2-METRİK UZAYLARDA YAKINSAKLIK TİPLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeliha AFACAN ÇOLAK

Danışman
Prof. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2026

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2-METRİK UZAYLARDA YAKINSAKLIK TİPLERİ

Zeliha AFACAN ÇOLAK

Danışman
Prof. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2026

TEZ ONAY SAYFASI

Zeliha AFACAN ÇOLAK tarafından hazırlanan "2-Metrik Uzaylarda Yakınsaklık Tipleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 10/07/2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Erdinç DÜNDAR

Başkan **:** Prof. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi,
Cumhuriyet Sosyal Bilimler MYO

Üye **:** Prof. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.

Üye **:** Doç. Dr. Esra GÜLLE
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... /..... /..... tarih ve
……. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

…….
Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

10 / 07 / 2026

Zeliha AFACAN ÇOLAK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

2-METRİK UZAYLARDA YAKINSAKLIK TİPLERİ

Zeliha AFACAN ÇOLAK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Erdinç DÜNDAR

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ele alınan konuların matematik literatüründeki önemi vurgulanmış ve ilgili çalışmalara dair literatür özeti sunulmuştur. İkinci bölümde, tezde kullanılan temel kavram ve tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, 2 −metrik uzaylarda Cesàro yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık tanımları incelenerek bu kavramlar arasındaki ilişkiler analiz edilmiştir. Ayrıca, 2 −metrik uzaylarda N_θ-yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları ile bu kavramların özellikleri ele alınmıştır. Çalışmanın özgün kısmını teşkil eden dördüncü bölümde, 2 −metrik uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları literatüre tanıtılmış, aralarındaki teorik ilişkiler araştırılmıştır. Devamında ise 2 −metrik uzaylarda $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizi kavramları tanımlanarak temel özellikleri türetilmiştir. Beşinci bölümde ise tez çalışması süresince yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

2026, v + 26 sayfa

Anahtar Kelimeler: 2 −Metrik uzaylar, İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary dizi, $\mathcal{I}$-yakınsaklık, $\mathcal{I}$-Cauchy dizi.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CONVERGENCE TYPES IN 2-METRIC SPACES

Zeliha AFACAN ÇOLAK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis consists of five main chapters.

The first chapter emphasizes the importance of the topics discussed in the mathematical literature and presents a literature review of relevant studies. The second chapter includes the fundamental concepts and definitions used in the thesis. The third chapter examines the definitions of Cesàro convergence and statistical convergence in $2-$metric spaces and analyzes the relationships between these concepts. Furthermore, the concepts of N_θ-convergence and lacunary statistical convergence in 2-metric spaces, along with their properties, are discussed. The fourth chapter, which constitutes the original part of the study, introduces the concepts of $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}^*$-convergence in $2-$metric spaces to the literature and investigates the theoretical relationships between them. Subsequently, the concepts of $\mathcal{I}$-Cauchy and $\mathcal{I}^*$-Cauchy sequences in $2-$metric spaces are defined and their fundamental properties are derived. The fifth chapter lists the sources used throughout the thesis study.

2026, v + 26 pages

Keywords: $2-$Metric spaces, Statistical convergence, Lacunary sequence, $\mathcal{I}$-convergence, $\mathcal{I}$-Cauchy sequence.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve tez yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Erdinç DÜNDAR' a her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Zeliha AFACAN ÇOLAK

Afyonkarahisar 2026

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv
SİMGELER DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
2.1 Temel Tanım ve Kavramlar 3
2.2 İstatistiksel Yakınsaklık, İdeal Yakınsaklık ve Lacunary Dizi 4
2.3 2-Metrik Uzaylarda Temel Tanım ve Kavramlar 7
3. 2-METRİK UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK 9
3.1 2-Metrik Uzaylarda Cesaro Yakınsaklık ve İstatistiksel Yakınsaklık 9
3.2 2-Metrik Uzaylarda N_θ ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık 12
4. 2-METRİK UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK 17
4.1 2-Metrik Uzaylarda İdeal Yakınsaklık 17
4.2 2-Metrik Uzaylarda İdeal Cauchy Dizisi 20
5. KAYNAKLAR 23
ÖZGEÇMİŞ 26

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar kümesi
ℓ_∞	Tüm sınırlı reel veya kompleks dizilerin sınırlı kümesi
$\underline{\delta}(K)$	K kümesinin alt yoğunluğu
$\overline{\delta}(K)$	K kümesinin üst yoğunluğu
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$d(u,v,w)$	2-metrik
$\mathcal{C}$	Cesaro yakınsak dizilerin kümesi
$\mathcal{N}_\theta$	$\mathcal{N}_\theta$ − yakınsak dizilerin kümesi
$\|K\|$	K kümesinin kardinalitesi
$\mathcal{S}$	Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$\mathcal{S}_\theta$	Tüm lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
st_{In}	Tüm logaritmik istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$\mathcal{I}$	İdeal
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	$\mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{I}$ idealine karşılık gelen süzgeç
(AP)	İdeal için AP özelliği
$\mathcal{I}-lim$	İdeal limit
$st-lim$	İstatistiksel limit

1. GİRİŞ

Yakınsaklık, doğal yoğunluk, lacunary dizi, istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi alanının önemli kavramlarından olup, son yıllarda pek çok matematikçinin ilgisini çekmektedir. Tezde çalışılan konular ve ilgili kavramlar pek çok matematik bilim insanının ilgisini çekmiştir. Bu konular tez çalışmasının daha verimli olması açısından araştırılıp not edilmiştir. Toplanabilme teorisinde önemli bir yakınsaklık çeşidi olan istatistiksel yakınsaklık kavramını Schoenberg (1959) ve Fast (1951) birbirinden bağımsız olarak reel sayı dizilerinin yakınsaklığının bir genelleştirilmişi olarak tanımlamışlardır. Daha sonra Kostyrko vd. (2000) ideal yakınsaklık kavramını istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirilmiş hali olarak tanımlayarak birçok önemli özelliklerini vermişlerdir. Bununla birlikte Dems (2004/2005) ile Nabiev vd. (2007) ideal Cauchy dizisini tanımlayarak ideal yakınsaklık ile ilişkisi ve önemli bazı özelliklerini incelemişlerdir. $2-$metrik kavramı, metrik kavramının tarafından genelleştirilmesiyle oluşturulmuştur (Gähler 1963, 1965). Bir 2-metrik uzay, topolojik olarak sıradan bir metrik uzaya eşdeğer değildir. Örneğin; her metrik uzay "birinci sayılabilir" özelliğine sahipken, $2-$metrik uzaylar birinci sayılabilir olmayabilir (Lahiri vd. 2011). Bu durumda, metrik uzaylarda elde edilen sonuçlar ile 2-metrik uzaylarda elde edilen sonuçlar arasında basit bir ilişki yoktur. Bir metrik uzayda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir; fakat $2-$metrik uzayda yakınsak bir dizi Cauchy dizisi olmayabilir. Ancak, eğer d $2-$metriği X $2-$metrik uzay üzerinde sürekli ise, bu durumda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisine dönüşür (Naidu ve Prasad 1986). Bir metrik X üzerinde her zaman sürekli olmasına rağmen, $2-$metrik sürekli olmayabilir. Nuray (2020) $2-$metrik uzayda Cesàro yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi, lacunary yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanıtarak önemli özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri incelemişlerdir. Burada bahsedilen kavramlar ile ilgili olarak bazı matematikçiler önemli çalışmalar yapmışlardır (Aliouche ve Simpson 2012, Connor 1988, 2003, Freese 2001, Freedman vd. 1978, Fridy 1985, Fridy ve Orhan 1993, 1997, Gezer 2005, Gülle ve Ulusu 2013, Hardy ve Wright 1960, Iseki 1975, Khan 1980, Kişi 2018, 2021 Liu 2001, Mursaleen ve Başar 2020, Naidu 2001, Rhoades 1979, Savaş vd. 2019, Singh 1980, Ulusu vd. 2021, Yamancı ve Gürdal 2013, 2014, Yamancı vd. 2020, White 1976).

Tezimizin üçüncü bölümünde, $2-$metrik uzaylarda Cesàro yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık tanımları incelenerek bu kavramlar arasındaki ilişkiler analiz edilmiştir. Ayrıca, aynı uzaylarda N_θ-yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları ile bu kavramların özellikleri ele alınmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler ile kapsama bağıntıları incelenmiştir.

Çalışmanın özgün kısmını teşkil eden dördüncü bölümde, $2-$metrik uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları literatüre tanıtılmış, aralarındaki teorik ilişkiler araştırılmıştır. Devamında ise $2-$metrik uzaylarda $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizi kavramları tanımlanarak temel özellikleri türetilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasında yararlanılan bazı temel kavramlar verilmiştir. Literatürde iyi bilinen doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ gibi temel kavramlar burada verilmeyecektir.

2.1 Temel Tanım ve Kavramlar

Öncelikle metrik uzay, sınırlı dizi ve yakınsak dizi kavramları not edilecektir.

Tanım 2.1.1 $\mathcal{V}$ boştan farklı bir küme olsun.

$$\mu : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3 \in \mathcal{V}$ için

M1. $\mu(\upsilon_1, \upsilon_2) = 0 \Leftrightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2$,

M2. $\mu(\upsilon_1, \upsilon_2) = \mu(\upsilon_2, \upsilon_1)$,

M3. $\mu(\upsilon_1, \upsilon_3) \leq \mu(\upsilon_1, \upsilon_2) + \mu(\upsilon_2, \upsilon_3)$

şartlarını sağlıyorsa μ fonksiyonuna $\mathcal{V}$ de bir metrik ve $(\mathcal{V}, \mu)$ ikilisine de metrik uzay denir (Bayraktar 2006).

Bu tez çalışması boyunca $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ uzayı üzerinde

$$\mu(\upsilon_1, \upsilon_2) = |\upsilon_1 - \upsilon_2|$$

biçiminde tanımlanan mutlak değer metriği göz önüne alınacaktır.

Tanım 2.1.2 Tanım kümesi $\mathbb{N} = \{1,2, \dots, n, \dots\}$ doğal sayılar kümesi olan her fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine göre adlandırılır. Eğer bir dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi veya reel sayı dizisi ya da reel dizi denir. Yani, reel terimli bir dizi

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyondur. Genel terimi x_k olan bir dizi $(x_k) = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ biçiminde gösterilir (Balcı 2016).

Tez çalışmasında aksi belirtilmediği sürece (x_k) dizisini reel sayı dizisi olarak ele alacağız.

Tanım 2.1.3 (x_k) bir dizi ve $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $k > n_0$ olduğunda

$$|x_k - \mathcal{L}| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyor ise (x_k) dizisi, $\mathcal{L}$ sayısına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \mathcal{L} \quad \text{veya} \quad x_k \to \mathcal{L}$$

biçiminde gösterilir. Herhangi bir sayıya yakınsayan diziye yakınsak dizi denir. Yakınsak olmayan diziye ise ıraksak dizi denir (Balcı 2016).

Tanım 2.1.4 Eğer her k doğal sayısı için

$$|x_k| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı bulunabiliyor ise (x_k) dizisine sınırlı dizi denir.

Tüm sınırlı reel veya kompleks dizilerin kümesi ℓ_∞ ile gösterilir (Balcı 2016).

2.2 İstatistiksel Yakınsaklık, İdeal Yakınsaklık ve Lacunary Dizi

Bu kısımda öncelikle doğal yoğunluk kavramını, bir dizinin istatistiksel yakınsaklık kavramını ve ilgili bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 2.2.1 $K \subseteq \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ kümelerini ele alalım.

$$|K| = \text{card}K \ (K \text{ kümesinin kardinalitesi})$$

olmak üzere;

$$\underline{\delta}(K) = \lim_{n\to\infty} inf \frac{|K_n|}{n} \text{ ve } \overline{\delta}(K) = \lim_{n\to\infty} sup \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine sırasıyla K kümesinin alt ve üst yoğunlukları denir. Eğer

$$\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin limiti mevcuttur denir. Bu limit $\delta(K)$ ile gösterilir ve bu limit değerine K kümesinin doğal yoğunluğu denir.

Bu durumda, $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

olarak tanımlanır (Niven vd. 1991).

Tanım 2.2.2 $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyor ise, x dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st - \lim\, x = \mathcal{L}$$

ile gösterilir (Fast 1951).

Şimdi ideal, süzgeç ve ideal yakınsaklık kavramları ile ilgili tanımlar verilecektir.

Tanım 2.2.3 Bir $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesi için

i. $\emptyset \in \mathcal{I}$,

ii. Her $A, B \in \mathcal{I}$ için $A \cup B \in \mathcal{I}$,

iii. Her $A \in \mathcal{I}$ ve her $B \subset$ A için $B \in \mathcal{I}$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesine $\mathbb{N}$ de bir ideal denir.

Eğer $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise, $\mathcal{I}$ ya bir gerçek (non-trivial) ideal denir. Ayrıca, $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa, $\mathcal{I}$ idealine uygun (admissible) ideal denir (Kostyrko vd. 2000).

Bu çalışmadaki bütün idealler uygun ideal olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.2.4 $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, x dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I} - \lim x = \mathcal{L}$$

biçiminde gösterilir (Kostyrko vd. 2000).

Tanım 2.2.5 Eğer bir f fonksiyonu ve bir $x = (x_k)$ dizisi için $\mathcal{I} - \lim x_k = x_o$ olması $\mathcal{I} - \lim f(x_k) = (x_o)$ olmasını gerektiriyorsa f fonksiyonuna ideal süreklidir denir.

Tanım 2.2.6 Boştan farklı bir $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesi için

i. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
ii. Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$,
iii. Her $A \in \mathcal{F}$ ve her $B \supset$ A için $B \in \mathcal{F}$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesine $\mathbb{N}$ de bir süzgeç adı verilir (Kostyrko vd. 2000).

Eğer $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir gerçek ideal ise, bu durumda

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset \mathbb{N}: (\exists A \in \mathcal{I})(M = \mathbb{N} \backslash A)\}$$

sınıfına $\mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{I}$ ideali ile birleşen süzgeç denir (Kostyrko vd. 2000).

Tanım: 2.2.7 Eğer $\mathcal{I}$ nın karşılıklı ayrık kümelerinin herhangi bir $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ dizisi için bir $\{B_1, B_2, B_3, \dots\}$ dizisi var öyle ki her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \Delta B_i$ simetrik farkı sonlu ve

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$$

ise, $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ideali *AP*-özelliğine sahiptir denir (Kostyrko vd. 2000).

Lemma 2.2.1 $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, (AP) özelliğine sahip bir admissible ideal olmak üzere $F(\mathcal{I})$ filtresini alalım. Bu durumda, her i için $\{P_i\}_1^{\infty}$, $\mathbb{N}$ kümesinin alt kümelerinin sayılabilir bir ailesi ve $P_i \in F(\mathcal{I})$ olmak üzere $P \in F(\mathcal{I})$ ve her i için $P \backslash P_i$ sonlu bir küme olacak şekilde bir $P \subset \mathbb{N}$ kümesi vardır (Nabiev vd. 2007).

Şimdi de lacunary dizi kavramı tanıtılarak bir dizinin lacunary yakınsaklığı ve lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanımları verilecektir.

Tanım: 2.2.8 $\theta = \{p_r\}$ dizisi $(r = 1,2,3, \dots)$, $p_0 = 0$ ve $t_r = p_r - p_{r-1} \to \infty$ $(r \to \infty)$ olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir dizisi ise, bu dizi lacunary dizi olarak adlandırılır (Fridy ve Orhan 1993).

Çalışma boyunca $\theta = \{p_r\}$ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (p_{r-1}, p_r]$ ile belirtilip, ayrıca $\frac{p_r}{p_{r-1}}$ oranı ise q_r ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.9 $\theta = \{p_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{t_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - \mathcal{L}| = 0$$

olacak şekilde bir $\mathcal{L}$ reel sayısı varsa x dizisi $\mathcal{L}$ ye kuvvetli lacunary yakınsaktır denir (Fridy ve Orhan 1993).

Tanım 2.2.10 $\theta = \{p_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{t_r} |\{k \in I_r : |x_k - \mathcal{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{L}$ reel sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$S_\theta - \lim x = \mathcal{L}$$

biçiminde gösterilir (Fridy ve Orhan 1993).

2.3 2 −Metrik Uzaylarda Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.3.1 $X \neq \emptyset$ olsun. $d: X^3 \to \mathbb{R}$ dönüşümü için

(M1) $u, v \in X$ farklı elemanları verildiğinde, $d(u, v, w) \neq 0$ olacak şekilde bir $w \in X$ elemanı vardır,

(M2) Tüm $u, v, w \in X$ için u, v, w den en az ikisi eşit olduğunda $d(u, v, w) = 0$ olur,

(M3) Tüm $u, v, w \in X$ için $d(u, v, w) = d(u, w, v) = d(v, w, u)$ ve

(M4) Tüm $u, v, w, z \in X$ için $d(u, v, w) \leq d(u, v, z) + d(u, z, w) + d(z, v, w)$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir 2-metrik denir.

d, X üzerinde bir 2-metrik olduğunda, sıralı (X, d) ikilisine bir 2- metrik uzay olarak denir. 2- metrik $d(u, v, w)$ nin çok tipik bir örneği u, v, w tarafından gerilen üçgenin alanıdır.

Örnek 2.3.1 $X = [0,1]$ ve $d: X^3 \to \mathbb{R}$ olarak tanımlansın. $u, v, w \in X$ için

$$d(u, v, w) = min\{|u - v|, |v - w|, |w - u|\}$$

olarak tanımlanırsa, (X, d) bir 2- metrik uzaydır.

Tanım 2.3.2 Eğer $sup\{d(u,v,w) : u,v,w \in X\} < \infty$ ise (X,d) 2-metrik uzayına sınırlıdır denir.

Tanım 2.3.3 (x_n), (X,d) 2-metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer tüm $a \in X$ için

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m, a) = 0$$

oluyorsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.3.4 (x_n), (X,d) 2-metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer tüm $a \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x, a) = 0$$

oluyorsa, (x_n) dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir.

Tanım 2.3.5 Tam bir (X,d) 2-metrik uzay, X deki her Cauchy dizisinin X in bir elemanına yakınsadığı bir uzaydır.

3. 2-METRİK UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde Nuray (2020) tarafından literatüre kazandırılan çalışmadaki tanım, teorem ve örnekler not edilecektir. Öncelikle $2-$metrik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi ile lacunary istatistiksel yakınsaklık ve bazı kapsama ilişkileri verilecektir.

3.1 2-Metrik Uzaylarda Cesàro Yakınsaklık ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, $2-$metrik uzaylarda Cesàro yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık tanımları ve aralarındaki ilişkiler sunulacaktır. Çalışma boyunca (X, d) ikilisi $2-$metrik uzay olarak alınacaktır. Kısalık bakımından (X, d) yerine X alınacaktır.

Tanım 3.1.1 (x_n), X de bir dizi olsun. Eğer tüm $a \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x_k, x, a) = 0$$

sağlanıyor ise bu durumda, (x_n) dizisi bir $x \in X$ elemanına Cesàro yakınsaktır denir.

Cesàro yakınsak dizilerin kümesi

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_n) \subseteq \mathrm{X} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x_k, x, a) = 0, \text{bazı } x \text{ ler için} \right\}$$

ile gösterilir.

Tanım 3.1.2 (x_n), X de bir dizi olsun. Eğer tüm $a \in X$ ve her $\mathcal{E} > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k, l \leq n : d(x_k, x_l, a) \geq \mathcal{E}\}| = 0$$

veya eşdeğer olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k, l \leq n : d(x_k, x_l, a) < \mathcal{E}\}| = 1$$

ise, (x_n) dizisine istatistiksel Cauchy dizisidir denir. Bu durumda,

$$st - \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m, a) = 0$$

yazılır.

Tanım 3.1.3 (x_n), X de bir dizi olsun. Eğer tüm $a \in X$ ve her $\mathcal{E} > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(x_k, x, a) \geq \mathcal{E}\}| = 0$$

veya eşdeğer olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(x_k, x, a) < \mathcal{E}\}| = 1$$

ise, (x_n) dizisi bir $x \in X$ elemanına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda,

$$st - \lim_{n\to\infty} d(x_n, x, a) = 0$$

yazılır.

Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi

$$\mathcal{S} = \left\{(x_n) \subseteq X: \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(x_k, x, a) \geq \mathcal{E}\}| = 0, \text{bazı } x \text{ ler için}\right\}$$

ile gösterilir.

Metrik bir uzayda istatistiksel yakınsak bir dizi istatistiksel Cauchy dizisidir ancak $2-$ metrik bir uzayda istatistiksel yakınsak bir dizi istatistiksel Cauchy dizisi olmayabilir.

Örnek 3.1.1 $X = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$,

$$d: X^3 \to [0, \infty)$$

fonksiyonu aşağıdaki tanımlansın.

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{N} \text{ için } x \neq y \neq z \text{ ve } \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right\} \subset \{x, y, z\} \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi takdirde.} \end{cases}.$$

O halde, (X, d) tam bir $2-$ metrik uzaydır. Şimdi de (x_n) dizisi şu şekilde tanımlansın:

$$x_n = \begin{cases} 1, n \text{ tamkare sayı ise} \\ \frac{1}{n}, \text{aksi takdirde.} \end{cases}.$$

Açık olarak (x_n) dizisi 0 sayısına istatistiksel yakınsaktır ancak istatistiksel Cauchy dizisi değildir.

Teorem 3.1.1 (X, d) $2-$ metrik uzay ve d, X üzerinde istatistiksel sürekli olsun. Eğer X de (x_n) dizisi istatistiksel yakınsak ise bu durumda (x_n) istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat : Eğer $st - limx_n = x$ ise, o zaman d nin istatistiksel sürekliliğinden

$$st - \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m, x) = st - \lim_{n\to\infty} d(x_n, x, x) \qquad (1)$$

elde edilir. $2-$ metriğinin (iv) özelliği kullanılarak

$$d(x_n, x_m, a) \leq d(x_n, x, a) + d(x, x_m, a) + d(x_n, x_m, x)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten ve (1) eşitliğinden tüm $a \in X$ için,

$$st - \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m, a) = 0$$

elde edilir ki (x_n) istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 3.1.2 $(x_n), X$ de bir dizi olsun. Bu durumda,

1. Eğer (x_n) dizisi x noktasına Cesàro yakınsak ise bu durumda (x_n) dizisi x noktasına istatistiksel yakınsaktır.
2. Eğer (X, d) sınırlı ve (x_n) dizisi x noktasına istatistiksel yakınsak ise bu durumda (x_n) dizisi x noktasına Cesàro yakınsaktır.

İspat: 1. (x_n) dizisi x noktasına Cesàro yakınsak olsun. Her $\mathcal{E} > 0$ ve $a \in X$

$$\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{d}(x_k, x, a) = \left(\frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ d(x_k,x,a)\geq\mathcal{E}}}^{n} d(x_k, x, a) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ d(x_k,x,a)<\mathcal{E}}}^{n} d(x_k, x, a) \right)$$

$$\geq \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ d(x_k,x,a)\geq\mathcal{E}}}^{n} d(x_k, x, a)$$

$$\geq \frac{1}{n} |\{1 \leq k \leq n : d(x_k, x, a) \geq \mathcal{E}\}| \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

elde edilir ki dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{1 \leq k \leq n : d(x_k, x, a) \geq \mathcal{E}\}| = 0$$

yani, (x_n) dizisi x noktasına istatistiksel yakınsaktır.

2. Şimdi (x_n) dizisinin x noktasına istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. (X, d) sınırlı olduğundan, tüm k ve her $a \in X$ için $d(x_k, x, a) \leq K$ eşitsizliği geçerlidir. Buradan her $\mathcal{E} > 0$ ve her $a \in X$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x_k,x,a) = \frac{1}{n}\left(\sum_{\substack{k=1 \\ d(x_k,x,a)}}^{n} d(x_k,x,a) + \sum_{\substack{k=1 \\ d(x_k,x,a)}}^{n} d(x_k,x,a) \right)$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(\mathrm{K} \sum_{\substack{k=1 \\ d(x_k,x,a)\geq\mathcal{E}}}^{n} 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ d(x_k,x,a)<\mathcal{E}}}^{n} d(x_k,x,a) \right)$$

$$\leq \mathrm{K}\,\frac{1}{n}\,|\{1 \leq k \leq n : d(x_k,x,a) \geq \mathcal{E}\}| + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}$$

elde edilir ki böylece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x_k,x,a) = 0$$

yani, (x_n) dizisi x noktasına Cesàro yakınsaktır.

3.2 2 −Metrik Uzaylarda N_θ ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.2.1 $\theta = \{p_r\}$ herhangi bir lacunary dizi ve (x_n) X de bir dizi olsun. Tüm $a \in X$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{t_r}\sum_{k\in I_r} d(x_k,x,a) = 0$$

ise, bu durumda (x_n) dizisi bir $x \in X$ elemanına $\mathcal{N}_\theta$ −yakınsaktır denir. $\mathcal{N}_\theta$ −yakınsak dizilerin kümesi $\mathcal{N}_\theta$ olarak gösterilecektir.

Tanım 3.2.2 $\theta = \{p_r\}$ herhangi bir lacunary dizi ve (x_n) X de bir dizi olsun. Tüm $a \in X$ ve her $\mathcal{E} > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{t_r}|\{k \in I_r : d(x_k,x,a) \geq \mathcal{E}\}| = 0$$

veya eşdeğer olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{t_r}|\{k \in I_r : d(x_k,x,a) < \mathcal{E}\}| = 1$$

ise, bu durumda (x_n) dizisi bir $x \in X$ elemanına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Tüm lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi

$$\mathcal{S}_\theta = \{(x_n) \subseteq X : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{t_r} |\{k \in I_r : d(x_k, x, a) \geq \mathcal{E}\}| = 0, \quad \text{bazı x ler için}\}$$

ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 1in ispatına benzer, bu nedenle ispatsız olarak belirtiyoruz.

Teorem 3.2.1 $\theta = \{p_r\}$ herhangi bir lacunary dizi ve (x_n) X de bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1. Eğer (x_n) dizisi x noktasına $\mathcal{N}_\theta$-yakınsak ise (x_n) dizisi x noktasına $\mathcal{S}_\theta$-yakınsaktır.
2. Eğer (X, d) sınırlıysa ve (x_n) dizisi x noktasına $\mathcal{S}_\theta$-yakınsak ise (x_n) dizisi x noktasına $\mathcal{N}_\theta$-yakınsaktır.

Aşağıdaki teoremler $2-$metrik uzaylarda Cesaro yakınsaklık ile $\mathcal{N}_\theta$ $-$yakınsaklık arasındaki ve istatistiksel yakınsaklık ile lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkileri ifade etmektedir.

Teorem 3.2.2 $\theta = \{p_r\}$ herhangi bir lacunary dizi olsun. (X, d) $2-$ metrik bir uzaylarda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_\theta$ ancak ve ancak $\liminf_r \frac{p_r}{p_{r-1}} > 1$ dir.
2. $\mathcal{N}_\theta \subseteq \mathcal{C}$ ancak ve ancak $\limsup_r \frac{p_r}{p_{r-1}} < \infty$ dir.
3. $\mathcal{C} = \mathcal{N}_\theta$ ancak ve ancak $1 < \liminf_r \frac{p_r}{p_{r-1}} \leq \limsup_r \frac{p_r}{p_{r-1}} < \infty$ dur.

İspat: Sadece ilk ifade ispatlanacak. Diğerlerinin ispatı literatürde mevcut olan ve referanslarda bulunan makalelerdeki ispatlara benzer olarak yapılabilir.

Eğer

$$\liminf_r \frac{p_r}{p_{r-1}} > 1$$

ise, tüm $r \geq 1$ için

$$1 + \alpha \leq \frac{p_r}{p_{r-1}}$$

olacak şekilde $\alpha > 0$ vardır. (x_n) dizisinin bir x noktasına Cesaro toplanabilir olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla

$$\frac{1}{t_r}\sum_{k\in I_r} \mathrm{d}(x_k, x, a) = \frac{1}{t_r}\sum_{k=1}^{p_r} d(x_k, x, a) - \frac{1}{\mathrm{t}_r}\sum_{k=1}^{p_{r-1}} d(x_k, x, a)$$

$$= \frac{p_r}{t_r}\left(\frac{1}{p_r}\sum_{k=1}^{p_r} d(x_k, x, a)\right) - \frac{p_{r-1}}{t_r}\left(\frac{1}{p_{r-1}}\sum_{k=1}^{p_{r-1}} d(x_k, x, a)\right)$$

yazılabilir.

$$t_r = p_r - p_{r-1}$$

olduğuna göre

$$\frac{p_r}{t_r} \leq \frac{1+\alpha}{\alpha} \; ve \; \frac{p_{r-1}}{t_r} \leq \frac{1}{\alpha}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu nedenle, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı $r \to \infty$ olarak sıfıra yönelir, $x \in \mathcal{N}_\theta$ olduğu sonucuna varılır.

Şimdi

$$\liminf_r \frac{p_r}{p_{r-1}} > 1$$

olduğu kabul edilsin. $\theta = \{p_r\}$ lacunary dizisinin bir alt dizisi (p_{r_i}) seçebilir öyle ki

$$\frac{p_{r_i}}{p_{r_i-1}} < 1 + \frac{1}{i} \; ve \; \frac{p_{r_i-1}}{p_{r_i-1}} > i \, , \; r_i \geq r_{i-1} + 2$$

Şimdi Örnek 1.1 deki 2-metrik d göz önünde bulundurulup ve (x_k) dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \in I_{ri}, bazı\ i = 1,2, \ldots için \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, herhangi bir $x \in X$ ve tüm $a \in X$ için,

$$\frac{1}{t_{ri}}\sum_{k\in I_{ri}} d(x_k,x,a) = |\ 1-\mathrm{x}\ |, (\mathrm{i}\ =\ 1,2,3,\dots)$$

$$\frac{1}{t_r}\sum_{k\in I_r} d(x_k,x,a)\ =\ |\ \mathrm{x}\ |, (r\ \neq\ r_i)$$

elde edilir. Buradan $(x_k) \notin \mathcal{N}_\theta$ sonucu çıkar. Ancak (x_k) Cesàro yakınsaktır, çünkü m yeterince büyük herhangi bir tamsayı ise tek i bulunabilinir ki

$$p_{r_i-1} < m \leq\ p_{r_{i+1}-1}$$

ve

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} d(x_k,x,a) \leq\ \frac{p_{ri-1}+t_{ri}}{p_{ri-1}}\ \leq\ \frac{2}{\mathrm{i}}$$

olup, $m\ \rightarrow\ \infty$ için $(x_k) \in \mathcal{C}$ olduğu sonucu çıkar.

Teorem 3.2.3 $\theta = \{p_r\}$ herhangi bir lacunary dizi olsun. (X,d) 2− metrik bir uzaylarda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_\theta$ ancak ve ancak $\liminf_r \frac{p_r}{p_{r-1}} > 1$.
2. $\mathcal{S}_\theta \subseteq \mathcal{S}$ ancak ve ancak $\limsup_r \frac{\mathrm{p_r}}{\mathrm{p_{r-1}}} <\ \infty$.
3. $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\theta$ ancak ve ancak $1 < \liminf_r \frac{p_r}{p_{r-1}} \leq\ \limsup_r \frac{p_r}{p_{r-1}} < \infty$.

Teorem 3.2.4 $\theta = \{p_r\}$ herhangi bir lacunary dizi ve (X,d) 2 − metrik bir uzay olsun. Eğer $(x_n) \in \mathcal{S} \subseteq\ \mathcal{S}_\theta$ ise

$$\mathcal{S}_\theta - \lim(x_n) =\ \mathcal{S} - \lim(x_n)$$

dir.

İspat: $x \neq y$ olmak üzere

$$\mathcal{S} -\ \lim(x_n)\ = x \text{ ve } \mathcal{S}_\theta - \lim(x_n) =\ y$$

olsun. Bu durumda,

$$d(x,y,a)\ \neq\ 0$$

dir. (M3) ve (M4) ten tüm x_k,x,y,$a\ \in X$ için

$$d(x,y,a)\ \leq d(x_k,x,y) + d(x_k,x,a) + d(x_k,y,a) \qquad (2)$$

yazılabilir. Tüm $a \in X$ için, (2) eşitsizliğinden

$$\mathcal{E} < \frac{1}{3} d(x, y, a)$$

alınarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x_k, y, a) \geq \mathcal{E}\}| = 1$$

elde edilir. İstatistiksel limit ifadesinin i inci terimi düşünülürse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x_k, y, a) \geq \mathcal{E}\}| :$$

$$\frac{1}{k_i} \left| \left\{ k \in \bigcup_{r=1}^{i} I_r : d(x_k, y, a) \geq \mathcal{E} \right\} \right|$$

$$= \frac{1}{k_i} \sum_{r=1}^{i} |\{k \in I_r : d(x_k, y, a) \geq \mathcal{E}\}| \qquad (3)$$

$$= \frac{1}{\sum_{r=1}^{i} t_r} \sum_{r=1}^{i} t_r \frac{1}{t_r} |\{k \in I_r : d(x_k, y, a) \geq \mathcal{E}\}| \to 0.$$

$\theta = \{p_r\}$ bir lacunary dizi olduğundan (3) sıfıra yakınsayan dizinin düzenli ağırlıklı ortalama dönüşümüdür; öyle ki kendisi de $i \to \infty$ için sıfıra yakınsar. Ayrıca bu

$$\left\{ \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x_k, x, a) \geq \mathcal{E}\}| \right\}_n$$

nin bir alt dizisi olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x_k, y, a) \geq \mathcal{E}\}| \neq 1$$

sonucu elde edilir ki bu çelişki $x \neq y$ olamayacağını gösterir.

4. 2-METRİK UZAYLARDA İDEAL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, tezde orijinal olarak literatüre kazandırılan tanım, teorem ve örnekler not edilecektir. Bu bölüm temel olarak iki kısımdan oluşacaktır.

4.1 2-Metrik Uzaylarda İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda, öncelikle $2-$metrik uzayda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları tanıtılacak ve sonrasında bu yeni kavramlar arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 4.1.1 (x_n), X de bir dizi olsun. Eğer tüm $a \in X$ ve her $\mathcal{E} > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_n,L,a) \geq \mathcal{E}\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, (x_n) dizisi $L \in X$ sayısına $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} d(x_n, L, a) = 0$$

ile gösterilir.

Teorem 4.1.1 X te bir (x_n) dizisi L ye yakınsak ise, (x_n) dizisi L ye $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

İspat: (x_n) dizisinin X te L ye yakınsak olsun. Bu durumda, her $\mathcal{E} > 0$ için bir $n_0 = n_0(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki tüm $a \in X$ ve $n > n_0$ için

$$d(x_n, L, \mathrm{a}) < \mathcal{E}$$

dır. Buradan, her $\mathcal{E} > 0$ ve tüm $a \in X$ için

$$A_{\mathcal{E}} = \{ n \in \mathbb{N} : d(x_n, L, a) \geq \mathcal{E} \} \subseteq \{1,2,3, \ldots\ldots, n_0 \}$$

ve $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olduğundan,

$$\{1,2,3, \ldots\ldots, n_0 \} \in \mathcal{I}$$

ve buradan da

$$A_{\mathcal{E}} \in \mathcal{I}$$

olduğu açıktır. Böylece, (x_n) dizisi X te L ye $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

Tanım 4.1.2 (x_n), X de bir dizi olsun. Eğer bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \ (\mathbb{N}\backslash M \in \mathcal{I})$$

kümesi var öyle ki tüm $a \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, L, \mathrm{a}) = 0$$

oluyorsa, bu durumda (x_n) dizisi X te L ye $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I}^*\text{—}\lim_{n\to\infty} d(x_n, L, \mathrm{a}) = 0$$

ile gösterilir.

Teorem 4.1.2 X te bir (x_n) dizisi L ye $\mathcal{I}^*$-yakınsak ise, (x_n) dizisi L ye $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

İspat: (x_n) dizisi X'te L ye $\mathcal{I}^*$-yakınsak olsun. Bu durumda,

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\ (\mathbb{N}\backslash M \in \mathcal{I})$$

kümesi var öyle ki tüm $a \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, L, \mathrm{a}) = 0$$

dır. Buradan da her $\mathcal{E} > 0$ için bir $k_0 = k_0(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki tüm $a \in X$ ve $k > k_0$ için

$$d(x_{m_k}, L, \mathrm{a}) < \mathcal{E}$$

olduğu açıktır. Buradan da, her $\mathcal{E} > 0$ ve tüm $a \in X$ için

$$A_{\mathcal{E}} = \{\, n \in \mathbb{N} : d(x_n, L, a) \geq \mathcal{E} \,\} \subseteq H \cup \{m_1 < m_2 < \cdots < m_{k_0}\}$$

elde edilir. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olduğundan, açık olarak

$$H \cup \{m_1 < m_2 < \cdots < m_{k_0}\} \in \mathcal{I}$$

ve böylece

$$A_{\mathcal{E}} \in \mathcal{I}$$

elde edilir ki dolayısıyla, (x_n) dizisi X te L ye $\mathcal{I}$-yakınsaktır.

Teorem 4.1.3 (x_n), X de bir dizi ve $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğine sahip olsun. Bu durumda, (x_n) dizisi L ye $\mathcal{I}$-yakınsak ise, (x_n) dizisi L ye $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır.

İspat: $\mathcal{I}$ idealinin (AP) özelliğine sahip olduğu ve (x_n) dizisinin X te L ye $\mathcal{I}$-yakınsak olduğu kabul edilsin. Bu durumda, her $\mathcal{E} > 0$ ve tüm $a \in X$ için

$$U_{\mathcal{E}} = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, L, \mathrm{a}) \geq \mathcal{E}\} \in \mathcal{I}$$

dır. Şimdi, $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ için

$$U_1 = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, L, \mathrm{a}) \geq 1\}$$

ve

$$U_n = \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq d(x_n, L, \mathrm{a}) < \frac{1}{n-1}\right\}$$

tanımlansın. $r \neq s$ için

$$U_r \cap U_s = \emptyset$$

olduğu açıktır. (AP) özelliğe göre, $s \in \mathbb{N}$ için $U_s \Delta\, V_s$ sonlu kümeler olacak şekilde $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümeleri dizisi vardır ve

$$V = \bigcup_{s=1}^{\infty} V_s \in \mathcal{I}$$

dır. Şimdi, $M = \mathbb{N} \setminus V$ için

(1) $$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (n\in M)}} d(x_n, L, a) = 0$$

olduğu kanıtlanmalıdır. Şimdi

$$\frac{1}{i+1} < \delta$$

olacak şekilde $i \in \mathbb{N}$ seçilsin. Bu durumda,

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, L, a) \geq \delta\} \subset \bigcup_{s=1}^{i+1} U_s$$

dir. $s = 1,2, \ldots$ için $U_s \Delta\, V_s$ ler sonlu kümeler olduğundan $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

(2) $$\left(\bigcup_{s=1}^{i+1} V_s\right) \cap \{n \in \mathbb{N}: n > n_0\} = \left(\bigcup_{s=1}^{i+1} U_s\right) \cap \{n \in \mathbb{N}: n > n_0\}$$

dir. $n > n_0$ ve $n \notin V$ ise, bu durumda

$$n \notin \bigcup_{s=1}^{i+1} V_s$$

ve dolayısıyla (2) uyarınca

$$n \notin \bigcup_{s=1}^{i+1} U_s$$

olur. Böylece,

$$d(x_n, L, a) < \frac{1}{n+1} < \delta$$

ve böylece (1) elde edilir.

4.2 2-Metrik Uzaylarda İdeal Cauchy Dizisi

Bu kısımda, $2-$metrik uzayda $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi kavramları tanıtılarak aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 4.2.1 (x_n), X de bir dizi olsun. Tüm $a \in X$ ve her $\mathcal{E} > 0$ için $N = N(\mathcal{E})$ var öyle ki

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_n . x_N, a) \geq \mathcal{E}\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, bu durumda (x_n) dizisine $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi denir.

Örnek 4.2.1 $X = \left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}, \ldots\right\}$ olsun ve $\mathcal{I}$ ideali $\mathcal{I}_\delta$ ideali olarak alınsın.

$$d : X^3 \longrightarrow [0,\infty)$$

$$d(x,y,z) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \neq y \neq z \text{ ve } \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right\} \subset \{x,y,z\} \text{ için } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

tanımlansın. O halde, (X,d) tam bir $2-$metrik uzaydır. (x_n) dizisi

$$x_n = \begin{cases} n, & n, \text{kare tamsayısıdır} \\ \frac{1}{n}, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olsun. (x_n) dizisi 0 a $\mathcal{I}_\delta$-yakınsak olmakla birlikte, $\mathcal{I}_\delta$-Cauchy dizisi değildir.

Teorem 4.2.1 (X,d) $2-$metrik uzay ve d, X üzerinde ideal olarak sürekli olsun. Eğer (x_n) dizisi $\mathcal{I}$-yakınsak ise, (x_n) $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

İspat: $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n\to 0} x_n = x$ olsun. Bu durumda, d nin ideal sürekliliğinden

$$\mathcal{I} - \lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n, a) = \mathcal{I} - \lim_{m\to\infty} d(x_n, x, x) \tag{3}$$

dir. her $\mathcal{E} > 0$ için $N = N(\mathcal{E}) = n$ olsun. $2-$metrik uzay tanımındaki (iv) özelliği gereği, tüm $a \in X$ için

$$d(x_m, x_N, a) \leq d(x_m, x, a) + d(x, x_N, a) + d(x_m, x_N, x) \tag{4}$$

yazılabilir. (4) eşitsizliği ve (3) eşitliğinden tüm $a \in X$ için,

$$\mathcal{I} - \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_N, a) = 0$$

yani (x_n), $\mathcal{I}-$Cauchy dizisidir.

Tanım 4.2.2 (x_n), X de bir dizi olsun. Bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \ (\mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I})$$

kümesi için $(x_M) = (x_{m_k})$ alt dizisi X içinde bir Cauchy dizisi ise, yani tüm $a \in X$ için

$$\lim_{k,p\to\infty} d(x_{m_k}, x_{m_p}, a) = 0$$

ise, (x_n) dizisine $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.2.2 X deki bir (x_n) dizi $\mathcal{I}^*$ −Cauchy dizisi ise, bu durumda (x_n), $\mathcal{I}$ −Cauchy dizisidir.

İspat: X deki (x_n) dizisi $\mathcal{I}^*$ −Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, tanım gereğince

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \ (\mathbb{N}\backslash M \in \mathcal{I})$$

kümesi vardır öyle ki her $\mathcal{E} > 0$ için $k_0 = k_0(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki tüm $a \in X$ ve tüm $k, p > k_0$ için $k > k_0$ olduğunda

$$d(x_{m_k}, x_{m_p}, a) < \mathcal{E}$$

dir. $N = N(\mathcal{E}) = m_{k_0+1}$ olsun. Buradan her $\mathcal{E} > 0$ ve tüm $a \in X$ için

$$\mathrm{d}(x_{m_k}, x_N, a) < \mathcal{E}$$

dir. Böylece, $\mathbb{N}\backslash M = H \in \mathcal{I}$, her $\mathcal{E} > 0$ ve tüm $a \in X$ için

$$A_{\mathcal{E}} = \{ n \in \mathbb{N} : d(x_{m_k}, x_N, a) \geq \mathcal{E} \} \subseteq H \cup \{m_1 < m_2 < \cdots < m_{k_0}\}$$

ve $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan, açık olarak

$$H \cup \{m_1 < m_2 < \cdots < m_{k_0}\} \in \mathcal{I}$$

ve buradan da $A_{\mathcal{E}} \in \mathcal{I}$ elde edilir. Dolayısıyla da (x_n), X de bir $\mathcal{I}$ −Cauchy dizisidir.

Teorem 4.2.3 $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğine sahip uygun bir ideal ise $\mathcal{I}$ −Cauchy dizisi ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi kavramları 2 −metrik uzay X de çakışır.

İspat: X içindeki (x_n) dizisi $\mathcal{I}^*$ −Cauchy dizisi olsun. O halde, Teorem 4.2.2'ye göre, (AP) özelliği olmadan, (x_n) dizisi X de bir $\mathcal{I}$ −Cauchy dizisidir. Şimdi, X deki (x_n) dizisi $\mathcal{I}$ −Cauchy dizisi olsun. Tanım gereği, her $\mathcal{E} > 0$ için bir $N = N(\mathcal{E})$ vardır öyle ki tüm $a \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N}: d(x_n, x_N, a) \geq \mathcal{E}\} \in \mathcal{I}$$

dir.

Tüm $a \in X$ ve $i = 1,2,\ldots$ için $m_i = N\left(\frac{1}{i}\right)$ olmak üzere

$$P_i = \left\{n \in \mathbb{N}: d(x_n, x_{m_i}, a) < \frac{1}{i}\right\},$$

kümesini alalım. Bu durumda, $i = 1,2,\ldots$ için $P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğu açıktır. Özellik (AP) ve Lemma 2.2.1 ile, bir $Q \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır ve tüm $i \in \mathbb{N}$ için $Q \backslash Q_i$ sonludur. Kanıt için $i > \frac{2}{\mathcal{E}}$ olacak şekilde $\mathcal{E} > 0$ ve $i \in \mathbb{N}$ alınsın. $m, n \in Q$ ise, $Q \backslash Q_i$ sonlu bir küme ve böylece $u = u(i)$ vardır öyle ki $m, n > u(i)$ olacak şekilde $m, n \in Q$ dir. Böylece, tüm $a \in X$ ve $m, n > u(i)$ için

$$d\left(x_m, x_{m_i}, a\right) < \frac{1}{i} \text{ ve } d(x_n, x_{m_i}, a) < \frac{1}{i}$$

ve böylece,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n, a) &< d\left(x_m, x_{m_i}, a\right) + d(x_n, x_{m_i}, a) \\ &< \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = \frac{2}{i} < \mathcal{E} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, tüm $a \in X$ için

$$\lim_{\substack{m,n \to \infty \\ (m,n \in Q)}} d(x_m, x_n, a) = 0$$

ve böylece $(x_n), X$ de bir $\mathcal{I}^*$ −Cauchy dizisidir.

5. KAYNAKLAR

Aliouche A, Simpson C, 2012, Fixed points and lines in 2-metric spaces, Advances in Mathematics 229(1), 668–690.

Balcı M, 2016, Matematik Analiz-I, Palme Yayınevi, Ankara.

Başar F, 2012, Summability Theory and its Applications, Bentham Science Publishers, İstanbul.

Bayraktar M, 2006, Fonksiyonel Analiz, Pegem Akademi Yayınevi, Ankara.

Connor J, 1988, The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis 8, 47–63.

Connor J, Grosse-Erdmann K G, 2003, Sequential definitions of continuity for real functions, Rocky Mountain Journal of Mathematics. 33(1), 93–121.

Dems K, 2004/2005, On $\mathcal{I}$-Cauchy sequence, Real Analysis Exchange 30, 123–128.

Fast H, 1951, Sur la convergence statistigue, Colloquium Mathematicum 2, 241-244.

Freese R, Cho Y, 2001, Geometry of linear 2-normed spaces, Nova Science Publishers, Hauppauge, NY.

Freedman A R, Sember J J, Raphael M, 1978, Some Ces`aro-Type Summability Spaces, Proceedings of the London Mathematical Society 37(3), 508–520.

Fridy J A, 1985, On statistical convergence, Analysis 5, 301-313.

Fridy J A, Orhan C, 1993, Lacunary statistical convergence, Pacific Journal of Mathematics 160, 43-51.

Fridy J A, Orhan C, 1997, Statistical limit superiorand limit inferior, Proceedings of the American Mathematical Society, 125(12), 3625-3631.

Gahler S, 1963, 2-metric Raume and ihre topologische strucktur, Mathematische Nachrichten 26, 115–148.

Gahler S, 1965, Uber die unifromisieberkeit 2-metrischer Raume, Mathematische Nachrichten. 28, 235–244.

Gezer F, Karakuş S, 2005, $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}$*-convergent function sequences, Mathematical Communications 10, 71–80.

Gülle E, Ulusu U, 2013, Wijsman deferred invariant statistical and strong p-deferred invariant equivalence of order a, Fundamental Journal of Applied Mathematics. 6(4), 211–217.

Hardy G H, Wright E M, 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, fourth ed., Oxford.

Iseki K, 1975, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Mathematics Seminar Notes XIX.

Khan M, 1980, On fixed point theorems in 2-metric space, Publications de l'Institut Mathématique. 41, 107–112.

Kişi Ö, Güler E, 2018, $\mathcal{I}$-Cesa`ro summability of a sequence of order a of random variables in probability, Fundamental Journal of Applied Mathematics 1(2), 157–161.

Kişi Ö, 2021, On $\mathcal{I}_\theta$-convergence in neutrosophic normed spaces, Fundam. Journal of Applied Mathematics. 4(2), 67–76.

Kostyrko P, Salat T, Wilczynski W, 2000, $\mathcal{I}$-Convergence, Real Analysis Exchange 26(2), 669–686.

Lahiri B K, Das P, Dey L K, 2011, Cantor's theorem in 2-metric spaces and its applications to fixed point theorems, Taiwanese Journal of Mathematics 15(1), 337–352.

Liu Z, Zhang F, 2001, Characterization of common fixed points in 2-metric spaces, Rostocker Mathematisches Kolloquium. 55, 49–64.

Mursaleen M, Başar F, 2020, Sequence Spaces: Topics in Modern Summability Theory, CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York.

Nabiev A, Pehlivan S, Gürdal M, 2007, On $\mathcal{I}$-Cauchy Sequence, Taiwanese Journal of Mathematics 11, 569–576.

Naidu S V R, Prasad J R, 1986, Fixed point theorem in 2-metric spaces, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 17, 974–93.

Naidu S V R, 2001, Some fixed point theorems in metric and 2-metric spaces International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 28, 625–636.

Nuray F, 2020, Statistical convergence in 2-metric spaces, Journal of Classical Analysis 16(2), 115–123.

Rhoades B, 1979, Contraction type mappings on a 2-metric space, Mathematische Nachrichten. 91, 151–155.

Savaş E, Yamancı U, Gürdal M, 2019, $\mathcal{I}$-lacunary statistical convergence of weighted g via modulus functions in 2-normed spaces, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics. 68(2), 2324–2332.

Schoenberg I J, 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, American Mathematical Monthly 66, 361–375.

Singh S L, Tiwari B, Gupta V, 1980, Common fixed points of commuting mappings in 2-metric spaces and an application, Mathematische Nachrichten. 95, 293–297.

Ulusu U, Nuray F, Dündar E, 2021, $\mathcal{I}$-limit points and $\mathcal{I}$-cluster points of functions defined on amenable semigroups, Fundamental Journal of Applied Mathematics. 4(1), 45–48.

Yamancı U, Gürdal M, 2013, On lacunary ideal convergence in random n-normed space, Journal of Mathematics. 2013, Article ID 868457.

Yamancı U, Gürdal M, 2014, $\mathcal{I}$-statistical convergence in 2-normed space, Arab Journal of Mathematical Sciences. 20(1), 41–47.

Yamancı U, Savas¸ E, Gürdal M, 2020, $\mathcal{I}$-localized sequence in two normed spaces, Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 14(3), 491–503.

White A, 1976, 2-Banach spaces, Mathematische Nachrichten. 42, 43–60.

ÖZGEÇMİŞ