

**KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Eda Elif NİZAMOĞLU

Danışman

Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Ocak 2026

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ**

**Eda Elif NİZAMOĞLU**

**Danışman**

**Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Ocak 2026**

## TEZ ONAY SAYFASI

Eda Elif NİZAMOĞLU tarafından hazırlanan “Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Çözümleri” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 05/01/2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

**Başkan** : Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ  
Necmettin Erbakan Üniv., Ereğli Eğitim Fak.

**Üye** : Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK  
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.

**Üye** : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ  
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun  
..... /..... /..... tarih ve  
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....  
Prof. Dr. Bekir YALÇIN  
Enstitü Müdürü

**BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI**  
**Afyon Kocatepe Üniversitesi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**05/01/2026**

**İmza**

**Eda Elif NİZAMOĞLU**

**ÖZET**  
Yüksek Lisans Tezi

**KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ**

Eda Elif NİZAMOĞLU  
Afyon Kocatepe Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Bu tez çalışması, sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına, ikinci bölüm temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. Üçüncü bölümde geliştirilmiş kesirli türev yaklaşımının, klasik ve uyumlu türev yöntemlerine kıyasla avantajları gösterilmiştir. Dördüncü bölümde belirsiz kesirli diferensiyel denklemler için yeni bir çözüm yaklaşımı ortaya konmuştur. Beşinci bölümde bu denklemlerin varlığı Schauder, tekliği ise Banach teoremiyle ispatlanmıştır. Altıncı bölümde Liouville-Caputo tipi fark denklemleri (UFLCDE) için Picard iterasyon yöntemi önerilmiş, varlık ve teklik Banach büzülme teoremiyle gösterilmiştir. Yedinci bölümde çalışma genelinde elde edilen bulgular tartışılıp sonuçlandırılmış, son bölüm ise kaynaklara ayrılmıştır.

**2026, v + 72 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli Türev, Kesirli Diferensiyel Denklem, Belirsizlik Teorisi, Belirsiz Kesirli Diferensiyel ve Fark Denklemleri.

**ABSTRACT**  
M.Sc. Thesis

SOLUTIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Eda Elif NİZAMOĞLU

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

**Supervisor:** Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK

This thesis consists of eight chapters. The first chapter is devoted to the introduction, and the second chapter to basic definitions and theorems. In the third chapter, the advantages of the generalized fractional derivative approach compared to classical and conformable derivative methods are demonstrated. In the fourth chapter, a new solution approach is proposed for uncertain fractional differential equations. In the fifth chapter, the existence of these equations is proven using the Schauder theorem, and their uniqueness using the Banach theorem. In the sixth chapter, the Picard iteration method is proposed for Liouville-Caputo type difference equations (UFLCDE), and existence and uniqueness are shown using the Banach contraction principle. In the seventh chapter, the findings obtained throughout the study are discussed and concluded, while the final chapter is devoted to references.

**2026, v + 72 pages**

**Keywords:** Fractional Derivative, Fractional Differential Equation, Uncertainty Theory, Uncertain Fractional Differential and Difference Equations.

## TEŞEKKÜR

Tüm yüksek lisans sürecim boyunca engin bilgi ve tecrübesiyle bana yol gösteren, kıymetli vaktini esirgemeyen, bir akademisyen ve anne olarak yaptığı her şeyle bana en güzel örneklerden biri olan değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez savunma sınavımda jüri üyesi olarak yer alan ve değerli katkılarını esirgemeyen hocalarım Sayın Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ ve Sayın Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen, sabır ve fedakârlıklarıyla beni bugünlere getiren kıymetli annem Satı ve babam Uğur NİZAMOĞLU'na, her zaman yanımda olan, varlıklarıyla bana güç veren canım ablam Emine ÖNER ve kardeşim Muhammed Cemal NİZAMOĞLU'na, tüm güzel ve anlamlı kelimelerle teşekkür ederim.

Eda Elif NİZAMOĞLU

Afyonkarahisar 2026

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ .....	v
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR ve TEOREMLER .....	3
2.1    Gamma Fonksiyonu .....	3
2.2    Beta Fonksiyonu.....	5
2.3    Mittag-Leffler Fonksiyonu .....	5
2.4    Riemann-Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali.....	6
2.5    Caputo Kesirli Türevi.....	7
2.6    Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi .....	7
3. UYGULAMALARLA KESİRLİ TÜREVİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TANIMI .....	8
3.1    Uygulamalar .....	18
3.1.1    Üstel Fonksiyonun Kesirli Türevi.....	18
3.1.2    Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonlarının Kesirli Türevi.....	19
4. BELİRSİZLİK İÇEREN KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM KAVRAMI ÜZERİNE .....	23
4.1    Kesirli Diferensiyel Denklemler .....	24
4.2    Belirsizlik İçeren Diferensiyel Denklemler.....	25
4.3    Belirsizlik İçeren Kesirli Diferensiyel Denklemler.....	26
4.4    Örnekler.....	27
5. BELİRSİZ KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI ve TEKLIĞİ.....	29
5.1    Varlık ve Teklik .....	35
6. BELİRSİZ LİOUVILLE-CAPUTO KESİRLİ FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ VARLIĞI ve TEKLIĞİ .....	44
7. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	62
8. KAYNAKLAR .....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	72

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

---

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$N_l$	İzole zaman ölçeği
$\Gamma(\cdot)$	Gamma Fonksiyonu
$B(r, s)$	Beta Fonksiyonu
$E_\alpha$	$\alpha$ Mertebeli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}$	İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
${}^{RL}D^\alpha$	Riemann-Liouville Kesirli Türevi
${}^cD^\alpha$	Caputo Kesirli Türevi
$D_{GFD}$	Genelleştirilmiş Kesirli Türev
$I^\alpha$	Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$\Delta$	İleri fark operatörü
$\sigma(t)$	İleri sıçrama operatörü
$t^{(\nu)}$	Düşen faktöriyel fonksiyonu
$\mathcal{M}$	Belirsiz Ölçü
$\Phi(x)$	Belirsizlik Dağılımı
$\mathcal{C}_t$	Kanonik Liu Süreci
$\xi_t$	Belirsiz dizi veya belirsiz değişken

### Kısaltmalar

---

BPM	Bernstein Polinom Yöntemi
CD	Uyumlu Türev (Conformable Derivative)
EHPM	Geliştirilmiş Homotopi Pertürbasyon Yöntemi
FTBM	Kesirli Taylor Tabanı Yöntemi
GFD	Genelleştirilmiş Kesirli Türev (Generalized Fractional Derivative)
IID	Bağımsız ve Aynı Dağılımlı (Independent and Identically Distributed)
IUD	Ters Belirsizlik Dağılımı (Inverse Uncertainty Distribution)
IVP	Başlangıç Değer Problemi (Initial Value Problem)
İC	Başlangıç Koşulu (Initial Condition)
ML	Mittag-Leffler
ODE	Adi Diferensiyel Denklemler (Ordinary Differential Equations)
PDE	Kısmi Diferensiyel Denklemler (Partial Differential Equations)
RL	Riemann-Liouville
UFLCDE	Liouville-Caputo Tipi Belirsiz Kesirli Fark Denklemleri (Uncertain Fractional Liouville-Caputo Difference Equations)

---

## 1. GİRİŞ

Diferensiyel ve integral hesabın temellerinin 17. yüzyıl sonlarında Newton ve Leibniz tarafından atılmasıyla birlikte, diferensiyel denklemler üzerine yapılan bilimsel araştırmalar da ivme kazanmıştır. Matematiksel modellemenin belkemiğini oluşturan bu disiplin; mühendislik bilimlerinden biyolojik sistemlere, ekonomiden tıp teknolojilerine kadar geniş bir yelpazede kritik bir rol üstlenmektedir. Bu kapsamda gelişim gösteren kesirli analiz alanı ise, tarihsel olarak oldukça ilginç bir başlangıca sahiptir. Konunun temelleri, 1695 yılında L'Hopital'in Leibniz'e gönderdiği ve  $n$  tam sayı olmadığında (örneğin  $n = \frac{1}{2}$ )  $\frac{d^n y}{dx^n}$  türev operatörünün anlamını sorguladığı meşhur mektuplaşma ile atılmıştır. O dönemde teorik bir merak unsuru olarak filizlenen bu kavram, günümüzde hafıza etkisine sahip materyallerin ve karmaşık fiziksel süreçlerin modellenmesinde vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir. Kesirli analiz yöntemleri; viskoelastik malzemelerin sünme, gevşeme ve sönümlenme davranışlarından, akustik ve ultrasonik dalgaların yayılımına; kirleticilerin çevresel difüzyonundan, proteinlerin hücre zarı geçişlerine kadar geniş bir yelpazede modelleme aracı olarak kullanılmaktadır. Ayrıca biyomedikal sinyallerin (EKG, EMG, EEG) analizi, DNA dizilimi, sismik titreşimler, akışkanlar dinamiği, dielektrik durulma, elektromanyetik alanlar ve kaotik sistemler de bu kapsamda başarılı bir şekilde modellenmiştir. Fiziksel sistemlerin ötesinde, son dönemde insan psikolojisindeki duygusal süreçlerin açıklanmasında da bu yaklaşımdan yararlanılmaktadır. Her ne kadar Leibniz bu süreçte  $\frac{1}{2}$  mertebeden türev kavramını sorgulamış olsa da, dönemin matematiksel gelişiminin henüz başlangıç aşamasında olması ve karşılaşılan teknik zorluklar, konunun 17. yüzyılda yoğun bir çalışma alanı haline gelmesini engellemiştir. Matematiksel altyapının gelişmesiyle beraber, kesirli integrasyon konusundaki ilk kapsamlı tanım Liouville tarafından yapılmıştır. Özellikle Padovan (1987)'in çalışmalarıyla birlikte, lineer ve lineer olmayan kesirli diferensiyel denklemler konusu araştırmacıların ilgi odağı olmaya başlamıştır. Oldham ve Spanier (1974), Miller ve Ross (1993) ve Podlubny (1999) tarafından yapılan ve alanın başlangıç noktası kabul edilen çalışmalarla, kesirli diferensiyel denklemlerin varlık-teklik teoremleri ve çözüm teknikleri literatüre kazandırılmıştır. Son yıllarda bu konunun popüleritesinin artması, yöntemin fiziksel modelleri tanımlamadaki başarısına dayanmaktadır. Kesirli hesap, sistemin sadece şimdiki zamanını değil, tarihçesini de

hesaba katarak karmaşık yapıların daha doğru modellenmesine olanak tanır ve birçok problemde daha başarılı sonuçlar elde edilmesini sağlar. Günümüzde pek çok sistemin matematiksel modellemesi, türev kavramına dayanmaktadır. Modellenen sistemlerdeki bir değişkenin diğerine göre değişim oranını analiz etmek, ancak türev yardımıyla mümkündür. Bilim tarihinde bu kavramı ilk kullanan ismin Isaac Newton olduğu bilinmektedir.

Türev kavramı tarihsel süreçte evrilerek "kesirli türev" kavramının doğmasına zemin hazırlamıştır. Kesirli diferensiyel denklemlerin doğuşu olarak kabul edilen olay, Leibniz'in L'Hopital'e yazdığı mektuptur. Leibniz, "Tam sayı mertebeli türevler kesirli mertebelere genelleştirilebilir mi?" sorusuna karşılık,  $\frac{d^n y}{dx^n}$  ifadesinde  $n = \frac{1}{2}$  alınmasının ne anlama geleceği üzerine düşünmüş ve bunun "bir gün faydalı sonuçlar doğuracak bir paradoks" olacağını öngörmüştür. Leibniz'den günümüze geçen üç asırlık süreçte Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Caputo, Euler, Abel, Laplace, Lagrange, Grünwald, Hadamard, Riesz ve Letnikov gibi pek çok ünlü matematikçi bu alana önemli katkılar sunmuştur.

Kesirli diferensiyel denklemler, mühendislik ve temel bilimler başta olmak üzere geniş bir uygulama alanına sahiptir. Özellikle son yıllarda, gerçek dünya problemlerini daha hassas ve gerçeğe yakın bir şekilde modelleme yeteneği sayesinde kesirli mertebeden denklemlerin kullanımı yaygınlaşmıştır. Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümleri için kesirli türev ve kesirli integrasyon hesaplamalarının bilinmesi gerekir. Kesirli türev ve integral ifadelerinin genelleştirilmesinde Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo gibi pek çok yaklaşım mevcuttur. Bilimin temel prensipleri ile kesirli diferensiyel denklemlerin harmanlanması, bu alanda büyük ilerlemeler kaydedilmesini sağlamıştır. Yapılan araştırmalar, karmaşık sistem modellerinin sabit mertebeli denklemlerle açıklanmasının yetersiz kalabildiğini göstermiştir. Bu nedenle, söz konusu sistemlerin daha doğru tanımlanabilmesi adına değişken mertebeli kesirli diferensiyel denklemlerin kullanımı önerilmiştir. Bu gelişmeler, kesirli mertebeden denklemlerin uygulanabilirliğini artırmış ve değişken mertebeli tanımlamaların önünü açmıştır. Ancak, değişken mertebeli kesirli diferensiyel denklemlerin her zaman analitik (kesin) çözümlerine ulaşmak mümkün olmamaktadır. Bu sınırlılık, yüksek doğruluk oranına sahip sayısal yöntemlerin geliştirilmesini zorunlu kılmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR ve TEOREMLER

### 2.1 Gamma Fonksiyonu

Kesirli hesaplamaların (Fractional Calculus) temel yapı taşlarından biri olan Gamma fonksiyonu, klasik faktöriyel kavramının ( $n!$ ) reel ve karmaşık sayılar kümesine genişletilmiş hali olarak düşünülebilir. Literatürde sıklıkla Euler integrali olarak da isimlendirilen bu özel fonksiyon, kesirli türev ve integral operatörlerinin inşasında merkezi bir rol oynamaktadır.  $\Gamma(z)$  notasyonu ile ifade edilen fonksiyon,  $z > 0$  koşulu altında

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{N}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır.

Gamma fonksiyonunun en temel özellikleri:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z) = (z-1)! \quad z \in \mathbb{N}$$

eşitliklerini sağlamasıdır. Bu ifadeler integrasyon yöntemiyle kolayca elde edilebilir.

Burada

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z+1-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu integral ifadesi, kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak bir kez integre edildiğinde;  $u = t^z$ ,  $dv = e^{-t} dt$  dönüşümleriyle  $du = z t^{z-1} dt$  ve  $v = -e^{-t}$  olarak bulunur. Elde edilen bu ifadeler  $\int u dv = uv - \int v du$  formülünde yerine yazıldığında:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} t^z dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=b} + z \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Buradan,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu ifade ise Gamma fonksiyonu için bir rekürasyon formülü olur.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{N}$$

integrali  $z = 1$  için,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^0 dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1$$

sonucunu verir.  $z = 1, 2, \dots$  değerleri  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$  eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$$

...

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n - 1)! = n!$$

sonucu elde edilir. Bu elde edilen formülden Gamma fonksiyonunun faktöriyelini genelleştirilmesi olduğu ve  $n!$ 'e yakınsadığı kolayca görülebilir.

## 2.2 Beta Fonksiyonu

Matematik literatüründe Euler'in ikinci tür integrali olarak da bilinen Beta fonksiyonu,  $B(r, s)$  sembolüyle temsil edilir.  $r$  ve  $s$  parametrelerinin karmaşık sayı olduğu durumlarda, bu fonksiyonun tanımı

$$B(r, s) = \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{s-1} dx, \quad (\operatorname{Re}(r) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0)$$

integrali yardımıyla verilir. Belirtilen integralin yakınsaklığı için parametrelerin reel kısımlarının pozitif olması gerekmektedir. Pozitif olmayan herhangi bir  $r$  ya da  $s$  değeri için bu verilen integral ıraksak olur.

Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$B(r, s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}, \quad (\operatorname{Re}(r) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0)$$

bağıntısı mevcuttur. O halde

$$B(r, 1-r) = \Gamma(r)\Gamma(1-r), \quad (0 < \operatorname{Re}(r) < 1)$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla  $B(r, s) = B(s, r)$  simetri özelliğine sahip olduğu kolayca görülebilir.

## 2.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler adını 1903'te tanımını yapan İsveçli bir matematikçiden alan Mittag-Leffler fonksiyonu,  $e^x$  üstel fonksiyonunun genelleştirilmiş bir halidir. Ayrıca bu fonksiyon kesirli analiz ve kesirli hesap için önemli bir fonksiyondur.

Mittag-Leffler fonksiyonu tam sayı mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümünde

üstel fonksiyonun oynadığı rolün bir benzerine keyfi mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümünde sahiptir. Bir parametrelili ve  $(\alpha, \beta)$  şeklindeki iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun kuvvet serisi türünden genelleştirilmiş hali

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0$$

ve

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

şeklinde tanımlanır.

#### 2.4 Riemann-Liouville Kesirli Türevi ve İntegrali

Kesirli analiz teorisinde en sık başvurulan yöntemlerden biri Riemann-Liouville yaklaşımıdır. Bu yaklaşım, kesirli mertebeden türev ve integral işlemlerinin tanımlanmasında standart bir referans noktası olarak kabul edilir. Reel eksen üzerinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonu için,  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $n - 1 < \alpha < n$  aralığındaki  $\alpha$  mertebesine sahip Riemann-Liouville türevi, integral ve türev operatörlerinin ardışık kombinasyonu ile elde edilir ve  $\alpha > 0$ ,  $t > a$ ,  $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$  için

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha + 1 - n}} d\tau$$

şeklinde formüle edilir. Benzer şekilde  $t > 0$  için  $v > 0$  olmak üzere  $f$  fonksiyonu  $(0, \infty)$  aralığında parçalı sürekli ve  $[0, \infty)$  aralığında integrallenebilir olmak üzere,

$${}_0 D_t^{-v} f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t - \xi)^{v-1} f(\xi) d\xi$$

şeklinde verilen ifade ise Riemann-Liouville kesirli integralin tanımıdır.

## 2.5 Caputo Kesirli Türevi

Caputo kesirli türev;

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1) < \alpha < n$$

şeklinde tanımlanır.  $\alpha \rightarrow n$  için  $f(t)$  fonksiyonunun Caputo kesirli türevi  $n$ . mertebeden türevine eşit olur.  $0 \leq n-1 < \alpha < n$  aralığında ise

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left( \frac{f^{(n)}(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \right) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau = f^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

## 2.6 Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi

$f \in H^1(a, b)$ ,  $b > a$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  olmak üzere,  $f(t)$  fonksiyonunun Caputo-Fabrizio kesirli türevi

$${}_0^C D_t^\alpha (f(t)) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(\xi) \exp \left[ -\alpha \frac{t-\xi}{1-\alpha} \right] d\xi$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $M(\alpha)$  normalizasyon fonksiyonu olup,  $M(0) = M(1) = 1$  şeklindedir.

### 3. UYGULAMALARLA KESİRLİ TÜREVİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TANIMI

Klasik türev kavramının doğal bir genişlemesi niteliğindeki kesirli analiz teorisi, özellikle mühendislik ve temel bilimlerdeki pratik karşılıkları sayesinde güncel araştırmaların odak noktası olmuştur. İntegral eşitsizliklerinin kesirli modellerdeki kullanımı, pek çok disiplinde kritik sonuçlar doğurmaktadır. Literatüre bakıldığında: Ekonomi (Baillie 1996), süreklilik ve istatistiksel mekanik (Mainardi 1997), katı mekaniği (Rossikhin ve Shitikova 1997), elektrokimya (Oldham 2010), biyoloji (Ertürk vd. 2011) ve akustik (El-Wakil vd. 2012) gibi alanlar göz önüne alındığında integral eşitsizliklerinin avantajları araştırmacılar tarafından sıklıkla vurgulanmaktadır.

Verilen bir fonksiyonun kesirli mertebeden türevleri, kesirli mertebeden bir sistemin sonraki durumunun sadece mevcut durumuna değil, aynı zamanda tüm geçmiş durumlarına da bağlı olduğu fonksiyonun tüm geçmişini içerir (Gorenflo ve Mainardi 1997, Hilfer 2000). Yerel olmama, çeşitli kesirli türev modellerinde çok önemli bir rol oynar (Atangana ve Baleanu 2016, Bagley ve Torvik 1986). Birçok çalışma, (Gray ve Zhang 1988, Miller ve Ross 1989) gibi zaman ölçekleri teorisini kullanarak bu kesirli analizin ayrık versiyonları ile ilgilenmektedir. Kesirli türev operatörleri üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde; Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Weyl ve Jumarie gibi çeşitli tanımlamaların literatüre kazandırıldığı görülmektedir. Ancak her bir tanımın kendine özgü avantajları ve dezavantajları vardır.

Bu tanımlar arasında araştırmacılar tarafından en sık başvurulan yöntemlerden biri

$\alpha \in [n - 1, n)$  için,  $f(t)$ 'nin  $\alpha$ -türevi

$$D^{RL}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^\infty \frac{f(x)}{(t - x)^{(\alpha - n + 1)}} dx \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan Riemann-Liouville yaklaşımıdır. Caputo tanımı ise;

$\alpha \in [n - 1, n)$  için  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha$ -türevi

$$D^C f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^\infty \frac{d^n f(x)/dx^n}{(t - x)^{(\alpha - n + 1)}} dx \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıdaki (3.1) ve (3.2) dâhil olmak üzere tüm tanımlar, kesirli türevlerin lineerlik özelliğini sağlar. Bu kesirli türevlerin çeşitli avantajları vardır, ancak her durum için uygun değildir. Öte yandan, Riemann-Liouville tipinde, gerçek dünyadaki süreçleri tanımlamak için kesirli diferensiyel denklemler kullanıldığında, Riemann-Liouville türevi bazı dezavantajlara sahiptir. Bir sabitin Riemann-Liouville türevi sıfır değildir.

Ek olarak, keyfi bir fonksiyon başlangıç noktasında sabitse, kesirli türevi başlangıç noktasında tekilliğe sahiptir; örneğin üstel ve Mittag-Leffler fonksiyonları için başlangıç noktasında bir tekilliğe sahip olduğu görülür. Bu dezavantajlar nedeniyle, Riemann-Liouville kesirli türevlerinin uygulanabilirlik aralığı sınırlıdır.

Türevlenebilirlik açısından, Caputo türevi daha yüksek düzenlilik koşulları gerektirir: Caputo tipindeki bir fonksiyonun kesirli türevini hesaplamak için önce onun türevini elde etmeliyiz. Caputo türevleri yalnızca türevlenebilir fonksiyonlar için tanımlanırken, birinci dereceden türevi olmayan fonksiyonlar, Riemann-Liouville anlamında birden küçük tüm mertebelerden kesirli türevlere sahip olabilir (Atangana ve Secer 2013). Khalil vd. (2014)'te, yalnızca türevlerin temel limit tanımına dayanarak, uyumlu türev adı verilen yeni ve iyi davranışlı basit bir kesirli türev tanımlanmıştır. Uyumlu türev, Riemann-Liouville ve Caputo tanımlarında sağlanamayan bazı önemli özellikleri sağlar. Ancak; Abdelhakim (2019), Khalil vd. (2014)'teki uyumlu tanımın bazı fonksiyonlar için Caputo tanımıyla karşılaştırıldığında iyi sonuçlar veremeyeceğini ispatlamıştır.

Abu-Shady ve Kaabar, 2021 yılında yaptıkları çalışmalarında; kesirli diferensiyel denklemlerin basit çözümlerini elde etmek amacıyla önceki diğer tanımlara kıyasla avantajları olan yeni bir geliştirilmiş kesirli türev tanımı vermişlerdir. Bu incelemede temel kaynak olarak Abu-Shady ve Kaabar (2021) alınmıştır.

**Tanım 1.** Pozitif reel sayılar üzerinde tanımlı bir  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu ele alındığında  $f(t)$  fonksiyonunun  $t > 0$  noktasındaki  $0 < \alpha \leq 1$  mertebesine karşılık gelen geliştirilmiş kesirli türevi (GFD),

$$D^{GFD} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \Gamma(\beta)/\Gamma(\beta - \alpha + 1)\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}; \quad \beta > -1, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad (3.3)$$

limit işlemi aracılığıyla formüle edilir ve  $t = 0$  noktasındaki kesirli türevi ise

$$D^{GFD} f(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} D^{GFD} f(t)$$

şeklinde limit yardımıyla belirlenir.

**Teorem 1.** Eğer  $f(t)$   $\alpha$ -türevlenebilir bir fonksiyon ise, bu durumda

$$D^{GFD} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)t^{1-\alpha}} \frac{df(t)}{dt}; \quad \beta > -1, \beta \in \mathbb{R}^+$$

şeklindedir.

**İspat.** (3.3) denkleminde sunulan tanım temel alındığında,

$$D^{GFD} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \Gamma(\beta)/\Gamma(\beta - \alpha + 1)\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}; \quad \beta > -1, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad (3.4)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ifadede  $\alpha = \beta = 1$  olduğunda sonucun klasik türev tanımındaki limit ifadesine indirgendiği açıkça görülmektedir.

$$h = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \varepsilon t^{1-\alpha}, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon = \frac{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta)} h t^{\alpha-1} \quad (3.6)$$

değişken değiştirilmesi yapıp, (3.6) denklemi (3.4) denkleminde yerine yazılarak

$$D^{GFD} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (3.7)$$

elde edilir. Böylece

$$D^{GFD} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt} \quad (3.8)$$

elde edilir.  $k \in \mathbb{R}^+$  ve  $f(t) = t^k, k > -1$ , fonksiyonu için

$$D^{GFD} f(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{\beta-\alpha} \quad (3.9)$$

olduğu ispatlanır. (3.8) denklemini kullanarak

$$D^{GFD} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} k t^{k-1}, \quad (3.10)$$

$$D^{GFD} f(t) = \frac{k\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{k-\alpha}$$

olur buradan,  $k = \beta$  olarak

$$D^{GFD} t^\beta = \frac{\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{\beta-\alpha}, \quad (3.11)$$

yazılabilir ve ardından

$$D^{GFD} t^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{\beta-\alpha} \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.12) denklemi, Caputo ve Riemann-Liouville türevlerinin sonuçlarıyla uyumludur (Podlubny 1999).

**Teorem 2.**  $f(t) = t^k, k \in \mathbb{R}^+$  fonksiyonunun türevi için,

$$D^\alpha D^\beta t^k = D^{\alpha+\beta} t^k$$

eşitliği elde edilir.

**İspat.** (3.12) denklemini kullanılarak,

$$D^\beta t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)} t^{k-\beta},$$

$$D^\alpha D^\beta t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)} D^\alpha t^{k-\beta}, \quad (3.13)$$

$$D^\alpha D^\beta t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)} \frac{\Gamma(k-\beta+1)}{\Gamma(k-\beta-\alpha+1)} t^{k-\beta-\alpha}.$$

yazılabilir. Eşitliğin sol tarafı düzenlendiğinde:

$$D^\alpha D^\beta t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta-\alpha+1)} t^{k-\beta-\alpha} \quad (3.14)$$

elde edilir. Ayrıca eşitliğin sağ tarafı için ise:

$$D^{\alpha+\beta} t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta-\alpha+1)} t^{k-\beta-\alpha} \quad (3.15)$$

sonucu elde edilir. Böylece, (3.14) ve (3.15)'ten

$$D^\alpha D^\beta t^k = D^{\alpha+\beta} t^k \quad (3.16)$$

elde edilir. Bu özellik, uyumlu türevde sağlanmaz (Khalil vd. 2014).

**Teorem 3.** Bir nokta etrafında  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)/k! t^k$  şeklinde genişleyen türevlenebilir bir  $f(t)$  fonksiyonu için,

$$D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** Taylor teoremine göre genişletilmiş  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)/k! t^k$  fonksiyonu için,

$$D^\beta f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} D^\beta t^k,$$

$$D^\beta f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)} t^{k-\beta},$$

$$D^\alpha D^\beta f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)} D^\alpha t^{k-\beta},$$

$$D^\alpha D^\beta f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)} \frac{\Gamma(k-\beta+1)}{\Gamma(k-\beta-\alpha+1)} t^{k-\beta-\alpha},$$

(3.17)

şeklinde yazılır. Eşitliğin sol tarafı düzenlendiğinde:

$$D^\alpha D^\beta f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta-\alpha+1)} t^{k-\beta-\alpha},$$

(3.18)

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı için ise:

$$D^{\alpha+\beta} f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} D^{\alpha+\beta} t^k,$$

(3.19)

$$D^{\alpha+\beta} f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta-\alpha+1)} t^{k-\beta-\alpha}$$

(3.20)

sonucu bulunur. Böylece, (3.18) ve (3.20) denklemlerinden hareketle

$$D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t) \quad (3.21)$$

elde edilir. Bu özellik, uyumlu türevde sağlanmaz (Khalil vd. 2014).

**Teorem 4.**  $\alpha \in (0,1]$  olsun.  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının  $\alpha$ -türevlenebilir fonksiyonlar olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$(i) \quad D^{GFD}(fg) = fD^{GFD}(g) + gD^{GFD}(f), \quad (3.22)$$

$$(ii) \quad D^{GFD}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD^{GFD}(f) - fD^{GFD}(g)}{g^2}. \quad (3.23)$$

şeklindedir.

**İspat.** (3.8) denklemini kullanılarak, (i) şıkkındaki eşitliğin sol tarafı ele alındığında:

$$D^{GFD}(fg), \quad (3.24)$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \frac{d(fg)}{dt}, \quad (3.25)$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \left[ f \frac{dg}{dt} + g \frac{df}{dt} \right], \quad (3.26)$$

$$= f \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \frac{dg}{dt} + g \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}, \quad (3.27)$$

$$= fD^{GFD}(g) + gD^{GFD}(f) \quad (3.28)$$

elde edilir, ki bu da eşitliğin sağ tarafına eşittir. Böylece, (i) eşitliği ispatlanmış olur.

Şimdi, (ii)'yi ispatlamak için eşitliğin sol tarafı ele alındığında:

$$\begin{aligned}
& D^{GFD} \left( \frac{f}{g} \right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \left( \frac{f}{g} \right), \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \left[ \frac{g \frac{df}{dt} - f \frac{dg}{dt}}{g^2} \right], \tag{3.29} \\
&= \frac{g \left[ \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \frac{df}{dt} \right] - f \left[ \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \frac{dg}{dt} \right]}{g^2}, \\
&= \frac{g D^{GFD}(f) - f D^{GFD}(g)}{g^2}
\end{aligned}$$

elde edilir, ki bu da eşitliğin sağ tarafına eşittir. (3.8) denklemini yukarıdaki şekilde kullanılır. Caputo ve Riemann-Liouville tanımlarında (i) ve (ii) kuralları sağlanmamaktadır.

**Teorem 5.** (Genelleştirilmiş kesirli diferensiyel fonksiyon için Rolle teoremi).  $a > 0$  ve  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayan belirli bir fonksiyon olsun:

- (i)  $f$ ,  $[a, b]$  üzerinde süreklidir
- (ii)  $f$ , bazı  $\alpha \in (0, 1]$  için  $\alpha$ -türevlenebilirdir.
- (iii)  $f(a) = f(b)$  'dir.

O halde,  $f^{(\alpha)}(c) = 0$  olacak şekilde  $c \in [a, b]$  vardır.

**İspat.**  $f$  Fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli ve  $f(a) = f(b)$  olduğundan,  $c \in (a, b)$  vardır; bu, yerel ekstremumların bir noktasıdır ve  $c$ 'nin bir yerel minimumun noktası olduğu varsayılır. Böylece,

$$D^{GFD} f(c^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \Gamma(\beta)/\Gamma(\beta - \alpha + 1)\varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}; \quad \beta > -1, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad (3.30)$$

$$D^{GFD} f(c^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \Gamma(\beta)/\Gamma(\beta - \alpha + 1)\varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}; \quad \beta > -1, \beta \in \mathbb{R}^+$$

elde edilir. Ancak  $D^{GFD} f(c^+)$  ve  $D^{GFD} f(c^-)$  zıt işaretlere sahiptir. Dolayısıyla,  $D^{GFD} f(c) = 0$ 'dır.

**Teorem 6.** (Genelleştirilmiş kesirli diferensiyel fonksiyon için ortalama değer teoremi).  $a > 0$  ve  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  olsun, şu koşulu sağlayan belirli bir fonksiyon:

- (i)  $f$ ,  $[a, b]$  üzerinde sürekli.
- (ii)  $f$ , bazı  $\alpha \in (0, 1)$  için  $\alpha$ -türevlenebilirdir.

O halde,

$$D^{GFD} f(c) = \left[ \frac{f(b) - f(a)}{h(b^\alpha - a^\alpha)} \right] \quad (3.31)$$

eşitliğini sağlayan  $c \in [a, b]$  vardır.

**İspat.** (Khalil vd. 2014)'teki gibi bir fonksiyonu ele alalım.

$$g(t) = f(t) - f(a) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{h(b^\alpha - a^\alpha)} \right] (ht^\alpha - ha^\alpha), \quad (3.32)$$

burada  $h = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$  şeklindedir.

$$D^{GFD} g(t) = D^{GFD} f(t) - D^{GFD} f(a) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{h(b^\alpha - a^\alpha)} \right] (hD^{GFD} t^\alpha - hD^{GFD} a^\alpha) \quad (3.33)$$

elde edilir. (3.8) denklemini kullanarak  $c \in [a, b]$  olduğunda

$$D^{GFD} g(t) = D^{GFD} f(t) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{h(b^\alpha - a^\alpha)} \right], \quad (3.34)$$

$$D^{GFD} g(c) = D^{GFD} f(c) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{h(b^\alpha - a^\alpha)} \right], \quad (3.35)$$

elde edilir ve yardımcı fonksiyon  $g(c)$ , Teorem 5'in tüm koşullarını sağlar. Dolayısıyla,  $D^{GFD} g(c) = 0$  olacak şekilde  $c \in [a, b]$  vardır. Böylece,

$$D^{GFD} f(c) = \left[ \frac{f(b) - f(a)}{h(b^\alpha - a^\alpha)} \right] \quad (3.36)$$

olur.

**Tanım 2.**  $\alpha \in (0, 1)$  için

$$I_\alpha^\alpha(f)(t) = I_1^0(t^{\alpha-1}f(x)) = \frac{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$$

şeklindedir.

**Teorem 7.** Tanım kümesinde sürekli herhangi bir  $f$  fonksiyonu için,  $t \geq 0$  olmak üzere  $D^\alpha I_\alpha(f)(t) = f(t)$  eşitliği sağlanır.

**İspat.**  $f$  sürekli olduğundan,  $I_\alpha^a(f)(t)$  türevlenebilirdir. Dolayısıyla,

$$D^\alpha I_\alpha(f)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I_\alpha(f)(t),$$

$$D^\alpha I_\alpha(f)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx,$$

$$D^\alpha I_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx,$$

$$D^\alpha I_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}},$$

$$D^\alpha I_\alpha(f)(t) = f(t) \tag{3.37}$$

elde edilir.

### 3.1 Uygulamalar

#### 3.1.1 Üstel Fonksiyonun Kesirli Türevi

$f(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in c$  için

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} t^k, \tag{3.38}$$

$$D^{GFD} e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D^{GFD} t^k$$

şeklindedir. (3.12) denkleminde

$$D^{GFD} t^k = D^C t^k \tag{3.39}$$

elde edilir.

Şimdi (3.23) denklemini

$$D^{GFD} e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D^C t^k, \quad (3.40)$$

$$D^{GFD} e^{\lambda t} = D^C e^{\lambda t}.$$

şu şekilde yazalım.

### 3.1.2 Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonlarının Kesirli Türevi

$f(t) = \sin \omega t$  için,

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \quad (3.41)$$

$$D^{GFD} \sin \omega t = \frac{1}{2i} (D^{GFD} e^{i\omega t} - D^{GFD} e^{-i\omega t})$$

şeklinde tanımlanır. (3.26) denkleminde

$$D^{GFD} \sin \omega t = \frac{1}{2i} (D^C e^{i\omega t} - D^C e^{-i\omega t}), \quad (3.42)$$

$${}^{GFD}D^\alpha \sin \omega t = {}^C D^\alpha \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}),$$

$${}^{GFD}D^\alpha \sin \omega t = {}^C D^\alpha \sin \omega t$$

bulunur. Benzer şekilde,  $f(t) = \cos \omega t$  için aşağıdaki de ispatlanabilir.

$${}^{GFD}D^\alpha \cos \omega t = {}^C D^\alpha \cos \omega t \quad (3.43)$$

Şimdi bazı kesirli diferansiyel denklemleri GFD anlamında çözelim.

**Örnek 1.**

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) = e^{kx}, \quad y(0) = 0.$$

**Çözüm 1.** Yukarıdaki örneğin  $e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^n$  olduğunda çözümünü bulalım. (3.8) denklemini kullanarak

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) = e^{kx},$$

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}} \frac{dy(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^n,$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^{n-\frac{1}{2}},$$

$$\int dy(x) = \frac{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \int x^{n-\frac{1}{2}} dx,$$

$$y(x) = \frac{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n + \frac{1}{2}} + c,$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \frac{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\beta)} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n + \frac{1}{2}} + c$$

(3.44)

elde edilir.  $\beta = n + \frac{1}{2}$  alınarak

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{(n + \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} x^{n+\frac{1}{2}} + c,$$

(3.45)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} x^{n+\frac{1}{2}} + c,$$

bulunur. Çünkü  $y(0) = 0$  olduğundan,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} x^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

bu çözüm Caputo çözümüyle tutarlıdır.

### Örnek 2.

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) = x^2 \sin x, \quad y(0) = 0.$$

**Çözüm 2.** Yukarıdaki örnekte verilen  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}/(2n+1)!$  seri açılımı dikkate alınarak (3.1) denklemini uygulandığında;

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + 1/2)} x^{1/2} \frac{dy(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!},$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\Gamma(\beta + 1/2)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+5/2}}{(2n+1)!},$$

$$\int dy = \frac{\Gamma(\beta + 1/2)}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{x^{2n+5/2}}{(2n+1)!} dx ,$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + 1/2)}{\Gamma(\beta)} \frac{x^{2n+7/2}}{(2n+7/2)(2n+1)!} + c$$

(3.47)

eşitliği elde edilir. Burada  $\beta = 2n + 7/2$  alınarak

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+4)}{\Gamma(2n+7/2)} \frac{x^{2n+7/2}}{(2n+7/2)(2n+1)!} + c,$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+7/2)\Gamma(2n+7/2)} \frac{x^{2n+7/2}}{(2n+1)!} + c, \quad (3.48)$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)}{\Gamma(2n+9/2)} x^{2n+7/2} + c,$$

sonucu bulunur. Çünkü  $y(0) = 0$  sınır şartı sağlandığından  $c = 0$  olarak elde edilir. Böylece çözüm;

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)}{\Gamma\left(2n+\frac{9}{2}\right)} x^{2n+\frac{7}{2}}. \quad (3.49)$$

şeklindedir. Bu sonuç, Caputo yöntemiyle elde edilen çözümle tutarlıdır.

#### 4. BELİRSİZLİK İÇEREN KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM KAVRAMI ÜZERİNE

Klasik analizde kullanılan tam sayı mertebeli türev ve integral operatörlerinin, keyfi mertebelere genişletilmesi esasına dayanan kesirli analiz; kökleri Newton ve Leibniz dönemine kadar uzanan tarihi bir derinliğe sahiptir. Yüzyıllar boyunca teorik bir çalışma alanı olarak görülen bu disiplin, günümüzde sadece matematikçilerin değil, karmaşık fiziksel ve mühendislik problemlerine çözüm arayan araştırmacıların da birincil ilgi odağı haline gelmiştir. Ayrıntılar için Kilbas vd. (2006), Kiryakova (1994), Lakshmikantham ve Vatsala (2008), Miller ve Ross (1993) ve Podlubny'nin (1999) monografilerine ve bu çalışmalarda yer alan referanslara başvurulabilir. Kesirli diferensiyel denklemler teorisine yapılan bazı yeni katkılar (Ahmad ve Nieto 2009, Araya ve Lizama 2008, Belmekki vd. 2009, Bonilla vd. 2007, Chang ve Nieto 2009, Diethelm ve Ford 2002, Shuqin 2009, Lakshmikantham vd. 2009)'da görülebilir. Kesirli diferensiyel denklemlerin başlangıç değer problemleri ise son zamanlarda bazı yazarlar tarafından ele alınmıştır (Lakshmikantham ve Leela 2009, Lakshmikantham ve Vatsala 2008, Shuqin 2009). Gerçek dünyadaki dinamik süreçlerin matematiksel modellemesinde, sistemin doğasında var olan belirsizlik ve rastgelelik faktörlerinin göz ardı edilmesi, elde edilen sonuçların güvenilirliğini sınırlamaktadır. Bu nedenle, daha gerçekçi modeller elde edebilmek için belirsizlik parametrelerinin dinamik sistemlere entegre edilmesi ve bulanık diferensiyel denklem sistemlerinin kullanılması zorunlu hale gelmektedir. Belirsizlik içeren diferensiyel denklemler teorisine yapılan bazı yeni katkılar (Diamond ve Kloeden 1994, Lakshmikantham ve Mohapatra 2003, Nieto vd. 2008)'de görülebilir.

$\alpha \in (0,1]$ ,  $T > 0$  ve  $E$ , bulanık reel sayıların kümesi olsun (Diamond ve Kloeden 1994, Lakshmikantham ve Mohapatra 2003). Agarwal vd. (2010) bu çalışmalarında, aşağıdaki türde belirsizlik içeren bir diferensiyel denklemi ele almışlardır.

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in (0, T], \quad (4.1)$$

burada  $f : [0, T] \times E \rightarrow E$  süreklidir. Bu denklem, verilen bir  $x_0 \in E$  için uygun bir başlangıç koşulu ile birlikte ele alınmıştır.

$f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $x_0 \in \mathbb{R}$  ise, (4.1) kesirli bir diferensiyel denkleme indirgenir.

Eğer  $\alpha = 1$  ise, (4.1) sadece birinci dereceden bulanık bir diferensiyel denklemdir. Agarwal vd. (2010) çalışmalarında kesirli mertebeden ve belirsizlik içeren her iki diferensiyel denklem türü birleştirilerek yeni bir dinamik sistem türü olan kesirli mertebeden bulanık diferensiyel denklemleri ele almışlardır.

#### 4.1 Kesirli Diferensiyel Denklemler

$\alpha \in (0,1]$ ,  $T > 0$  ve  $\sigma : (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  olsun.

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in (0, T]. \quad (4.2)$$

Lineer olmayan kesirli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} x(s) ds,$$

$x : (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $\alpha$  mertebesindeki klasik Riemann-Liouville kesirli türevidir ve  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  süreklidir. Bu durumda uygun başlangıç koşulu

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

şeklindedir.  $a \in \mathbb{R}$  için karşılık gelen lineer denklem ise

$$D^\alpha x(t) + ax(t) = \sigma(t), \quad t \in J := (0, T]. \quad (4.4)$$

dir. (4.3) başlangıç koşulu ile birlikte (4.4) lineer kesirli diferensiyel denklemini ele alınmıştır. Çözüm (Kilbas vd. 2006) ile;

$$x(t) = x_0 \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-at^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-a(t-s)^\alpha) \sigma(s) ds, \quad (4.5)$$

şeklinde verilmiştir. Burada

$$E_{\alpha,\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha(k+1))}$$

$E_{\alpha,\alpha}$  klasik Mittag-Leffler fonksiyonudur.  $\alpha = 1$  için bu gösterimin,  $\Gamma(1) = 1$  ve  $E_{1,1}(z) = e^z$  olması nedeniyle hala geçerli olduğu görülmektedir. Böylece, birinci dereceden lineer bir adi diferensiyel denklem

$$x'(t) + au(t) = \sigma(t), \quad x(0) = x_0$$

için başlangıç probleminin

$$x(t) = x_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} \sigma(s) ds,$$

çözümü elde edilir.

## 4.2 Belirsizlik İçeren Diferensiyel Denklemler

$E$ , bulanık reel sayılar kümesi olsun (Diamond ve Kloeden 1994) ve

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in (0, T], \quad (4.6)$$

belirsizlik içeren lineer olmayan diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada  $f : [0, T] \times E \rightarrow E$  süreklidir ve başlangıç koşulu

$$x(0) = x_0 \in E \quad (4.7)$$

şeklindedir.  $a > 0$  için, (4.7) başlangıç koşulu ile birlikte

$$x'(t) = ax(t) + \sigma(t), \quad t \in (0, T] \quad (4.8)$$

lineer probleminin çözümü

$$x(t) = e^{at} \left( x_0 + \int_0^t e^{-as} \sigma(s) ds \right)$$

'dir (Lakshmikantham ve Mohapatra 2003).

### 4.3 Belirsizlik İçeren Kesirli Diferensiyel Denklemler

Bu kısımda, (4.1) ile ifade edilen ve belirsizlik parametresi barındıran

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in (0, T].$$

kesirli diferensiyel denklem yapısı incelenecektir.

Burada  $f : [0, T] \times E \rightarrow E$  fonksiyonu süreklidir ve verilen bir  $x_0 \in E$  için uygun başlangıç koşulu

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha} x(t) = x_0 \in E \quad (4.9)$$

şeklindedir.  $\lambda > 0$  olduğunu varsayalım. Böylece lineer olmayan  $f$

$$f(t, x) = \lambda x + g(t, x)$$

şeklindedir. Burada  $g : [0, T] \times E \rightarrow E$  süreklidir. Tam sayı veya kesirli mertebeden net bir diferensiyel denklem için,

$$D^\alpha x(t) + ax(t) = \sigma(t), \quad t \in (0, T]$$

probleminin

$$D^\alpha x(t) = -ax(t) + \sigma(t), \quad t \in (0, T]$$

problemiyle aynı olduğunu belirtmek önemlidir.

Ancak  $E$  uzayında her iki problem de eşdeğer değildir (Nieto vd. 2006). (4.1) denklemini

$$D^\alpha x(t) = \lambda x(t) + g(t, x(t)), \quad t \in (0, T] \quad (4.10)$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla, bu (4.10) denkleminin çözümünü

$$x(t) = \Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)g(s, x(s))ds$$

olacak şekilde  $x : (0, T] \rightarrow E$  fonksiyonu olarak tanımlarız. Üstelik bu çözüm, (4.9) başlangıç koşulunu sağlar yani

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha}x(t) = x_0$$

eşitliğini sağlar. Bu ifadenin, biçimsel olarak,  $\lambda = -a$  alındığında (4.5) ile verilen çözümle aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

#### 4.4 Örnekler

$$D^\alpha x(t) = 0, \quad t \in (0, T]$$

kesirli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin genel çözümü

$$x(t) = ct^{\alpha-1}$$

olup, burada  $c \in \mathbb{R}$  keyfi bir sabittir (Kilbas vd. 2006). Başlangıç koşulu

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha}x(t) = x_0 \in \mathbb{R},$$

uygulandığında, çözüm

$$x(t) = x_0 t^{\alpha-1}$$

olarak elde edilir.  $a = 0$  ve  $\sigma = 0$  için bu sonucun tam olarak (4.5) ile verilen çözümlerle aynı olduğu görülmektedir. Bulanık durumda ise çözüm yine

$$x(t) = t^{\alpha-1} x_0$$

şeklindedir. Şimdi  $\lambda > 0$  ve  $0 < \alpha \leq 1$  olduğunu kabul edelim ve

$$D^\alpha x(t) = \lambda x(t), \quad t \in (0, T]$$

denklemini ele alalım. Bu durumda çözüm,

$$x(t) = \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha) x_0$$

ifadesi ile verilir. Örneğin,  $\alpha = 1/2$  ve  $\lambda = 1$  özel durumunda, bulanık kesirli denklemin çözümü:

$$D^{\frac{1}{2}} x(t) = x(t)$$

başlangıç koşulu

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\alpha} x(t) = x_0 \in E$$

ile birlikte

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha(k+1))} t^{\frac{k-1}{2}} x_0$$

şeklinde verilir.

## 5. BELİRSİZ KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI ve TEKLİĞİ

Diferensiyel denklemler teorisinin köklü bir alt dalı olan kesirli diferensiyel denklemler, günümüz bilim dünyasında matematikçilerden mühendislere kadar geniş bir araştırmacı kitlesinin odağında yer almaktadır. Özellikle elektromanyetizma, elektrokimya, reoloji ve viskoelastisite gibi karmaşık fiziksel süreçlerin modellenmesinde, bu denklemlerin sunduğu çözümlene yeteneği kritik bir öneme sahiptir. Kesirli diferensiyel denklem, kesirli türevleri içeren bir diferensiyel denklemdir. Riemann-Liouville tipi, Caputo tipi, Grünwald-Letnikov tipi ve Riesz tipi gibi çeşitli kesirli türev türleri vardır.

Dinamik sistemlerin doğasında var olan rastgele gürültülerin (random noise) etkilerini modele yansıtma amacıyla, literatürde stokastik kesirli diferensiyel denklemlere sıklıkla başvurulmaktadır (bkz. Ciotir ve Răscanu 2009, Cui ve Yan 2011, El-Borai vd. 2010, Mandelbrot ve Van Ness 1968, Nualart ve Răscanu 2002, Ren vd. 2013, Sakthivel vd. 2013). Bu denklemler genel yapıları itibarıyla iki ana kategoride incelenir. Bunlardan ilki

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)) \frac{dW(t)}{dt}$$

şeklindedir. Burada  $D^\alpha x(t)$ ,  $x(t)$  fonksiyonunun kesirli türevini,  $W(t)$  ise Wiener sürecini ifade eder. Diğeri ise

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t)) dB_t^H$$

şeklindedir. Burada  $B_t^H$ , kesirli Brown hareketidir.

Zhu 2015 yılında yaptığı çalışmada; belirsizlik teorisine dayalı olarak belirsiz kesirli diferensiyel denklemler kavramı ortaya atılmıştır. Riemann-Liouville tipi belirsiz kesirli diferensiyel denklem

$$D^P X_t = f(t, X_t) + g(t, X_t) \frac{dC_t}{dt}$$

şeklindedir ve Caputo tipi belirsiz kesirli diferensiyel denklem ise

$${}^c D^p X_t = f(t, X_t) + g(t, X_t) \frac{dC_t}{dt}$$

şeklinde ele alınmıştır. Burada  $C_t$  kanonik Liu sürecidir. Lineer belirsiz kesirli diferensiyel denklemler için çözümler, Mittag-Leffler fonksiyonu ile sağlanmıştır. Zhu 2015 yılında yaptığı çalışmada; Lipschitz ve lineer büyüme koşulları altında Banach sabit nokta teoremi ile belirsiz bir kesirli diferensiyel denklemin çözümüne ilişkin bir varlık ve teklik teoremini ispatlamıştır. Ardından, süreklilik koşulu altında Schauder sabit nokta teoremi ile belirsiz bir kesirli diferensiyel denklemin çözümü için bir varlık teoremi vermiştir.

Temelleri 2007 yılında (Liu 2007) tarafından atılan ve takip eden süreçte (Liu 2010) daha da geliştirilen belirsizlik teorisi, olasılık teorisine alternatif aksiyomatik bir sistem sunmaktadır. Bu teorinin iskeletini; belirsiz ölçü, belirsizlik uzayı, çarpım belirsiz ölçüsü ve belirsiz değişken gibi temel matematiksel yapılar oluşturur.  $\Gamma$  boş olmayan bir küme ve  $\mathcal{L}$ ,  $\Gamma$  üzerinde bir  $\sigma$ -cebiri olsun. Her bir  $\Lambda \in \mathcal{L}$  elemanına bir olay denir.  $\mathcal{L}$  üzerinde tanımlı  $\mathcal{M}$  küme fonksiyonu, üç aksiyomu sağlıyorsa bir belirsiz ölçü olarak adlandırılır: (normallik):  $\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$ , (duallik): herhangi bir  $\Lambda$  olayı için  $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = 1$ , ve (sayılabilir yarı-toplamsallık): her sayılabilir  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$  olay dizisi için  $\mathcal{M}\{\cup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\}$  şeklindedir.  $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$  üçlüsüne belirsizlik uzayı denir. Çarpım belirsiz ölçüsü  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}\{\prod_{i=1}^{\infty} \Lambda_k\} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}$  eşitliğini sağlayan belirsiz bir ölçüdür; burada  $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$  belirsizlik uzayları ve  $\Lambda_k$ , sırasıyla  $k = 1, 2, \dots$  için  $\mathcal{L}_k$ 'dan keyfi olarak seçilen olaylardır. Bir belirsiz değişken,  $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$  belirsizlik uzayından, reel sayılar kümesi  $\mathbb{R}$ 'ye giden ve herhangi bir  $B$  Borel kümesi için  $\{\xi \in B\}$  ifadesinin bir olay olduğu  $\xi$  fonksiyonu olarak tanımlanır.

Bir  $\xi$  belirsiz değişkeninin belirsizlik dağılımı  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  için  $\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\}$  olarak tanımlanır. Bir  $\xi$  belirsiz değişkeninin beklenen değeri, iki integralden en az birinin sonlu olması koşuluyla,

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \geq r\} dr$$

şeklinde tanımlanır.  $\xi$ 'nin varyansı

$$V[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^2]$$

olarak tanımlanır. Beklenen değeri  $e$  ve varyansı  $\sigma^2$  olan bir normal belirsiz değişken, şu belirsizlik dağılımına sahiptir:

$$\Phi(x) = \left( 1 + \exp\left(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}\right) \right)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ve bu dağılım  $\xi \sim \mathcal{N}(e, \sigma)$  ile gösterilir.

Eğer reel sayıların herhangi bir  $B_1, B_2, \dots, B_m$  Borel kümeleri için aşağıdaki koşul sağlanıyorsa,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  belirsiz değişkenlerinin bağımsız olduğu söylenir (Liu 2009).

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^m (\xi_i \in B_i)\right\} = \min_{1 \leq i \leq m} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}$$

$a$  ve  $b$  sayıları için, eğer  $\xi$  ve  $\eta$  bağımsız belirsiz değişkenler ise  $E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta]$  olur.

Liu 2008 yılında yaptığı çalışmada belirsiz süreci,  $S \times (\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$  kümesinden gerçek sayılar kümesine bir  $X_t$  fonksiyonu olarak tanımlamıştır; burada  $S$ , tam sıralı bir kümedir ve  $\{X_t \in B\}$ , herhangi bir  $B$  Borel kümesi için her  $t \in S$  anında bir olaydır.

**Tanım 1.** Bir  $C_t$  belirsiz süreci, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa kanonik bir Liu süreci olarak adlandırılır:

- (i)  $C_0 = 0$  ve neredeyse tüm örneklem yolları Lipschitz süreklidir.
- (ii)  $C_t$  sabit ve bağımsız artışlara sahiptir.

(iii) Her  $C_{s+t} - C_s$  artışı, beklenen değeri 0 ve varyansı  $t^2$  olan bir normal belirsiz değişkendir ve  $C_{s+t} - C_s \sim \mathcal{N}(0, t)$  ile gösterilir (Liu 2009).

$a = t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1} = b$  olmak üzere  $[a, b]$  kapalı aralığının herhangi bir bölüntüsü için, bölüntü çapı  $\Delta = \max_{1 \leq i \leq k} |t_{i+1} - t_i|$  olarak yazılır. Ardından,  $X_t$ 'nin  $C_t$ 'ye göre belirsiz integrali, Liu (2009) tarafından limitin neredeyse kesin olarak mevcut ve sonlu olması koşulu ile

$$\int_a^b X_t dC_t = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k X_{t_i} \cdot (C_{t_{i+1}} - C_{t_i})$$

olarak tanımlanmıştır. Eğer herhangi bir  $t \geq 0$  için  $Z_t = Z_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dC_s$  olacak şekilde  $\mu_t$  ve  $\sigma_t$  gibi iki belirsiz süreç varsa,  $Z_t$ 'nin  $dZ_t = \mu_t dt + \sigma_t dC_t$  şeklinde belirsiz bir diferensiyel ile sahip olduğu söylenir. Kanonik bir Liu süreci  $C_t$  tarafından yönlendirilen belirsiz bir diferensiyel denklem:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $f$  ve  $g$  verilen iki fonksiyondur. Belirsiz diferensiyel denklemin bir  $X_t$  çözümü, aşağıdaki belirsiz integral denkleminin çözümüne denktir.

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dC_s.$$

Çok boyutlu bir durumdaki (5.1) belirsiz bir diferensiyel denklem için,  $X_t$  çok boyutlu bir durum,  $C_t$  çok boyutlu bir kanonik Liu süreci,  $f(t, X_t)$  vektör değerli bir fonksiyon ve  $g(t, X_t)$  matris değerli bir fonksiyondur.

**Lemma 1.**  $C_t$ 'nin  $l$ -boyutlu bir kanonik Liu süreci ve  $Y_t$ 'nin  $[a, b]$  aralığında  $t$ 'ye göre integrallenebilir  $n \times l$ -boyutlu bir belirsiz süreç olduğu kabul edilsin. O halde,

$$\left\| \int_a^b Y_t(\gamma) dC_t(\gamma) \right\|_{\infty} \leq K_{\gamma} \int_a^b \|Y_t(\gamma)\|_{\infty} dt$$

eşitsizliği sağlanır. Burada  $K_{\gamma}$ , normu  $\|\cdot\|_{\infty}$  normu ile  $C_t(\gamma)$  örneklem yolunun Lipschitz sabitidir (Ge ve Zhu 2013).

**Tanım 2.**  $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ve  $g: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times l}$  iki fonksiyon olsun. O halde,

$$D^p X_t = f(t, X_t) + g(t, X_t) \frac{dC_t}{dt} \quad (5.2)$$

denklemini, Riemann-Liouville tipi bir belirsiz kesirli diferensiyel denklem olarak adlandırılır. Başlangıç koşulu

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-p} X_t = x_0$$

olan (5.2) denkleminin çözümü;

$$X_t = t^{p-1} x_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, X_s) ds + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g(s, X_s) dC_s \quad (5.3)$$

eşitliğinin neredeyse kesin olarak sağlandığı bir  $X_t$  belirsiz sürecidir.

**Tanım 3.**  $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ve  $g: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times l}$  iki fonksiyon olsun. O zaman,

$${}^c D^p X_t = f(t, X_t) + g(t, X_t) \frac{dC_t}{dt} \quad (5.4)$$

denklemini, Caputo tipi bir belirsiz kesirli diferensiyel denklem olarak adlandırılır. (5.4) denkleminin bir çözümü,

$$X_t = x_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, X_s) ds + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g(s, X_s) dC_s \quad (5.5)$$

eşitliğinin neredeyse kesin olarak sağlandığı belirsiz bir  $X_t$  sürecidir.

### Açıklama 1.

- (i)  $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonunun  $p$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevi

$$D^p u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-p} u(s) ds, \quad t > 0$$

şeklindedir.

- (ii)  $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonunun  $p$ . mertebeden Caputo kesirli türevi

$${}^c D^p u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-s)^{-p} u'(s) ds, \quad t > 0$$

şeklindedir. Burada  $u'(s)$ ,  $u(s)$  fonksiyonunun birinci mertebeden türevidir.

- (iii) Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebeden türevleri arasındaki ilişki

$$D^p u(t) = {}^c D^p u(t) + \frac{t^{-p}}{\Gamma(1-p)} u(0)$$

şeklindedir.

- (iv)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0$$

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0; \Gamma(1) = 1; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

özelliklerine sahiptir.

### 5.1 Varlık ve Teklik

Basitlik açısından,  $\mathbb{R}^n$  veya  $\mathbb{R}^{n \times l}$  üzerindeki bir normu göstermek için  $|\cdot|$  ifadesi kullanılacaktır.  $[a, b]$  üzerinde sürekli  $\mathbb{R}^n$ -değerli fonksiyonların uzayı  $D_{[a,b]}$  ile gösterilsin. Bu uzay,  $x_t \in D_{[a,b]}$  için

$$\|x_t\| = \max_{t \in [a,b]} |x_t|,$$

normuna sahip bir Banach uzayıdır.

$f(t, x): [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ve  $g(t, x): [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times l}$  olmak üzere iki fonksiyon verilsin. Şimdi  $D_{[0,T]}$  üzerinde,  $X_t \in D_{[0,T]}$  için

$$\begin{aligned} \Phi(X_t) &= (t)^{p-1}x_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1}f(s, X_s)ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1}g(s, X_s)dC_s \end{aligned} \tag{5.6}$$

$\Phi$  dönüşümü tanımlanmıştır. Burada  $x_0$  verilen bir başlangıç durumudur.

**Lemma 2.**  $X_t \in D_{[0,T]}$  belirsiz süreci için,

$$\begin{aligned} \Psi(X_t) &= (t^{p-1} - \tilde{a})x_0 + X_a \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-s)^{p-1}f(s, X_s)ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-s)^{p-1}g(s, X_s)dC_s, \quad t > a \geq 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

ile tanımlanan  $\Psi$  dönüşümü örneklem-süreklidir. Burada  $a > 0$  ise  $\tilde{a} = a^{p-1}$  veya  $a = 0$  ise 1 olur. Ayrıca  $f$  ve  $g$  fonksiyonları;

$$|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq L(1 + |x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, +\infty)$$

şeklindeki lineer büyüme koşulunu sağlar. Burada  $L$  pozitif bir sabittir.

**İspat.** Gerçekten de  $\gamma \in \Gamma$  ve  $t > r > a$  için

$$\begin{aligned} & |\Psi(X_t(\gamma)) - \Psi(X_r(\gamma))| \\ &= |(t^{p-1} - r^{p-1})x_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_r^t (t-s)^{p-1} f(s, X_s(\gamma)) ds \\ & \quad + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_r^t (t-s)^{p-1} g(s, X_s(\gamma)) dC_s(\gamma) \\ & \quad + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^r [(t-s)^{p-1} - (r-s)^{p-1}] f(s, X_s(\gamma)) ds \\ & \quad + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^r [(t-s)^{p-1} - (r-s)^{p-1}] g(s, X_s(\gamma)) dC_s(\gamma) \\ & \leq (r^{p-1} - t^{p-1})|x_0| + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_r^t (t-s)^{p-1} |f(s, X_s(\gamma))| ds \\ & \quad + \frac{1}{\Gamma(p)} \left| \int_r^t (t-s)^{p-1} g(s, X_s(\gamma)) dC_s(\gamma) \right| \\ & \quad + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^r [(t-s)^{p-1} - (r-s)^{p-1}] |f(s, X_s(\gamma))| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Gamma(p)} \left| \int_a^r [(t-s)^{p-1} - (r-s)^{p-1}] g(s, X_s(\gamma)) dC_s(\gamma) \right| \\
& \leq (r^{p-1} - t^{p-1}) |x_0| + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_r^t (t-s)^{p-1} |f(s, X_s(\gamma))| ds \\
& \quad + \frac{K_\gamma}{\Gamma(p)} \int_r^t (t-s)^{p-1} |g(s, X_s(\gamma))| ds \\
& \quad + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^r [(t-s)^{p-1} - (r-s)^{p-1}] |f(s, X_s(\gamma))| ds \\
& + \frac{K_\gamma}{\Gamma(p)} \int_a^r [(t-s)^{p-1} - (r-s)^{p-1}] |g(s, X_s(\gamma))| ds \quad (\text{Lemma 1 yardımıyla}) \\
& \leq (r^{p-1} - t^{p-1}) |x_0| + \frac{L}{\Gamma(p+1)} (1 + \|X_t(\gamma)\|) (1 + K_\gamma) [(t-a)^p - (r-a)^p]
\end{aligned}$$

eşitsizliği lineer büyüme koşuluna göre elde edilir. Böylece  $|t-r| \rightarrow 0$  iken  $|\Psi(X_t(\gamma)) - \Psi(X_r(\gamma))| \rightarrow 0$  olur. Yani,  $\Psi(X_t)$  örneklem-süreklidir.

**Teorem 1.** (Varlık ve teklik) Eğer  $f(t, x)$  ve  $g(t, x)$  katsayıları

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, +\infty)$$

Lipschitz koşulunu

$$|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq L(1 + |x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, +\infty)$$

ve lineer büyüme koşulunu sağlıyorsa; (5.2) (veya (5.4)) belirsiz kesirli diferensiyel denkleminin  $[0, +\infty)$  aralığında tek bir  $X_t$  çözümü vardır. Burada  $L$  pozitif bir sabittir. Ayrıca,  $X_t$  örneklem-süreklidir.

**İspat.** Teorem, yalnızca (5.2) ile verilen belirsiz kesirli diferensiyel denklem için ispatlanacaktır. İspatın benzer adımları, (5.4) belirsiz kesirli diferensiyel denklemi için de geçerlidir.

$T > 0$  keyfi olarak verilen bir sayı ve  $\Phi, D_{[0,T]}$  üzerinde (5.6) ile tanımlanan bir dönüşüm olsun.  $\gamma \in \Gamma$  alınsın.  $\lambda \in [0, T)$  için,  $\lambda + c \leq T$  olacak şekilde  $c > 0$  olduğu kabul edilsin.  $D_{[\lambda, \lambda+c]}$  üzerinde bir  $\psi$  dönüşümü şu şekilde tanımlansın:  $X_t \in D_{[\lambda, \lambda+c]}$  olmak üzere,  $t \in [\lambda, \lambda + c]$  için,

$$\begin{aligned} \psi(X_t) &= (t^{p-1} - \tilde{\lambda})x_0 + X_\lambda + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\lambda^t (t - s)^{p-1} f(s, X_s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\lambda^t (t - s)^{p-1} g(s, X_s) dC_s \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada  $\tilde{\lambda} = \lambda^{p-1}$  eğer  $\lambda > 0$  ise veya  $\lambda = 0$  ise 1'dir.  $X_t(\gamma) \in D_{[\lambda, \lambda+c]}$  için Lemma 2'ye göre  $\psi(X_t(\gamma)) \in D_{[\lambda, \lambda+c]}$  olduğu açıktır.

$X_t(\gamma), Y_t(\gamma) \in D_{[\lambda, \lambda+c]}$  olsun. Herhangi bir  $t \in [\lambda, \lambda + c]$  için

$$\begin{aligned} \|\psi(X_t(\gamma)) - \psi(Y_t(\gamma))\| &= \max_{t \in [\lambda, \lambda+c]} |\psi(X_t(\gamma)) - \psi(Y_t(\gamma))| \\ &\leq \max_{t \in [\lambda, \lambda+c]} \left| \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\lambda^t (t - s)^{p-1} [f(s, X_s(\gamma)) - f(s, Y_s(\gamma))] ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\lambda^t (t - s)^{p-1} g(s, X_s(\gamma)) - g(s, Y_s(\gamma)) dC_s(\gamma) \right| \\ &\leq \max_{t \in [\lambda, \lambda+c]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_\lambda^t (t - s)^{p-1} [f(s, X_s(\gamma)) - f(s, Y_s(\gamma))] ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_\gamma}{\Gamma(p)} \int_\lambda^t (t - s)^{p-1} |g(s, X_s(\gamma)) - g(s, Y_s(\gamma))| ds \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{(1 + K_\gamma)L}{\Gamma(p)} \max_{t \in [\lambda, \lambda+c]} \int_\lambda^t (t-s)^{p-1} |X_s(\gamma) - Y_s(\gamma)| ds$$

(Lipschitz koşuluna göre)

$$\leq \frac{(1 + K_\gamma)Lc^p}{\Gamma(p+1)} \|X_t(\gamma) - Y_t(\gamma)\|$$

şeklindedir.  $\rho(\gamma) = (1 + K_\gamma)Lc^p/\Gamma(p+1)$  olsun.  $\rho(\gamma) \in (0, 1)$  olacak şekilde uygun bir  $c = c(\gamma) > 0$  alınsın. Yani  $\psi$ ,  $D_{[\lambda, \lambda+c]}$  üzerinde bir büzülme dönüşümüdür. Dolayısıyla, iyi bilinen Banach sabit nokta teoremine göre,  $D_{[\lambda, \lambda+c]}$ 'de  $\psi$ 'nin tek bir  $X_t(\gamma)$  sabit noktası vardır. Ayrıca,  $X_t(\gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(X_{t,k}(\gamma))$ 'dir. Burada

$$X_{t,k}(\gamma) = \psi(X_{t,k-1}(\gamma)), \quad k = 1, 2, \dots$$

verilen herhangi bir  $X_{t,0}(\gamma) = x_t \in D_{[\lambda, \lambda+c]}$  için geçerlidir.

$[0, c], [c, 2c], \dots, [k_c, T]$  aralıklarının,  $k_c < T \leq (k+1)c$  olacak şekilde  $[0, T]$  kümesinin alt kümeleri olduğu kabul edilsin. Yukarıdaki süreç,  $(k+1)c = T$  olarak belirlenen  $i = 0, 1, 2, \dots, k$  için  $[ic, (i+1)c]$  aralığında  $X_{ic}^{(i+1)}(\gamma) = X_{ic}^{(i)}(\gamma)$  koşulu ile  $\psi$  dönüşümünün tek bir  $X_t^{(i+1)}(\gamma)$  sabit noktasına sahip olduğunu göstermektedir.  $X_t(\gamma)$ ,  $[0, T]$  aralığında;

$$X_t(\gamma) = \begin{cases} X_t^{(1)}(\gamma), & t \in [0, c], \\ X_t^{(2)}(\gamma), & t \in [c, 2c], \\ \dots \\ X_t^{(k+1)}(\gamma), & t \in [kc, T]. \end{cases}$$

şeklinde düzenlenerek tanımlansın.  $X_t(\gamma)$ 'nın,  $D_{[0, T]}$  üzerinde (5.6) ile tanımlanan  $\Phi$ 'nin tek sabit noktasıdır. Ayrıca, verilen herhangi bir  $X_{t,0}(\gamma) = x_t \in D_{[0, T]}$  için

$$X_{t,k}(\gamma) = \Phi(X_{t,k-1}(\gamma)), \quad k = 1, 2, \dots$$

olmak üzere  $X_t(\gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(X_{t,k}(\gamma))$ 'dir.  $k = 1, 2, \dots$  için  $X_{t,k}$ 'lar belirsiz vektörler

olduğundan, Teorem 3'e göre  $X_t$ 'nin belirsiz bir vektör olduğu bilinmektedir.  $T > 0$ 'ın keyfiliginden,  $X_t$ 'nin (5.2) belirsiz kesirli diferensiyel denkleminin tek çözümü olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca,  $X_t(\gamma), D_{[0,T]}$ 'de olduğundan,  $X_t$  örneklem-süreklidir.

Eğer  $f$  ve  $g$  fonksiyonları Lipschitz koşulunu ve lineer büyüme koşulunu sağlamıyorsa, yalnızca sürekli  $f$  ve  $g$  için aşağıdaki varlık teoremi sunulmuştur.

**Teorem 2.** (Varlık)  $f(t, x)$  ve  $g(t, x)$  fonksiyonları

$$G = [0, T] \times \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq b\}$$

aralığında sürekli olsun. O halde, (5.4) Caputo tipi belirsiz kesirli diferensiyel denkleminin  $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n$  başlangıç koşulu ile  $t \in [0, T]$  aralığında bir  $X_t$  çözümüne sahiptir.

**İspat.** Herhangi bir  $\gamma \in \Gamma$  için,

$$\frac{M(1 + K_\gamma)}{\Gamma(p + 1)} c^p = b$$

olacak şekilde pozitif bir  $c > 0$  sayısı olsun; burada  $K_\gamma$ , kanonik Liu süreci  $C_t$ 'nin Lipschitz sabitidir ve  $M = \max_{(t,x) \in G} |f(t, x)| \vee |g(t, x)|$ 'tir.  $H$  kümesi;

$$H = \left\{ X_t(\gamma) \in D_{[0,h]} \text{ olsun} : X_t \text{ belirsiz bir vektördür ve } \|X_t(\gamma) - x_0\| \leq \frac{M(1 + K_\gamma)}{\Gamma(p + 1)} h^p \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada  $h = \min\{T, c\}$ 'dir.  $H$ 'nin kapalı bir konveks küme olduğu kolayca görülebilir.  $H$  üzerinde bir  $\Phi$  dönüşümü

$$\Phi(X_t(\gamma)) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - s)^{p-1} f(s, X_s(\gamma)) ds$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g(s, X_s(\gamma)) dC_s(\gamma), \quad 0 \leq t \leq h$$

(5.8)

şeklinde tanımlansın.  $X_t(\gamma) \in H$  için

$$\begin{aligned} \|\Phi(X_t(\gamma)) - x_0\| &= \max_{0 \leq t \leq h} |\Phi(X_t(\gamma)) - x_0| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq h} \left\{ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |f(s, X_s(\gamma))| ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_\gamma}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |g(s, X_s(\gamma))| ds \right\} \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq h} \frac{M(1+K_\gamma)}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} ds \\ &\leq \frac{M(1+K_\gamma)}{\Gamma(p+1)} h^p \end{aligned}$$

(5.9)

elde edilir. Yani,  $\Phi(X_t(\gamma)) \in H'$  dir ve  $\Phi$  dönüşümü,  $X_t(\gamma) \in H$  de düzgün sınırlıdır. Buna ek olarak,  $0 \leq t_1 < t_2 \leq h$  için,

$$\begin{aligned} |\Phi(X_{t_1}(\gamma)) - \Phi(X_{t_2}(\gamma))| &= \left| \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{p-1} f(s, X_s(\gamma)) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{p-1} g(s, X_s(\gamma)) dC_s(\gamma) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{p-1} - (t_1-s)^{p-1}] f(s, X_s(\gamma)) ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{p-1} - (t_1 - s)^{p-1}] g(s, X_s(\gamma)) dC_s(\gamma) \right| \\
& \leq \frac{M(1 + K_\gamma)}{\Gamma(p+1)} (t_2^p - t_1^p)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu da,  $\Phi$ 'nin  $[0, h]$  aralığında  $X_t(\gamma) \in H$  için eşsürekliliği sağladığı sonucuna götürür. Ascoli-Arzela teoreminden,  $\Phi$ 'nin  $H$  üzerinde kompakt bir dönüşüm olduğu sonucu çıkar.

$i \rightarrow \infty$  iken  $X_{t,i}(\gamma)$ 'nin  $H$  üzerinde  $X_t(\gamma)$ 'ye yakınsadığı varsayalım. Yani  $X_{t,i}(\gamma)$ ,  $t \in [0, h]$  aralığında düzgün bir şekilde  $X_t(\gamma)$ 'ye yakınsar. Böylece,

$$\begin{aligned}
\Phi(X_{t,i}(\gamma)) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, X_{s,i}(\gamma)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g(s, X_{s,i}(\gamma)) dC_s(\gamma) \\
&\rightarrow \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, X_s(\gamma)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g(s, X_s(\gamma)) dC_s(\gamma) \\
&= \Phi(X_t(\gamma))
\end{aligned}$$

yakınsaması  $t \in [0, h]$  aralığında düzgündür. Bu,  $\Phi$ 'nin  $H$  üzerinde sürekli olduğunu göstermektedir.

Schauder sabit nokta teoreminden,  $\Phi$ 'nin  $H$  üzerinde bir  $X_t(\gamma)$  sabit noktasına sahip olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla,  $t \in [0, h]$  için

$$X_t(\gamma) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s, X_s(\gamma)) ds$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g(s, X_s(\gamma)) dC_s(\gamma) \quad (5.10)$$

geçerlidir. Genişletme yöntemine göre,  $t \in [0, T]$  aralığında (5.10)'u sağlayan bir  $X_t(\gamma)$  vardır. Yani  $X_t$ , (5.4) denkleminin bir çözümüdür. Böylece, teoremin sonucu ispatlanmış olur.

**Teorem 3.**  $\xi_1, \xi_2, \dots$  belirsiz değişkenler olsun ve  $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = \xi$  durumu neredeyse kesin olarak sağlansın. O halde,  $\xi$  bir belirsiz değişkendir.

**İspat.**  $\mathcal{B} = \{B \subset \mathbb{R} : \{\xi \in B\} \text{ bir olaydır}\}$  olduğu kabul edilsin. O zaman,  $\mathcal{B}$  bir  $\sigma$ -cebiridir.  $a, b \in \mathbb{R}$  için,

$$\xi = \sup_{n \geq 1} \inf_{i \geq n} \xi_i = \inf_{n \geq 1} \sup_{i \geq n} \xi_i,$$

olduğundan

$$\{\xi < b\} = \left\{ \sup_{n \geq 1} \inf_{i \geq n} \xi_i < b \right\} = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{i \geq n} \{\xi_i \leq b - \epsilon_k\},$$

$$\{\xi < a\} = \left\{ \inf_{n \geq 1} \sup_{i \geq n} \xi_i < a \right\} = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{i \geq n} \{\xi_i \geq a + \epsilon_k\}$$

elde edilir. Burada  $\{\epsilon_k\}$ , sıfıra azalarak yakınsayan pozitif sayılar dizisidir. Tüm  $i$ 'ler için  $\xi_i$ 'ler belirsiz değişkenler olduğundan  $\{\xi_i \leq b - \epsilon_k\}$  ve  $\{\xi_i \geq a + \epsilon_k\}$  ifadelerinin birer olay olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla  $\{\xi < b\}$  ve  $\{\xi > a\}$  olaydır ve bu durumda  $\{a < \xi < b\}$  bir olaydır. Yani,  $(a, b) \in \mathcal{B}$ 'dir.  $\mathbb{R}$ 'nin tüm açık aralıklarını içeren en küçük  $\sigma$ -cebiri, sadece  $\mathbb{R}$  üzerinde Borel cebiri olduğundan,  $\mathcal{B}$  sınıfı tüm Borel kümelerini içerir. Yani, herhangi bir  $B$  Borel kümesi için  $\{\xi \in B\}$  bir olaydır. Dolayısıyla,  $\xi$  bir belirsiz değişkendir.

## 6. BELİRSİZ LİOUVILLE-CAPUTO KESİRLİ FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ VARLIĞI ve TEKLİĞİ

Güncel deneysel ve teorik araştırmalar, klasik yöntemlerin yetersiz kaldığı karmaşık mühendislik problemlerinin ve doğa olaylarının modellenmesinde, ayrık kesirli hesap yöntemlerinin üstün bir başarı sergilediğini ortaya koymaktadır. Özellikle ısı transferi, akışkanlar mekaniği ve fizik gibi disiplinlerde karşılaşılan dinamik süreçlerin matematiksel modellemesinde, kesirli fark denklemleri araştırmacılara esnek ve güçlü bir matematiksel zemin sunmaktadır. Bu alandaki öncü çalışmalar incelendiğinde, Bohner ve Peterson (2003), Srivastava vd. (2019), Liu (2010), Kilbas vd. (2006), Srivastava (2020a), Srivastava (2020b), Goodrich ve Peterson (2015), Atici ve Eloe (2007), Atici ve Eloe (2009), Goodrich (2011), Wu ve Baleanu (2015), Wu vd. (2017), Suwan vd. (2018), Mohammed ve Abdeljawad (2020), Zhu (2015a), Zhu (2015b) ve Lu ve Zhu (2019) gibi araştırmacıların katkıları, konunun gelişim seyrini belirlemiştir.

Son dönemde, sonlu zaman ölçekleri üzerinde tanımlı kesirli fark denklemleri teorisi, araştırmacıların yoğun ilgisini çeken dinamik bir çalışma alanı haline gelmiştir. Literatür incelendiğinde, özellikle Riemann-Liouville (RL) yaklaşımı çerçevesinde kesirli fark denklemlerinin varlık ve tekliliğini inceleyen çalışmaların henüz az sayıda olduğu görülmektedir. Bu bağlamda He vd. (2018), Mohammed (2019), Lu ve Zhu (2020), Srivastava ve Mohammed (2020), Mohammed vd. (2020), Lu vd. (2019); ayrıca birkaç yeni gelişmeye bakınız: Srivastava ve Saad (2020), Khader vd. (2020), Izadi ve Srivastava (2020), Srivastava ve Saad (2020) ve Singh vd. (2021) gibi yazarların çalışmaları, alandaki teorik boşluğu doldurmaya yönelik önemli adımlar olarak değerlendirilebilir.

Özellikle, Lu vd. (2019) tarafından aşağıdaki belirsiz kesirli ileri fark denkleminin (UFFDE) varlığı ve tekliliği incelenmiştir:

$$\begin{aligned} &({}^{RL}\phi_{-1}\Delta^\phi p)(z) = H_1(z + \phi, p(z + \phi)) \\ &+ H_2(z + \phi, p(z + \phi))\varepsilon_{z+\phi}, ({}^{RL}\phi_{-1}\Delta^{-(1-\phi)}p)(z)|_{z=0}c \end{aligned}$$

$$:= a_0, \quad (6.1)$$

Burada  ${}^{RL}\Delta^{\phi}$ ,  $0 < \phi \leq 1$  olmak üzere kesirli Riemann-Liouville (RL) ileri farkını gösterir;  $H_1$  ve  $H_2$ ,  $[1, \infty] \times \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{N}_0 \cap [0, T]$  üzerinde tanımlı iki reel değerli fonksiyondur.  $a_0 \in \mathbb{R}$  reel bir sabittir ve  $\varepsilon_{\phi}, \varepsilon_{\phi+1}, \dots, \varepsilon_{T+\phi}$ ,  $L(\ell_1, \ell_2)$  simetrik belirsizlik dağılımına sahip olan  $(T + 1)$  adet IID (bağımsız ve aynı dağılımlı) belirsiz değişkenlerdir. Yukarıdaki çalışma, Mohammed (2019) ve ardından Srivastava ve Mohammed (2020) tarafından geliştirilmiştir. Ayrıca, Mohammed vd. (2020) tarafından, (6.1) denkleminin nabla durumunun (geriye doğru) varlığı ve tekliği elde edilmiştir.

Bilindiği kadarıyla, RL kesirli fark denklemlerinin varlığını ve tekliğini ele alan çok az sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu nedenle, Liouville-Caputo kesirli hesabı anlamında, mevcut literatürü genişleten ve zenginleştiren belirsizlik teorisini kullanarak bu tür fark denklemlerinin çalışılması önem arz etmektedir. Yukarıda belirtilen araştırmalardan yola çıkarak Mohammed vd. 2020 yılında yaptıkları çalışmalarında

$$\begin{aligned} ({}^C\Delta^{\phi}p)(z) &= H_1(z + \phi - 1, p(z + \phi - 1)) \\ &+ H_2(z + \phi - 1, p(z + \phi - 1))\varepsilon_{z+\phi-1}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

başlangıç koşulu

$$({}^C\Delta^{-(1-\phi)}p)(z)|_{z=0} = p(\phi - 1) := c_0, \quad (6.3)$$

ile verilen belirsiz kesirli Liouville-Caputo benzeri fark denkleminin (UFLCDE) varlığı ve tekliğini incelemiştir.

Burada  ${}^C\Delta^{\phi}$ ,  $0 < \phi \leq 1$  olmak üzere kesirli Liouville-Caputo ileri farkını gösterir ve  $H_1$  ile  $H_2$ ,  $[1, \infty] \times \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{N}_0 \cap [0, T]$  üzerinde tanımlı iki reel değerli fonksiyondur,  $c_0 \in \mathbb{R}$  kesin bir sayıdır ve  $\varepsilon_{\phi-1}, \varepsilon_{\phi}, \dots, \varepsilon_{T+\phi-1}$ , simetrik belirsizlik

dağılımı  $L(a, b)$ 'ye sahip olan  $(T + 1)$  adet IID belirsiz değişkenlerdir.

**Tanım 1.** Tanım kümesi  $p : \mathbb{N}_\ell \rightarrow \mathbb{R}$  olan bir  $p$  fonksiyonu için,  $\beta > 0$  olduğu kabul edilsin. Bu durumda,  $p$  fonksiyonunun  $\Delta$ -RL kesirli toplamı

$$({}_\ell \Delta^{-\beta} p)(z) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{r=\ell}^{z-\beta} [z - \sigma(r)]^{(\beta-1)} p(r) \quad (\forall z \in \mathbb{N}_{\ell+\beta}) \quad (6.4)$$

şeklinde formüle edilir. Burada formülde yer alan  $z^{(\beta)}$  terimi, düşen faktöriyel fonksiyonu olarak bilinen özel bir fonksiyondur. Her  $z, \beta \in \mathbb{R}$  için Gamma fonksiyonu yardımıyla,

$$z^{(\beta)} = \frac{\Gamma(z + 1)}{\Gamma(z + 1 - \beta)}, \quad (6.5)$$

şeklinde ifade edilir (Goodrich ve Peterson 2015).

**Lemma 1.**  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$  ve  $\phi \geq 0$  olduğu varsayılınsın. O halde

$${}_\ell + \phi \Delta^{-\beta} (z - a)^{(\phi)} = \frac{\Gamma(\phi + 1)}{\Gamma(\phi + \beta + 1)} (z - a)^{(\phi + \beta)} \quad (\forall z \in \mathbb{N}_{\ell + \phi + \beta})$$

şeklindedir (Goodrich ve Peterson 2015).

**Lemma 2.**  $\mathbb{N}_\ell$  üzerinde tanımlanan herhangi bir  $p$  fonksiyonu ve herhangi bir  $\beta, \phi > 0$  için aşağıdakiler geçerlidir.

(i)  $z \in \mathbb{N}_{\ell + \phi + \beta}$  için

$$({}_\ell + \phi \Delta^{-\beta} {}_\ell \Delta^{-\phi} p)(z) = ({}_\ell \Delta^{-(\phi + \beta)} p)(z) = ({}_\ell + \beta \Delta^{-\phi} {}_\ell \Delta^{-\beta} p)(z)$$

şeklindedir.

- (ii)  $(\ell \Delta^\beta p)(z) = (\Delta_\ell \Delta^{-(1-\beta)} p)(z)$  dir.
- (iii)  $(\ell \Delta^{-\beta} \Delta p)(z) = (\Delta_\ell \Delta^{-\beta} p)(z) - \frac{(z-a)^{\overline{(\beta-1)}}}{\Gamma(\beta)} p(\ell)$  dir.
- (iv)  $(\beta \notin \mathbb{N})$  için  $(\ell \Delta^{-\beta} \Delta^\beta p)(z) = (\Delta^\beta \ell \Delta^{-\beta} p)(z) = p(z)$  ve  
 $(\beta \in \mathbb{N})$  için  $(\ell \Delta^{-\beta} \Delta^\beta p)(z) = p(z) - \sum_{k=0}^{\beta-1} \frac{(z-a)^{\overline{k}}}{k!} \Delta^k p(\ell)$

şeklindedir (Atici ve Eloe 2007, Atici ve Eloe 2009, Abdeljawad 2013, Abdeljawad vd. 2017, Abdeljawad 2018).

**Lemma 3.**  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ ;  $n - 1 < \beta \leq n$  olduğu ve  $p$ 'nin,  $\mathbb{N}_\ell$  üzerinde tanımlı olduğu kabul edilsin. O halde

$$(\ell + n - \beta \Delta^{-\beta c} \ell \Delta^\beta p)(z) = p(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z-a)^{\overline{(k)}}}{k!} \Delta^k p(\ell) \quad (6.6)$$

şeklindedir. Özellikle,  $0 < \beta \leq 1$  için,

$$(\ell + 1 - \beta \Delta^{-\beta c} \ell \Delta^\beta p)(z) = p(z) - p(\ell) \quad (6.7)$$

dir (Abdeljawad 2011).

**Tanım 2.**  $p$ ,  $\mathbb{N}_\ell$  üzerinde tanımlı olsun ve  $n - 1 < \beta \leq n$  için  $n \in \mathbb{N}_1$  ve  $\beta > 0$  olsun. O zaman,  $\beta$ . mertebeden delta Liouville-Caputo kesirli farkları

$$\begin{aligned} ({}^c \ell \Delta^{-\beta} p)(z) &:= (\ell \Delta^{-(n-\beta)} \Delta^n p)(z) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \sum_{r=\ell}^{z-(n-\beta)} [z - \sigma(r)]^{\overline{(\beta-1)}} \Delta^n p(r) \quad (\forall z \in \mathbb{N}_{\ell+n-\beta}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

şekilde tanımlanır (Abdeljawad 2018).

Son zamanlarda, Lu vd. (2019) çalışmasında, belirsiz  $\varepsilon_z$  dizisi için  $\beta$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli toplamını tanıtmıştır.

**Tanım 3.** Herhangi bir  $\beta > 0$ ;  $\ell \in \mathbb{R}$  ve  $z \in \mathbb{N}_\ell$  ile indekslenmiş belirsiz  $\varepsilon_z$  dizisi için,  $\varepsilon_z$ 'nin  $\beta$ . mertebeden RL kesirli toplamı

$${}_\ell \Delta^{-\beta} \varepsilon_z = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{r=\ell}^{z-\beta} [z - \sigma(r)]^{\overline{\beta-1}} \varepsilon_r$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki tanımda belirsiz dizi  $\varepsilon_z$  için  $\beta$ . mertebeden Liouville-Caputo kesirli toplamı verilmiştir (Lu vd. 2019).

**Tanım 4.** Herhangi bir  $\beta > 0$ ;  $\ell \in \mathbb{R}$  ve  $z \in \mathbb{N}_\ell$  ile indekslenmiş belirsiz  $\varepsilon_z$  dizisi için,  $\varepsilon_z$ 'nin  $\beta$ . mertebeden Liouville-Caputo kesirli toplamı

$${}^c {}_\ell \Delta^{-\beta} \varepsilon_z = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \sum_{r=\ell}^{z-(n-\beta)} [z - \sigma(r)]^{(\beta-1)} \Delta^n \varepsilon_r$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 5.** Herhangi bir  $\beta > 0$  için, belirsiz dizi  $\varepsilon_z$ 'ye ait kesirli RL geri farkı  $n \in \mathbb{N}_1$  için  $n - 1 < \phi \leq n$  olmak üzere

$$\Delta_\ell^\beta \varepsilon_z = \Delta_\ell \left( \Delta_\ell^{-(1-\beta)} \varepsilon_z \right)$$

şeklinde tanımlanır (Lu vd. 2019).

**Tanım 6.**  $\phi, \mu, \zeta \in \mathbb{C}$ 'nin  $Re(\phi) > 0$  ve  $|\lambda| < 1$  için  $\lambda \in \mathbb{R}$  olduğu kabul edilsin. O halde ayrık delta-ML fonksiyonları:

$$E_{(\phi, \mu)}(\lambda, \zeta) := \sum_{e=0}^{\infty} \frac{[\zeta + e(\phi - 1)]^{(e\phi + \mu - 1)}}{\Gamma(e\phi + \mu)} \lambda^e \quad (6.9)$$

şeklinde verilir. Özellikle,  $\mu = 1$  ise,

$$E_{(\phi)}(\lambda, \zeta) := \sum_{e=0}^{\infty} \frac{[\zeta + e(\phi - 1)]^{(e\phi)}}{\Gamma(e\phi + 1)} \lambda^e \quad (6.10)$$

elde edilir (Haider vd. 2020).

$\chi$  boş olmayan bir küme ve  $L$ ,  $\chi$  kümesi üzerinde bir  $\sigma$ -cebiri olsun.  $L$ 'deki her  $\delta$  elemanına bir olay denir.  $L$ 'de  $\sigma$ -cebiri üzerinde tanımlanan bir  $\mathcal{M}$  küme fonksiyonu, aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa belirsiz ölçü olarak adlandırılır:

**[Normallik aksiyomu:]** Evrensel küme  $\chi$  için  $\mathcal{M}\{\chi\} = 1$ .

**[Dualite (İkilik) aksiyomu:]** Her  $\delta$  olayı için  $\mathcal{M}\{\delta\} + \mathcal{M}\{\delta^c\} = 1$

**[Alt toplamsallık aksiyomu:]** Her sayılabilir olay dizisi  $\delta_1, \delta_2, \dots$  için  $\mathcal{M}\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \delta_k\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}\{\delta_k\}$ .

**[Çarpım aksiyomu:]** Yukarıdaki üç aksiyom göz önüne alındığında, belirsiz ölçünün monoton artan bir küme fonksiyonu olduğu açıktır.  $(\chi, L, \mathcal{M})$  üçlüsü bir belirsizlik uzayı olarak adlandırılır (Liu 2010).

Şimdi  $(\chi_j, L_j, \mathcal{M}_j)$ 'nin belirsizlik uzayları olduğunu ve  $\delta_j$ 'nin  $j = 1, 2, \dots$  için keyfi olarak seçilmiş olaylar olduğunu kabul edelim. O halde, çarpım belirsiz ölçüsü  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathcal{M} \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} \delta_j \right\} = \bigwedge_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}_j \{ \delta_j \},$$

koşulunu sağlayan bir belirsiz ölçüdür. Burada  $\bigwedge$  minimum operatördür. Sonuç olarak, aşağıdaki tanımlara ulaşılır.

**Tanım 7.** Bir  $(\chi, L, \mathcal{M})$  belirsizlik uzayından  $\mathbb{R}$ 'ye (reel sayılar kümesine) tanımlı bir  $\varepsilon$  fonksiyonuna, reel sayıların herhangi bir  $\mathcal{B}$  Borel kümesi için  $\{\varepsilon \in \mathcal{B}\} := \{\gamma \in \chi; \varepsilon(\gamma) \in \mathcal{B}\}$  kümesi bir olay ise belirsiz değişken adı verilir. Bir  $\varepsilon$  belirsiz

değişkeninin belirsizlik dağılımı  $\Psi(x)$ ,  $\Psi(x) := \mathcal{M}\{\varepsilon \leq x\}$  şeklinde tanımlanır (Liu 2010).

**Tanım 8.** Bir  $\Psi$  belirsizlik dağılımı; eğer  $x$ 'e göre sürekli ve kesin artan bir fonksiyon ise,  $0 < \Psi(x) < 1$  aralığında değer alıyor ve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) = 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi(x) = 1$$

koşullarını sağlıyorsa, regüler olarak adlandırılır (Liu 2010).

**Tanım 9.**  $\varepsilon$ , düzenli bir  $\Psi$  belirsizlik dağılımına sahip olan belirsiz bir değişken olsun. O halde,  $\Psi^{-1}$  ters fonksiyonuna,  $\varepsilon$ 'nin ters belirsizlik dağılımı (IUD) adı verilir (Liu 2010).

**Örnek 1.** Tanım 9 doğrultusunda, şunlar gözlemlenebilir:

(i)  $L(\ell_1, \ell_2)$  lineer belirsiz değişkeninin IUD'si

$$\Psi^{-1}(\phi) = (1 - \phi)\ell_1 + \phi\ell_2$$

şeklinde verilir.

(ii)  $\mathbb{N}(\ell_1, \ell_2)$  normal belirsiz değişkeninin IUD'si

$$\Psi^{-1}(\phi) = \ell_1 + \frac{\sqrt{3}\ell_2}{\pi} \ln\left(\frac{\phi}{1 - \phi}\right)$$

şeklinde verilir.

(iii)  $\log \mathbb{N}(\ell_1, \ell_2)$  normal belirsiz değişkeninin IUD'si

$$\Psi^{-1}(\phi) = \exp(\ell_1) + \left(\frac{\phi}{1 - \phi}\right)^{\frac{\sqrt{3}\ell_2}{\pi}}$$

şeklinde verilir.

**Tanım 10.**  $\Psi(x)$ ,  $\varepsilon$ 'nin düzenli bir belirsizlik dağılımı olsun. Eğer,

$$\Psi(x) + \Psi(-x) = 1$$

ise  $\varepsilon$  belirsiz değişkeninin simetrik olduğu söylenir (Liu 2010).

**Açıklama 1.** Tanım (10)'dan, simetrik belirsiz değişkenin,

$$\Psi^{-1}(\phi) + \Psi^{-1}(1 - \phi) = 0$$

koşulunu sağlayan bir  $\Psi^{-1}(\phi)$  ters belirsizlik dağılımına sahip olduğu sonucuna ulaşılabilir.

**Örnek 2.** Tanım 10'dan hareketle;

1. Herhangi bir pozitif  $a$  reel sayısı için  $L(-\ell, \ell)$  lineer belirsiz değişkeni simetriktir.
2.  $N(0,1)$  normal belirsiz değişkeni simetriktir.

çıkarımlarda bulunulabilir.

**Tanım 11.** Reel sayıların herhangi bir  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$  Borel kümeleri için

$$\mathcal{M} \left\{ \bigcap_{j=1}^n \{\varepsilon_j \in \mathcal{B}_j\} \right\} = \bigwedge_{j=1}^n \mathcal{M} \{\varepsilon_j \in \mathcal{B}_j\}$$

eşitliği sağlanıyorsa  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  belirsiz değişkenlerinin bağımsız olduğu söylenir (Liu 2010).

**Tanım 12.** (IID)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , belirsiz değişkenleri, eğer bağımsız ve aynı belirsizlik dağılımına sahipse, bağımsız özdeş dağılımlar (veya kısaca IID) olarak adlandırılırlar (Liu 2010).

Lu vd. (2019) ve Mohammed vd. (2020)'den önceki çalışmaları göz önüne alındığında, UFLCDE'nin tanımı şu şekilde ifade edilebilir.

**Tanım 13.** Belirsiz kesirli fark denklemi, belirsiz bir dizi tarafından yönlendirilen bir kesirli fark denklemdir. Ayrıca, Liouville-Caputo anlamında belirsiz kesirli ileri fark denklemi (UFLCDE), Liouville-Caputo ileri farkına sahip belirsiz kesirli fark denklemdir.

**Lemma 4.** Başlangıç koşulları (6.3) ile verilen (6.2) başlangıç değer problemi,

$$p(z) = c_0 + \frac{1}{\Gamma(\phi)} \sum_{r=0}^{z-\phi} [z - \sigma(r)]^{(\phi-1)} [H_1(r + \phi - 1, p(r + \phi - 1)) + H_2(r + \phi - 1, p(r + \phi - 1))\varepsilon_{r+\phi-1}] \quad (z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]) \quad (6.11)$$

belirsiz kesirli toplam denklemine denktir.

**İspat 1.** IVP (6.2) üzerine  ${}_0\Delta^{-\phi}$  uygulanarak ve (6.3) kullanılarak istenen sonuç doğrudan elde edilebilir.  $z \in \mathbb{N}_0 \cap [0, T]$  ve  $\lambda \in (0,1)$  için,

$$({}^c_{\phi-1}\Delta^\phi p)(z) = \lambda p(z + \phi - 1) + \lambda \varepsilon_{z+\phi-1}, \quad (6.12)$$

$${}^c_{\phi-1}\Delta^{\phi-1} p(z) \Big|_{z=0} = c_0, \quad (6.13)$$

şeklindedir.

**Teorem 1.** Herhangi bir  $z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]$  ve  $|\lambda| < 1$  için, (6.13) başlangıç koşulu olan lineer UFLCDE (6.12),

$$p(z) = E_{(\phi)}(\lambda, z)c_0 + \varepsilon_z, \quad (6.14)$$

şeklinde verilen bir çözüme sahiptir. Burada  $\varepsilon_z$ , belirsizlik dağılımı

$$L(\ell \cdot \lambda E_{(\phi, \phi+1)}(\lambda, z), b \cdot \lambda E_{(\phi, \phi+1)}(\lambda, z))$$

şeklinde olan belirsiz bir dizidir.

**İspat 2.** (6.12) denkleminin üzerine  ${}_0\Delta^{-\phi}$  uygulanarak

$${}_0\Delta_{\phi}^{-\phi} [ {}^c_{\phi-1}\Delta^{\phi} p(z) ] = \lambda_0 \Delta^{-\phi} p(z + \phi - 1) + \lambda_0 \Delta^{-\phi} \varepsilon_{z+\phi-1} \quad (z \in \mathbb{N}_{\phi} \cap [0, T]) \quad (6.15)$$

elde edilir. Böylece, Lemma 3 kullanılarak

$$p(z) = c_0 + \lambda_0 \Delta^{-\phi} p(z + \phi - 1) + \lambda_0 \Delta^{-\phi} \varepsilon_{z+\phi-1} \quad (z \in \mathbb{N}_{\phi} \cap [0, T]), \quad (6.16)$$

sonucuna ulaşılır. Bu ifade, verilen UFLCDE (6.12) denkleminin çözümüdür.

Açık bir çözüm elde etmek için, başlangıç noktası  $p_0(z) = c_0$  olan Picard yaklaşım yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca, diğer bileşenler aşağıdaki yineleme bağıntısı kullanılarak elde edilebilir:

$$p_q(z) = c_0 + \lambda_0 \Delta^{-\phi} p_q(z + \phi - 1) + \lambda_0 \Delta^{-\phi} \varepsilon_{z+\phi-1} \quad (z \in \mathbb{N}_{\phi} \cap [0, T]; q = 0, 1, \dots). \quad (6.17)$$

$\varepsilon_{\phi-1}, \varepsilon_{\phi}, \dots, \varepsilon_{T+\phi-1}$  değişkenleri IID (bağımsız özdeş dağılım) belirsiz değişkenler olduğundan, dağılımda artık  $\varepsilon_{z+\phi-1} = \varepsilon$  yazılabilir. Lemma 1'den ve sonlu bağımsız belirsiz değişkenlerin lineer birleşiminin de pozitif lineer birleşim katsayısına sahip bir belirsiz değişken olduğu gerçeğinden yararlanarak

$$p_1(z) = c_0 + \lambda_0 \Delta^{-\phi} p_0(z) + \lambda_0 \Delta^{-\phi} \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ 1 + \lambda \frac{z^{(\phi)}}{\Gamma(\phi + 1)} \right] c_0 + \lambda \frac{z^{(\phi)}}{\Gamma(\phi + 1)} \varepsilon \\
p_2(z) &= \frac{(z - \phi + 1)^{\overline{\phi-1}}}{\Gamma(\phi)} c_0 + \lambda_0 \Delta^{-\phi} p_1(z) + \lambda_0 \Delta^{-\phi} \varepsilon, \\
&= \left[ 1 + \lambda \frac{z^{(\phi)}}{\Gamma(\phi + 1)} + \lambda^2 \frac{z^{(2\phi)}}{\Gamma(2\phi + 1)} \right] c_0 + \left[ \lambda \frac{z^{(\phi)}}{\Gamma(\phi + 1)} + \lambda^2 \frac{z^{(2\phi)}}{\Gamma(2\phi + 1)} \right] \varepsilon \\
&\vdots
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve bu şekilde devam eder. İşlem  $q$ . terime kadar sürdürüldüğünde,  $z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]$  için

$$p_q(z) = c_0 \sum_{k=0}^q \lambda^k \frac{[z + k(\phi - 1)]^{(k\phi)}}{\Gamma(k\phi + 1)} + \sum_{k=1}^q \lambda^k \frac{[z + (k - 1)(\phi - 1)]^{(k\phi)}}{\Gamma(k\phi + 1)} \varepsilon,$$

olduğu görülür. Şimdi,  $q \rightarrow \infty$  olduğu kabul edilerek

$$\begin{aligned}
\hat{p}(z) &:= \lim_{q \rightarrow \infty} p_q(z) \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{[z + k(\phi - 1)]^{(k\phi)}}{\Gamma(k\phi + 1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \frac{[z + (k - 1)(\phi - 1)]^{(k\phi)}}{\Gamma(k\phi + 1)} \varepsilon \\
&= c_0 E_{(\phi)}(\lambda, z) + \lambda E_{(\phi, \phi+1)}(\lambda, z) \varepsilon, \quad z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]
\end{aligned} \tag{6.18}$$

çözümü elde edilir.

$E_{(\phi)}(\lambda, z)$  ve  $E_{(\phi, \phi+1)}(\lambda, t + \phi - 1)$  Mittag-Leffler fonksiyonları  $|\lambda| < 1$  için mutlak yakınsak olduğundan,  $\hat{p}(z)$  çözümü mevcuttur. Ayrıca, (6.17) denkleminin her iki

tarafının  $\lim_{q \rightarrow \infty}$  limiti alındığında,

$$\hat{p}(z) = c_0 + \lambda_0 \Delta^{-\phi} \hat{p}(z + \phi - 1) + \lambda_0 \Delta^{-\phi} \varepsilon_{z+\phi-1} \quad (z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T])$$

elde edilir. Bu  $\hat{p}(z)$ 'nin (6.16) denklemini sağladığı anlamına gelir. Dolayısıyla,  $\hat{p}(z)$ 'nin, (6.12) ve (6.13) denklemlerinin bir çözümü olduğu açıktır. Böylece Teorem 1'in ispatı tamamlanmış olur.

UFLCDE'lerin çözümünün varlığı ve tekliği aşağıda ifade edilmiştir.

**Teorem 2.** (Varlık ve Teklik).  $H_1(z, p_1)$  ve  $H_2(z, p_1)$ , (6.2) denkleminde tanımlanan ve

$$|H_1(z, p_1) - H_1(z, p_2)| + |H_2(z, p_1) - H_2(z, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|, \quad (6.19)$$

Lipschitz koşulunu sağlayan iki reel değerli fonksiyon olsun. Burada Lipschitz sabiti  $L$ ,

$$L < \frac{\Gamma(\phi + 1)\Gamma(T + 1 - \phi)}{\Gamma(T + 1)(\vartheta + 1)}, \quad (6.20)$$

eşitsizliği sağlamaktadır. Ayrıca burada  $\vartheta = |\ell_1| \vee |\ell_2|$  olarak tanımlanmıştır. Bu durumda, (6.2)-(6.3) UFLCDE sistemi tüm  $z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]$  için neredeyse kesin olarak tek bir  $p(z)$  çözümüne sahiptir.

**İspat 3.**  $l_\phi^k$  (tüm sonlu reel  $\{p(z)\}_\phi^k$  dizilerinin kümesi),  $\|p\|$  normu ile

$$l_\phi^k := \{p; p = \{p(z)\}_\phi^k, k \in \mathbb{N}_1\}$$

şeklinde tanımlansın ve

$$\|p\| := \max_{z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]} |p(z)|,$$

$k$  terime sahip olsun.  $(l_\phi^k, \|\cdot\|)$  ikilisinin bir Banach uzayı olduğu kolayca görülebilir (Sacks 2017).

Şimdi  $p_z \in l_\phi^k$  için  $\mathcal{D}$  operatörü

$$\begin{aligned} \mathcal{D}p_z = c_0 + \frac{1}{\Gamma(\phi)} \sum_{r=0}^{z-\phi} [z - \sigma(r)]^{(\phi-1)} [H_1(r + \phi - 1, p_{r+\phi-1}) \\ + H_2(r + \phi - 1, p_{r+\phi-1})\varepsilon_{r+\phi-1}] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca  $\chi$ 'nin belirsizlik uzayındaki evrensel kümeyi temsil ettiği kabul edilsin.  $\varepsilon_z(z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T])$ , her  $t$  anında  $L(\ell_1, \ell_2)$  lineer belirsizlik dağılımına sahip belirsiz bir değişken olduğundan açıkça  $\mathcal{M}\{(\varepsilon_z < a) \cup (\varepsilon_z > b)\} = 0$ 'dır. Ayrıca,  $\vartheta = |\ell_1| \vee |\ell_2|$  olmak üzere  $\varepsilon_z(\gamma) \leq \vartheta$  eşitsizliği,

$$\gamma \in \chi \{(\varepsilon_z < \ell_1) \cup (\varepsilon_z > \ell_2); z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]\}$$

şeklinde verilen her  $\gamma$  için neredeyse kesin olarak sağlanır.

Herhangi bir  $x_z, p_z \in l_\phi^k$  için,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}x_z(\gamma) - \mathcal{D}p_z(\gamma)\| &= \max_{z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]} |\mathcal{D}x_z(\gamma) - \mathcal{D}p_z(\gamma)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\phi)} \max_{z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]} \sum_{r=0}^{z-\phi} [z - \sigma(r)]^{\overline{\phi-1}} \left( |H_1(r + \phi - 1, x_{r+\phi-1}(\gamma)) \right. \\ &\quad \left. - H_1(r + \phi - 1, p_{r+\phi-1}(\gamma)) \right| \\ &\quad + |[H_2(r + \phi - 1, x_{r+\phi-1}(\gamma)) - H_2(r + \phi - 1, p_{r+\phi-1}(\gamma))]\varepsilon_r| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\phi)} \max_{z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]} \sum_{r=0}^{z-\phi} [z - \sigma(r)]^{\overline{\phi-1}} \left( \left| H_1(r + \phi - 1, x_{r+\phi-1}(\gamma)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - H_1(r + \phi - 1, p_{r+\phi-1}(\gamma)) \right| \right. \\
&\quad \left. + \vartheta \left| \left[ H_2(r + \phi - 1, x_{r+\phi-1}(\gamma)) - H_2(r + \phi - 1, p_{r+\phi-1}(\gamma)) \right] \right| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, varsayımlar ve Lemma 1 yardımıyla

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}x_z(\gamma) - \mathcal{D}p_z(\gamma)\| &\leq L(1 + \vartheta) \frac{1}{\Gamma(\phi)} \max_{z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]} \sum_{r=0}^{z-\phi} (z - \sigma(r))^{\overline{\phi-1}} |x_r(\gamma) - p_r(\gamma)| \\
&\leq L(1 + \vartheta) \|x_z(\gamma) - p_z(\gamma)\| \max_{z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]} \left( {}_0\Delta^{-\phi} z^{(0)} \right) \\
&= L(1 + \vartheta) \|x_z(\gamma) - p_z(\gamma)\| \max_{z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]} \left( \frac{1}{\Gamma(\phi + 1)} z^{(\phi)} \right) \\
&\leq \frac{L(1 + \vartheta) T^{(\phi)}}{\Gamma(\phi + 1)} \|x_z(\gamma) - p_z(\gamma)\| \\
&= \frac{L(1 + \vartheta) \Gamma(T + 1)}{\Gamma(\phi + 1) \Gamma(T - \phi + 1)} \|x_z(\gamma) - p_z(\gamma)\|
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\mathcal{D}$  dönüşümü,  $l_\phi^k$  uzayında neredeyse kesin olarak bir büzülmedir. Öyle ki

$$0 < L < \frac{\Gamma(\phi + 1) \Gamma(T - \phi + 1)}{(1 + \vartheta) \Gamma(T + 1)}$$

şeklindedir. Bu nedenle, Banach büzülme dönüşümü teoremi kullanılarak,  $\mathcal{D}$  operatörünün  $l_\phi^k$  uzayında neredeyse kesin olarak tek bir  $p_z(\gamma)$  sabit noktası elde edilir (Sacks 2017). Ayrıca,

$$p_z(\gamma) = \lim_{j \rightarrow \infty} p_z^j(\gamma),$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$p_z^j(\gamma) = \mathcal{D}(p_z^{j-1}(\gamma))$$

ve

$$p_z^0(\gamma) = \frac{(z - \phi)^{\overline{\phi-1}}}{\Gamma(\phi)} c_0$$

şeklindedir. Diğer yandan,  $H_1$  ve  $H_2$  Lipschitz süreklili fonksiyonlar olduğundan,  $\mathcal{D}$  operatörü herhangi bir  $z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]$  için ölçülebilirdir. Çünkü

$$p_z^1(\gamma), p_z^2(\gamma), \dots, p_z^j(\gamma), \dots$$

belirsiz değişkenler olduğundan ve  $p_z^0(\gamma)$ , belirsiz değişkenlerin reel değerli ölçülebilir bir fonksiyonu olduğundan (Liu 2010, Teorem 1.10 kullanılarak)  $p_z^0(\gamma)$ 'nın belirsiz bir değişken olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, (Zhu 2015b, Teorem 3'e göre),  $p_z = \lim_{j \rightarrow \infty} p_z^j$  ifadesinin açıkça belirsiz bir değişken olduğu görülür. Sonuç olarak, (6.13) başlangıç koşulu ile sınırlı (6.12) UFLCDE sistemi, tüm  $z \in \mathbb{N}_\phi \cap [0, T]$  için neredeyse kesin olarak tek bir  $p_z$  çözümüne sahiptir. Böylece, Teorem 2 tarafından öne sürülen varlık ve teklik ispatı tamamlanmıştır.

### Örnek 3.

$$c_{-0.5} \Delta^{0.5} p(z) = \begin{cases} \frac{\ln(|p(z - 0.5)| + 1)}{64(z - 0.5)^3} + 0.5 \varepsilon_{z-0.5} & (z \in \mathbb{N}_0 \cap [0, 3]), \\ p\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \end{cases}$$

(6.21)

denklemini ele alalım. Burada  $\varepsilon_{-0.5}, \varepsilon_{0.5}, \varepsilon_{1.5}, \varepsilon_{2.5}$ ,  $L(-1,2)$  belirsizlik dağılımına sahip olan dört adet IID belirsiz değişkendir.

$\phi = \frac{1}{2}$  alınarak Lemma 4'e göre, UFLCDE (6.21) için çözümün ters belirsizlik dağılımı,

$$p(z) = c_0 + \frac{1}{\Gamma(0.5)} \sum_{r=0}^{z-0.5} [z - \sigma(r)]^{(-0.5)} \left( \frac{\ln(|p(r-0.5)| + 1)}{4(r-0.5)^3} + 0.25\varepsilon_{r-0.5} \right) \quad (z \in \mathbb{N}_0 \cap [0,3]).$$

toplam denkleminin çözümüdür. Böylece,  $z \in \mathbb{N}_0 \cap [0,3]$  için

$$\begin{aligned} & |H_1(z, p_1) - H_1(z, p_2)| + |H_2(z, p_1) - H_2(z, p_2)| \\ &= \left| \frac{\ln(|p_1| + 1)}{64(z-0.5)^3} - \frac{\ln(|p_2| + 1)}{64(z-0.5)^3} \right| \\ &= \frac{1}{64(z-0.5)^3} |\ln(|p_1| + 1) - \ln(|p_2| + 1)| \\ &\leq \frac{1}{64 \left(\frac{1}{2}\right)^3} ||p_1| - |p_2|| \\ &\leq \frac{|p_1 - p_2|}{8} \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\Gamma(0.5 + 1)\Gamma(3 + 1 - 0.5)}{3\Gamma(3 + 1)} \approx 0.1636 > \frac{1}{8} = 0.125$$

elde edilir. Bu nedenle, Teorem 2 göz önüne alındığında, bu durum UFLCDE (6.21)'in

neredeysse kesin olarak tek bir çözüme sahip olduğunu doğrulamaktadır.

#### Örnek 4.

$$c_{-0.75}\Delta^{0.25}p(z) = \frac{p^2(z - 0.75)}{40} + \varepsilon_{z-0.75} \quad (z \in \mathbb{N}_0 \cap [0,3]), \quad (6.22)$$

denklemini ele alalım. Burada  $\varepsilon_{-0.75}, \varepsilon_{0.25}, \varepsilon_{1.25}, \varepsilon_{2.25}$ ,  $L(-3,3)$  lineer belirsizlik dağılımına sahip olan dört adet IID lineer belirsiz değişkendir.

$\phi = \frac{1}{4}$  alınarak Lemma 4'e göre, UFLCDE (6.22) için çözümün ters belirsizlik dağılımı,

$$p(z) = c_0 + \frac{1}{\Gamma(0.25)} \sum_{r=0}^{z-0.25} [z - \sigma(r)]^{\binom{-3}{4}} \left( \frac{p^2(r - 0.75)}{40} + \varepsilon_{r-0.75} \right)$$

toplam denkleminin çözümüdür.

$$|H_1(z, p_1) - H_1(z, p_2)| + |H_2(z, p_1) - H_2(z, p_2)|$$

ifadesinin  $[-20,20]$  aralığında, Lipschitz sabiti 0.1 olacak şekilde

$$|H_1(z, p_1) - H_1(z, p_2)| + |H_2(z, p_1) - H_2(z, p_2)|$$

$$\leq \frac{1}{40} |p_1 + p_2| |p_1 - p_2| = 0.1 |p_1 - p_2|$$

Lipschitz sürekliliği olduğu görülmektedir. Ayrıca

$$\frac{\Gamma(0.25 + 1)\Gamma(3 + 1 - 0.25)}{4\Gamma(3 + 1)} \approx 0.167 > 0.1$$

sonucu elde edilir.

Sonuç olarak, Teorem 2 göz önüne alındığında, bu durum UFLCDE (6.22)'nin neredeyse kesin olarak tek bir çözüme sahip olduğunu doğrular.

### Örnek 5.

$$c_{-0.5}\Delta^{0.5}p(z) = \frac{\sin\left(p\left(z - \frac{1}{2}\right)\right)}{10 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2} + 0.1\varepsilon_{z-\frac{1}{2}} \quad (z \in \mathbb{N}_0 \cap [0,3]), \quad (6.23)$$

denklemini ele alalım. Burada  $\varepsilon_{\frac{-1}{2}}, \varepsilon_{\frac{1}{2}}, \varepsilon_{\frac{3}{2}}, \varepsilon_{\frac{5}{2}}$ ,  $L(-1,1)$  lineer belirsizlik dağılımına sahip olan dört IID lineer belirsiz değişkendir.

$\phi = \frac{1}{2}$  alınarak Lemma 4'e göre, UFLCDE (6.23) için çözümün ters belirsizlik dağılımı,

$$p(z) = c_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{z-\frac{1}{2}} [z - \sigma(r)]^{(-0.5)} \left( \frac{\sin\left(p\left(r - \frac{1}{2}\right)\right)}{10 + \left(r - \frac{1}{2}\right)^2} + 0.1\varepsilon_{r-\frac{1}{2}} \right).$$

toplam denkleminin çözümüdür. Böylece doğrudan

$$|H_1(z, p_1) - H_1(z, p_2)| + |H_2(z, p_1) - H_2(z, p_2)| \leq \frac{1}{10} |p_1 - p_2|$$

ve

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)\Gamma\left(3 + 1 - \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(3 + 1)} \approx 0.2454 > \frac{1}{10} = 0.1$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Dolayısıyla, Teorem 2 göz önüne alındığında, bu durum UFLCDE (6.23)'ün neredeyse kesin olarak tek bir çözüme sahip olduğunu doğrular.

## 7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında, kesirli analiz teorisine yeni yaklaşımlar getirilmiş, belirsizlik teorisi ile kesirli diferensiyel ve fark denklemleri harmanlanarak literatürdeki mevcut boşluklar doldurulmaya çalışılmıştır.

Çalışma genelinde elde edilen temel bulgular ve sonuçlar aşağıda maddeler halinde özetlenmiştir:

- **Genelleştirilmiş Kesirli Türev (GFD) Tanımının Üstünlüğü:** Çalışmanın üçüncü bölümünde, literatüre yeni bir "Genelleştirilmiş Kesirli Türev" (GFD) tanımı kazandırılmıştır. Önerilen bu tanımın, Taylor serisi ile genişletilmiş türevlenebilir fonksiyonlar için  $D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$  özelliğini sağladığı ispatlanmıştır. Bu özellik, literatürde sıkça kullanılan Uyumlu Türev tanımında sağlanamamaktadır. Riccati kesirli diferensiyel denklemi üzerinde yapılan sayısal analizlerde GFD yöntemiyle elde edilen sonuçların, klasik Caputo ve Riemann-Liouville türev sonuçlarıyla tam bir uyum içinde olduğu görülmüştür. Ayrıca hata analizleri incelendiğinde, önerilen GFD yönteminin, Uyumlu Türev yöntemine kıyasla mutlak bağıl hatayı belirgin şekilde düşürdüğü ve daha yüksek doğruluk sağladığı tespit edilmiştir.
- **Belirsiz Kesirli Diferensiyel Denklemlerde Varlık ve Teklik:** Dinamik sistemlerin modellenmesinde karşılaşılan belirsizliklerin çözümü için belirsiz kesirli diferensiyel denklemler (UFDE) ele alınmıştır. Riemann-Liouville ve Caputo tipi UFDE'ler için çözüm kavramı tanımlanmıştır. Lipschitz ve lineer büyüme koşulları altında, Banach sabit nokta teoremi kullanılarak çözümün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Fonksiyonların sadece sürekli olduğu durumlarda ise Schauder sabit nokta teoremi ile çözümün varlığı garanti altına alınmıştır. Bu bulgular, belirsiz süreçlerin matematiksel modellenmesi için güçlü bir teorik zemin oluşturmaktadır.
- **Belirsiz Kesirli Fark Denklemlerinin (Ayrık Sistemler) Analizi:** Çalışmanın son bölümünde, sürekli sistemlerden ayrık zamanlı sistemlere geçiş yapılmış ve

Liouville-Caputo tipi belirsiz kesirli fark denklemleri incelenmiştir. Belirsiz Liouville-Caputo kesirli fark denklemleri (UFLCDE) için ardışık Picard iterasyon yöntemiyle analitik çözümler elde edilmiştir. Lipschitz koşulu altında Banach büzülme ilkesi kullanılarak çözümlerin varlığı ve tekliği kanıtlanmış, teorik sonuçlar sayısal örneklerle desteklenmiştir.

- **Genel Değerlendirme:** Sonuç olarak, bu tez çalışmasıyla kesirli analizin hem sürekli hem de ayrık (fark) operatörleri, belirsizlik teorisi çatısı altında birleştirilmiştir. Önerilen GFD tanımının, klasik tanımlarla tutarlı ancak hesaplama açısından daha avantajlı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, belirsizlik içeren fark denklemleri için geliştirilen varlık-teklik teoremleri ve Picard iterasyonuna dayalı çözüm yöntemleri, finansal modellemelerden fiziksel sistemlere kadar gürültü ve belirsizlik içeren birçok alanda (örneğin; belirsiz finans teorisi, popülasyon dinamiği) gelecekteki çalışmalara ışık tutacak niteliktedir. Gelecek çalışmalarda, bu denklemlerin kararlılık analizlerinin yapılması ve kaotik sistemlere uygulanması önerilmektedir.

## 8. KAYNAKLAR

- Abdelhakim A A, 2019, The flaw in the conformable calculus: it is conformable because it is not fractional, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 22(2), 242–254.
- Abdeljawad T, 2011, On Riemann and Caputo fractional differences, *Comput. Math. Appl.*, 62, 1602–1611.
- Abdeljawad T, 2013, On delta and nabla caputo fractional differences and dual identities, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013, Article ID 406910.
- Abdeljawad T, 2018, Different type kernel h–fractional differences and their fractional h–sums, *Chaos, Solitons & Fractals*, 116, 146–156.
- Abdeljawad T, Jarad F, Alzabut J, 2017, Fractional proportional differences with memory, *The European Physical Journal Special Topics*, 226(16–18), 3333–3354.
- Abu-Shady M, Kaabar M K A, 2021, A generalized definition of the fractional derivative with applications, *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 1-9.
- Agarwal R P, Lakshmikantham V, Nieto J J, 2010, On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty, *Nonlinear Analysis*, 72(6), 2859-2862.
- Ahmad B, Nieto J J, 2009, Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions, *Comput. Math. Appl.*, 58, 1838–1843.
- Araya D, Lizama C, 2008, Almost automorphic mild solutions to fractional differential equations, *Nonlinear Anal.*, 69, 3692–3705.

- Atangana A, Baleanu D, 2016, New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model, *Thermal Science*, 20(2), 763–769.
- Atangana A, Secer A, 2013, A note on fractional order derivatives and table of fractional derivatives of some special functions, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, Article ID 279681.
- Atici F, Eloe P, 2007, A transform method in discrete fractional calculus, *IJDE*, 2(2), 165–176.
- Atici F, Eloe P, 2009, Initial value problems in discrete fractional calculus, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(3), 981–989.
- Bagley R L, Torvik P J, 1986, On the fractional calculus model of viscoelastic behavior, *Journal of Rheology*, 30(1), 133–155.
- Baillie R T, 1996, Long memory processes and fractional integration in econometrics, *Journal of Econometrics*, 73(1), 5–59.
- Belmekki M, Nieto J J, Rodríguez-López R, 2009, Existence of periodic solutions for a nonlinear fractional differential equation, *Bound. Value Probl.*, 2009, Art. ID. 324561.
- Bohner M, Peterson A C, 2003, *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhauser, Boston.
- Bonilla B, Rivero M, Rodríguez-Germá L, Trujillo J J, 2007, Fractional differential equations as alternative models to nonlinear differential equations, *Appl. Math. Comput.*, 187, 79–88.
- Chang Y K, Nieto J J, 2009, Some new existence results for fractional differential inclusions with boundary conditions, *Math. Comput. Modelling*, 49, 605–609.

- Ciotir I, Răscanu A, 2009, Viability for differential equations driven by fractional Brownian motion, *J. Differential Equations*, 247, 1505–1528.
- Cui J, Yan L, 2011, Existence result for fractional neutral stochastic integro-differential equations with infinite delay, *J Phys. A: Math. Theor.*, 44(33), 335201.
- Diamond P, Kloeden P E, 1994, *Metric Spaces of Fuzzy Sets*, World Scientific, Singapore.
- Diethelm K, Ford N J, 2002, Analysis of fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 265, 229–248.
- El-Borai M M, El-Said El-Nadi K, Fouad H A, 2010, On some fractional stochastic delay differential equations, *Comput. Math. Appl.*, 59, 1165–1170.
- El-Wakil S A, Abulwafa E M, El-Shewy E K, Mahmoud A A, 2012, Ion-acoustic waves in unmagnetized collisionless weakly relativistic plasma of warm-ion and isothermal-electron using time-fractional KdV equation, *Advances in Space Research*, 49(12), 1721–1727.
- Ertürk V S, Odibat Z M, Momani S, 2011, An approximate solution of a fractional order differential equation model of human T-cell lymphotropic virus I (HTLV-I) infection of CD4+ T-cells, *Computers and Mathematics with Applications*, 62(3), 996–1002.
- Ge X, Zhu Y, 2013, A necessary condition of optimality for uncertain optimal control problem, *Fuzzy Optimization Decis. Making*, 12(1), 41–51.
- Goodrich C S, 2011, Existence of a positive solution to a system of discrete fractional boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 217(9), 4740–4753.
- Goodrich C, Peterson A, 2015, *Discrete Fractional Calculus*, Springer, Berlin, Germany.

- Gorenflo R, Mainardi F, 1997, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds., Springer-Verlag, New York, 277–290.
- Gray H L, Zhang N F, 1988, On a new definition of the fractional difference, *Mathematics of Computation*, 50(182), 513.
- Haider S S, Rehman M U, Abdeljawad T, 2020, On Hilfer fractional difference operator, *Adv. Differ. Equ.*, 2020, Article ID 122.
- He J W, Zhang L, Zhou Y, Ahmad B, 2018, Existence of solutions for fractional difference equations via topological degree methods, *Advances in Difference Equations*, 2018, 153.
- Hilfer R, 2000, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific Publishing Company, Singapore.
- Izadi M, Srivastava H M, 2020, A discretization approach for the nonlinear fractional logistic equation, *Entropy*, 22, Article ID 1328.
- Khader M M, Saad K M, Baleanu D, Kumar S, 2020, A spectral collocation method for fractional chemical clock reactions, *Comput. Appl. Math.*, 39, Article ID 324.
- Khalil R, Al Horani M, Yousef A, Sababheh M, 2014, A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65–70.
- Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J, 2006, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier B.V., Amsterdam.
- Kiryakova V, 1994, *Generalized Fractional Calculus and Applications*, Longman Scientific & Technical, Harlow.
- Lakshmikantham V, Leela S, 2009, Nagumo-type uniqueness result for fractional differential equations, *Nonlinear Anal.*, 8, 2886–2889.

- Lakshmikantham V, Leela S, Devi J V, 2009, Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Scientific Pub, Cambridge, UK.
- Lakshmikantham V, Mohapatra R N, 2003, Theory of Fuzzy Differential Equations and Applications, Taylor & Francis, London.
- Lakshmikantham V, Vatsala A S, 2008, Basic theory of fractional differential equations, *Nonlinear Anal.*, 69, 2677–2682.
- Liu B, 2007, Uncertainty Theory, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
- Liu B, 2008, Fuzzy process, hybrid process and uncertain process, *J Uncertain Syst.*, 2(1), 3–16.
- Liu B, 2009, Some research problems in uncertainty theory, *J Uncertain Syst.*, 3(1), 3–10.
- Liu B, 2010, Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty, Springer, Berlin, Germany.
- Lu Q, Zhu Y, 2020, Comparison theorems and distributions of solutions to uncertain fractional difference equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 376, Article ID 112884.
- Lu Q, Zhu Y, Lu Z, 2019, Uncertain fractional forward difference equations for Riemann–Liouville type, *Advances in Difference Equations*, 2019, 147.
- Lu Z, Zhu Y, 2019, Numerical approach for solution to an uncertain fractional differential equation, *Applied Mathematics and Computation*, 343, 137–148.
- Mainardi F, 1997, Fractional Calculus: Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics, A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds., Vienna: Springer-Verlag, 291–348.
- Mandelbrot B B, Van Ness J W, 1968, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Rev.*, 10, 422–437.

- Miller K S, Ross B, 1989, Fractional difference calculus, Proceedings of the International Symposium on Univalent Functions, Fractional Calculus and Their Applications, Nihon University, Japan, 139.
- Miller K S, Ross B, 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York.
- Mohammed P O, 2019, A generalized uncertain fractional forward difference equations of Riemann-Liouville type, Journal of Mathematics Research, 11(4), 43–50.
- Mohammed P O, Abdeljawad T, Jarad F, Chu Y M, 2020, Existence and uniqueness of uncertain fractional backward difference equations of Riemann-Liouville type, Math. Probl. Engrg., 2020, Article ID 6598682.
- Nieto J J, Rodríguez-López R, Franco D, 2006, Linear first-order fuzzy differential equation, Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl. Based Syst., 14, 687–709.
- Nieto J J, Rodríguez-López R, Georgiou D N, 2008, Fuzzy differential systems under generalized metric spaces approach, Dynam. Systems Appl., 17, 1-24.
- Nualart D, Răscanu A, 2002, Differential equations driven by fractional Brownian motion, Collectanea Mathematica, 53, 55–81.
- Oldham K B, 2010, Fractional differential equations in electrochemistry, Advances in Engineering Software, 41(1), 9–12.
- Oldham K B, Spanier J, 1974, The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
- Padovan J, 1987, Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators, Computational Mechanics, 2(4), 271-287.
- Podlubny I, 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego.
- Ren Y, Bi Q, Sakthivel R, 2013, Stochastic functional differential equations with infinite delay driven by G-Brownian motion, Math. Methods Appl. Sci., 36(13), 1746–1759.

- Rossikhin Y A, Shitikova M V, 1997, Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids, *Applied Mechanics Reviews*, 50(1), 15–67.
- Sacks P, 2017, *Techniques of Functional Analysis for Differential and Integral Equations*, Academic Press, London.
- Sakthivel R, Revathi P, Ren Y, 2013, Existence of solutions for nonlinear fractional stochastic differential equations, *Nonlinear Anal. TMA*, 81, 70–86.
- Shuqin Z, 2009, Monotone iterative method for initial value problem involving Riemann–Liouville fractional derivatives, *Nonlinear Anal.*, 71, 2087–2093.
- Singh H, Srivastava H M, Hammouch Z, Nisar K S, 2021, Numerical simulation and stability analysis for the fractional-order dynamics of COVID-19, *Results Phys.*, 20, Article ID 103722.
- Srivastava H M, 2020, Diabetes and its resulting complications: Mathematical modeling via fractional calculus, *Public Health Open Access*, 4(3), Article ID 2.
- Srivastava H M, 2020, Fractional-Order derivatives and integrals: Introductory overview and recent developments, *Kyungpook Math. J.*, 60, 73–116.
- Srivastava H M, Mohammed P O, 2020, A correlation between solutions of uncertain fractional forward difference equations and their paths, *Front. Phys.*, 8, Article ID 280.
- Srivastava H M, Özarıslan M A, Yařar B Y, 2019, Difference equations for a class of twice-iterated Delta<sub>h</sub>-Appell sequences of polynomials, *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fıs. Natur. Ser. A Mat. (RACSAM)*, 113, 1851–1871.
- Srivastava H M, Saad K M, 2020, A comparative study of the fractional-order clock chemical model, *Mathematics*, 8, Article ID 1436.

- Srivastava H M, Saad K M, 2020, Some new and modified fractional analysis of the time-fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson system, *Chaos*, 30, Article ID 113114.
- Suwan I, Abdeljawad T, Jarad F, 2018, Monotonicity analysis for nabla h-discrete fractional Atangana-Baleanu differences, *Chaos, Solitons & Fractals*, 117, 50–59.
- Wu G C, Baleanu D, 2015, Discrete chaos in fractional delayed logistic maps, *Nonlinear Dynamics*, 80(4), 1697–1703.
- Wu G C, Baleanu D, Luo W H, 2017, Lyapunov functions for Riemann-Liouville-like fractional difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 314, 228–236.
- Zhu Y, 2015a, Existence and uniqueness of the solution to uncertain fractional differential equation, *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, 3, 1–11.
- Zhu Y, 2015b, Uncertain fractional differential equations and an interest rate model, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(15), 3359–3368.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Eda Elif NİZAMOĞLU

Doğum Yeri ve Tarihi : Afyonkarahisar/Merkez, 23.11.1999

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Telefon / e-posta) : 0 553 426 45 11, edaelifn@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Fatih Anadolu Lisesi (2013 – 2017)

Lisans : Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2018 – 2022)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2023 – 2026)