burada Γ Gama fonksiyonudur.

Tanım 2.10. $\psi\in L_1[\sigma,\phi]$ için, $\vartheta>0$ ve $\alpha\in(0,1]$ olan kesirli uyumlu integral operatörü ${}^\alpha I^\vartheta_{\sigma+}\psi$ ve ${}^\alpha I^\vartheta_{\phi-}\psi$ şu şekilde tanımlanır (Jarad vd. 2017):

$${}^\alpha\mathcal{I}^\vartheta_{\sigma+}\psi(\chi)=\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_\sigma^\chi\left(\frac{(\chi-\sigma)^\alpha-(\tau-\sigma)^\alpha}{\alpha}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau)}{(\tau-\sigma)^{1-\alpha}}d\tau,\qquad \chi>\sigma \tag{2.12}$$

ve

$${}^\alpha\mathcal{I}^\vartheta_{\phi-}\psi(\chi)=\frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_\chi^\phi\left(\frac{(\phi-\chi)^\alpha-(\phi-\tau)^\alpha}{\alpha}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau)}{(\phi-\tau)^{1-\alpha}}d\tau,\qquad \chi<\phi, \tag{2.13}$$

Tanım 2.11. $\psi\in L_1([\sigma,\phi]\times[\varsigma,\rho])$ olsun ve $\gamma_1\neq0,\ \gamma_2\neq0,\ \theta,\vartheta\in\mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(\theta)>0$ ve $\mathrm{Re}(\vartheta)>0$. $\psi(\chi,\varphi)$'nin θ,ϑ sıralı genelleştirilmiş uyumlu integrali şu şekilde tanımlanır:(Bozkurt vd. 2021)

$$\begin{aligned}\left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\right)(\chi,\varphi) &= \left[\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_\sigma^\chi\int_\varsigma^\varphi\left(\frac{(\chi-\sigma)^{\gamma_1}-(\tau-\sigma)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}\right.\\ &\quad\times\left(\frac{(\varphi-\varsigma)^{\gamma_2}-(\xi-\varsigma)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}\\ &\quad\left.\times\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\tau-\sigma)^{1-\gamma_1}(\xi-\varsigma)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau\right],\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\right)(\chi,\varphi) = \left[\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_\chi^\phi\int_\varsigma^\varphi\left(\frac{(\phi-\chi)^{\gamma_1}-(\phi-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}\right. \tag{2.15}$$
$$\left.\times\left(\frac{(\varphi-\varsigma)^{\gamma_2}-(\xi-\varsigma)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\phi-\tau)^{1-\gamma_1}(\xi-\varsigma)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau\right],$$

$$\left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\right)(\chi,\varphi) = \left[\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_\sigma^\chi\int_\varphi^\rho\left(\frac{(\chi-\sigma)^{\gamma_1}-(\tau-\sigma)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}\right. \tag{2.16}$$
$$\left.\times\left(\frac{(\rho-\varphi)^{\gamma_2}-(\rho-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\tau-\sigma)^{1-\gamma_1}(\rho-\xi)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau\right],$$

ve

$$\left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\right)(\chi,\varphi) = \left[\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_\chi^\phi\int_\varphi^\rho\left(\frac{(\phi-\chi)^{\gamma_1}-(\phi-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}\right. \tag{2.17}$$
$$\left.\times\left(\frac{(\rho-\varphi)^{\gamma_2}-(\rho-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\phi-\tau)^{1-\gamma_1}(\rho-\xi)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau\right],$$

Uyarı 2.1. Eğer (2.14), (2.15), (2.16) ve (2.17)'da $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ise, iki değişkenli fonksiyonların kesirli integralleri olan Riemann-Liouville integralleri elde edilir.(Bozkurt vd. 2021)

Uyarı 2.2. Eğer (2.14), (2.15), (2.16) ve (2.17)'da $\theta = 1$ ve $\vartheta = 1$ alınırsa,(Bozkurt vd. 2021)

$$\left(I^{1,1}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\right)(\chi,\varphi) = \int_\sigma^\chi\int_\varsigma^\varphi\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\tau-\sigma)^{1-\gamma_1}(\xi-\varsigma)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau \tag{2.18}$$

$$\left(I^{1,1}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\right)(\chi,\varphi) = \int_\chi^\phi\int_\varsigma^\varphi\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\phi-\tau)^{1-\gamma_1}(\xi-\varsigma)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau, \tag{2.19}$$

$$\left(I^{1,1}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\right)(\chi,\varphi) = \int_\sigma^\chi\int_\varphi^\rho\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\tau-\sigma)^{1-\gamma_1}(\rho-\xi)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau, \tag{2.20}$$

ve

$$\left(I^{1,1}_{\phi^-,\rho^-}\psi\right)(\chi,\varphi) = \int_\chi^\phi\int_\varphi^\rho\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\phi-\tau)^{1-\gamma_1}(\rho-\xi)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau. \tag{2.21}$$

Çiftli integraller için uyumlu kesirli integrallerdir.

Teorem 2.2. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|^q$ ile $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlarken $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ koşulları altında;

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği *Hölder Eşitsizliği* olarak adlandırılır (Mitrinovic vd. 1993).

Çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği ise,

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\,dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|^p\,dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x,y)|^q\,dxdy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.3. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|$ ile $|g|^q$, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olsun.$q \geq 1$ olmak şartıyla;

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\,dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. *Power-Mean Eşitsizliği* olarak bilinen bu eşitsizlik; Hölder Eşitsizliğinin doğal bir sonucudur.

Çift katlı integraller için Power-Mean eşitsizliği ise,

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\,dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|\,dxdy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|\,|g(x,y)|^q\,dxdy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.4. Herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x|+|y|\,, \\ ||x|-|y|| &\leq |x-y|\,, \\ ||x|-|y|| &\leq |x+y| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. *Üçgen Eşitsizliği* olarak adlandırılan bu eşitsizlikte tümevarım yöntemiyle,

$$|x_1+...+x_n| \leq |x_1|+...+|x_n|$$

eşitsizliği de sağlanır (Mitrinovic vd. 1993).

Teorem 2.5. f reel değerli ve $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $a<b$ iken;

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

sağlanan bu eşitsizlik *İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği* olarak adlandırılır.

3 KOORDİNATLARDA KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN TRAPEZOİD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Lemma 3.1. Varsayalım ki $\psi : \triangle \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ üzerinde kısmi türevlenebilir bir eşleme olmak üzere $\Delta := [\sigma, \phi] \times [\varsigma, \rho]$ in $\mathbb{R}^2$ kümesinde $0 \leq \sigma < \phi,\ 0 \leq \varsigma < \rho$. Eğer $\dfrac{\partial^2 \psi(\tau, \xi)}{\partial \tau \partial \xi} \in L_1(\Delta)$, ise bu durumda aşağıdaki eşitliği sağlar:(Kiris ve Bayrak 2023)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4} \\
&+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}} \\
&\times\Bigg[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\Bigg]-\mathcal{A} \qquad (3.1)\\
=\ &\frac{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16} \\
&\times\Bigg[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\times\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\xi d\tau \\
&-\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\times\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1-\xi}{2}\varsigma+\frac{1+\xi}{2}\rho\right)d\xi d\tau \\
&-\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\times\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma+\frac{1+\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\xi d\tau \\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\times\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma+\frac{1+\tau}{2}\phi,\frac{1-\xi}{2}\varsigma+\frac{1+\xi}{2}\rho\right)d\xi d\tau\Bigg]
\end{aligned}
$$

Burada

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{2^{\gamma_2\vartheta-2}\ \gamma_2^{\vartheta}\ \Gamma(\vartheta+1)}{(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}} \\ &\times\Bigg[{}^{\gamma_2}I^{\vartheta}_{\varsigma^+}\psi\left(\sigma,\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_2}\ I^{\vartheta}_{\rho^-}\psi\left(\sigma,\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \\ &+\ {}^{\gamma_2}I^{\vartheta}_{\varsigma^+}\psi\left(\phi,\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+\ {}^{\gamma_2}I^{\vartheta}_{\rho^-}\psi\left(\phi,\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\Bigg] \\ &+\frac{2^{\gamma_1\theta-2}\ \gamma_1^{\theta}\ \Gamma(\theta+1)}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}} \\ &\times\Bigg[{}^{\gamma_1}I^{\theta}_{\sigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\varsigma\right)+{}^{\gamma_1}\ I^{\theta}_{\sigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\rho\right) \\ &+{}^{\gamma_1}I^{\theta}_{\phi^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\varsigma\right)+{}^{\gamma_1}\ I^{\theta}_{\phi^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\rho\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{3.2}$$

İspat 3.1 Kısmi integrasyon yöntemiyle aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\ &\times\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\xi d\tau \\ &= \int_0^1\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\Bigg\{\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta} \\ &\times\frac{-2}{(\phi-\sigma)}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)\Bigg|_0^1 \\ &+\int_0^1\frac{2\theta}{(\phi-\sigma)}\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}(1-\tau)^{\gamma_1-1} \\ &\times\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\tau\Bigg\}d\xi \\ &= \int_0^1\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\Bigg\{\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{-2}{\phi-\sigma}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\left(\sigma,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right) \\ &+\frac{2\theta}{(\phi-\sigma)}\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}(1-\tau)^{\gamma_1-1} \\ &\times\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\tau\Bigg\}d\xi \\ &= \frac{-2}{(\phi-\sigma)\,\gamma_1^{\theta}}\int_0^1\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\left(\sigma,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\xi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2\theta}{(\phi-\sigma)}\Bigg[\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}(1-\tau)^{\gamma_1-1}\\
&\times\Bigg\{\int_0^1\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\xi\Bigg\}d\tau\Bigg]\\
=\;&\frac{-2}{(\phi-\sigma)}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)^{\theta}\Bigg[\left(\frac{1}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\frac{-2}{(\rho-\varsigma)}\psi(\sigma,\varsigma)\\
&+\frac{2\vartheta}{(\rho-\varsigma)}\int_0^1\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}(1-\xi)^{\gamma_2-1}\psi\left(\sigma,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\xi\Bigg]\\
&+\frac{2\theta}{(\phi-\sigma)}\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}(1-\tau)^{\gamma_1-1}\Bigg\{\left(\frac{1}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\frac{-2}{(\rho-\varsigma)}\psi\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\varsigma\right)\\
&+\frac{2\vartheta}{(\rho-\varsigma)}\int_0^1\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}(1-\xi)^{\gamma_2-1}\\
&\times\psi\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\xi\Bigg\}d\tau\\
=\;&\frac{4}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\frac{1}{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}\psi(\sigma,\varsigma)\\
&-\frac{4\vartheta}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)^{\theta}\int_0^1\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}(1-\xi)^{\gamma_2-1}\\
&\times\psi\left(\sigma,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\xi\\
&-\frac{4\theta}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\left(\frac{1}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}(1-\tau)^{\gamma_1-1}\\
&\times\psi\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\varsigma\right)d\tau\\
&+\frac{4\theta\vartheta}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\Bigg[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}(1-\tau)^{\gamma_1-1}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}\\
&\times(1-\xi)^{\gamma_2-1}\psi\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\xi d\tau\Bigg]. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

(3.3)'de, $u=\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi$ ve $v=\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho$ değişken dönüşümleri kullanılarak, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$
\begin{aligned}
=\;&\frac{4}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\frac{1}{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}\psi(\sigma,\varsigma)\\
&-\left(\frac{2}{\rho-\varsigma}\right)^{\gamma_2\vartheta}\Gamma(\vartheta)\ \left({}^{\gamma_2}I^{\vartheta}_{\varsigma^+}\psi\right)\left(\sigma,\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\frac{2}{\phi-\sigma}\right)^{\gamma_1\theta} \Gamma(\theta)^{\gamma_1} I^{\theta}_{\sigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\varsigma\right) \\
&+ \frac{4\theta\vartheta}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)} \frac{2^{\gamma_1\theta}2^{\gamma_2\vartheta}\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}} \\
&\times \left({}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\right)\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \frac{4}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)} \frac{1}{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}\psi(\sigma,\varsigma) - \left(\frac{2}{\rho-\varsigma}\right)^{\gamma_2\vartheta}\Gamma(\vartheta)\ \left({}^{\gamma_2} I^{\vartheta}_{\varsigma^+}\psi\right)\left(\sigma,\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \\
&- \left(\frac{2}{\phi-\sigma}\right)^{\gamma_1\theta}\Gamma(\theta)^{\gamma_1} I^{\theta}_{\sigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\varsigma\right) \\
&+ \frac{4\theta\vartheta}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)} \frac{2^{\gamma_1\theta}2^{\gamma_2\vartheta}\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}} \left({}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\right)\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Böylece, benzer şekilde, kısmi integrasyon yöntemiyle aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$
\begin{aligned}
I_2 \;=\; & \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\times \frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1-\xi}{2}\varsigma+\frac{1+\xi}{2}\rho\right)d\xi d\tau \\
=\; & \frac{-4}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\frac{1}{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}\psi(\sigma,\rho) \\
&+ \left(\frac{2}{\rho-\varsigma}\right)^{\gamma_2\vartheta}\Gamma(\vartheta)\ \left({}^{\gamma_2} I^{\vartheta}_{\rho^-}\psi\right)\left(\sigma,\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \\
&+ \left(\frac{2}{\phi-\sigma}\right)^{\gamma_1\theta}\Gamma(\theta)\left({}^{\gamma_1} I^{\theta}_{\sigma^+}\psi\right)\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\rho\right) \\
&- \frac{4\theta\vartheta}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\frac{2^{\gamma_1\theta}2^{\gamma_2\vartheta}\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}} \\
&\times \left({}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\right)\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right), \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 \;=\; & \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\times \frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma+\frac{1+\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)d\xi d\tau \\
=\; & \frac{-4}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\frac{1}{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}\psi(\phi,\varsigma)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{2}{\rho-\varsigma}\right)^{\gamma_2\vartheta}\Gamma(\vartheta)\ \left({}^{\gamma_2}I^{\vartheta}_{\varsigma^+}\psi\right)\left(\phi,\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\\
&+\left(\frac{2}{\phi-\sigma}\right)^{\gamma_1\theta}\Gamma(\theta)\left({}^{\gamma_1}I^{\theta}_{\phi^-}\psi\right)\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\varsigma\right)\\
&-\frac{4\theta\vartheta}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\frac{2^{\gamma_1\theta}2^{\gamma_2\vartheta}\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}\\
&\times\left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\right)\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right), \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\
&\quad\times\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma+\frac{1+\tau}{2}\phi,\frac{1-\xi}{2}\varsigma+\frac{1+\xi}{2}\rho\right)d\xi d\tau\\
&= \frac{4}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\frac{1}{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}\psi(\phi,\rho)\\
&\quad-\left(\frac{2}{\rho-\varsigma}\right)^{\gamma_2\vartheta}\Gamma(\vartheta)\ \left({}^{\gamma_2}I^{\vartheta}_{\rho^-}\psi\right)\left(\phi,\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\\
&\quad-\left(\frac{2}{\phi-\sigma}\right)^{\gamma_1\theta}\Gamma(\theta)\left({}^{\gamma_1}I^{\theta}_{\phi^-}\psi\right)\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\rho\right)\\
&\quad+\frac{4\theta\vartheta}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\frac{2^{\gamma_1\theta}2^{\gamma_2\vartheta}\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}\\
&\quad\times\left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\right)\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

(3.5)-(3.8) eşitliklerinden, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left[I_1-I_2-I_3+I_4\right]\\
=\ &\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}\\
&+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}\\
&\times\Bigg[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\Bigg]-\mathcal{A}.
\end{aligned}
$$

İspat bu şekilde tamamlanmış olur.

Bu süreçteki bir sonraki adım, genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği kapsayan başlangıç teoremini formüle etmektir.

Teorem 3.2 Varsayalım ki $\psi : \triangle \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \psi : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ üzerinde kısmi türevlenebilir bir fonksiyon ve Δ kümesinde $0 \leq \sigma < \phi,\ 0 \leq \varsigma < \rho$ olduğu varsayılsın. Eğer $\dfrac{\partial^2 \psi(\tau, \xi)}{\partial \tau \partial \xi}$ ifadesi koordinatlarda konveks bir fonksiyon olarak kabul edilirse, aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığı görülür:

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4} \right. \\
&+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}} \\
&\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right. \\
&\left.\left. + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right] - \mathcal{A}\right| \\
\leq\ & \frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16\,\gamma_1\gamma_2}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right) \\
&\times\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right| + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|\right. \\
&\left.+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right| + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\right],
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Burada $\mathcal{A}$, (3.2) ile tanımlanmış olup, $B(\cdot,\cdot)$ Beta fonksiyonunu göstermektedir.

İspat 3.3 Lemma 1 kullanılarak, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4} \right. \\
&+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}} \\
&\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right. \\
&\left.\left. + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right] - \mathcal{A}\right| \\
\leq\ & \frac{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16} \\
&\times\left[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\right. \\
&\left.\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right| d\xi d\tau\right.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1-\xi}{2}\varsigma+\frac{1+\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau\\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma+\frac{1+\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau\\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma+\frac{1+\tau}{2}\phi,\frac{1-\xi}{2}\varsigma+\frac{1+\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau\Bigg]
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}$, Δ üzerindeki koordinatlar için konveks bir fonksiyon olduğundan, aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}\right.\\
&+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}\\
&\times\Bigg[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\Bigg]-\mathcal{A}\Bigg|\\
\leq\ &\frac{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\\
&\times\Bigg\{\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\
&\times\Bigg[\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|\\
&+\left(\frac{1-\tau}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+\left(\frac{1-\tau}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\Bigg]d\xi d\tau\\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\
&\times\Bigg[\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{1-\tau}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+\left(\frac{1-\tau}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\Bigg]d\xi d\tau\\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\
&\times\Bigg[\left(\frac{1-\tau}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+\left(\frac{1-\tau}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|\\
&+\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\Bigg]d\xi d\tau\\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\
&\times\Bigg[\left(\frac{1-\tau}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+\left(\frac{1-\tau}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|\\
&+\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\Bigg]d\xi d\tau\Bigg\}\\
=\;&\frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16\,\gamma_1\gamma_2}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\\
&\times\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\right],
\end{aligned}
$$

Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 3.4 Teorem 3.1'te, $\gamma_1 = 1$ ve $\gamma_2 = 1$ olarak seçildiği takdirde, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}\right.\\
&+\frac{2^{\theta-1}2^{\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)}{(\phi-\sigma)^{\theta}(\rho-\varsigma)^{\vartheta}}\\
&\times\Bigg[I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\\
&\left.+\,I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\Bigg]-\mathcal{A}\right|\\
\leq\;&\frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\frac{1}{\theta+1}\frac{1}{\vartheta+1}\\
&\times\Bigg[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|\\
&+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Teorem 3.5 $\psi : \triangle \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ üzerinde kısmi türevlenebilir bir fonksiyon ve Δ kümesinde $0 \leq \sigma < \phi,\ 0 \leq \varsigma < \rho$ olduğu varsayılsın. Eğer $\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}\right|^q$, $q > 1$ ifadesi, Δ üzerindeki koordinatlarda konveks bir fonksiyon ise, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4} \right. \\
&+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}} \\
&\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right. \\
&\left.\left. + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right] - \mathcal{A}\right| \\
\leq\ & \frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left[\frac{16}{\gamma_1\gamma_2}B\left(\theta p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\right. \\
&\left.+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Burada $\mathcal{A}$, (3.2) ile tanımlanmış olup, $B(\cdot,\cdot)$ Beta fonksiyonunu ifade etmektedir ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ eşitliği geçerlidir.

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}+\tfrac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}\right. \\
&\times\left[\gamma_1\gamma_2 I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\tfrac{\sigma+\phi}{2},\tfrac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\tfrac{\sigma+\phi}{2},\tfrac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\tfrac{\sigma+\phi}{2},\tfrac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right. \\
&\left.\left.+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\tfrac{\sigma+\phi}{2},\tfrac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right]-\mathcal{A}\right| \\
&\leq\tfrac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left[\tfrac{16}{\gamma_1\gamma_2}B\left(\theta p+1,\tfrac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta p+1,\tfrac{1}{\gamma_2}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}$'nın (3.2) ile tanımlandığı ve $B(\cdot,\cdot)$'nin Beta fonksiyonunu ifade ettiği ve $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$ olduğu varsayılır.

İspat 3.6 Lemma'dan, (3.24) eşitsizliğini elde ederiz. İki katlı integraller için iyi bilinen Hölder eşitsizliğini I_5'te kullanarak ve $\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\right|^q$'nin, $\triangle$ üzerindeki

koordinatlar üzerinde dışbükey bir fonksiyon olduğunu göz önüne alarak, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$
\begin{aligned}
I_5 = & \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta} \right. \\
& \left. \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho \right) \right| d\xi d\tau \right\} \\
\leq & \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta p} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta p} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho \right) \right|^q d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq & \frac{1}{\gamma_1^{\theta}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta}} \left(\int_0^1 \int_0^1 (1-(1-\tau)^{\gamma_1})^{\theta p} (1-(1-\xi)^{\gamma_2})^{\vartheta p} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{1+\tau}{2} \right) \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \varsigma) \right|^q + \left(\frac{1+\tau}{2} \right) \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \rho) \right|^q \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1-\tau}{2} \right) \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \varsigma) \right|^q + \left(\frac{1-\tau}{2} \right) \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \rho) \right|^q \right] d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq & \frac{1}{\gamma_1^{\theta}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta}} \left(\frac{1}{\gamma_1} \frac{1}{\gamma_2} B\left(\theta p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) B\left(\vartheta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\frac{9}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \varsigma) \right|^q + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \rho) \right|^q + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \varsigma) \right|^q + \frac{1}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \rho) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Burada şu gerçekten faydalanıyoruz:

$$(\varpi - \sigma)^j \leq \varpi^j - \sigma^j,$$

Herhangi bir $\varpi > \sigma \geq 0$ ve $j \geq 1$ için.

Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
I_6 = & \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta} \right. \\
& \left. \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\phi, \frac{1-\xi}{2}\varsigma + \frac{1+\xi}{2}\rho \right) \right| d\xi d\tau \right\} \\
\leq & \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta p} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta p} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\phi, \frac{1-\xi}{2}\varsigma + \frac{1+\xi}{2}\rho \right) \right|^q d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1^{\theta}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta}} \left(\frac{1}{\gamma_1} \frac{1}{\gamma_2} B\left(\theta p + 1, \frac{1}{\gamma_1}\right) B\left(\vartheta p + 1, \frac{1}{\gamma_2}\right) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \varsigma) \right|^q + \frac{9}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \rho) \right|^q + \frac{1}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi, \varsigma) \right|^q + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi, \rho) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$I_7 = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta} \right. \tag{3.14}$$

$$\left. \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho \right) \right| d\xi d\tau \right\}$$

$$\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta p} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta p} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho \right) \right|^q d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1^{\theta}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta}} \left(\frac{1}{\gamma_1} \frac{1}{\gamma_2} B\left(\theta p + 1, \frac{1}{\gamma_1}\right) B\left(\vartheta p + 1, \frac{1}{\gamma_2}\right) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \varsigma) \right|^q + \frac{1}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \rho) \right|^q + \frac{9}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi, \varsigma) \right|^q + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi, \rho) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$I_8 = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta} \right. \tag{3.15}$$

$$\left. \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\phi, \frac{1-\xi}{2}\varsigma + \frac{1+\xi}{2}\rho \right) \right| d\xi d\tau \right\}$$

$$\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta p} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta p} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\phi, \frac{1-\xi}{2}\varsigma + \frac{1+\xi}{2}\rho \right) \right|^q d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1^{\theta}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta}} \left(\frac{1}{\gamma_1} \frac{1}{\gamma_2} B\left(\theta p + 1, \frac{1}{\gamma_1}\right) B\left(\vartheta p + 1, \frac{1}{\gamma_2}\right) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\frac{1}{16}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q+\frac{3}{16}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q+\frac{3}{16}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q+\frac{9}{16}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Eğer (3.28)-(3.31)'den (3.24)'e yerine koyarsak, (3.27)'nin ilk eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.7 Eğer Teorem 3'te $\gamma_1=1$ ve $\gamma_2=1$ alınırsa, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}+\frac{2^{\theta-1}2^{\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)}{(\phi-\sigma)^{\theta}(\rho-\varsigma)^{\vartheta}}\right.\\&\times\left[I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+\ I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right.\\&\left.\left.+\ I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right]-\mathcal{A}\right|\\\leq\ &\frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left[\frac{16}{(\theta p+1)(\vartheta p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\\&\times\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Teorem 3.8 $\psi:\triangle\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ üzerinde Δ kümesinde $0\leq\sigma<\phi,\ 0\leq\varsigma<\rho$ olacak şekilde kısmi türevlenebilir bir fonksiyon olduğu varsayılsın. Eğer $\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\right|^q, q\geq1$, Δ üzerindeki koordinatlar için konveks bir fonksiyon ise, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}\right.\\&+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}\\&\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right.\\&\left.\left.+\ {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+\ {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right]-\mathcal{A}\right|\\\leq\ &\frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\left(B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\\&\times\left\{\left(\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\right.\right.\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q\\
&+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\\
&+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q\\
&+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\Bigg(\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q\\
&+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\\
&\times\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\\
&+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q\\
&+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\Bigg(\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q\\
&+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\\
&+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\\
&\times\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q\\
&+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q \right.\\
&+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\\
&+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q\\
&+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\\
&\left.\times\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Burada $\mathcal{A}$, (3.2) ile tanımlanmıştır.

İspat 3.9 Eşitlik (3.24)'in yardımıyla ve Power-Mean eşitsizliğini I_9'da kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
I_9 = &\left[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\right. \qquad (3.18)\\
&\left.\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau\right]\\
\leq\ &\left(\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}d\xi d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\right.\\
&\left.\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right|^q d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$\triangle$ üzerindeki koordinatlar için $\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\right|^q$'nun dışbükeyliğini dikkate alarak, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$
\leq\left(\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}d\xi d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}}
$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta} \right.$$
$$\times \left\{ \left(\frac{1+\tau}{2} \right) \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \varsigma) \right|^q + \left(\frac{1+\tau}{2} \right) \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \rho) \right|^q \right.$$
$$\left. \left. + \left(\frac{1-\tau}{2} \right) \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \varsigma) \right|^q + \left(\frac{1-\tau}{2} \right) \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \rho) \right|^q \right\} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

Bu eşitsizlikte, değişken dönüşümünü kullanarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta}$$
$$\times \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho \right) \right| d\xi d\tau \tag{3.19}$$
$$\leq \left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}} B\left(\theta+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) \right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times \left(\frac{1}{4} \frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}} \right)^{\frac{1}{q}} \times \left\{ \right.$$
$$\left[2B\left(\theta+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) - B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[2B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) - B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \varsigma) \right|^q$$
$$+ \left[2B\left(\theta+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) - B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \rho) \right|^q$$
$$+ \left[B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[2B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) - B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi, \varsigma) \right|^q$$
$$\left. + \left[B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi, \rho) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Benzer şekilde, aşağıdaki ifadeye sahibiz:

$$I_{10} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta}$$
$$\times \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\phi, \frac{1-\xi}{2}\varsigma + \frac{1+\xi}{2}\rho \right) \right| d\xi d\tau \tag{3.20}$$
$$\leq \left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}} B\left(\theta+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) \right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times \left(\frac{1}{4} \frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}} \right)^{\frac{1}{q}} \times \left\{ \right.$$
$$\left[2B\left(\theta+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) - B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \varsigma) \right|^q$$

$$+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q$$
$$+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q$$
$$+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg\}^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$I_{11}=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}$$
$$\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma+\frac{1+\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau \tag{3.21}$$
$$\leq\left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\times\Bigg\{$$
$$\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q$$
$$+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q$$
$$+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q$$
$$+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg\}^{\frac{1}{q}}$$

Son olarak:

$$I_{12}=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}$$
$$\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma+\frac{1+\tau}{2}\phi,\frac{1-\xi}{2}\varsigma+\frac{1+\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau \tag{3.22}$$
$$\leq\left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\times\Bigg\{$$
$$\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q$$
$$+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q$$

$$+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q$$
$$+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg\}^{\frac{1}{q}}.$$

(3.36) − (3.39) ifadelerini (3.24)'de dikkate alarak, istenilen eşitsizlik olan (3.34)'ü elde ederiz.

Uyarı 3.10 Teorem 4'te $\gamma_1 = 1$ ve $\gamma_2 = 1$ olarak alındığında, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}\right.\\
&\quad+\frac{2^{\theta-1}2^{\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)}{(\phi-\sigma)^\theta(\rho-\varsigma)^\vartheta}\times\left[I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right.\\
&\quad+I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\\
&\quad\left.\left.+I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right]-\mathcal{A}\right|\\
&\le\frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\theta+1}\frac{1}{\vartheta+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\quad\times\left\{\left(\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\right.\right.\\
&\qquad\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q\\
&\qquad+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\\
&\qquad+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q\\
&\qquad\left.+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad+\left(\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q\right.\\
&\qquad+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\\
&\qquad\left.\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q\\
&+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
+\Bigg(&\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q\\
&+\left[B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\\
&+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)-B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\\
&\times\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q\\
&+\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)-B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right]\left[B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

4 BULGULAR

Teorem 3.1. $\psi : \triangle \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, Δ üzerinde kısmi türevlenebilir bir eşleme olsun. Burada Δ, $0 \leq \sigma < \phi,\ 0 \leq \varsigma < \rho$ ile tanımlanmaktadır. Eğer $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s}$ ifadesi, koordinatlarda h-konveks bir fonksiyon ise, Δ üzerinde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4} \right. \\
&\quad + \frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}} \\
&\quad \times \left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. \left. + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \right] - A \right| \qquad (3.23) \\
&\leq \frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16\ \gamma_1\gamma_2} \left[\Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h) \right. \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h) + \Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h) \\
&\quad \left. + \Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h) \right] \\
&\quad \times \left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right| + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right| + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right| + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right| \right].
\end{aligned}
$$

Burada A, (3.2) ile tanımlanmaktadır ve $B(\cdot,\cdot)$ Beta fonksiyonunu ifade etmektedir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler kullanılmaktadır:

$$
\begin{aligned}
\Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h) &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\quad \times h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)d\xi d\tau \\
\Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h) &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\quad \times h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)d\xi d\tau \\
\Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h) &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\quad \times h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)d\xi d\tau
\end{aligned}
$$

$$\Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h)=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\times h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)d\xi d\tau$$

İspat. Lemma 1'den aşağıdaki ifade elde edilmektedir:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}\right.\\&\quad+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}\\&\quad\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right.\\&\qquad\left.\left.+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right]-A\right|\qquad(3.24)\\&\le\frac{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left[\int_0^1\int_0^1\cdots\right]\end{aligned}$$

(Buradaki integrallerin açılımı aşağıda detaylandırılmıştır.)

$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}$ fonksiyonunun Δ bölgesi üzerinde koordinatlar bakımından h-konveks olduğu varsayıldığında, aşağıdaki eşitsizlik elde edilmektedir:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}\right.\\&\quad\left.+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}\times[\dots]-A\right|\\&\le\frac{\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left\{\right.\\&\quad\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\&\qquad\times\left[h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|\right.\\&\qquad\left.+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\right]d\xi d\tau\\&\quad+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\&\qquad\times\left[h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|\right.\\&\qquad\left.+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\right]d\xi d\tau\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\
&\quad\times\left[h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|\right.\\
&\quad\left.+h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\right]d\xi d\tau\\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\\
&\quad\times\left[h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|\right.\\
&\quad\left.+h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\right]d\xi d\tau\Bigg\}\\
&=\frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16\,\gamma_1\gamma_2}\Bigg[\Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)+\Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h)\\
&\quad+\Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)+\Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h)\Bigg]\\
&\quad\times\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\right].
\end{aligned}
$$

Bu hesaplamalar ile ispat tamamlanmış olmaktadır. □

Uyarı 3.1. Teorem 3.1'te, $h(t)=t$ seçilirse, aşağıdaki eşitsizlik elde edilmektedir:

$$
\left|\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}\right. \tag{3.25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right.\\
&\quad+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\\
&\quad\left.+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right]-A\Bigg|\\
&\le\frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16\,\gamma_1\gamma_2}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|\right.\\
&\quad\left.+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|\right],
\end{aligned}
$$

Bu eşitsizlik, Kiriş ve arkadaşları tarafından (Kiris ve Bayrak, 2023) verilmiştir.

Uyarı 3.2. Açıklama 3'te, $\gamma_1 = 1$ ve $\gamma_2 = 1$ seçilirse, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilmektedir (Hyder et al, 2022):

$$\left| \frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4} + \frac{2^{\theta-1}2^{\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\theta}(\rho-\varsigma)^{\vartheta}} \right. \tag{3.26}$$

$$\times \left[{}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \right.$$
$$+ {}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)$$
$$\left. \left. + {}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \right] - A \right|$$
$$\leq \frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\frac{1}{\theta+1}\frac{1}{\vartheta+1}\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right| + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right| \right.$$
$$\left. + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right| + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right| \right].$$

Teorem 3.2. $\psi : \triangle \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $0 \leq \sigma < \phi$ ve $0 \leq \varsigma < \rho$ olan kısmi türevlenebilir bir eşleme olsun. Eğer $\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\right|^q$, $q > 1$ olmak üzere, Δ üzerindeki koordinatlar bakımından h-konkav bir fonksiyon ise, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4} + \frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}} \right. \tag{3.27}$$

$$\times \left[{}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \right.$$
$$+ {}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)$$
$$\left. \left. + {}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \right] - A \right|$$
$$\leq \frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left[\frac{4(h_1+h_2)^2}{\gamma_1\gamma_2}B\left(\theta p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\times \left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q + \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

Burada A, (3.2) ile tanımlanır ve $B(\cdot,\cdot)$ Beta fonksiyonunu ifade eder. $\frac{1}{p} =$

$1-\frac{1}{q}$ olmak üzere ve

$$\int h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)d\tau=\int h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)d\xi=h_1$$
$$\int h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)d\tau=\int h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)d\xi=h_2$$

eşitliği kullanılmıştır.

İspat. Lemmadan, eşitsizlik (3.24) elde edilmiştir. İki katlı integraller için iyi bilinen Hölder eşitsizliğini kullanmak amacıyla I_5'te ve $\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\right|^q$ olduğu için, h-konkav fonksiyonların üçgenin koordinatlarına uygulanması aşağıdaki sonucu verir: $\triangle$ üzerinde

$$\begin{aligned}
I_5 &= \left\{\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\right. \qquad (3.28)\\
&\quad\left.\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau\right\}\\
&\le\left(\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta p}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta p}d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right|^q d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le\frac{1}{\gamma_1^{\theta}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta}}\left(\int_0^1\int_0^1\left(1-(1-\tau)^{\gamma_1}\right)^{\theta p}\left(1-(1-\xi)^{\gamma_2}\right)^{\vartheta p}d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\times\left\{h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q+h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\right.\\
&\quad\left.+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q d\xi d\tau\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&\le\frac{1}{\gamma_1^{\theta}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta}}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2}B\left(\theta p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\times\left((h_1)^2\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q+h_1h_2\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\right.\\
&\quad\left.+h_1h_2\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q+(h_2)^2\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Burada, şu gerçek kullanılmaktadır:

$$(\varpi - \sigma)^j \leq \varpi^j - \sigma^j,$$

herhangi bir $\varpi > \sigma \geq 0$ ve $j \geq 1$ için. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
I_6 = &\left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta} \right. \\
&\left. \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho \right) \right| d\xi d\tau \right\} \\
&\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta p} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta p} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho \right) \right|^q d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^{\theta}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta}} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(1-(1-\tau)^{\gamma_1}\right)^{\theta p} \left(1-(1-\xi)^{\gamma_2}\right)^{\vartheta p} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left\{ h\left(\frac{1+\tau}{2}\right) h\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \varsigma) \right|^q + h\left(\frac{1+\tau}{2}\right) h\left(\frac{1-\xi}{2}\right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \rho) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + h\left(\frac{1-\tau}{2}\right) h\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi, \varsigma) \right|^q + h\left(\frac{1-\tau}{2}\right) h\left(\frac{1-\xi}{2}\right) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi, \rho) \right|^q d\xi d\tau \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^{\theta}} \frac{1}{\gamma_2^{\vartheta}} \left(\frac{1}{\gamma_1} \frac{1}{\gamma_2} B\left(\theta p + 1, \frac{1}{\gamma_1}\right) B\left(\vartheta p + 1, \frac{1}{\gamma_2}\right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left((h_1)^2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \varsigma) \right|^q + h_1 h_2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma, \rho) \right|^q \right. \\
&\quad \left. + h_1 h_2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi, \varsigma) \right|^q + (h_2)^2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi, \rho) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
I_7 = &\left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta} \right. \\
&\left. \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho \right) \right| d\xi d\tau \right\} \\
&\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta p} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta p} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho \right) \right|^q d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1^\theta}\frac{1}{\gamma_2^\vartheta} \left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2} B\left(\theta p+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) B\left(\vartheta p+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(h_1 h_2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma,\varsigma) \right|^q + h_2^2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma,\rho) \right|^q + h_1^2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi,\varsigma) \right|^q + h_1 h_2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi,\rho) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

$$I_8 = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^\theta \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^\vartheta \right. \tag{3.31}$$

$$\left. \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\phi, \frac{1-\xi}{2}\varsigma + \frac{1+\xi}{2}\rho \right) \right| d\xi d\tau \right\}$$

$$\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\theta p} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\vartheta p} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} \left(\frac{1-\tau}{2}\sigma + \frac{1+\tau}{2}\phi, \frac{1-\xi}{2}\varsigma + \frac{1+\xi}{2}\rho \right) \right|^q d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1^\theta}\frac{1}{\gamma_2^\vartheta} \left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2} B\left(\theta p+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) B\left(\vartheta p+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(h_2^2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma,\varsigma) \right|^q + h_1 h_2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\sigma,\rho) \right|^q + h_1 h_2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi,\varsigma) \right|^q + h_1^2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi}(\phi,\rho) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Eğer (3.28)-(3.31)'den (3.24)'e yerleştirilirse, (3.27)'nin ilk eşitsizliği elde edilmiş olur. □

Eğer Teorem (3.2)'de $h(t) = t$ olarak ayarlarsak, o zaman şunları elde ederiz:

$$\left| \frac{\psi(\sigma,\varsigma) + \psi(\sigma,\rho) + \psi(\phi,\varsigma) + \psi(\phi,\rho)}{4} \right.$$

$$+ \frac{2^{\gamma_1\theta-1} 2^{\gamma_2\vartheta-1} \Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^\theta \gamma_2^\vartheta}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}$$

$$\times \left[{}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+} \psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2}, \frac{\varsigma+\rho}{2} \right) + {}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+} \psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2}, \frac{\varsigma+\rho}{2} \right) \right.$$

$$\left. \left. + {}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+} \psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2}, \frac{\varsigma+\rho}{2} \right) + {}^{\gamma_1\gamma_2} I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-} \psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2}, \frac{\varsigma+\rho}{2} \right) \right] - A \right|$$

$$\leq \frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left[\frac{16}{\gamma_1\gamma_2}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \tag{3.32}$$

Bu, Kiriş ve diğerleri tarafından (Kiris ve Bayrak, 2023) verilmiştir.

Uyarı 3.3. Eğer Teorem (3.2)'de $h(t)=t$, $\gamma_1=1$ ve $\gamma_2=1$ alınırsa, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilmektedir:

$$\left|\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}+\frac{2^{\theta-1}2^{\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)}{(\phi-\sigma)^{\alpha}(\rho-\varsigma)^{\beta}}\right. \tag{3.33}$$
$$\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right.$$
$$+\ {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)$$
$$\left.\left.+\ {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right]-A\right|$$
$$\leq\frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left[\frac{16}{(\theta p+1)(\vartheta p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left[\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Bu eşitsizlik, Hyder ve diğerleri tarafından (Hyder ve Soliman 2020) kanıtlanmıştır.

Teorem 3.3. $\psi:\triangle\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ üzerinde kısmi türevlenebilir olduğu varsayılsın, burada $0\leq\sigma<\phi$ ve $0\leq\varsigma<\rho$'dur. Eğer $\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\right|^q$, $q\geq1$ olmak üzere, Δ üzerindeki koordinatlar bakımından bir h-konkav fonksiyon ise, aşağıdaki eşitsizlik elde edilmektedir:

$$\left|\frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4}+\frac{2^{\gamma_1\theta-1}2^{\gamma_2\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)\gamma_1^{\theta}\gamma_2^{\vartheta}}{(\phi-\sigma)^{\gamma_1\theta}(\rho-\varsigma)^{\gamma_2\vartheta}}\right. \tag{3.34}$$
$$\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right.$$
$$\left.+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+ \ {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)\Bigg] - A\Bigg| \\
&\leq \frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16\gamma_1\gamma_2}\left(B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\Bigg\{\Bigg(\Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \Bigg(\Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \Bigg(\Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Burada A, (3.2)'de tanımlandığı gibidir ve

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)d\xi d\tau \\
&= \Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h) \\
&\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta}\ h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)d\xi d\tau \\
&= \Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h)
\end{aligned}
$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} h\left(\frac{1-\tau}{2}\right) h\left(\frac{1+\xi}{2}\right) d\xi d\tau$$
$$= \Phi(\gamma_1, \theta, h)\, \Phi(\gamma_2, \vartheta, h)$$
$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} h\left(\frac{1-\tau}{2}\right) h\left(\frac{1-\xi}{2}\right) d\xi d\tau$$
$$= \Phi(\gamma_1, \theta, h)\, \Phi(\gamma_2, \vartheta, h).$$

İspat. Eşitlik ilkesini (3.24) ve Power-Mean eşitsizliğini kullanarak, I_9'da şunlar elde edilmektedir:

$$\begin{aligned} I_9 = & \left[\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \right. \\ & \left. \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right| d\xi d\tau\right] \\ \leq & \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} d\xi d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \right. \\ & \left. \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma + \frac{1-\tau}{2}\phi, \frac{1+\xi}{2}\varsigma + \frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right|^q d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Koordinatlarda ifade edilen h-konkav fonksiyonundaki görülen konkavlık, $\triangle$'da aşağıdaki gibi tanımlanır: $\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial\tau\partial\xi}\right|^q$'da, o zaman şunlar elde edilir:

$$\begin{aligned} \leq & \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} d\xi d\tau\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta} \left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \right. \\ & \times \left\{ h\left(\frac{1+\tau}{2}\right) h\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma, \varsigma)\right|^q \right. \\ & + h\left(\frac{1+\tau}{2}\right) h\left(\frac{1-\xi}{2}\right) \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma, \rho)\right|^q \\ & \left. + h\left(\frac{1-\tau}{2}\right) h\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi, \varsigma)\right|^q \right. \end{aligned}$$

$$+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q d\xi d\tau\Big\}^{\frac{1}{q}}$$

Bu eşitsizlikte, değişkenlerin değiştirilmesi bize bunu aşağıdaki gibi ifade etme imkânı tanır:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\quad\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau \\
&\leq\left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\Big\{\Psi\left(\gamma_1,\theta,h\right)\Psi\left(\gamma_2,\vartheta,h\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q \\
&\quad+\Psi\left(\gamma_1,\theta,h\right)\Phi\left(\gamma_2,\vartheta,h\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q \\
&\quad+\Phi\left(\gamma_1,\theta,h\right)\Psi\left(\gamma_2,\vartheta,h\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\phi,\varsigma\right)\right|^q \\
&\quad+\Phi\left(\gamma_1,\theta,h\right)\Phi\left(\gamma_2,\vartheta,h\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Big\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}\tag{3.36}$$

Benzer şekilde, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
I_{10}=&\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \\
&\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1+\tau}{2}\sigma+\frac{1-\tau}{2}\phi,\frac{1-\xi}{2}\varsigma+\frac{1+\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau \\
&\leq\left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\Big\{h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q \\
&\quad+h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q \\
&\quad+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\phi,\varsigma\right)\right|^q \\
&\quad+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q d\xi d\tau\Big\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq\left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\Big\{\Psi\left(\gamma_1,\theta,h\right)\Phi\left(\gamma_2,\vartheta,h\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q
\end{aligned}\tag{3.37}$$

$$+\Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q$$
$$+\Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q$$
$$+\Psi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Big\}^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$I_{11}=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \tag{3.38}$$
$$\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma+\frac{1+\tau}{2}\phi,\frac{1+\xi}{2}\varsigma+\frac{1-\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau$$
$$\leq\left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\Big\{h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q$$
$$+h\left(\frac{1-\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q$$
$$+h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q$$
$$+h\left(\frac{1+\tau}{2}\right)h\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q d\xi d\tau\Big\}^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq\left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}}B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\Big\{\Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q$$
$$+\Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q$$
$$+\Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q$$
$$+\Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Psi(\gamma_2,\vartheta,h)\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q\Big\}^{\frac{1}{q}}.$$

□

$$I_{12}=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta}\left(\frac{1-(1-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta} \tag{3.39}$$
$$\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}\left(\frac{1-\tau}{2}\sigma+\frac{1+\tau}{2}\phi,\frac{1-\xi}{2}\varsigma+\frac{1+\xi}{2}\rho\right)\right|d\xi d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}} B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right) B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left\{ h\left(\frac{1-\tau}{2}\right) h\left(\frac{1-\xi}{2}\right) \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q \right. \\
&\quad + h\left(\frac{1-\tau}{2}\right) h\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q \\
&\quad + h\left(\frac{1+\tau}{2}\right) h\left(\frac{1-\xi}{2}\right) \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q \\
&\quad \left. + h\left(\frac{1+\tau}{2}\right) h\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q d\xi d\tau \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\gamma_1^{\theta+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\vartheta+1}} B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right) B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left\{ \Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h) \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\varsigma)\right|^q \right. \\
&\quad + \Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h) \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\sigma,\rho)\right|^q \\
&\quad + \Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h) \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\varsigma)\right|^q \\
&\quad \left. + \Phi(\gamma_1,\theta,h)\,\Phi(\gamma_2,\vartheta,h) \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\xi}(\phi,\rho)\right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

(3.36)-(3.39) ifadeleri (3.24) içinde dikkate alındığında, istenen eşitsizlik (3.34) elde edilir.

Uyarı 3.4. Eğer Teorem 4'te $h(t)=t$ olarak ayarlanırsa, o zaman aşağıdaki eşitsizlik elde edilmektedir (Kiris ve Bayrak, 2023):

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{\psi(\sigma,\varsigma)+\psi(\sigma,\rho)+\psi(\phi,\varsigma)+\psi(\phi,\rho)}{4} \right. \\
&\quad + \frac{2^{\theta-1}2^{\vartheta-1}\Gamma(\theta+1)\Gamma(\vartheta+1)}{(\phi-\sigma)^{\theta}(\rho-\varsigma)^{\vartheta}} \\
&\quad \times \left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\beta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \right. \\
&\quad + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \\
&\quad \left. \left. + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) \right] - A \right| \\
&\leq \frac{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\theta+1}\frac{1}{\vartheta+1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left\{ \left(\left[2B\left(\theta+1,\frac{1}{\gamma_1}\right) - B\left(\theta+1,\frac{2}{\gamma_1}\right)\right] \left[2B\left(\vartheta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right) - B\left(\vartheta+1,\frac{2}{\gamma_2}\right)\right] \right.\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \varsigma) \right|^q \\
&+ \left[2B\left(\theta+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) - B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \rho) \right|^q \\
&+ \left[B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[2B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) - B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \varsigma) \right|^q \\
&+ \left[B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \rho) \right|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \Big(\left[2B\left(\theta+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) - B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \\
&\times \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \varsigma) \right|^q \\
&+ \left[2B\left(\theta+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) - B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \\
&\times \left[2B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) - B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \rho) \right|^q \\
&+ \left[B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[2B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) - B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \varsigma) \right|^q \\
&+ \left[B\left(\sigma+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[2B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) - B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \rho) \right|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \Big(\left[B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[2B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \\
&\times \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, \varsigma) \right|^q \\
&+ \left[B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[2B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) - B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\sigma, d) \right|^q \\
&+ \left[2B\left(\theta+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) - B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \varsigma) \right|^q \\
&+ \left[2B\left(\theta+1, \frac{1}{\gamma_1}\right) - B\left(\theta+1, \frac{2}{\gamma_1}\right) \right] \left[2B\left(\vartheta+1, \frac{1}{\gamma_2}\right) - B\left(\vartheta+1, \frac{2}{\gamma_2}\right) \right] \\
&\times \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} (\phi, \rho) \right|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

5 SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, koordinatlarda tanımlanan h-konveks fonksiyonlar sınıfı ile genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri sistematik bir şekilde birleştirilerek, klasik matematiksel analizin temel taşlarından olan integral eşitsizlikleri kapsamlı ve yenilikçi bir perspektifle ele alınmıştır. Çalışmanın temel odak noktası, tanımlanan bu sentez yapısı çerçevesinde Hermite-Hadamard ve özellikle trapezoid tipli integral eşitsizliklerinin literatüre yeni ve genişletilmiş varyantlarının kazandırılması olmuştur. Elde edilen teorik sonuçların, hem kesirli analiz hem de konveks analiz alanlarında mevcut bilgi birikimini genişlettiği ve derinleştirdiği gözlemlenmiştir.

5.1 Temel Bulgular ve Bilimsel Katkılar

1. Yeni Yardımcı Özdeşlik (Lemma) Türetilmesi: Çalışmanın metodolojik temelini oluşturan ilk aşamada, koordinatlarda kısmi türevlenebilir fonksiyonlar için genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integrallerine dayalı kapsamlı ve yenilikçi bir integral özdeşliği (Lemma 1) türetilmiştir. Bu özdeşlik, klasik trapezoid özdeşliğinin doğal bir genellemesi niteliğinde olup, ilerleyen bölümlerde ispatlanan tüm temel eşitsizliklerin çıkış noktasını oluşturmuştur. Lemma'nın ispatında kullanılan teknikler, kesirli kalkülüsün temel teoremleri ile değişken dönüşüm yöntemlerinin etkili bir sentezini yansıtmaktadır.

2. Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri: Koordinatlarda h-konveks fonksiyonlar sınıfı için, ikinci kısmi türevin mutlak değerinin konvekslik özelliğinden stratejik olarak yararlanılarak, trapezoid tipli Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin yeni ve genişletilmiş formları (Teorem 2 ve Teorem 3) sistematik bir şekilde ispatlanmış ve literatüre kazandırılmıştır. Bu eşitsizlikler, hem fonksiyonun kendisi hem de kesirli integral operatörleri cinsinden ifade edilen terimler arasındaki ilişkiyi kesin bir matematiksel dil ile ortaya koymaktadır.

3. Hölder ve Power-Mean Eşitsizliklerinin Stratejik Uygulanması: Temel eşitsizlikler, klasik Hölder ve Power-Mean (Kuvvet-Ortalama) eşitsizliklerinin yenilikçi bir şekilde uygulanması yoluyla daha da geliştirilmiştir. Özellikle, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\right|^q$ ifadesinin ($q > 1$) konveks olduğu durumlar için türetilen eşitsizlikler (Teorem 3 ve Teorem 4), fonksiyonun türevinin davranışına bağlı olarak hata payının daha hassas bir şekilde kontrol edilmesine ve minimize edilmesine olanak tanımıştır. Bu yaklaşım, eşitsizlik teorisinde yakınsama hızı ve tahmin keskinliği açısından önemli bir

ilerlemeyi temsil etmektedir.

4. h-Konveksliğin Kapsayıcı ve Genelleştirici Rolü: Çalışmanın teorik çerçevesinin merkezinde yer alan h-konvekslik kavramının kapsayıcı doğası deneysel olarak gösterilmiştir. Spesifik olarak, yardımcı fonksiyon $h(t)$'ye; $h(t) = t$ seçimi yapıldığında klasik konveks fonksiyona, $h(t) = t^s$ seçimiyle s-konveks (Breckner konveks) fonksiyona ve $h(t) = 1$ seçimiyle P-fonksiyonuna indirgendiği ispatlanmıştır. Bu durum, elde edilen tüm teorem ve sonuçların, mevcut literatürdeki temel ve özel durumları kapsayan üst düzey bir genelleme sağladığının matematiksel kanıtıdır.

5. Beta Fonksiyonu ve Özel Fonksiyonlar ile İlişki: İspatlarda karşılaşılan integrallerin değerlendirilmesi sırasında Beta fonksiyonu ($B(\cdot,\cdot)$) ve Gamma fonksiyonu ($\Gamma(\cdot)$) gibi özel fonksiyonların doğal bir şekilde ortaya çıkması, çalışmanın kesirli analiz ve özel fonksiyonlar teorisi arasında köprü kurduğunu göstermektedir. Bu bağlantı, eşitsizliklerin hem teorik derinliğini hem de uygulama potansiyelini artıran önemli bir boyuttur.

5.2 Gelecek Çalışmalar İçin Öneriler ve Araştırma Potansiyeli

Bu tez kapsamında geliştirilen metodoloji ve ulaşılan teorik sonuçlar, kesirli analiz, konveks analiz ve matematiksel eşitsizlikler teorisi alanlarında verimli ve çok yönlü yeni araştırma imkânları sunmaktadır. Mevcut çalışmanın sınırları ötesine geçebilecek ve alana katkı sağlayabilecek potansiyel araştırma yönleri aşağıda detaylandırılmıştır:

1. Daha Geniş ve Karmaşık Fonksiyon Sınıflarının İncelenmesi: Bu çalışmada merkezi rol oynayan koordinatlarda h-konveks fonksiyonlar sınıfı, daha geniş konvekslik kavramları ile genişletilebilir. Örneğin, *koordinatlarda h-geometrik konveks*, *koordinatlarda h-harmonik konveks* veya *koordinatlarda h-üstel tip konveks* fonksiyonlar gibi daha sofistike sınıflar için benzer integral eşitsizliklerinin araştırılması, teorinin sınırlarını genişletecektir. Ayrıca, koordinatlarda *quasi-konveks*, *log-konveks* veya *MT-konveks* fonksiyonlar için de paralel çalışmalar yapılabilir.

2. Çeşitlendirilmiş Kesirli Operatörler Çerçevesinde Genellemeler: Mevcut çalışmada temel araç olarak genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanılmıştır. Gelecek çalışmalarda bu sonuçların, farklı çekirdek yapılarına sahip olan ve literatürde giderek daha fazla önem kazanan kesirli operatörlere taşınması önemli bir araştırma gündemi oluşturmaktadır. Bu operatörler arasında genelleştirilmiş *Katugampola*, *Hadamard*, *conformable*, *ψ-Hilfer* veya *Mittag-Leffler çekirdekli* kesirli integral ve türev operatörleri sayılabilir.

3. Hata Sınırlarının İyileştirilmesi ve Keskinlik Analizi: Elde edilen eşitsizliklerdeki hata terimleri (sağ taraftaki ifadeler) için daha sıkı, optimal veya keskin (sharp) tahminlerin araştırılması, eşitsizlik teorisinin temel sorularından biridir. Farklı integral ortalamaları (quadrature kuralları) veya gelişmiş analiz teknikleri (örneğin, sürekli kesirler, majorizasyon teorisi) kullanılarak mevcut hata sınırlarının iyileştirilip iyileştirilemeyeceğinin incelenmesi önerilmektedir.

4. Disiplinlerarası Uygulama ve Modelleme Potansiyeli: Teorik bulguların, saf matematik dışındaki alanlardaki problemlerin modellenmesi ve analizinde kullanım potansiyeli araştırılmalıdır. Örneğin, bu tür eşitsizliklerin, istatistikte olasılık dağılımlarının moment tahminlerinde, finans matematiğinde risk modellerinde, mühendislikte sinyal işleme veya kontrol teorisinde, ve nümerik analizde sayısal integrasyon yöntemlerinin hata analizinde uygulanabilirliği incelenebilir.

5. Kesirli Türevler ile Dual (Çift) Yapıların Kurulması: Bu çalışmada ağırlıklı olarak kesirli *integral* operatörleri üzerinde durulmuştur. Tamamlayıcı bir araştırma yönü olarak, aynı h-konveks fonksiyon sınıfı için genelleştirilmiş kesirli *türev* operatörleri (Caputo, Riemann-Liouville, vs.) kullanılarak yeni integral eşitsizliklerinin ve temel özdeşliklerin formüle edilmesi ve özelliklerinin karşılaştırmalı olarak incelenmesi mümkündür.

6. Özel $h(t)$ Fonksiyonları ile Detaylı Vaka Çalışmaları: $h(t)$ yardımcı fonksiyonuna özel ve anlamlı değerler ($h(t) = 1/t$, $h(t) = e^t$, $h(t) = \sin t$, $h(t) = \frac{1}{1+t}$, vb.) verilerek, elde edilen genel teoremlerin somutlaştırılması ve bu özel durumlarda ortaya çıkan yeni eşitsizliklerin klasik sonuçlarla (Öklid, Jensen, Hermite-Hadamard, Fejér, vs.) olan ilişkisinin derinlemesine analiz edilmesi, alana somut ve yeni örnekler kazandıracaktır.

7. Yüksek Boyutlu Uzaylara Genişletme: Çalışma iki değişkenli ($\mathbb{R}^2$) fonksiyonlar üzerine odaklanmıştır. Doğal bir genişleme, benzer metodolojinin n-değişkenli ($\mathbb{R}^n$, $n > 2$) fonksiyonlar ve çoklu kesirli integraller bağlamında uygulanarak, yüksek boyutlu trapezoid ve Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin araştırılması olacaktır.

Sonuç olarak, bu tez çalışması, konvekslik teorisi ile kesirli kalkülüsün sinerjik birleşiminden doğan verimli bir araştırma paradigması sunmuştur. Geliştirilen teorik çerçeve ve ispatlanan eşitsizlikler, matematiksel analizin bu iki önemli dalının kesişim noktasında literatüre anlamlı ve yenilikçi katkılar sağlamıştır. Daha da önemlisi, çalışma, belirtilen öneriler doğrultusunda gelecekte yapılacak araştırmalar için sağlam bir teorik zemin ve açık bir yol haritası oluşturmuştur. Bu yönüyle çalışmanın, ilgili alanlardaki bilimsel bilgi birikimini ileri taşımakla kalmayıp, aynı zamanda yeni keşifler için bir katalizör görevi görmesi beklenmektedir.

6 KAYNAKLAR

Dragomir S S, 2001, On Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane, Taiwanese Journal of Mathematics, 4, 775–788.

Sarikaya M Z, 2014, On the Hermite–Hadamard-type inequalities for co-ordinated convex functions via fractional integrals, Integral Transforms and Special Functions, 25(2), 134–147.

Latif M A, Alomari M, 2009, Hadamard-type inequalities for product of two convex functions on the co-ordinates, International Mathematical Forum, 4(47), 2327–2338.

Akkurt A, Sarikaya M Z, Budak H, Yildirim H, 2017, On the Hadamard-type inequalities for co-ordinated convex functions via fractional integrals, Journal of King Saud University–Science, 29, 380–387.

Alomari M, Darus M, 2008, The Hadamard inequality for s-convex functions of two variables on the coordinates, International Journal of Mathematical Analysis, 2(13), 629–638.

Bakula M K, 2014, An improvement of the Hermite–Hadamard inequality for functions convex on the coordinates, Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 11(1), 1–7.

Sarikaya M Z, Set E, Ozdemir M E, Dragomir S S, 2012, New some Hadamard-type inequalities for co-ordinated convex functions, Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences, 28(2), 137–152.

Abdeljawad T, 2015, On conformable fractional calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics, 279, 57–66.

Abdelhakim A A, 2019, The flaw in the conformable calculus: It is conformable because it is not fractional, Fractional Calculus and Applied Analysis, 22, 242–254.

Hyder A A, Almoneef A A, Budak H, Barakat M A, 2022, On new fractional versions of generalized Hermite–Hadamard inequalities, Mathematics, 10(18), Article 3337.

Dragomir S S, Agarwal R, 1998, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to the trapezoidal formula, Applied Mathematics Letters, 11(5), 91–95.

Dragomir S S, Pearce C E M, 2000, Selected Topics on Hermite–Hadamard Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University.

Hyder A, Soliman A H, 2020, A new generalized θ-conformable calculus and its applications in mathematical physics, Physica Scripta, 96, 015208.

Iqbal M, Qaisar S, Muddassar M, 2016, A short note on integral inequality of Hermite–Hadamard type through convexity, Journal of Computational Analysis and Applications, 21(5), 946–953.

Jarad F, Uğurlu E, Abdeljawad T, Baleanu D, 2017, On a new class of fractional operators, Advances in Difference Equations, 2017, Article 247.

Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J, 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam.

Khalil R, Al Horani M, Yousef A, Sababheh M, 2014, A new definition of fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65–70.

Pečarić J E, Proschan F, Tong Y L, 1992, Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Boston.

Sarikaya M Z, Set E, Yaldiz H, Basak N, 2013, Hermite–Hadamard inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Mathematical and Computer Modelling, 57(9–10), 2403–2407.

Zhao D, Luo M, 2017, General conformable fractional derivative and its physical interpretation, Calcolo, 54, 903–917.

Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I, 1993, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon.

Podlubny I, 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego.

Miller S, Ross B, 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York.

Khan T U, Khan M A, 2019, Generalized conformable fractional operators, Journal of Computational and Applied Mathematics, 346, 378–389.

Akkurt A, Yildirim M E, Yildirim H, 2017, A new generalized fractional derivative and integral, Konuralp Journal of Mathematics, 5(2), 248–259.

Sarikaya M Z, Budak H, Usta F, 2019, On generalized conformable fractional calculus, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 9(4), 792–799.

Sarikaya M Z, Akkurt A, Budak H, Yildirim M E, Yildirim H, 2019, Hermite–Hadamard inequalities for conformable fractional integrals, International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications, 9(1), 49–59.

Bozkurt M, Akkurt A, Yildirim H, 2021, Conformable derivatives and integrals for functions of two variables, Konuralp Journal of Mathematics, 9(1), 49–59.

Kiris M E, Bayrak G, 2023, New version of Hermite–Hadamard inequality for co-ordinated convex functions via generalized conformable integrals, Submitted.

Varošanec S, 2007, On h-convexity, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 326, 303–311.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Murat Yücel AY
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya, 06.11.1984
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Tel/e-posta) : 0507 466 90 36 / m_y_ay@hotmail.com

Eğitim Durumu
Lise : Konya Dolapoğlu Anadolu Lisesi, 2002
Lisans : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak., Matematik Bölümü, 2010
Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2026

Çalıştığı Kurum(lar)
: Final Eğitim Kurumları (İstanbul/Bağcılar), 2006 - 2009
: Birey Dergisi Dershaneleri (İstanbul/Şirinevler), 2010 - 2012
: Sınav Dergisi Dershaneleri (Konya/Selçuklu), 2013 - 2017
: Yöntem Eğitim Kurumları, 2017 - 2022
: MEB Konya Taşkent Balcılar ÇPAL, 2022
: MEB Konya Meram Kozağaç MTAL, 2023 - 2025
: MEB Selçuklu Fen Lisesi, 2025 - ...