GENELLEŞTİRİLMİŞ RİEMANN–LİOUVILLE İNTEGRALLERİ İLE s-KONVEKS FONKSİYONLAR YARDIMIYLA TRAPEZOİD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TUĞBA AKÇA

Danışman
Prof. Dr. MEHMET EYÜP KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2025

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİEMANN–LİOUVILLE İNTEGRALLERİ İLE KOORDİNATLARDA s-KONVEKS FONKSİYONLAR YARDIMIYLA TRAPEZOİD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

TUĞBA AKÇA

Danışman
PROF. DR. MEHMET EYÜP KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2025

TEZ ONAY SAYFASI

Tuğba Akça tarafından hazırlanan "Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri İçeren $s-$Konveks Fonksiyonlar İçin Trapezoid Tipli Eşitsizlikler" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 26/12/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Üye : Doç. Dr. Fatih HEZENCİ
Düzce Üniv., Fen Edebiyat Fak. ......

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tuğba YALÇIN UZUN
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak. ......

Üye : Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak. ......

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../.......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/12/2025

......

Tuğba Akça

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİEMANN–LIOUVILLE İNTEGRALLERİ İLE KOORDİNATLARDA s-KONVEKS FONKSİYONLAR YARDIMIYLA TRAPEZOİD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Tuğba AKÇA

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Bu tez çalışması, koordinatlarda s-konvekslik kavramını temel alan beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konveks fonksiyonların klasik yapısı ve bu yapının çeşitli genelleştirmeleri ele alınmış, s-konvekslik kavramının doğuşu, matematiksel arka planı ve literatürdeki gelişim süreci ayrıntılı olarak sunulmuştur. Ayrıca, koordinatlarda konvekslik ve ilgili türevsel yapılar karşılaştırılarak s-konveksliğin analitik açıdan sağladığı katkılar tartışılmıştır.

İkinci bölümde, koordinatlarda s-konveks fonksiyonların tanımı, temel özellikleri ve bu fonksiyonların matematiksel analiz açısından sağladığı avantajlar detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Bu kapsamda, s-konveks fonksiyonların koordinat düzlemindeki davranışları, monotonluk, sınırlılık ve türevsel yapı ile olan ilişkisi incelenmiş, ayrıca bu fonksiyonlar yardımı ile elde edilen temel lemmalar ve teoremler sunulmuştur.

Üçüncü bölüm, s-konveks fonksiyonlar kullanılarak yeni integral ve türevsel eşitsizliklerin oluşturulmasına ayrılmıştır. Bu bölümde, özellikle Hermite–Hadamard, Jensen ve Ostrowski tipi eşitsizlikler s-konvekslik çerçevesinde yeniden yorumlanmış ve elde edilen sonuçlar literatürdeki klasik eşitsizliklerle karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, koordinatlarda s-konveks fonksiyonlar yardımı ile türevsel araçlara dayalı yeni yaklaşımlar geliştirilmiş, integral türünden eşitsizliklerin daha genel bir çerçeveye taşınması sağlanmıştır.

Tezin son bölümü olan beşinci bölümde, çalışma boyunca elde edilen bulgular genel bir çerçevede değerlendirilmiş ve gelecekte yapılabilecek çalışmalara dair öneriler sunulmuştur.

2025, viii + 55 sayfa

Anahtar Kelimeler : Konveks fonksiyonlar, s-konveks fonksiyonlar, Koordinatlarda konvekslik, İntegral eşitsizlikleri, Hermite–Hadamard tipi eşitsizlikler.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

GENERALIZED INTEGRAL INEQUALITIES BASED ON CONFORMABLE INTEGRALS VIA S-CONVEX FUNCTIONS IN CO-ORDINATES

Tuğba AKÇA

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

This thesis study consists of five chapters. In the first chapter, the fundamental notions of the Inequality Theory and the development of convexity-based structures are introduced. A historical overview of convex functions and their generalizations is provided to build a conceptual framework for the study. In the second chapter, basic definitions and properties of convex functions, convexity in co-ordinates, and the concept of s-convexity are presented in detail. Analytical motivations for the use of s-convex functions and their structural differences from classical convexity are also discussed.

In the third chapter, several known lemmas and theorems related to integral inequalities involving s-convexity in co-ordinates are reviewed. This section forms the theoretical foundation of the thesis by examining existing results in the literature and establishing the analytical tools required for deriving new inequalities. In the fourth chapter, by utilizing generalized integral approaches and the structural characteristics of s-convex functions in co-ordinates, new integral inequalities of Hermite–Hadamard and related types are obtained. These results extend the scope of existing inequalities and provide broader applicability within the theory of convexity.

In the fifth chapter, which is the final section of the thesis, the findings obtained

throughout the study are summarized, and related works in the literature are listed. Additionally, possible directions for future research in the field of generalized convexity are discussed.

2025, viii + 55 pages

Keywords : Convex functions, s-convex functions, Convexity in co-ordinates, Integral inequalities, Hermite–Hadamard type inequalities.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında, konu belirleme, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve bilimsel desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Eyüp KIRIŞ'a en derin şükranlarımı sunarım.

Lisansüstü eğitim-öğretim hayatım boyunca bilgi ve tecrübeleriyle ufkumu açan, değerli dersler aldığım tüm hocalarıma ve akademik camianın kıymetli üyelerine teşekkür ederim.

Bu yüksek lisans sürecinde tanışmaktan onur duyduğum ve destekleriyle motivasyonumu artıran sevgili arkadaşlarıma, özellikle de Gözde Bayrak ve Murat Yücel Ay'a içten teşekkürlerimi iletirim.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan, bu zorlu süreçte sabır ve güven kaynağım olan annem ve babama; varlığıyla yaşam kaynağım, en büyük ilhamım olan sevgili kızım Eylül'e sonsuz teşekkür ederim.

Tuğba AKÇA

Afyonkarahisar 2025

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

(x_n)	Reel sayı dizisi
$\lim x_n$	x_n dizisinin limiti
$x_n \to L$	x_n dizisinin L ye yakınsaması
$\|A\|$	A kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$s.s.n$	Sırasıyla hemen her n
$st - \lim x_k$	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti
S	S-konveks fonksiyon
$S[a,b]$	$[a,b]$ aralığında S-konveks fonksiyonun tanım kümesi
$\mathcal{I}$	İdeal
$\emptyset$	Boş küme
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel uzay
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi

Kısaltmalar

(x_n)	Reel sayı dizisi
$\lim x_n$	x_n dizisinin limiti
$x_n \to L$	x_n dizisinin L ye yakınsaması
$\|A\|$	A kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$s.s.n$	Sırasıyla hemen her n
$st - \lim x_k$	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti
S	S-konveks fonksiyon
$S[a,b]$	$[a,b]$ aralığında S-konveks fonksiyonun tanım kümesi
$\mathcal{I} - \lim x_n$	(x_n) dizisinin $\mathcal{I}$-limiti
$\mathcal{I}_f$	$\mathbb{N}$ nin sonlu altkümelerinden oluşan ideal
$\mathcal{I}_\delta$	$\mathbb{N}$ nin doğal yoğunluğu sıfır olan altkümelerinden oluşan ideal
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi

1 GİRİŞ

Matematiksel analiz, soyut yapılar aracılığı ile gerçek dünyadaki problemleri anlamak ve çözmek için vazgeçilmez bir disiplindir. Bu alanın temel kavramlarından biri olan konvekslik, fonksiyonların davranışlarını anlamamıza ve bunlar üzerinde geliştirilen teorik araçlarla matematiksel problemlere etkin çözümler sunmamıza olanak tanır. Konveks fonksiyonlar üzerine geliştirilen klasik teoriler, optimizasyon, integral eşitsizlikleri ve hata analizinde temel bir rol oynar. Ancak, modern matematiksel analizde daha esnek ve genellenebilir kavramlar ihtiyacını karşılamak amacıyla s-konvekslik kavramı geliştirilmiştir.

Klasik konveks fonksiyonlar, bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde tanımlı bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, her $x, y \in I$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar olarak tanımlanır (Boyd ve Vandenberghe 2004). Bu geometrik ve cebirsel yapı, fonksiyonların minimum ve maksimum değerlerinin belirlenmesinde ve optimizasyon problemlerinin çözümünde kritik öneme sahiptir. Bu alandaki en önemli sonuçlardan biri, konveks fonksiyonlar için Hermite–Hadamard (H–H) eşitsizliğidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Bu temel eşitsizlik, integral hesabın fonksiyon tahmini ve nümerik integrasyon yöntemleri (özellikle trapezoid kuralı) için temel teşkil etmiş ve birçok genelleştirmeye ilham vermiştir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Ancak, klasik konvekslik tanımının kısıtlayıcılığı, bazı fonksiyon sınıflarını analiz dışı bırakmıştır. Bu ihtiyacı karşılamak üzere geliştirilen genelleştirilmiş konvekslik kavramları arasında, s-konvekslik, özellikle integral eşitsizlikleri teorisinde büyük ilgi görmüştür.

1.1 S-Konvekslik Kavramının Gelişimi

s-Konvekslik, klasik konveksliğin bir genellemesi olarak (Orlicz 1961) tarafından tanıtılmış, ancak kavramın formel matematiksel yapısı ilk kez Breckner (1978) tarafından, daha sonra da Hudzik ve Maligranda 1994'te s-konveks fonksiyonlar olarak yeniden tanımlanmıştır. Bir A kümesi üzerinde s-konvekslik, bir $s \in (0, 1]$ parametresine bağlı olarak tanımlanır. $s = 1$ olduğunda, bu tanım klasik konveksliğe indirgenir, bu da s-konveksliğin, konveks fonksiyonlardan daha geniş bir fonksiyon yelpazesini kapsamasını sağlar.

s-Konvekslik, klasik konveks fonksiyonlardan daha geniş bir fonksiyon yelpazesini kapsar ve fonksiyonların davranışlarını detaylı bir şekilde analiz edebilmemizi sağlar. Bu fonksiyon sınıfı, hem teorik matematiksel analiz hem de sayısal yöntemler için güçlü araçlardır; integral eşitsizliklerinin genellenmesi, trapezoid ve Simpson tipi integrasyon yaklaşımlarında hata tahmini ve optimizasyon problemleri bu kapsamda önemli uygulama alanları olarak ortaya çıkar.

Özellikle bu tez çalışmasına konu olan **koordinatlarda s-konveks fonksiyonlar** (s-convex functions on co-ordinates), çok değişkenli analizde ve dikdörtgensel bölgeler üzerindeki uygulamalarda büyük önem taşır. Bir $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun koordinatlarda s-konveks olması, her bir değişkenin diğer değişken sabit tutulduğunda s-konvekslik özelliğini sağlaması anlamına gelir (Alp vd. 2011). Bu genelleme, iki boyutlu integral eşitsizliklerinin elde edilmesinde ve fonksiyonların karmaşık yapılarını analiz etmede temel bir araç sunar.

1.2 Genelleştirilmiş İntegral Yaklaşımları

Son yıllarda, klasik türev ve integral operatörlerinin genelleştirilmesiyle elde edilen yeni integral yaklaşımları, integral eşitsizlikleri teorisine yeni bir boyut katmıştır.

Bu genelleştirmelerden biri olan **Conformable İntegraller**, klasik Riemann integrallerinin özelliklerini büyük ölçüde koruyan, ancak daha esnek bir yapı sunan bir operatör çiftidir (Khalil vd. 2014).

Konform (Conformable) integrallerin s-konveks fonksiyonlar ile birleştirilmesi, klasik Hermite–Hadamard eşitsizliğinin çok daha geniş bir alana taşınmasına olanak tanır. Klasik operatörlerin yetersiz kaldığı durumlarda, Conformable integrallerin devreye girmesi, türevsel ve integral özelliklerin s-konveks fonksiyonlar altındaki davranışlarını daha hassas bir şekilde modellememizi sağlar. Literatürde, s-konveks fonksiyonlar için Conformable integral operatörleri kullanılarak Hermite–Hadamard tipi eşitsizliklerin (Kiriş ve Akça 2024, Kiriş vd. 2025) başarıyla elde edildiği görülmektedir.

1.3 Tezin Amacı ve Yapısı

Bu tez çalışmasının temel amacı, koordinatlarda s-konveks fonksiyonlar sınıfını Conformable integral operatörleri çerçevesinde incelemek ve bu yapıları kullanarak Hermite–Hadamard (H–H) ve ilgili tiplerde yeni integral eşitsizlikleri elde etmektir. Elde edilen sonuçlar, klasik konvekslik ve integral eşitsizlikleri teorisinin s-konvekslik ve genelleştirilmiş integral yaklaşımları bağlamında nasıl genişletilebileceğini göstermeyi amaçlamaktadır.

Tez, toplam beş ana bölümden oluşmaktadır:

Birinci Bölüm (Giriş): Konvekslik teorisinin tarihsel gelişimini, s-konvekslik kavramının matematiksel motivasyonunu ve Conformable integrallerin integral eşitsizlikleri teorisindeki önemini ele alarak tezin amacını ve yapısını sunar.

İkinci Bölüm (Temel Kavramlar): Çalışmanın temelini oluşturan klasik konveks fonksiyonlar, koordinatlarda konvekslik, s-konvekslik ve Conformable türev/integral operatörlerinin tanımları, temel özellikleri ve literatürdeki ilgili lemmaları detaylı bir şekilde sunar.

Üçüncü Bölüm: s-konveks fonksiyonlar ve klasik integral operatörleri kullanılarak bilinen Hermite–Hadamard ve trapezoid tipi eşitsizlikleri inceleyerek, tezde geliştirilecek yeni sonuçlar için bir başlangıç noktası oluşturur.

Dördüncü Bölüm: Tezin ana özgün sonuçlarının yer aldığı bölümdür. Koordinatlarda s-konveks fonksiyonlar kullanılarak Conformable integral operatörlerine dayalı yeni Hermite–Hadamard tipi integral eşitsizlikleri ve ilgili türevsel yaklaşımlar elde edilir.

Beşinci Bölüm (Sonuç ve Öneriler): Tez boyunca elde edilen tüm bulgular özetlenir, sonuçlar literatürdeki mevcut çalışmalarla karşılaştırılır ve genelleştirilmiş konvekslik teorisinin gelecekteki potansiyel araştırma yönlerine dair öneriler sunulur.

Bu çalışma ile, s-konveks fonksiyonlar ve genelleştirilmiş integral operatörleri arasındaki ilişki derinleştirilerek, matematiksel analiz ve uygulamalı matematik alanlarına teorik ve pratik yeni katkılar sunulması hedeflenmektedir.

2 TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölüm tezde yer alan bazı temel tanım, teorem ve teoremlerin ispatından oluşmaktadır.

2.1 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1. $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0, 1]$ için;

$$(1-t)x + ty \in K$$

oluyorsa, $K \subseteq \mathbb{R}$ kümesine klasik anlamda *Konveks Küme* denir (Dragomir ve Pearce 2000).

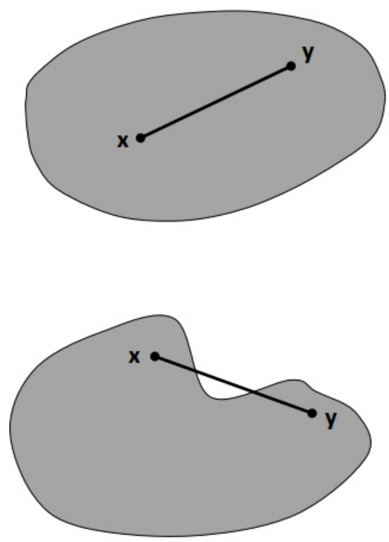

Figure 1: Konveks küme örneği

Tanım 2.2. $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0, 1]$ için;

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

oluyorsa, $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *Konveks Fonksiyon* denir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.3. I kümesinin konveks bir küme olduğunu varsayalım. Fonksiyon $\psi : I \to \mathbb{R}$ eğer aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa I üzerinde konveks olarak tanımlanır:(Dragomir ve Pearce 2000)

$$\psi(\tau\chi + (1-\tau)\ \varphi) \leq \tau\psi(\chi) + (1-\tau)\psi(\varphi) \tag{1}$$

tüm $(\chi, \varphi) \in I$ ve $\tau \in [0,1]$ için. Fonksiyon ψ, I üzerinde konkav ise eşitsizlik (1) tersine döner.

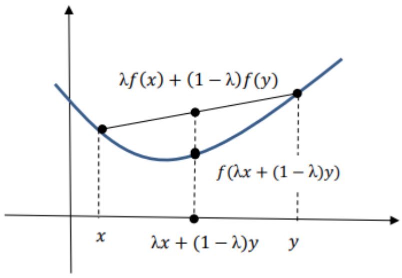

Figure 2: Konveks fonksiyon grafiği

Tanım 2.4. Fonksiyon $\psi : \Delta \to \mathbb{R}$ "Koordinatlı konveks" terimi ile tanımlanır. Δ, tüm $(\chi, \varphi), (\upsilon, \omega) \in \Delta$ ve $\tau, \xi \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır:(Dragomir 2001)

$$\begin{aligned} & \psi(\tau\chi + (1-\tau)\ \varphi, \xi u + (1-\xi)\ \omega) \\ \leq\ & \tau\xi\ \psi(\chi, \upsilon) + \tau(1-\xi)\psi(\chi, \omega) + \xi(1-\tau)\psi(\varphi, \upsilon) + (1-\tau)(1-\xi)\psi(\varphi, \omega). \end{aligned}$$

Tüm konveks fonksiyonların verilen koordinatlarla konveks olduğu açıktır. Ancak, koordinatlarda konveks olan her fonksiyonun mutlaka konveks olacağı durumu geçerli değildir (Dragomir 2001).

Tanım 2.5. $h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\psi : I \to \mathbb{R}$ bir h-konveks fonksiyon ise veya ψ $SX\,(h, I)$ Sınıfına ait ise, ψ negatif olmayan ve tüm $\chi, \varphi \in I, \tau \in (0,1)$ için şu eşitsizlik sağlanmalıdır:

$$\psi(\tau\chi + (1-\tau)\varphi) \leq h(\tau)\psi(\chi) + h(1-\tau)\psi(\varphi). \tag{2}$$

Eğer bu eşitsizlik tersine dönerse, ψ h-Konkav olarak tanımlanır (Varošanec 2007).

Tanım 2.6. Fonksiyon $\psi : I \to \mathbb{R}$ Δ üzerindeki koordinatlarda h-konveks olarak tanımlanırsa, aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır:

$$\begin{aligned} & \psi(\tau\chi + (1-\tau)\ \varphi, \xi u + (1-\xi)\ \omega) \\ \leq\ & h(\tau)h(\xi)\ \psi(\chi, \upsilon) + h(\tau)h(1-\xi)\psi(\chi, \omega) + h(\xi)h(1-\tau)\psi(\varphi, \upsilon) + h(1-\tau)h(1-\xi)\psi(\varphi, \omega). \end{aligned}$$

tüm $\forall\,(\tau, \xi) \in [0,1]$ ve $(\chi, \upsilon), (\chi, \omega), (\varphi, \upsilon), (\varphi, \omega) \in \Delta$ için geçerli olmalıdır (Varošanec, 2007).

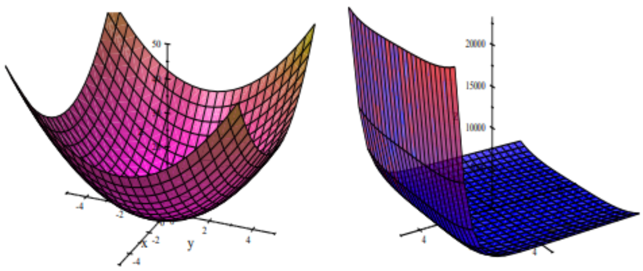

Figure 3: Koordinatlarda Konveks fonksiyon grafiği

2.2 s-Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 2.7. $s \in (0,1]$ olmak üzere, $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)^s f(x) + t^s f(y)$$

oluyorsa, $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *s-Konveks Fonksiyon* (Birinci Anlamda s-Konveks) denir (Hudzik ve Maligranda 1994).

Tanım 2.8. $s \in (0,1]$ olmak üzere, $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)^s f(x) + t^s f(y) + \Theta(x, y, t)$$

burada $\Theta(x, y, t)$ uygun bir düzeltme terimi olmak üzere, $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon* denir.

Teorem 2.9. *Eğer f birinci anlamda s-konveks ise ve $s = 1$ ise, o zaman f klasik anlamda konvekstir.*

Proof. $s = 1$ için s-konvekslik tanımı klasik konvekslik tanımına indirgenir.

Teorem 2.10. *f birinci anlamda s-konveks ise, f aynı zamanda koordinatlarda s-konvekstir.*

Proof. Koordinatlarda s-konvekslik tanımı, birinci anlamda s-konveksliğin doğal bir genişlemesidir.

Tanım 2.11. Fonksiyon $\psi : \Delta \to \mathbb{R}$ "Koordinatlı s-konveks" terimi ile tanımlanır. Δ, tüm $(\chi, \varphi), (\upsilon, \omega) \in \Delta$ ve $\tau, \xi \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanmalıdır:

$$\begin{aligned} & \psi(\tau\chi + (1-\tau)\ \varphi, \xi u + (1-\xi)\ \omega) \\ \leq\ & \tau^s \xi^s\ \psi(\chi, \upsilon) + \tau^s(1-\xi)^s \psi(\chi, \omega) + \xi^s(1-\tau)^s \psi(\varphi, \upsilon) + (1-\tau)^s(1-\xi)^s \psi(\varphi, \omega). \end{aligned}$$

Teorem 2.12. *Eğer ψ koordinatlarda s-konveks ise ve $s = 1$ ise, o zaman ψ koordinatlarda konvekstir.*

Proof. $s = 1$ için koordinatlarda s-konvekslik tanımı, koordinatlarda konvekslik tanımına indirgenir. ■

Tanım 2.13. Gamma fonksiyonu ve beta fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$\Gamma(\chi) := \int_0^\infty \tau^{x-1} e^{-\tau} d\tau$$

ve

$$B(\chi, \varphi) := \int_0^1 \tau^{x-1}(1-\tau)^{\varphi-1} d\tau,$$

sırasıyla. Burada, $0 < \chi, \varphi < \infty$.

Matematikte konveks haritaların analizi kapsamında, integral eşitsizlikler en sık kullanılan alanlardır. C. Hermite ve J. Hadamard tarafından formüle edilen bu eşitsizlikler, literatürde geniş bir şekilde alıntılanmaktadır (bkz. örneğin Dragomir ve Pearce 2000, Pecaric 1998, Iqbal vd. 2016). Yukarıda bahsedilen eşitsizlikler, eğer $\psi : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, reel sayıların I aralığında konveks ise ve $\sigma, \phi \in I$ ile $\sigma < \phi$ ise geçerlidir.

$$\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2}\right) \leq \frac{1}{\phi-\sigma} \int_\tau^\xi \psi(\chi) d\chi \leq \frac{\psi(\sigma)+\psi(\phi)}{2}. \tag{3}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliği, bir fonksiyonun konveksliğinin, belirli bir aralık üzerindeki ortalama değeri ve integral değeri üzerindeki etkisini aydınlatan ünlü bir sonuçtur. Eşitsizlik, eğer bir fonksiyon ψ reel bir aralık I üzerinde konveks ise ve a ile b, I içinde iki nokta ise, ψ'nin a ve ϕ'nin orta noktasındaki değeri, $[\sigma, \phi]$ aralığındaki ortalama değerden küçük veya ona eşit olduğunu belirtir.

Hermite-Hadamard eşitsizliği, bir konveks fonksiyonun ortalama değerinin, aralıkta gözlemlenen uç noktalarındaki değerlerle karşılaştırılmasına olanak tanır. Bu eşitsizlik, aralığın bir dikdörtgene dönüştüğü gibi daha yüksek boyutlara da genişletilebilir.

Eşitsizlik, bir kısmı dikdörtgenin orta noktasını kullanan ve diğeri dikdörtgenin köşelerini kullanan iki bölümden oluşur. İkinci kısım, trapez şekline benzemesi nedeniyle trapezoid türü eşitsizlik olarak adlandırılır.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir parçasını oluşturan trapezoid türü eşitsizlik, kapsamı bir araştırma konusu olmuştur. Konveks fonksiyonlar için trapezoid türü eşitsizlikler, ilk olarak Dragomir ve Agarwal tarafından 1998'de formüle edilmiştir.

Sarikaya vd. 2013'te, kesirli integraller için eşitsizliklerin genelleştirilmesini sağlamış ve belirli orta nokta türü eşitsizliklerin geçerliliğini göstermiştir.

Eşitsizlik, özellikle sıradan integrallerin genelleştirilmesi olan kesirli integraller bağlamında kapsamı bir çalışma ve iyileştirme konusu olmuştur (Dragomir 2001, Sarikaya vd. 2012, Dragomir ve Agarwal 1998, Sarikaya vd. 2013, Sarikaya vd. 2019).

Teorem 2.14. $\psi : \Delta \to \mathbb{R}$ *koordinatlı s-konveks ise, aşağıdaki eşitsizlikler elde* *edilir:*

$$
\begin{aligned}
\psi\left(\frac{\sigma+\phi}{2},\frac{\varsigma+\rho}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma-\phi}\int_{\sigma}^{\phi}\psi\left(\chi,\frac{\varsigma+\rho}{2}\right)d\chi+\frac{1}{\rho-c}\int_{\varsigma}^{\rho}\psi\left(\frac{\tau+\xi}{2},\varphi\right)d\varphi\right] \\
&\leq \frac{1}{(\phi-\sigma)(\rho-\varsigma)}\int_{\sigma}^{\phi}\int_{\varsigma}^{\rho}\psi(\chi,\varphi)d\varphi d\chi \qquad (4) \\
&\leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\phi-\sigma}\int_{\tau}^{\xi}\psi(\chi,c)d\chi+\frac{1}{\phi-\sigma}\int_{\tau}^{\xi}\psi(\chi,\rho)d\chi\right. \\
&+ \left.\frac{1}{\rho-\varsigma}\int_{\varsigma}^{\rho}\psi(\tau,\varphi)d\varphi+\frac{1}{\rho-\varsigma}\int_{\varsigma}^{\rho}\psi(\xi,\varphi)d\varphi\right] \\
&\leq \frac{\psi(\tau,\varsigma)+\psi(\tau,\rho)+\psi(\xi,\varsigma)+\psi(\xi,\rho)}{4}.
\end{aligned}
$$

*Yukarıdaki eşitsizlikler keskindir. Eşitsizlikler (**??**), ψ haritası koordinatlı s-konkav bir harita ise ters yönde geçerlidir.*

İspat, s-konvekslik tanımı ve integral eşitsizlik teknikleri kullanılarak yapılabilir.

Kesirli kalkülüs, türev veya integralin herhangi bir reel veya karmaşık sayı olarak kullanılmasına olanak tanıyan bir kalkülüs türünü tanımlar. Kesirli kalkülüsü tanımlamak için bir dizi farklı yaklaşım bulunmaktadır; bunlar arasında Caputo, Riemann-Liouville ve Grünwall-Letnikov tanımları yer almaktadır. Bu tanımlar belirli avantajlar sunarken, bazı sorunlar da ortaya çıkarmaktadır.

Örneğin, Riemann-Liouville tanımı, sabit bir fonksiyon için her zaman sıfır türev vermemektedir. Caputo tanımında, fonksiyon f türevlenebilir olmalıdır (Samko vd. 1993, Podlubny 1999, Miller ve Ross B 1993, Akkurt vd. 2017).

Ayrıca, bazı tanımlar, iki fonksiyon arasında bölme, çarpma ve bileşke alma işlemleri gibi geleneksel kalkülüs ilkelerinden sapmaktadır. Bu ve diğer sorunları ele almak amacıyla, Khalil ve arkadaşları, uyumlu kesirli türev olarak adlandırılan yeni bir kesirli kalkülüs tanımı önermiştir.

Ayrıca, $(0 < \sigma \leq 1)$ arasındaki kuvvetler için uyumlu kesirli integral de tanıtılmıştır. Araştırmacılar, iki fonksiyonu çarpma ve bir fonksiyonun ortalama değerini hesaplama yöntemleri de dahil olmak üzere birkaç önemli bulgu göstermiştir.

Ayrıca, kesirli kalkülüs ve üstel fonksiyonlar içeren denklemleri çözmüşlerdir (Khalil vd. 2014, Abdeljawad 2015, Hyder ve Soliman 2020, Zhao ve Luo M, 2017, Khan , Khan M 2019, Sarıkaya vd. 2019, Abdelhakim 2019).

Bu çalışmada kullanılan uyumlu kesirli kalkülüs ilkelerinin tanımları ve matematiksel temelleri aşağıda sunulmuştur.

Tanım 2.15. $\psi \in L_1[\sigma, \phi]$ için, $\tau > 0$ sıralı Riemann-Liouville integralleri şu şekilde verilir:

$$J^{\sigma}_{\sigma+}\psi(\chi) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_{\sigma}^{\chi} (\chi - \tau)^{\sigma-1} \psi(\tau) d\tau, \quad \chi > \sigma \tag{5}$$

ve

$$J^{\sigma}_{\phi-}\psi(\chi) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_{\chi}^{\phi} (\tau - \chi)^{\sigma-1} \psi(\tau) d\tau, \quad \chi < \phi. \tag{6}$$

Yukarıda belirtilen kriterlere göre, ilgili değerler şu şekildedir: gerekli koşul $\theta = 1$ olduğunda, Riemann-Liouville integralleri klasik karşılıklarıyla eşit olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.16. $\psi \in L_1([\sigma, \phi] \times [\varsigma, \rho])$ olsun. Sıralı Riemann-Liouville integralleri $J^{\theta,\vartheta}_{\sigma+,\varsigma+}$, $J^{\theta,\vartheta}_{\sigma+,\rho-}$, $J^{\theta,\vartheta}_{\phi-,\varsigma+}$ ve $J^{\theta,\vartheta}_{\phi-,\rho-}$ sırasıyla $\theta, \vartheta > 0$ ile $\sigma, \varsigma \geq 0$ olarak tanımlanır:(Sarıkaya 2014)

$$J^{\theta,\vartheta}_{\sigma+,\varsigma+}\psi(\chi,\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)} \int_{\sigma}^{\chi} \int_{\varsigma}^{\varphi} (\chi - \tau)^{\theta-1} (\varphi - \xi)^{\vartheta-1} \psi(\tau,\xi) d\xi d\tau, \quad \chi > \sigma, \varphi > \varsigma, \tag{7}$$

$$J^{\theta,\vartheta}_{\sigma+,\rho-}\psi(\chi,\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)} \int_{\sigma}^{\chi} \int_{\varphi}^{\rho} (\chi - \tau)^{\theta-1} (\xi - \varphi)^{\vartheta-1} \psi(\tau,\xi) d\xi d\tau, \quad \chi > \sigma, \varphi < \rho, \tag{8}$$

$$J^{\theta,\vartheta}_{\phi-,\varsigma+}\psi(\chi,\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)} \int_{\chi}^{\phi} \int_{\varsigma}^{\varphi} (\tau - \chi)^{\theta-1} (\varphi - \xi)^{\vartheta-1} \psi(\tau,\xi) d\xi d\tau, \quad \chi < \phi, \varphi > \varsigma, \tag{9}$$

$$J^{\theta,\vartheta}_{\phi-,\rho-}\psi(\chi,\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)} \int_{\chi}^{\phi} \int_{\varphi}^{\rho} (\tau - \chi)^{\theta-1} (\xi - \varphi)^{\vartheta-1} \psi(\tau,\xi) d\xi d\tau, \quad \chi < \phi, \varphi < \rho, \tag{10}$$

Sırasıyla. Burada Γ Gama fonksiyonudur.

Tanım 2.17. $\psi \in L_1[\sigma,\phi]$ için, $\vartheta > 0$ ve $\sigma \in (0,1]$ olan kesirli uyumlu integral operatörü ${}^{\vartheta}I^{\theta}_{\sigma+}\psi$ ve ${}^{\vartheta}I^{\theta}_{\phi-}\psi$ şu şekilde tanımlanır:(Jarad vd. 2017)

$$ {}^{\vartheta}\mathcal{I}^{\theta}_{\sigma+}\psi(\chi) = \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_{\sigma}^{\chi}\left(\frac{(\chi-\sigma)^{\theta}-(\tau-\sigma)^{\theta}}{\theta}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau)}{(\tau-\sigma)^{1-\theta}}d\tau, \qquad \tau > \sigma \tag{11} $$

ve

$$ {}^{\vartheta}\mathcal{I}^{\theta}_{\phi-}\psi(\chi) = \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}\int_{\chi}^{\phi}\left(\frac{(\phi-\chi)^{\theta}-(\phi-\tau)^{\theta}}{\theta}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau)}{(\phi-\tau)^{1-\theta}}d\tau, \qquad \tau < \phi, \tag{12} $$

Sırasıyla.

Tanım 2.18. $\psi \in L_1([\sigma,\phi]\times[\varsigma,\rho])$ olsun ve $\gamma_1 \neq 0,\ \gamma_2 \neq 0,\ \theta,\vartheta \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(\theta) > 0$ ve $\mathrm{Re}(\vartheta) > 0$. $\psi(\chi,\varphi)$'nin θ,ϑ sıralı genelleştirilmiş uyumlu integrali şu şekilde tanımlanır (Bozkurt vd. 2021):

$$ \begin{aligned} \left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\right)(\chi,\varphi) &= \left[\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_{\sigma}^{\chi}\int_{\varsigma}^{\varphi}\left(\frac{(\chi-\sigma)^{\gamma_1}-(\tau-\sigma)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}\right. \\ &\quad \left.\times\left(\frac{(\varphi-\varsigma)^{\gamma_2}-(\xi-\varsigma)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\tau-\sigma)^{1-\gamma_1}(\xi-\varsigma)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau\right], \end{aligned} \tag{13} $$

$$ \begin{aligned} \left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\right)(\chi,\varphi) &= \left[\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_{\chi}^{\phi}\int_{\varsigma}^{\varphi}\left(\frac{(\phi-\chi)^{\gamma_1}-(\phi-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}\right. \\ &\quad \left.\times\left(\frac{(\varphi-\varsigma)^{\gamma_2}-(\xi-\varsigma)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\phi-\tau)^{1-\gamma_1}(\xi-\varsigma)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau\right], \end{aligned} \tag{14} $$

$$ \begin{aligned} \left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\right)(\chi,\varphi) &= \left[\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_{\sigma}^{\chi}\int_{\varphi}^{\rho}\left(\frac{(\chi-\sigma)^{\gamma_1}-(\tau-\sigma)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}\right. \\ &\quad \left.\times\left(\frac{(\rho-\varphi)^{\gamma_2}-(\rho-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\tau-\sigma)^{1-\gamma_1}(\rho-\xi)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau\right], \end{aligned} \tag{15} $$

ve

$$ \begin{aligned} \left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\theta,\vartheta}_{\phi^-,\rho^-}\psi\right)(\chi,\varphi) &= \left[\frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}\int_{\chi}^{\phi}\int_{\varphi}^{\rho}\left(\frac{(\phi-\chi)^{\gamma_1}-(\phi-\tau)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\theta-1}\right. \\ &\quad \left.\times\left(\frac{(\rho-\varphi)^{\gamma_2}-(\rho-\xi)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\vartheta-1}\frac{\psi(\tau,\xi)}{(\phi-\tau)^{1-\gamma_1}(\rho-\xi)^{1-\gamma_2}}d\xi d\tau\right], \end{aligned} \tag{16} $$

Genelleştirilmiş uyumlu integraller.

Uyarı 2.19. Eğer (13), (14), (15) ve (16)'da $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ise, iki değişkenli fonksiyonların kesirli integralleri olan Riemann-Liouville integralleri elde edilir.(Bozkurt vd. 2021)

Uyarı 2.20. Eğer (13), (14), (15) ve (16)'da $\theta = 1$ ve $\vartheta = 1$ alınırsa,(Bozkurt vd. 2021)

$$\left(I^{1,1}_{\sigma^+,\varsigma^+}\psi\right)(\chi,\varphi) = \int_\sigma^\chi \int_\varsigma^\varphi \frac{\psi(\tau,\xi)}{(\tau-\sigma)^{1-\gamma_1}(\xi-\varsigma)^{1-\gamma_2}} d\xi d\tau \tag{17}$$

$$\left(I^{1,1}_{\phi^-,\varsigma^+}\psi\right)(\chi,\varphi) = \int_\chi^\phi \int_\varsigma^\varphi \frac{\psi(\tau,\xi)}{(\phi-\tau)^{1-\gamma_1}(\xi-\varsigma)^{1-\gamma_2}} d\xi d\tau, \tag{18}$$

$$\left(I^{1,1}_{\sigma^+,\rho^-}\psi\right)(\chi,\varphi) = \int_\sigma^\chi \int_\varphi^\rho \frac{\psi(\tau,\xi)}{(\tau-\sigma)^{1-\gamma_1}(\rho-\xi)^{1-\gamma_2}} d\xi d\tau, \tag{19}$$

ve

$$\left(I^{1,1}_{\phi^-,\rho^-}\psi\right)(\chi,\varphi) = \int_\chi^\phi \int_\varphi^\rho \frac{\psi(\tau,\xi)}{(\phi-\tau)^{1-\gamma_1}(\rho-\xi)^{1-\gamma_2}} d\xi d\tau. \tag{20}$$

Çiftli integraller için uyumlu kesirli integrallerdir.

Teorem 2.21. *f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|^q$ ile $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlarken $p > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ koşulları altında;*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği Hölder Eşitsizliği *olarak adlandırılır (Mitrinovic vd. 1993).*
Çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği *ise,*

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\, dxdy \le \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|^p\, dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x,y)|^q\, dxdy\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.22. *f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|$ ile $|g|^q$, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olsun.$q \ge 1$ olmak şartıyla;*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \le \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Power-Mean Eşitsizliği *olarak bilinen bu eşitsizlik; Hölder Eşitsizliğinin doğal bir sonucudur.*

Çift katlı integraller için Power-Mean eşitsizliği *ise,*

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\,dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|\,dxdy\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|\,|g(x,y)|^q\,dxdy\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.23. *Herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ için,*

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x|+|y|, \\ ||x|-|y|| &\leq |x-y|, \\ ||x|-|y|| &\leq |x+y| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Üçgen Eşitsizliği *olarak adlandırılan bu eşitsizlikte tümevarım yöntemiyle,*

$$|x_1+...+x_n| \leq |x_1|+...+|x_n|$$

eşitsizliği de sağlanır (Mitrinovic vd. 1993).

Teorem 2.24. *f reel değerli ve $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $a<b$ iken;*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

sağlanan bu eşitsizlik İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği *olarak adlandırılır.*

3 KOORDİNATLARDA KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN YAMUK TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Aşağıdaki yardımcı teorem, genelleştirilmiş kesirli integraller için temel bir özdeşlik sağlar ve sonraki eşitsizliklerin türetilmesinde kritik bir rol oynar.

Lemma 3.1. *$f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun, $0 \leq a < b$ ve $0 \leq c < d$ olmak üzere $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgeni üzerinde tanımlı kısmi türevlere sahip olduğunu varsayalım. Eğer karışık kısmi türev $\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}$, $L_1(\Delta)$ anlamında integrallenebilir ise, aşağıdaki özdeşlik geçerlidir:(Kiris M E and Bayrak G, 2023)*

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4} \\
&+\frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}} \\
&\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right. \\
&\quad+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \\
&\quad+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \\
&\quad\left.+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]-A \\
=\;&\frac{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}(b-a)(d-c)}{16} \\
&\times\left[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right. \\
&\quad\times\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b,\frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right)dsdt \\
&-\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\quad\times\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b,\frac{1-s}{2}c+\frac{1+s}{2}d\right)dsdt \\
&-\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$\times \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) dsdt$$
$$+\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}$$
$$\times \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b, \frac{1-s}{2}c+\frac{1+s}{2}d\right) dsdt\Bigg],$$

burada A terimi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^{\gamma_2\beta-2}\ \gamma_2^{\beta}\ \Gamma(\beta+1)}{(d-c)^{\gamma_2\beta}} \\ &\left[{}^{\gamma_2}I^{\beta}_{c^+}f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+{}^{\gamma_2}\ I^{\beta}_{d^-}f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)\right. \\ &\quad\left.+\ {}^{\gamma_2}I^{\beta}_{c^+}f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+\ {}^{\gamma_2}I^{\beta}_{d^-}f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)\right] \\ &+\frac{2^{\gamma_1\alpha-2}\ \gamma_1^{\alpha}\ \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}} \\ &\left[{}^{\gamma_1}I^{\alpha}_{a^+}f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+{}^{\gamma_1}\ I^{\alpha}_{a^+}f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right. \\ &\quad\left.+{}^{\gamma_1}I^{\alpha}_{b^-}f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+{}^{\gamma_1}\ I^{\alpha}_{b^-}f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Proof. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\ &\quad\times \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) dsdt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\Bigg\{\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\frac{-2}{(b-a)} \\ &\quad\times \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right)\Bigg|_0^1 \\ &\quad+\int_0^1 \frac{2\alpha}{(b-a)}\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma_1-1} \\ &\quad\times \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) dt\Bigg\} ds \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\Bigg\{\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{-2}{b-a}\right)\frac{\partial f}{\partial s}\left(a,\frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \frac{2\alpha}{(b-a)} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma_1-1} \\
& \quad \times \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) dt \Bigg\} ds \\
= \quad & \frac{-2}{(b-a)\,\gamma_1^{\alpha}} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
& \quad \times \frac{\partial f}{\partial s}\left(a, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) ds \\
& + \frac{2\alpha}{(b-a)} \left[\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma_1-1}\right. \\
& \quad \times \left\{\int_0^1 \left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right. \\
& \quad \times \left.\left.\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) ds\right\} dt\right] \\
= \quad & \frac{-2}{(b-a)}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)^{\alpha} \left[\left(\frac{1}{\gamma_2}\right)^{\beta} \frac{-2}{(d-c)} f(a,c)\right. \\
& + \frac{2\beta}{(d-c)} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta-1} (1-s)^{\gamma_2-1} \\
& \quad \times \left. f\left(a, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) ds\right] \\
& + \frac{2\alpha}{(b-a)} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma_1-1} \\
& \quad \times \left\{\left(\frac{1}{\gamma_2}\right)^{\beta} \frac{-2}{(d-c)} f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b, c\right)\right. \\
& + \frac{2\beta}{(d-c)} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta-1} (1-s)^{\gamma_2-1} \\
& \quad \times \left. f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) ds\right\} dt \\
= \quad & \frac{4}{(b-a)(d-c)} \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}} f(a,c) \\
& - \frac{4\beta}{(b-a)(d-c)} \left(\frac{1}{\gamma_1}\right)^{\alpha} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times(1-s)^{\gamma_2-1} f\left(a, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) ds \\
&-\frac{4\alpha}{(b-a)(d-c)}\left(\frac{1}{\gamma_2}\right)^{\beta}\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha-1} \\
&\times(1-t)^{\gamma_1-1} f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b, c\right) dt \\
&+\frac{4\alpha\beta}{(b-a)(d-c)}\left[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha-1}\right. \\
&\times(1-t)^{\gamma_1-1}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta-1}(1-s)^{\gamma_2-1} \\
&\left.\times f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b, \frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right) dsdt\right]. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

(23) ifadesinde, $u=\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b$ ve $v=\frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d$ değişken değişimlerini uygulayarak şunu yazabiliriz:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{(b-a)(d-c)}\frac{1}{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}} f(a,c) \\
&\quad -\left(\frac{2}{d-c}\right)^{\gamma_2\beta}\Gamma(\beta)\left({}^{\gamma_2}I^{\beta}_{c^+}f\right)\left(a,\frac{c+d}{2}\right) \\
&\quad -\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\gamma_1\alpha}\Gamma(\alpha)^{\gamma_1}I^{\alpha}_{a^+}f\left(\frac{a+b}{2},c\right) \\
&\quad +\frac{4\alpha\beta}{(b-a)(d-c)}\frac{2^{\gamma_1\alpha}2^{\gamma_2\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}} \\
&\quad \times\left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,c^+}f\right)\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde, kısmi integrasyon yöntemi ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\quad \times\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b, \frac{1-s}{2}c+\frac{1+s}{2}d\right) dsdt \\
&= \frac{-4}{(b-a)(d-c)}\frac{1}{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}} f(a,d) \\
&\quad +\left(\frac{2}{d-c}\right)^{\gamma_2\beta}\Gamma(\beta)\left({}^{\gamma_2}I^{\beta}_{d^-}f\right)\left(a,\frac{c+d}{2}\right) \\
&\quad +\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\gamma_1\alpha}\Gamma(\alpha)\left({}^{\gamma_1}I^{\alpha}_{a^+}f\right)\left(\frac{a+b}{2},d\right) \\
&\quad -\frac{4\alpha\beta}{(b-a)(d-c)}\frac{2^{\gamma_1\alpha}2^{\gamma_2\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}}
\end{aligned}
$$

$$\times \left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,d^-}f\right)\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right), \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\quad \times \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b,\frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right)dsdt \\
&= \frac{-4}{(b-a)(d-c)}\frac{1}{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}f(b,c) \\
&\quad +\left(\frac{2}{d-c}\right)^{\gamma_2\beta}\Gamma(\beta)\left({}^{\gamma_2}I^{\beta}_{c^+}f\right)\left(b,\frac{c+d}{2}\right) \\
&\quad +\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\gamma_1\alpha}\Gamma(\alpha)\left({}^{\gamma_1}I^{\alpha}_{b^-}f\right)\left(\frac{a+b}{2},c\right) \\
&\quad -\frac{4\alpha\beta}{(b-a)(d-c)}\frac{2^{\gamma_1\alpha}2^{\gamma_2\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}} \\
&\quad \times\left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,c^+}f\right)\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right),
\end{aligned} \tag{26}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\quad \times \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b,\frac{1-s}{2}c+\frac{1+s}{2}d\right)dsdt \\
&= \frac{4}{(b-a)(d-c)}\frac{1}{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}f(b,d) \\
&\quad -\left(\frac{2}{d-c}\right)^{\gamma_2\beta}\Gamma(\beta)\left({}^{\gamma_2}I^{\beta}_{d^-}f\right)\left(b,\frac{c+d}{2}\right) \\
&\quad -\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\gamma_1\alpha}\Gamma(\alpha)\left({}^{\gamma_1}I^{\alpha}_{b^-}f\right)\left(\frac{a+b}{2},d\right) \\
&\quad +\frac{4\alpha\beta}{(b-a)(d-c)}\frac{2^{\gamma_1\alpha}2^{\gamma_2\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}} \\
&\quad \times\left({}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,d^-}f\right)\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

(24)-(27) eşitliklerinden, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}(b-a)(d-c)}{16}\left[I_1-I_2-I_3+I_4\right] \\
&= \frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}}\\
&\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right.\\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\
&\left.+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]-A.
\end{aligned}
$$

İspat bu şekilde tamamlanmış olur.

Bu süreçteki bir sonraki adım, genelleştirilmiş uyumlu kesirli integraller için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği kapsayan ana teoremi formüle etmektir.

Teorem 3.2. *$f:\Delta\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ üzerinde kısmi türevlenebilir olduğunu ve $0\leq a<b$, $0\leq c<d$ koşullarını sağladığını varsayalım. Eğer $\dfrac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}\right.\\
&+\frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}}\\
&\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right.\\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\
&\left.\left.+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]-A\right|\\
&\leq\frac{(b-a)(d-c)}{16\,\gamma_1\gamma_2}B\left(\alpha+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\\
&\times\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|\right.\\
&\left.+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\right],\qquad(28)
\end{aligned}
$$

burada A terimi (22) ile tanımlanmıştır ve $B(\cdot,\cdot)$ Beta fonksiyonunu temsil eder.

Proof. Lemma 1'den, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}\right. \\
&\quad+\frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}} \\
&\quad\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right. \\
&\quad+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \\
&\quad+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \\
&\quad\left.\left.+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]-A\right| \\
&\leq\frac{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}(b-a)(d-c)}{16} \\
&\quad\times\left[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right. \\
&\quad\times\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b,\frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right)\right|dsdt \\
&\quad+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\quad\times\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b,\frac{1-s}{2}c+\frac{1+s}{2}d\right)\right|dsdt \\
&\quad+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\quad\times\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b,\frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right)\right|dsdt \\
&\quad+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\quad\left.\times\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b,\frac{1-s}{2}c+\frac{1+s}{2}d\right)\right|dsdt\right]. \qquad (29)
\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}$ fonksiyonunun Δ üzerinde koordinatlarda konveks olması nedeniyle, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\left|\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}} \\
&\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right. \\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \\
&\left.\left.+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]-A\right| \\
&\leq\frac{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}(b-a)(d-c)}{16} \\
&\times\left\{\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right. \\
&\times\left[\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1+s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|\right. \\
&+\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right| \\
&+\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right| \\
&\left.+\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\right]dsdt \\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\times\left[\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|\right. \\
&+\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1+s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right| \\
&+\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right| \\
&\left.+\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\right]dsdt \\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\times\left[\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|\right. \\
&+\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1+s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right| \\
&+\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\Bigg] dsdt \\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\times\Bigg[\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right| \\
&+\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right| \\
&+\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right| \\
&+\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1+s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\Bigg] dsdt\Bigg\} \\
&=\frac{(b-a)(d-c)}{16\,\gamma_1\gamma_2}B\left(\alpha+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right) \\
&\times\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|\right. \\
&\left.+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\right], \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 3.3. Teorem 4.1'te, eğer $\gamma_1 = 1$ ve $\gamma_2 = 1$ seçilirse, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}\right. \\
&+\frac{2^{\alpha-1}2^{\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{(b-a)^{\alpha}(d-c)^{\beta}} \\
&\times\left[I^{\alpha,\beta}_{a^+,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right. \\
&+I^{\alpha,\beta}_{a^+,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \\
&+I^{\alpha,\beta}_{b^-,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) \\
&\left.\left.+I^{\alpha,\beta}_{b^-,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right]-A\right| \\
&\leq\frac{(b-a)(d-c)}{16}\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{\beta+1} \\
&\times\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|\right.
\end{aligned}
$$

$$+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|\Bigg]. \quad (31)$$

Teorem 3.4. *$f:\Delta\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ üzerinde kısmi türevlenebilir olduğunu ve $0\le a<b$, $0\le c<d$ koşullarını sağladığını varsayalım. Eğer $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|^q$, $q>1$, Δ üzerinde koordinatlarda konveks bir fonksiyon ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}\\
&\qquad+\frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}{(b-a)^{\gamma_1\alpha}(d-c)^{\gamma_2\beta}}\\
&\qquad\times\Bigg[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\
&\qquad+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{a^+,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\
&\qquad+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,c^+}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\\
&\qquad+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{b^-,d^-}f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\Bigg]-A\Bigg|\\
&\le\frac{(b-a)(d-c)}{16}\left[\frac{16}{\gamma_1\gamma_2}B\left(\alpha p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad\times\Bigg[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|^q\\
&\qquad+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|^q\Bigg]^{\frac{1}{q}}, \quad (32)
\end{aligned}$$

burada A terimi (22) ile tanımlanmıştır, $B(\cdot,\cdot)$ Beta fonksiyonunu temsil eder ve $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$ ilişkisi geçerlidir.

Proof. Lemma'dan, (39) eşitsizliğini elde ederiz. İki katlı integraller için Hölder eşitsizliğini I_5'te kullanarak ve $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|^q$'nin Δ üzerinde koordinatlarda konveks olduğunu göz önüne alarak, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
I_5&=\Bigg\{\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\\
&\qquad\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b,\frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right)\right|dsdt\Bigg\}\\
&\le\left(\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha p}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta p}dsdt\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b,\frac{1+s}{2}c+\frac{1-s}{2}d\right)\right|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta}}\left(\int_0^1\int_0^1 (1-(1-t)^{\gamma_1})^{\alpha p}(1-(1-s)^{\gamma_2})^{\beta p}\,dsdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1+s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|^q\right.$$

$$+\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|^q$$

$$+\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|^q$$

$$\left.+\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|^q dsdt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta}}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2}B\left(\alpha p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\frac{9}{16}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|^q+\frac{3}{16}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|^q\right.$$

$$\left.+\frac{3}{16}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|^q+\frac{1}{16}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (33)$$

Burada aşağıdaki gerçekten faydalanıyoruz:

$$(\varpi-\sigma)^j \leq \varpi^j-\sigma^j, \quad (34)$$

Herhangi bir $\varpi>\sigma\geq 0$ ve $j\geq 1$ için.

Benzer şekilde,

$$I_6=\left\{\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right.$$

$$\left.\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b,\frac{1-s}{2}c+\frac{1+s}{2}d\right)\right|dsdt\right\}$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta}}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2}B\left(\alpha p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\frac{3}{16}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,c)\right|^q+\frac{9}{16}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(a,d)\right|^q\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,c)\right|^q+\frac{3}{16}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}(b,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (35)$$

$$
\begin{aligned}
I_7 = &\left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\alpha} \left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\beta} \right. \\
&\left. \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1+s}{2}c + \frac{1-s}{2}d \right) \right| dsdt \right\} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta}} \left(\frac{1}{\gamma_1} \frac{1}{\gamma_2} B\left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) B\left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a,c) \right|^q + \frac{1}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a,d) \right|^q \right. \\
&\left. + \frac{9}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b,c) \right|^q + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b,d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (36)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
I_8 = &\left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^{\gamma_1}}{\gamma_1} \right)^{\alpha} \left(\frac{1-(1-s)^{\gamma_2}}{\gamma_2} \right)^{\beta} \right. \\
&\left. \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b, \frac{1-s}{2}c + \frac{1+s}{2}d \right) \right| dsdt \right\} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}} \frac{1}{\gamma_2^{\beta}} \left(\frac{1}{\gamma_1} \frac{1}{\gamma_2} B\left(\alpha p + 1, \frac{1}{\gamma_1} \right) B\left(\beta p + 1, \frac{1}{\gamma_2} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\frac{1}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a,c) \right|^q + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(a,d) \right|^q \right. \\
&\left. + \frac{3}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b,c) \right|^q + \frac{9}{16} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(b,d) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (37)
\end{aligned}
$$

Eğer (44)-(47) ifadelerini (39)'de yerine koyarsak, (41) eşitsizliği elde edilir.

4 KOORDİNATLARDA S-KONVEKSLİK

Teorem 4.1. *$\varpi : \triangle \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kısmi türevlenebilir bir fonksiyon olsun, Δ üzerinde $0 \leq \theta < \upsilon,\ 0 \leq \xi < \kappa$. Eğer $\dfrac{\partial^2 \varpi(\eta,\lambda)}{\partial\eta\partial\lambda}$, Δ üzerinde koordinatlar üzerinde s-konveks ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.*

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{\varpi(\theta,\xi)+\varpi(\theta,\kappa)+\varpi(\upsilon,\xi)+\varpi(\upsilon,\kappa)}{4} \\
&\quad + \frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}{(\upsilon-\theta)^{\gamma_1\alpha}(\kappa-\xi)^{\gamma_2\beta}} \\
&\quad \times \Bigg[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right) \\
&\quad + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right) \\
&\quad + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right) \\
&\quad + {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\Bigg] - A\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(\upsilon-\theta)(\kappa-\xi)}{2^{s+2}2^{s+2}\gamma_1\gamma_2} \\
&\quad \times \Big[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot\Psi(\gamma_2,\beta,s) \\
&\quad + \Psi(\gamma_2,\beta,s)\cdot B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right) \\
&\quad + \Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right) \\
&\quad + B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\Big] \\
&\quad \times \left[\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right| + \left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right| \right. \\
&\quad \left. + \left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right| + \left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|\right],
\end{aligned} \tag{38}
$$

burada A, (22) ile tanımlanır ve $B(\cdot,\cdot)$ Beta fonksiyonunu ifade eder.

Proof. Lemma 1'den elde ederiz ki

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{\varpi(\theta,\xi)+\varpi(\theta,\kappa)+\varpi(\upsilon,\xi)+\varpi(\upsilon,\kappa)}{4} \\
&\quad + \frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}{(\upsilon-\theta)^{\gamma_1\alpha}(\kappa-\xi)^{\gamma_2\beta}} \\
&\quad \times \Bigg[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)
\end{aligned} \tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\Bigg]-A\Bigg|\\
\leq\;& \frac{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}\left(\upsilon-\theta\right)\left(\kappa-\xi\right)}{16}\\
&\times\left[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right.\\
&\times\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1+\eta}{2}\theta+\frac{1-\eta}{2}\upsilon,\frac{1+\lambda}{2}\xi+\frac{1-\lambda}{2}\kappa\right)\right|\\
&d\lambda d\eta\\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\\
&\times\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1+\eta}{2}\theta+\frac{1-\eta}{2}\upsilon,\frac{1-\lambda}{2}\xi+\frac{1+\lambda}{2}\kappa\right)\right|\\
&d\lambda d\eta\\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\\
&\times\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1-\eta}{2}\theta+\frac{1+\eta}{2}\upsilon,\frac{1+\lambda}{2}\xi+\frac{1-\lambda}{2}\kappa\right)\right|\\
&d\lambda d\eta\\
&+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\\
&\times\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1-\eta}{2}\theta+\frac{1+\eta}{2}\upsilon,\frac{1-\lambda}{2}\xi+\frac{1+\lambda}{2}\kappa\right)\right|\\
&\left.d\lambda d\eta\right].
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlar üzerinde s-konveks olduğundan, şunu elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{\varpi\left(\theta,\xi\right)+\varpi\left(\theta,\kappa\right)+\varpi\left(\upsilon,\xi\right)+\varpi\left(\upsilon,\kappa\right)}{4}+\frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}{\left(\upsilon-\theta\right)^{\gamma_1\alpha}\left(\kappa-\xi\right)^{\gamma_2\beta}}\\
&\times\Bigg[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\\
&+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\Bigg]-A\Bigg|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}\left(\upsilon-\theta\right)\left(\kappa-\xi\right)}{16} \\
& \times\left\{\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right. \\
& \left[\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\theta,\xi\right)\right|+\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\theta,\kappa\right)\right|\right. \\
& \left.+\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\upsilon,\xi\right)\right|+\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\upsilon,\kappa\right)\right|\right]d\lambda d\eta \\
& +\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
& \left[\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\theta,\xi\right)\right|+\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\theta,\kappa\right)\right|\right. \\
& \left.+\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\upsilon,\xi\right)\right|+\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\upsilon,\kappa\right)\right|\right]d\lambda d\eta \\
& +\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
& \left[\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\theta,\xi\right)\right|+\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\theta,\kappa\right)\right|\right. \\
& \left.+\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\upsilon,\xi\right)\right|+\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\upsilon,\kappa\right)\right|\right]d\lambda d\eta \\
& +\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
& \left[\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\theta,\xi\right)\right|+\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\theta,\kappa\right)\right|\right. \\
& \left.\left.+\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\upsilon,\xi\right)\right|+\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\upsilon,\kappa\right)\right|\right]d\lambda d\eta\right\} \\
\leq\ & \frac{\left(\upsilon-\theta\right)\left(\kappa-\xi\right)}{2^{s+2}2^{s+2}\gamma_1\gamma_2}\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot\Psi(\gamma_2,\beta,s)+\Psi(\gamma_2,\beta,s)\cdot B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right. \\
& \left.+\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)+B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right] \\
& \times\left[\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|\right],
\end{aligned}
$$

böylece ispat tamamlanır. Burada,

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}d\lambda d\eta \\
& \quad=\Psi\left(\gamma_{1,}\alpha,s\right)\Psi\left(\gamma_2,\beta,s\right)
\end{aligned}
$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s} d\lambda d\eta$$
$$= \Psi\left(\gamma_1,\alpha,s\right) B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)$$
$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s} d\lambda d\eta$$
$$= B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\Psi\left(\gamma_2,\beta,s\right)$$
$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s} d\lambda d\eta$$
$$= B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right).$$

Sonuç 4.2. *Teorem 4.1'de, eğer $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$ ve $s = 1$ seçersek, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\varpi(\theta,\xi)+\varpi(\theta,\kappa)+\varpi(\upsilon,\xi)+\varpi(\upsilon,\kappa)}{4}+\frac{2^{\alpha-1}2^{\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{(\upsilon-\theta)^{\alpha}(\kappa-\xi)^{\beta}}\right. \\
&\quad\times\left[I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\right. \\
&\quad\left.\left.+\ I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\right]-A\right| \\
&\le \frac{(\upsilon-\theta)(\kappa-\xi)}{16(\alpha+1)(\beta+1)}\left[\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|\right. \\
&\quad\left.+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|\right].
\end{aligned}\tag{40}$$

Teorem 4.3. *$\varpi : \triangle \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kısmi türevlenebilir bir fonksiyon olsun, Δ üzerinde $0 \le \theta < \upsilon$, $0 \le \xi < \kappa$. Eğer $\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial t\partial\lambda}\right|^q$ $q > 1$, Δ üzerinde koordinatlar üzerinde s-konveks ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.*

$$\begin{aligned}
&\left|\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+\frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\beta}}{(\upsilon-\theta)^{\gamma_1\alpha}(\kappa-\xi)^{\gamma_2\beta}}\right. \\
&\quad\times\left[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\right. \\
&\quad\left.\left.+\ {}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\right]-A\right|
\end{aligned}\tag{41}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{(\upsilon-\theta)(\kappa-\xi)}{2^{4+\frac{2s}{q}}}\left[\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}B\left(\alpha p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
& \times\frac{1}{(s+1)^{\frac{2}{q}}} \\
& \left\{\left[(2^{s+1}-1)^2\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+(2^{s+1}-1)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right.\right. \\
& \quad\left.+(2^{s+1}-1)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
& +\left[(2^{s+1}-1)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+(2^{s+1}-1)^2\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right. \\
& \quad\left.+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+(2^{s+1}-1)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
& +\left[(2^{s+1}-1)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right. \\
& \quad\left.+(2^{s+1}-1)^2\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+(2^{s+1}-1)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
& +\left[\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+(2^{s+1}-1)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right. \\
& \quad\left.+(2^{s+1}-1)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+(2^{s+1}-1)^2\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

burada A, (22) ile tanımlanır ve $B(\cdot,\cdot)$ Beta fonksiyonunu ifade eder ve $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$.

Proof. Lemma'dan, (39) eşitsizliğine sahibiz. Çift katlı integraller için iyi bilinen Hölder eşitsizliğini I_5'te kullanarak ve $\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\right|^q$ fonksiyonu $\triangle$ üzerinde koordinatlar üzerinde s-konveks olduğundan, elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
I_5 =& \left\{\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right. \\
& \left.\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1+\eta}{2}\theta+\frac{1-\eta}{2}\upsilon,\frac{1+\lambda}{2}\xi+\frac{1-\lambda}{2}\kappa\right)\right|d\lambda d\eta\right\} \\
\leq & \left(\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha p}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta p}d\lambda d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1+\eta}{2}\theta+\frac{1-\eta}{2}\upsilon,\frac{1+\lambda}{2}\xi+\frac{1-\lambda}{2}\kappa\right)\right|^q d\lambda d\eta\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta}}\left(\int_0^1\int_0^1 \left(1-(1-\eta)^{\gamma_1}\right)^{\alpha p}\left(1-(1-\lambda)^{\gamma_2}\right)^{\beta p} d\lambda d\eta\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times\left\{\int_0^1\int_0^1 \left[\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^s\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^s\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial s}(\theta,\xi)\right|^q+\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^s\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^s\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^s\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^s\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^s\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^s\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\right] d\lambda d\eta\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta}}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2}B\left(\alpha p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times\frac{1}{(2^{\frac{s}{q}})^2}\left(\left(\frac{2^{s+1}-1}{s+1}\right)^2\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+\left(\frac{2^{s+1}-1}{(s+1)^2}\right)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{2^{s+1}-1}{(s+1)^2}\right)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+\left(\frac{1}{s+1}\right)^2\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

Burada şu gerçeği kullanırız:

$$(\varpi-\sigma)^j \leq \varpi^j-\sigma^j,$$

herhangi $\varpi>\sigma\geq 0$ ve $j\geq 1$ için.

Ve benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
I_6 &= \left\{\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right. \\
&\qquad \left.\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1+\eta}{2}\theta+\frac{1-\eta}{2}\upsilon,\frac{1-\lambda}{2}\xi+\frac{1+\lambda}{2}\kappa\right)\right| d\lambda d\eta\right\} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta}(2^{\frac{s}{q}})^2}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2}B\left(\alpha p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \times\left(\frac{(2^{s+1}-1)}{(s+1)^2}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+\left(\frac{2^{s+1}-1}{s+1}\right)^2\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right. \\
&\qquad \left.+\frac{1}{(s+1)^2}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+\frac{(2^{s+1}-1)}{(s+1)^2}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
\tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
I_7 &= \left\{\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right. \\
&\qquad \left.\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1-\eta}{2}\theta+\frac{1+\eta}{2}\upsilon,\frac{1+\lambda}{2}\xi+\frac{1-\lambda}{2}\kappa\right)\right| d\lambda d\eta\right\}
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta}(2^{\frac{s}{q}})^2}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2}B\left(\alpha p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\frac{(2^{s+1}-1)}{(s+1)^2}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+\left(\frac{1}{s+1}\right)^2\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2^{s+1}-1}{s+1}\right)^2\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+\frac{(2^{s+1}-1)}{(s+1)^2}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

ve

$$I_8=\left\{\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right. \tag{47}$$
$$\left.\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1-\eta}{2}\theta+\frac{1+\eta}{2}\upsilon,\frac{1-\lambda}{2}\xi+\frac{1+\lambda}{2}\kappa\right)\right|d\lambda d\eta\right\}$$
$$\leq \frac{1}{\gamma_1^{\alpha}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta}(2^{\frac{s}{q}})^2}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2}B\left(\alpha p+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta p+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\frac{1}{(s+1)^2}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+\left(\frac{2^{s+1}-1}{(s+1)^2}\right)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2^{s+1}-1}{(s+1)^2}\right)\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+\left(\frac{(2^{s+1}-1)}{(s+1)}\right)^2\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{48}$$

Eğer (44)-(47)'i (39)'de yerine koyarsak, (41)'nin ilk eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.4. *Teorem 3'te, eğer $\gamma_1=1$, $\gamma_2=1$ ve $s=1$ alırsak, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.*

$$\left|\frac{\varpi(\theta,\xi)+\varpi(\theta,\kappa)+\varpi(\upsilon,\xi)+\varpi(\upsilon,\kappa)}{4}+\frac{2^{\alpha-1}2^{\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{(\upsilon-\theta)^{\alpha}(\kappa-\xi)^{\beta}}\right. \tag{49}$$
$$\times\left[I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\right.$$
$$\left.\left.+\ I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+\ I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\right]-A\right|$$
$$\leq \frac{(\upsilon-\theta)(\kappa-\xi)}{2^{4+\frac{4}{q}}}\left[\frac{1}{(p+1)}\right]^{\frac{2}{p}}$$
$$\times\left\{\left[9\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+3\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right.\right.$$
$$\left.+3\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left[3\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+9\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q\right.$$

$$+1\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+3\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\Bigg]^{\frac{1}{q}}$$
$$+\Bigg[3\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q$$
$$+9\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+3\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\Bigg]^{\frac{1}{q}}$$
$$+\Bigg[\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q+3\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q$$
$$+3\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q+9\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\Bigg]^{\frac{1}{q}}. \tag{51}$$

Teorem 4.5. *$\varpi:\triangle\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ kısmi türevlenebilir bir fonksiyon olsun, Δ üzerinde $0\leq\theta<\upsilon$, $0\leq\xi<\kappa$. Eğer $\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\right|^q$ $q\geq 1$, Δ üzerinde koordinatlar üzerinde s-konveks ise, aşağıdaki eşitsizliğe sahibiz:*

$$\Bigg|\frac{\varpi(\theta,\xi)+\varpi(\theta,\kappa)+\varpi(\upsilon,\xi)+\varpi(\upsilon,\kappa)}{4}+\frac{2^{\gamma_1\alpha-1}2^{\gamma_2\beta-1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\gamma_1^\alpha\gamma_2^\beta}{(\upsilon-\theta)^{\gamma_1\alpha}(\kappa-\xi)^{\gamma_2\beta}} \tag{52}$$
$$\times\Bigg[{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\theta^+,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)$$
$$+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\xi^+}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)+{}^{\gamma_1\gamma_2}I^{\alpha,\beta}_{\upsilon^-,\kappa^-}\varpi\left(\frac{\theta+\upsilon}{2},\frac{\xi+\kappa}{2}\right)\Bigg]-A\Bigg|$$
$$\leq\frac{(\upsilon-\theta)(\kappa-\xi)}{\gamma_1\gamma_2 4^{2+\frac{s}{q}}}\left(B\left(\alpha+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\Bigg\{\Bigg(\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot\Psi(\gamma_2,\beta,s)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q$$
$$+\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q$$
$$+\left[\Psi(\gamma_2,\beta,s)\cdot B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q$$
$$+\left[B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\Bigg(\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q$$
$$+\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot\Psi(\gamma_2,\beta,s)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q$$
$$+\left[B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q$$

$$+\left[\Psi(\gamma_2,\beta,s)\cdot B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\Bigg(\left[\Psi(\gamma_2,\beta,s)\cdot B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q$$
$$+\left[B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q$$
$$+\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot\Psi(\gamma_2,\beta,s)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q$$
$$+\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\Bigg(\left[B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\cdot B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q$$
$$+\left[\Psi(\gamma_2,\beta,s)\cdot B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q$$
$$+\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q$$
$$+\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot\Psi(\gamma_2,\beta,s)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada A, (22)'da tanımlandığı gibidir ve $\Psi(\gamma_1,\alpha,s),\Psi(\gamma_2,\beta,s)$ *Teorem 3'te tanımlandığı gibidir.*

Proof. (39) eşitliğinin yardımıyla ve I_9'da power-mean eşitsizliğini kullanarak, elde ederiz:

$$I_9=\Bigg\{\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \tag{53}$$
$$\times\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1+\eta}{2}\theta+\frac{1-\eta}{2}\upsilon,\frac{1+\lambda}{2}\xi+\frac{1-\lambda}{2}\kappa\right)\right|d\lambda d\eta\Bigg]$$
$$\leq\left(\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}d\lambda d\eta\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\Bigg(\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}$$
$$\times\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1+\eta}{2}\theta+\frac{1-\eta}{2}\upsilon,\frac{1+\lambda}{2}\xi+\frac{1-\lambda}{2}\kappa\right)\right|^q d\lambda d\eta\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\right|^q$'nın $\triangle$ üzerinde koordinatlar üzerinde s-konveksliğini dikkate alarak, elde ederiz:

$$\leq \left(\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} d\lambda d\eta\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta}\right.$$

$$\times\left\{\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^{q}+\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^{q}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^{q}+\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{s}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{s}\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^{q} d\lambda d\eta\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Bu eşitsizlikte, değişken değiştirmeyi kullanarak, yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\qquad \left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1+\eta}{2}\theta+\frac{1-\eta}{2}\upsilon,\frac{1+\lambda}{2}\xi+\frac{1-\lambda}{2}\kappa\right)\right| d\lambda d\eta \\
\leq\ & \left(\frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}\gamma_2^{\beta+1}}B\left(\alpha+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{4^s}\frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}}\right. \\
&\quad \times\left\{\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot\Psi(\gamma_2,\beta,s)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^{q}\right. \\
&\quad +\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^{q} \\
&\quad +\left[\Psi(\gamma_2,\beta,s)B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^{q} \\
&\quad \left.\left.+\left[B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^{q}\right)\right\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
I_{10} =\ &\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^{\beta} \\
&\qquad \left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1+\eta}{2}\theta+\frac{1-\eta}{2}\upsilon,\frac{1-\lambda}{2}\xi+\frac{1+\lambda}{2}\kappa\right)\right| d\lambda d\eta \\
\leq\ & \left(\frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}}B\left(\alpha+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{4^s}\frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}}\right. \\
&\quad \times\left\{\left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^{q}\right.
\end{aligned} \tag{55}$$

$$
\begin{aligned}
&+ [\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot\Psi(\gamma_2,\beta,s)] \left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q \\
&+ \left[B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q \\
&+ \left[\Psi(\gamma_2,\beta,s)B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\Bigg)\Bigg\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^\alpha \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^\beta \qquad (56)\\
&\quad \left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1-\eta}{2}\theta+\frac{1+\eta}{2}\upsilon,\frac{1+\lambda}{2}\xi+\frac{1-\lambda}{2}\kappa\right)\right| d\lambda d\eta \\
&\le \left(\frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}}B\left(\alpha+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{4^s}\frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}}\right. \\
&\quad \times\Bigg\{\left[\Psi(\gamma_2,\beta,s)B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q \\
&\quad + \left[B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q \\
&\quad + [\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot\Psi(\gamma_2,\beta,s)]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q \\
&\quad + \left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\Bigg)\Bigg\}^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

son olarak

$$
\begin{aligned}
I_{12} &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\gamma_1}}{\gamma_1}\right)^\alpha \left(\frac{1-(1-\lambda)^{\gamma_2}}{\gamma_2}\right)^\beta \qquad (57)\\
&\quad \left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}\left(\frac{1-\eta}{2}\theta+\frac{1+\eta}{2}\upsilon,\frac{1-\lambda}{2}\xi+\frac{1+\lambda}{2}\kappa\right)\right| d\lambda d\eta \\
&\le \left(\frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}}B\left(\alpha+1,\frac{1}{\gamma_1}\right)B\left(\beta+1,\frac{1}{\gamma_2}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{4^s}\frac{1}{\gamma_1^{\alpha+1}}\frac{1}{\gamma_2^{\beta+1}}\right. \\
&\quad \times\Bigg\{\left[B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\xi)\right|^q \\
&\quad + \left[\Psi(\gamma_2,\beta,s)\cdot B\left(\alpha+1,\frac{s+1}{\gamma_1}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\theta,\kappa)\right|^q \\
&\quad + \left[\Psi(\gamma_1,\alpha,s)B\left(\beta+1,\frac{s+1}{\gamma_2}\right)\right]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\xi)\right|^q \\
&\quad + [\Psi(\gamma_1,\alpha,s)\cdot\Psi(\gamma_2,\beta,s)]\left|\frac{\partial^2\varpi}{\partial\eta\partial\lambda}(\upsilon,\kappa)\right|^q\Bigg)\Bigg\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

(54)-(57)'yi (39)'de göz önünde bulundurarak, istenilen eşitsizlik (52) elde edilir.

5 SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışması, modern matematiksel analizde önemli bir yer tutan konvekslik teorisinin genelleştirilmiş bir formu olan koordinatlarda s-konveks fonksiyonlar sınıfını, yeni nesil integral operatörlerinden Conformable integraller bağlamında ele almıştır. Elde edilen sonuçlar, teorik integral eşitsizlikleri literatürüne özgün ve anlamlı katkılar sağlamıştır.

5.1 Elde Edilen Bulguların Değerlendirilmesi

Çalışmanın ana gövdesini oluşturan dördüncü bölümde, birim dikdörtgensel bölge üzerinde tanımlı ve koordinatlarda s-konveks özelliğini sağlayan fonksiyonlar için, Conformable integral operatörlerini kullanarak Hermite–Hadamard (H–H) tipi eşitsizliklerin yeni genellemeleri başarıyla elde edilmiştir. Bu bulgular, literatürdeki mevcut boşluğu doldurarak, özellikle klasik Riemann integrali çatısı altında analiz edilemeyen durumlarda, daha esnek ve kapsamlı matematiksel araçlar sunmaktadır.

Koordinatlarda s-konveks fonksiyonlar için elde edilen çift integral eşitsizlikleri, $s \in (0, 1]$ parametresinin eşitsizlik sınırları üzerindeki etkisini açıkça ortaya koymuştur. $s = 1$ özel durumunda, tüm elde edilen sonuçların koordinatlarda klasik konveks fonksiyonlar için bilinen orijinal H–H eşitsizliklerine indirgenmesi, tezin matematiksel tutarlılığını ve genelliğini kanıtlamaktadır. Bu durum, Conformable operatörlerinin konvekslik yapıları üzerindeki etkileşiminin başarılı bir şekilde modellendiğini göstermektedir.

Elde edilen temel teoremler, özellikle trapezoid formülleri için yeni hata tahmini sınırlarının oluşturulmasına olanak tanımıştır. Nümerik integrasyon yöntemlerinde, fonksiyonların konvekslik özelliklerinin hata analizinde kritik rol oynadığı düşünüldüğünde, bu yeni ve daha sıkı sınırlar, uygulamalı matematik alanında önemli potansiyel taşımaktadır.

Çalışmada kullanılan α-mertebeli Conformable integral tanımı (Khalil vd., 2014), klasik kesirli türev/integral tanımlarının getirdiği karmaşıklıktan kaçınarak, integral eşitsizliklerinin elde edilmesini hem daha analitik hem de daha zarif hale getirmiştir. Bu yaklaşım, sadece s-konveksliği değil, aynı zamanda diğer genelleştirilmiş konvekslik sınıflarını (örneğin, h-konvekslik, P-konvekslik) da Conformable çerçevesinde incelemek için sağlam bir metodolojik zemin oluşturmuştur (Alp vd. 2011, Dragomir ve Pearce 2000).

5.2 Literatüre Katkılar ve Çalışmanın Önemi

Bu tez çalışması, integral eşitsizlikleri teorisine üç temel boyutta katkı sağlamıştır:

Yeni Fonksiyon Sınıfı-Operatör Entegrasyonu: Koordinatlarda s-konveks fonksiyonların, Conformable integral operatörleri ile birleştirilerek incelenmesi literatürde ilk olma özelliğini taşımaktadır. Bu entegrasyon, çok değişkenli analizde genelleştirilmiş konvekslik ve genelleştirilmiş analiz araçlarının bir arada kullanımına dair yeni kapılar açmıştır.

Daha Sıkı Eşitsizlik Sınırları: s parametresi sayesinde elde edilen eşitsizlikler, fonksiyonun konvekslik derecesine bağlı olarak klasik konvekslik eşitsizliklerinden daha sıkı sınırlar sunma potansiyeli taşımaktadır. Bu durum, teorik yaklaşımların pratik nümerik uygulamalardaki doğruluğunu artırabilir.

Teorik Metodoloji: Çalışma, benzer genelleştirilmiş konvekslik yapılarını (örneğin, güçlü konvekslik veya log-konvekslik) Conformable integral ve türev operatörleri ile analiz etmek için standart bir metodoloji sunmuştur (Kiriş ve Akça 2024, Kiriş vd. 2025).

Gelecekteki Araştırma Yönelimleri

Elde edilen bu sonuçlar ışığında, integral eşitsizlikleri ve genelleştirilmiş konvekslik teorisinin gelecekteki gelişimine yönelik olarak aşağıdaki araştırma yönelimleri önerilmektedir:

5.2.1 Diğer Konvekslik Sınıflarının İncelenmesi

Bu tezde odaklanılan s-konveksliğin yanı sıra, gelecekteki çalışmalar koordinatlarda P-konveks, quasi-konveks veya güçlü konveks fonksiyonlar gibi diğer önemli genelleştirilmiş konvekslik sınıflarını Conformable integral operatörleri altında inceleyebilir. Özellikle, log-konveks ve log- s-konveks fonksiyonların H–H tipi eşitsizlikleri üzerindeki etkileri, Conformable bağlamında derinlemesine araştırılmalıdır.

5.2.2 Farklı Genelleştirilmiş Operatörlerin Kullanımı

Conformable integral operatörlerinin yanı sıra, tezdeki metodoloji, Riemann-Liouville, Caputo veya Atangana-Baleanu gibi diğer önemli kesirli türev ve integral operatörlerine de adapte edilebilir. Örneğin, kesirli integral operatörlerinin Lipschitz koşulunu sağlayan s-konveks fonksiyonlar üzerindeki genellemeleri, hata analizinde daha sofistike sonuçlar doğurabilir (Sarıkaya vd., 2013).

5.2.3 Daha Yüksek Boyutlu Genellemeler

Tez, koordinatlarda s-konveksliği dikdörtgensel bölgelerde ele almıştır. Gelecekte, bu sonuçlar çok boyutlu uzaylara (örneğin $\mathbb{R}^3$) veya genelleştirilmiş konveks kümeler (star-shaped veya co-ordinated convex sets) üzerine taşınabilir. Bu, kısmi türev ve çok katlı integral operatörleri kullanılarak daha karmaşık yapılar için integral eşitsizliklerinin geliştirilmesine olanak tanıyacaktır.

5.2.4 Uygulamalı Alanlara Odaklanma

Teorik eşitsizliklerin pratik uygulamaları üzerine yoğunlaşmak, tezin bilimsel etkisini artıracaktır. Elde edilen yeni hata tahmini formüllerinin, finansal modelleme, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri veya optimizasyon algoritmaları (örneğin stokastik optimizasyon) gibi alanlarda karşılaştırmalı testler ile doğrulanması ve potansiyel uygulama alanlarının belirlenmesi önemlidir.
Sonuç olarak, bu tez, koordinatlarda s-konveks fonksiyonlar teorisini Conformable

integral hesabı ile başarılı bir şekilde birleştirmiştir. Çalışmanın temel çıktıları, integral eşitsizlikleri teorisinin genelleştirilmiş konvekslik ve kesirli analiz disiplinleri arasındaki etkileşimini derinleştirmekte ve gelecekteki araştırmalar için zengin bir temel sağlamaktadır.

6 KAYNAKLAR

Abdelhakim A A, 2019, The flaw in the conformable calculus: It is conformable because it is not fractional, Fractional Calculus and Applied Analysis, 22, 242–254.

Abdeljawad T, 2015, On conformable fractional calculus, J. Comput. Appl. Math., 279, 57–66.

Akkurt A, Sarikaya M Z, Budak H, Yildirim H, 2017, On the Hadamard's type inequalities for co-ordinated convex functions via fractional integrals, Journal of King Saud University–Science, 29, 380–387.

Akkurt A, Yildirim M E, Yildirim H, 2017, A new generalized fractional derivative and integral, Konuralp Journal of Mathematics, 5(2), 248–259.

Alomari M, Darus M, 2008, The Hadamards inequality for s-convex function of two variables on the coordinates, Int. J. Math. Anal., 2(13), 629–638.

Bakula M K, 2014, An improvement of the Hermite–Hadamard inequality for functions convex on the coordinates, Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 11(1), 1–7.

Bozkurt M, Akkurt A, Yildirim H, 2021, Conformable derivatives and integrals for the functions of two variables, Konuralp Journal of Mathematics, 9(1), 49–59.

Breckner W W, 1978, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen, Publ. Inst. Math. (Beograd) (NS), 23(37), 13–20.

Dragomir S S, Agarwal R, 1998, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Applied Mathematics Letters, 11(5), 91–95.

Dragomir S S, Pearce C E M, 2000, Selected Topics on Hermite–Hadamard

Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University.

Dragomir S S, 2001, On Hadamard's Inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane, Taiwanese J. Math., 4, 775–788.

Hyder A, Soliman A H, 2020, A new generalized θ-conformable calculus and its applications in mathematical physics, Physica Scripta, 96, 015208.

Hyder A A, Almoneef A A, Budak H, Barakat M A, 2022, On New Fractional Version of Generalized Hermite–Hadamard Inequalities, Mathematics, 10(18), 3337.

Iqbal M, Qaisar S, Muddassar M, 2016, A short note on integral inequality of type Hermite–Hadamard through convexity, J. Computational Analysis and Applications, 21(5), 946–953.

Jarad F, Uğurlu E, Abdeljawad T, Baleanu D, 2017, On a new class of fractional operators, Advances in Difference Equations, 2017, 247.

Khalil R, Al Horani M, Yousef A, Sababheh M, 2014, A new definition of fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65–70.

Khan T U, Khan M A, 2019, Generalized conformable fractional operators, Journal of Computational and Applied Mathematics, 346, 378–389.

Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J, 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier, Amsterdam.

Kiris M E, Bayrak G, 2023, New version of Hermite–Hadamard inequality for co-ordinated convex function via generalized conformable integrals, submitted.

Latif M A, Alomari M, 2009, Hadamard-type inequalities for product two convex functions on the co-ordinates, Int. Math. Forum, 4(47), 2327–2338.

Miller S, Ross B, 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York.

Pečarić J E, Proschan F, Tong Y L, 1992, Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Boston.

Podlubny I, 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego.

Samko G, Kilbas A A, Marichev S, 1993, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon.

Sarikaya M Z, Set E, Ozdemir M E, Dragomir S S, 2012, New some Hadamard's type inequalities for co-ordinated convex functions, Tamsui Oxford J. Inf. Math. Sci., 28(2), 137–152.

Sarikaya M Z, Set E, Yaldiz H, Basak N, 2013, Hermite–Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Math. Comput. Model., 57, 2403–2407.

Sarikaya M Z, 2014, On the Hermite–Hadamard-type inequalities for co-ordinated convex function via fractional integrals, Integral Transforms and Special Functions, 25(2), 134–147.

Sarikaya M Z, Budak H, Usta F, 2019, On generalized conformable fractional calculus, TWMS J. App. Eng. Math., 9(4), 792–799.

Sarikaya M Z, Akkurt A, Budak H, Yildirim M E, Yildirim H, 2019, Hermite–Hadamard's inequalities for conformable fractional integrals, IJOCTA, 9(1), 49–59.

Varošanec S, 2007, On h-convexity, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 326, 303–311.

Zhao D, Luo M, 2017, General conformable fractional derivative and its physical interpretation, Calcolo, 54, 903–917.

ÖZGEÇMİŞ

ADİ SOYADI	:	TUĞBA AKÇA
DOĞUM YERİ VE TARİHİ	:	Afyonkarahisar, 02.10.1991
YABANCI DİLİ	:	İngilizce
İLETİŞİM (TEL/E-POSTA)	:	05350134009 / tugbaakca@hotmail.com

EĞİTİM DURUMU

Lise	:	Tire Lisesi, İzmir, 2006
Lisans	:	Atatürk Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği, 2009-2013
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2022-2025

ÇALIŞTIĞI KURUM(LAR)

: İstanbul, 11.09.2013 - 2020

: Uşak, 2020 - günümüz