KÜME OPTİMİZASYONU İÇİN SIRALAMA BAĞINTISI VE ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU ERÇOLAK

Danışman
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

İkinci Danışman
Doç. Dr. Emrah KARAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2026

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KÜME OPTİMİZASYONU İÇİN SIRALAMA BAĞINTISI VE ÖZELLİKLERİ

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU ERÇOLAK

Danışman

Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

İkinci Danışman

Doç. Dr. Emrah KARAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2026

TEZ ONAY SAYFASI

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU ERÇOLAK tarafından hazırlanan "Tez Onay Sayfası" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 17 /07/2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Anabilim Dalı Adı Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

İkinci Danışman **:** Doç. Dr. Emrah KARAMAN

Başkan **:** Prof. Dr. Özkan ÖCAL
Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi …… İmza ……

Üye **:** Prof. Dr Umur Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi …İmza

Üye **:** Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi .. İmza.

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Tuğba YALÇIN UZUN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi …İmza

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Mustafa SOYERTEM
Uşak Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi…

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... /..... /..... tarih ve
……. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

…….
Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

17 / 07 / 2026

İmza

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU ERÇOLAK

ÖZET

Doktora Tezi

KÜME OPTİMİZASYONU İÇİN SIRALAMA BAĞINTISI
VE ÖZELLİKLERİ

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU ERÇOLAK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
İkinci Danışman: Doç. Dr. Emrah KARAMAN

Bu araştırmada, l-fark kullanılarak kümeler için yeni bir ön sıralama bağıntısı tanımlanmıştır. Bu sıralama bağıntısının temel özellikleri incelendikten sonra, yeni sıralama bağıntısı ile literatürde bilinen sıralama bağıntıları arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Ayrıca bu sıralama bağıntısının vektör uzaylarında kullanılan sıralama bağıntısının bir genellemesi olduğu gösterilmiştir. Küme yaklaşımı kullanılarak küme değerli optimizasyonların çözümleri yeni tanımlanan sıralama bağıntısına göre incelenmiştir.

2026, vi + 30 sayfa

Anahtar Kelimeler: Küme değerli dönüşüm, Küme optimizasyonu, Vektör optimizasyonu, Sıralama bağıntısı.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ORDER RELATION FOR SET OPTIMIZATION AND PROPERTIES

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU ERÇOLAK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Mustafa Kemal YILDIZ

Co-Supervisor: Assoc. Prof. Emrah KARAMAN

In this research, a new pre-order relation for sets is defined using l-difference. After some basic properties of this order relation are given, several relations are obtained between the new order relation and well known order relations in the literature. In addition, it is demonstrated that this ordering relation is a generalization of the ordering relation used in vector spaces. Solutions of set-valued optimizations using the set approach are examined according to the newly defined ordering relation.

2026, vi + 30 pages

Keywords: Set-valued map, Set optimization, Vector optimization, Order relation.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan ve her türlü desteklerini benden esirgemeyen değerli danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ ve Doç. Dr. Emrah KARAMAN'a, değerli hocalarım Dr. Öğretim üyesi Mustafa SOYERTEM ve Dr. Öğretim Üyesi Tuğba YALÇIN UZUN'a her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca her zaman maddi ve manevi desteklerinden dolayı sevgili eşim Yasin ERÇOLAK, kızım Beren ERÇOLAK ve aileme teşekkür ederim.

Hande BÜYÜKÇAVUŞOĞLU ERÇOLAK
Afyonkarahisar 2026

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
2. LİTERATÜR BİLGİLERİ 3
2.1 Temel Tanım ve Teoremler 3
2.2 Konveks Fonksiyonlar 5
2.3 Vektör ve Küme Sıralama Bağıntıları 7
3. MATERYAL ve METOT 16
3.1 Küme Ailesi Üzerinde Bir Ön Sıralama Bağıntısı 16
4. TARTIŞMA ve SONUÇ 25
5. KAYNAKLAR 27
ÖZGEÇMİŞ 30

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu gerçel vektörler kümesi
$\mathbb{B}_n$	$\mathbb{R}^n$'nin açık birim yuvarı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{B}}_n$	$\mathbb{R}^n$'nin kapalı birim yuvarı
$B_n(x,\varepsilon)$	x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}_n(x,\varepsilon)$	x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı alt kümelerinin ailesi
$C(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi
$int(P)$	P kümesinin topolojik içi
$conv(P)$	P kümesinin konveks zarfı
$cl(P)$	P kümesinin kapanışı
(P)	Optimizasyon problemi
$(p-KDOP)$	p sıralamasına göre verilen küme değerli optimizasyon problemi
$\mathbb{R}^n_+$	$\mathbb{R}^n$ uzayının tüm bileşenleri pozitif veya 0 olan alt kümesi
$0_{\mathbb{R}^n}$	$\mathbb{R}^n$ uzayınınüm bileşenleri 0 olan elemanı
$\preccurlyeq$	K konisine göre sıralama bağıntısı
$\preccurlyeq^s$	$s-$sıralama bağıntısı
$\preccurlyeq^{m_1}$	m_1-sıralama bağıntısı
$\preccurlyeq^{m_2}$	m_2-sıralama bağıntısı
$\preccurlyeq^l$	$l-$sıralama bağıntısı
$\preccurlyeq^{l_1}$	l_1-sıralama bağıntısı
$\preccurlyeq^*$	Kümeler üzerinde herhangi bir sıralama bağıntısı
$\preccurlyeq^p$	$p-$sıralama bağıntısı
$-_l$	l fark
$-_m$	Minkowski (Pontryagin) fark
$domf$	f fonksiyonunun tanım kümesi
$epif$	f fonksiyonunun grafiküstü kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1 Örnek 2.3.6'daki vektör değerli fonksiyonun görüntü kümeleri ve sıralama konisi 11

Şekil 3.1 $P = \left\{(x,y) : y = \frac{1}{x}, x > 0\right\}$ ve $R = \{(x,y) : x \geq 0, y = 0\}$ kümeleri.....21

Şekil 3.2 $P = \overline{B}((1,1),1)$ ve $R = \text{conv}\{(0,0),(0,2),(2,2),(2,0)\}$ kümeleri…….22

Şekil 3.3 $P = \text{conv}\{(3,1),(3,2)\}$ ve $R = \text{conv}\{(1,1),(3,1)\}$ kümeleri…….23

Şekil 3.4 Örnek 3.1.16'daki F küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri..... 24

Şekil 3.5 Örnek 3.1.17'deki F küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri..... 25

1. GİRİŞ

Optimizasyon problemlerinde amaçlanan, seçenekler arasından en iyiyi bulmaktır. Bu tür problemler başta matematik olmak üzere mühendislik, ekonomi, bilgisayar bilimleri ve işletme gibi birçok alanda çalışan araştırmacıların ortak problemidir.

Problemin yapısına göre optimizasyon problemleri alt sınıflara ayrılmaktadır. Seçenekler reel sayılar ile birebir eşlendiğinde, karşılaşılan problem matematiksel olarak reel değerli bir fonksiyon yardımıyla karakterize edilebilir. Bu tür problemler skaler veya reel değerli optimizasyon olarak adlandırılır. Bu fonksiyon ve kısıtlar konveks olduğunda optimizasyon problemi konveks optimizasyon problemi olarak adlandırılır. Karşılaşılan problemi matematiksel olarak karakterize etmek için vektör değerli fonksiyonlardan yararlanılır ise bu fonksiyonun en iyi noktalarını bulmak için kullanılan optimizasyon problemleri vektör değerli optimizasyon olarak adlandırılır.

Seçeneklerin her biri, içinde birden fazla ve bağımsız veri bulunduruyorsa bu tür problemleri karakterize etmek için küme değerli optimizasyon problemlerinden yararlanılır. Örneğin, bir ligde yer alan takımlardan en iyi takımı belirlemek için küme değerli optimizasyondan yararlanılabilir.

Küme değerli optimizasyon son zamanlarda çok ilgi görmektedir. Bunun sebeplerinden bir tanesi uygulama alanlarının geniş olmasından kaynaklanır. Bir diğer sebebi ise küme değerli dönüşümlerin vektör ve skaler değerli fonksiyonların bir genişlemesi olduğundan küme değerli optimizasyon için elde edilen sonuçların vektör ve skaler optimizasyon problemlerine uygulanabilmesidir. Küme değerli optimizasyonu çözmek için en çok kullanılan iki tip yaklaşım vardır. Bunlar vektör yaklaşımı ve küme yaklaşımıdır. Uygulama alanlarına bakıldığında küme yaklaşımı vektör yaklaşımından daha anlamlı sonuçlar vermektedir. Dolayısıyla küme değerli optimizasyonun küme yaklaşımına göre çözümlerinin bulunması çok ilgi görmektedir. Problemi vektör yaklaşımına göre çözmek için görüntü kümeleri üzerinde vektör sıralaması kullanılır. Küme yaklaşımına göre problemi çözmek için ise kümeler üzerinde tanımlanan sıralama bağıntısına ihtiyaç duyulmaktadır. Küme değerli dönüşümün görüntülerinin arasından istenilen en iyi kümeyi sıralama bağıntısı ile bulduktan sonra bulunan

görüntünün ters görüntüsü küme yaklaşımına göre problemin çözümünü vermektedir.
Bu çalışmada küme değerli optimizasyonun küme yaklaşımına göre çözümlerinin bulunması için yeni sıralama bağıntısının bulunması hedeflenmektedir. Bu sayede küme değerli optimizasyonun çözümüne ihtiyaç duyan alanlarda çalışan araştırmacılara katkı sağlanacaktır.
İlk olarak Kuroiwa, küme değerli optimizasyonun sıralama konisine dayalı kümeler arasındaki sıralamaları kullanarak çözülebileceğini ileri sürdü (Kuroiwa, Tanaka ve Ha 1997, Kuroiwa 1998). Kuroiwa küme yaklaşımına göre küme değerli optimizasyon ($KDOP$)'nun çözümlerini elde etti. Daha sonra bazı araştırmacılar küme değerli optimizasyon için yeni sıralama bağıntıları elde ettiler (Jahn ve Ha 2011, Karaman vd. 2018, Karaman 2021).

Bu çalışmanın geri kalanında küme yaklaşımına göre küme değerli optimizasyonlar ele alınacaktır. Küme değerli optimizasyonların çözüm kümesini kısıt kümesinin elemanları tek tek deneyerek bulmak zor zordur. $KDOP$'da optimallik koşulları elde etmek veya problemi daha kolay çözebilmek için kullanılan yöntemler vardır. Bu yöntemlerden bazıları vektörizasyon (Jahn 2013, Karaman 2018), skalarizasyon (Karaman vd. 2018, Hernández ve Rodríguez-Marín 2007, Gutiérrez vd. 2015, Ansari ve Yao 2012), yönlü türev (Jahn 2015, Karaman vd. 2020, Pilecka 2014), subdiferansiyel (Zhai vd. 2025, Karaman vd. 2021), gömme dönüşümü (Karaman 2019, Kuroiwa 2008)'dür. İyi bilinen skalarizasyon fonksiyonları Gerstewitz ve Hiriart-Urruty'nin yönlü fonksiyonu ve bunların genellemeleridir (Karaman 2018, Hernández ve Rodríguez-Marín 2007, Gutiérrez vd. 2015, Ansari vd. 2020, Khusboo Lalitha 2019). Bu yöntemler ve daha fazlası referanslarda ve (Ansari ve Yao 2012, Khan vd. 2015)'de bulunabilir.
Bu çalışmada, sıralama konisine dayalı kümeler arasında bir sıralama bağıntısı tanımlanmıştır. Bu sıralama bağıntısı ile literatürde kullanılan sıralama bağıntıları arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Ayrıca, küme değerli optimizasyonların bu sıralama bağıntısına göre çözümleri elde edilmiştir. Tanımlanan sıralama bağıntısı vektörler üzerinde tanımlanan sıralama bağıntısı olduğu gösterilmiştir. Bu sıralama bağıntısı küme değerli optimizasyon problemleri üzerinde çalışan ve bu tür problemleri çözümek için kullanılabilir.

2. LİTERATÜR BİLGİLERİ

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde bazı temel gösterimler ve tanımlar sunulmaktadır.

$P, R \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için P ve R kümelerinin toplamı

$$P + R \coloneqq \{a + b : \ a \in P, b \in R\} = \bigcup_{b \in R} (P + b)$$

ve skalerle çarpma işlemi

$$\lambda P \coloneqq \{\lambda a : a \in P\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.1 $x_{1,}, x_2 \in \mathbb{R}^n$ noktaları arasındaki doğru parçası

$$\{kx_1 + k_2x_2 : k_1, k_2 \geq 0, k_1 + k_2 = 1\}$$

kümesi ile ifade edilir.

Tanım 2.1.2 Herhangi iki nokta arasındaki doğru parçasını kapsayan, yani

$$x_{1,}, x_2 \in P, \ k_1, k_2 \geq 0, \ k_1 + k_2 = 1 \text{ için } k_1x_1 + k_2x_2 \in P$$

gerçekleyen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.1.3 $\mathbb{R}^n$ uzayındaki $x_{1,}, \dots, x_{m,}$ vektörlerinin afin kombinasyonu $k_1, \dots, k_m$ skalerler ve $k_1 + \cdots + k_m = 1$ olmak üzere $k_1x_1 + \cdots + k_mx_m$ şeklindedir. Özel olarak herhangi iki elemanın afin kombinasyonunu bulunduran kümeye afin küme denir. Yani

$$\forall \ x_{1,}, x_2 \in P, \ k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \ k_1 + k_2 = 1 \text{ için } k_1x_1 + k_2x_2 \in P$$

gerçekleniyorsa P kümesi bir afin kümedir. Boş küme bir afin kümedir. Tek elemanlı

kümeler, doğrular, düzlemler afin kümelerdir.

Tüm afin kümeler konvekslik koşulunu sağladığından tüm alt uzaylar konveks kümelerdir. $\emptyset$ de bir konveks küme olarak kabul edilir.

Tanım 2.1.4 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa f ye bir afin dönüşüm denir.

Lemma 2.1.5 (Webster 1994)

(i) $P_1, \ldots, P_m \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks kümeler $k_1, \ldots, k_m$ skalerler olmak üzere $k_1P_1 + \cdots + k_mP_m$ kümesi de konvekstir.

(ii) Herhangi sayıda konveks kümenin kesişimi yine konveks kümedir.

(iii) Konveks P kümesinin içi ve kapanışı da konveks kümelerdir.

(iv) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afin dönüşüm olmak üzere $P \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks küme ise $f(P)$ görüntüsü de bir konveks kümedir. Ayrıca $R \subseteq \mathbb{R}^m$ konveks küme ise $f^{-1}(R)$ de konveks bir kümedir.

$k_1, \ldots, k_m \geq 0, \quad k_1 + \cdots + k_m = 1$ olmak üzere $x = k_1x_1 + \cdots + k_mx_m$ toplamına $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ noktalarının konveks kombinasyonu denir. Bu tanım yardımıyla konveks kümelerin önemli bir özelliği aşağıdaki lemma ile verilebilir.

Lemma 2.1.6 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks küme ve $x_1, \ldots, x_m \in P$ ise bu noktaların her konveks kombinasyonu P kümesine aittir.

İspat. Tümevarımla $x_1, \ldots, x_m \in P$ noktalarının konveks kombinasyonunun kümeye ait olduğunu göstermek için P konveks küme tanımından $m = 2$ için doğru olup $m = k$ için iddianın doğruluğunu kabul edelim. $x = k_1x_1 + \cdots + k_{t+1}x_{t+1}$ olsun. $k_1 + \cdots + k_{t+1} = 1$ için $k_1, \ldots, k_{t+1} \geq 0$ değerlerinden en azından biri birden küçük olacağı için $\lambda_{k+1} < 1$ olsun. $\lambda = k_1 + \cdots + k_t = 1 - k_{t+1} > 0$ olmak üzere $y = \frac{k_1}{k}x_1 + \cdots + \frac{k_t}{k}x_t$ ise iddia $m = k$ için doğru olduğundan $y \in P$ bulunur. $x = ky + k_{t+1}x_{t+1}$ olacağından $x \in P$ olur. Dolayısıyla iddia $m = t + 1$ içinde doğru olduğundan istenen elde edilir.

Tanım 2.1.6 Bir $P \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine P kümesinin konveks zarfı denir ve $conv(P)$ ile gösterilir.

Lemma 2.1.5 nedeniyle $conv(P)$ kümesi de konvekstir. İki farklı noktanın konveks zarfı bu iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır.

Lemma 2.1.7 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks zarfı olan $conv(P)$ kümesi P kümesine ait olan noktaların tüm konveks kombinasyonlarını içerir.

İspat. R kümesi ile P kümesinin noktalarının tüm konveks kombinasyonlarının kümesini gösterelim. $conv(P) = R$ olduğunu göstermek lemmanın ispatı için yeterli olacaktır. $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$ ve $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ olmak üzere $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in P$ için $x = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda \alpha_m \in R$ olsun. $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in conv(P)$ ve $conv(P)$ kümesi konveks olduğundan Lemma 2.1.6 nedeniyle $x \in conv(P)$ olup $R \subseteq conv(P)$ elde edilir. R kümesinin tanımından dolayı konveksliği kolayca görülür. Ayrıca $P \subseteq R$ olduğundan $conv(P) \subseteq R$ olup $conv(P) = R$ bulunur.

2.2 Konveks Fonksiyonlar

$f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ fonksiyonunun tanım kümesi

$$domf = \{x : f(x) < +\infty\}$$

ile gösterilir. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x) \leq \alpha$ gerçekleyen tüm $(x, a) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nokta çiftlerinden oluşan kümeye f fonksiyonunun grafiküstü (epigrafı) kümesi denir ve

$$epif = \{(x, a) : f(x) \leq \alpha\}$$

ile verilir. Burada $x \in domf$ olduğundan $(x, a) \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktası $epif$ kümesine ait olur. Fakat $f(x) = +\infty$ ise $f(x) \leq \alpha$ gerçekleyen α noktası yoktur. f fonksiyonunun grafiküstü kümesi ile f fonksiyonu belirlenebilir, yani

$$f(x) = \inf_{\alpha}\{\alpha : (x,a) \in epif\} \qquad (1.1)$$

dir. (1.1) formülünden anlaşılacağı üzere $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayındaki kümeler ile $\mathbb{R}^n$ uzayındaki fonksiyonlar arasında yakın bir ilişki vardır.

Tanım 2.2.1 f fonksiyonunun $epif$ kümesi konveks ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.2.2 $-\infty$ değerini almayan ve özdeş olarak da $+\infty$ değerine eşit olmayan bir f fonksiyonuna proper ya da has fonksiyon denir.

Bir f has fonksiyonu için $domf \neq \emptyset$ dır. Böylece $x \in domf$ için $f(x)$ sonlu bir değer alır.

Lemma 2.2.3 f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul her $x_1,\ x_2$ için $k_1 \geq 0$ ve $k_2 \geq 0,\ k_1 + k_2 = 1$ olmak üzere

$$f(k_1x_1 + k_2x_2) \leq k_1f(x_1) + k_2f(x_2)$$

olmasıdır.

İspat. f has konveks fonksiyon olsun. $k_1, k_2 \geq 0, k_1 + k_2 = 1$ olmak üzere $(x_1, \alpha_1) \in epif,\ (x_2, \alpha_2) \in epif$ ise $f(x_1) \leq \alpha_1$ ve ise $f(x_2) \leq \alpha_2$ yazılır ve Tanım 2.2.1 gereği $epif$ kümesi konveks olduğundan $k_1(x_1, \alpha_1) + k_2(x_2, \alpha_2) \in epif$ tir. Yani

$$f(k_1x_1 + k_2x_2) \leq k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

eşitsizliği gerçeklenir. Özel olarak $\alpha_1 = f(x_1)$ ve $\alpha_2 = f(x_2)$ alınırsa $k_1, k_2 \geq 0$ ve $k_1 + k_2 = 1$ için

$$f(k_1x_1 + k_2x_2) \leq k_1f(x_1) + k_2f(x_2)$$

olup istenen eşitsizlik elde edilir. Tersine $k_1, k_2 \geq 0, k_1 + k_2 = 1$ olmak üzere

$f(k_1x_1 + k_2x_2) \leq k_1f(x_1) + k_2f(x_2)$ sağlansın. $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2) \in epif$ olsun.

$$f(k_1x_1 + k_2x_2) \leq k_1f(x_1) + k_2f(x_2) \leq k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

olduğundan $(k_1x_1 + k_2x_2, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) \in epif$ olur bu ise $epif$ kümesinin dolayısıyla da f fonksiyonunun konveks olduğunu gösterir.

Tanım 2.2.4 f has bir fonksiyon ve $k_1, k_2 \geq 0$ ve $k_1 + k_2 = 1$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(k_1x_1 + k_2x_2) < k_1f(x_1) + k_2f(x_2)$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa f fonksiyonuna kesin konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.2.5 $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ uzayında tanımlı f fonksiyonu için $\alpha \leq f(x)$ gerçekleyen tüm $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktalarından oluşan küme f fonksiyonunun grafikaltı kümesidir ve

$$hyp\ f = \{(x, \alpha): \alpha \leq f(x)\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2.6 f fonksiyonunun $hyp\ f$ kümesi konveks ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Eşdeğer olarak her x_1, x_2 için $k_1 \geq 0$ ve $k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2 = 1$ olmak üzere

$$f(k_1x_1 + k_2x_2) \geq k_1f(x_1) + k_2f(x_2)$$

ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

2.3 Vektör ve Küme Sıralama Bağıntıları

Bu kısımda vektörler üzerinde tanımlı olan koni yardımıyla tanımlanan sıralama

bağıntısı ve kümeler üzerindeki sıralama bağıntıları verilecektir.

Tanım 2.3.1 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi ve $k > 0$ verilsin. Her $x \in K$ için $kx \in K$ oluyorsa K'ya $\mathbb{R}^n$'de bir koni denir.

K konisi, $K + K = K$ ise konveks, $K \cap (-K) = \{0\}$ ise sivri (pointed) olarak adlandırılır. Bu çalışmada K'nın kapalı, konveks, sivri ve içi boştan farklı koni olduğu varsayılacaktır.

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Benzer şekilde $C(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$'nin boş olmayan kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi olsun. Herhangi bir $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ kümesinin topolojik iç kısmı ve konveks zarfı sırasıyla $int(P)$ ve $convP$ ile gösterilir. $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t \geq 0$ olsun. $\mathbb{B}(x,t)$, merkezi x noktasında olan t yarıçaplı açık komşuluk ve $\overline{\mathbb{B}}(x,t)$ merkezi x noktasında olan t yarıçaplı kapalı komşuluk olarak alınacak ve $P \subseteq \mathbb{B}(0_{\mathbb{R}^n}, t) + K$ olacak şekilde pozitif bir t sayısı varsa P'ye K-sınırlıdır denir. Bir kümenin sınırlı olması durumunda K-sınırlı olduğu açıktır ve $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \geq 0, i = 1,2, \dots, n\}$'dir.

$\mathbb{R}^n$'de K konisi ile sıralama bağıntısının tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.2 $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$'de bir K konisi verilsin. K konisi yardımıyla

(i) $\leq_K$ bağıntısı

$$x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K,$$

(ii) $<_K$ bağıntısı ise

$$x <_K y \Leftrightarrow y - x \in int(K)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.3 $\mathbb{R}^n$, K konveks konisi ile sıralı, $\mathcal{A}$, $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi, $\preccurlyeq$ bağıntısı kümeler üzerinde herhangi bir sıralama bağıntısı ve $A, B, D \in \mathcal{A}$ ve $k \geq 0$ bir skaler olsun.

(i) Her $A \in \mathcal{A}$ için $A \preccurlyeq A$ ise $\preccurlyeq$ bağıntısı $\mathcal{A}$ üzerinde yansıma özelliğine sahiptir,

(ii) $A \preccurlyeq B$ ve $B \preccurlyeq D$ iken $A \preccurlyeq D$ ise $\preccurlyeq$ bağıntısı $\mathcal{A}$ üzerinde geçişme özelliğine sahiptir,

(iii) $A \preccurlyeq B$ ve $B \preccurlyeq A$ iken $A = B$ ise $\preccurlyeq$ bağıntısı $\mathcal{A}$ üzerinde ters simetrik özelliğine sahiptir,

(iv) $A \preccurlyeq B$ iken $A + D \preccurlyeq B + D$ ise $\preccurlyeq$ bağıntısı $\mathcal{A}$ üzerinde toplama ile uyumludur,

(v) $A \preccurlyeq B$ iken $kA \preccurlyeq kB$ ise $\preccurlyeq$ bağıntısı $\mathcal{A}$ üzerinde negatif olmayan skalerle çarpmaya göre uyumludur veya özelliğine sahiptir,

(vi) $\preccurlyeq$ bağıntısı $\mathcal{A}$ ailesi üzerinde yansıma ve geçişme özelliklerine sahip oluyorsa bu bağıntıya önsıralama bağıntısı,

(vii) $\preccurlyeq$ bağıntısı $\mathcal{A}$ ailesi üzerinde yansıma, geçişme ve ters simetrik özelliklerine sahip oluyorsa bu bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı denir.

$\mathbb{R}^n$'de $0_{\mathbb{R}^n}$'yi bulunduran sivri ve konveks K konisinin ürettiği sıralama bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Tersine, bir kısmi sıralama bağıntısı verildiğinde sıralama bağıntısının belirttiği küme konveks ve sivri bir konidir.

Ekstremum kümeleri belirlemek için kullanılan sıralama bağıntısı önsıralama bağıntısı olduğunda aşağıdaki tanım kullanılır.

Tanım 2.3.4 $\mathbb{R}^n$, K konveks konisi ile sıralı, $\mathcal{A}$, $\mathbb{R}^n$ 'nin boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi, $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ve $\preccurlyeq$, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir önsıralama bağıntısı (yansıyan, geçişken) olsun.

(i) $A \preccurlyeq \bar{A}$ olan her $A \in \mathcal{A}$ için $\bar{A} \preccurlyeq A$ oluyorsa $\bar{A}$ 'ye $\preccurlyeq$ bağıntısına göre $\mathcal{A}$'nın bir minimal elemanı,

(ii) $\bar{A} \preccurlyeq A$ olan her $A \in \mathcal{A}$ için $A \preccurlyeq \bar{A}$ oluyorsa $\bar{A}$ 'ye $\preccurlyeq$ bağıntısına göre $\mathcal{A}$'nın bir maksimal elemanı,

(iii) $A \prec \bar{A}$ olan her $A \in \mathcal{A}$ için $\bar{A} \prec A$ oluyorsa $\bar{A}$ 'ye $\mathcal{A}$'nın bir zayıf minimal elemanı,
(iv) $\bar{A} \prec A$ olan her $A \in \mathcal{A}$ için $A \prec \bar{A}$ oluyorsa $\bar{A}$ 'ye $\mathcal{A}$'nın bir zayıf maksimal elemanı denir.

Ekstremum kümeleri belirlemek için kullanılan sıralama bağıntısı kısmi sıralama bağıntısı olduğunda ise aşağıdaki tanım kullanılır.

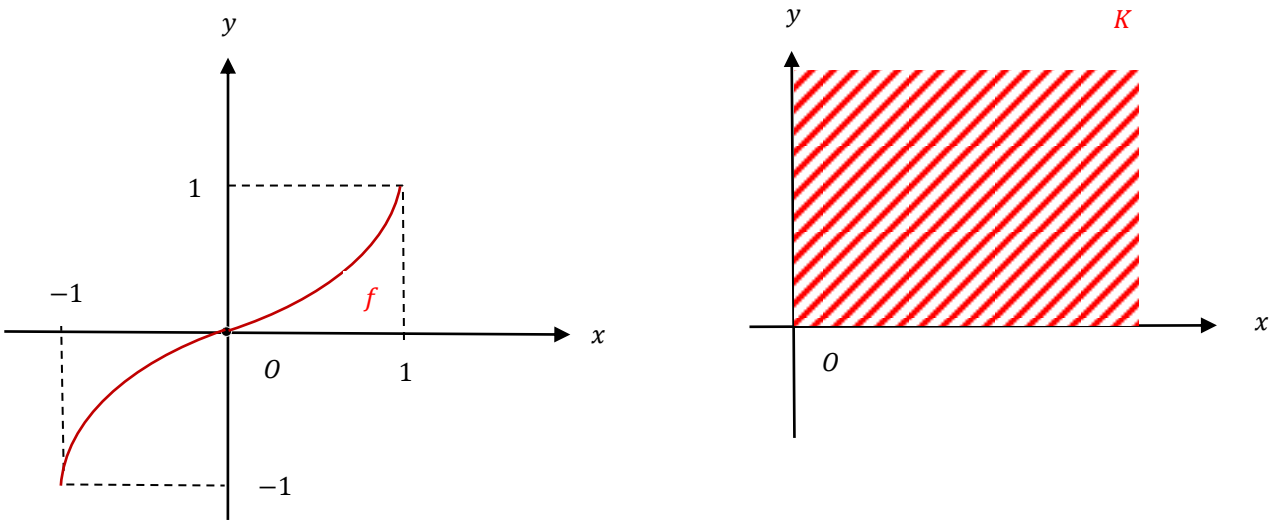
Tanım 2.3.5 $\mathbb{R}^n$, K konveks konisi ile sıralı, $\mathcal{A}$, $\mathbb{R}^n$'nin boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi, $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ve $\preccurlyeq$, $\mathbb{R}^n$'nin alt kümeleri üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı (yansıyan, geçişken, anti-simetrik) olsun.
(i) $A \preccurlyeq \bar{A}$ olacak şeklide $\bar{A}$ 'den farklı bir $A \in \mathcal{A}$ yoksa $\bar{A}$'ye $\mathcal{A}$'nın bir minimal elemanı,
(ii) $\bar{A} \preccurlyeq A$ olacak şekilde $\bar{A}$'den farklı bir $A \in \mathcal{A}$ yoksa $\bar{A}$'ye $\mathcal{A}$'nın bir maksimal elemanı,
(iii) $A \prec \bar{A}$ olacak şeklide $\bar{A}$ 'den farklı bir $A \in \mathcal{A}$ yoksa $\bar{A}$'ye $\mathcal{A}$'nın bir zayıf minimal elemanı,
(iv) $\bar{A} \prec A$ olacak şekilde $\bar{A}$'den farklı bir $A \in \mathcal{A}$ yoksa $\bar{A}$'ye $\mathcal{A}$'nın bir zayıf maksimal elemanı denir.

Vektör değerli bir fonksiyonun ekstremum değerinin nasıl bulunacağı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.3.6 $f: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ vektör değerli fonksiyonu her $x \in [-1,1]$ için $f(x) = (x, x^3)$ şeklinde tanımlansın. O halde

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in [-1,1] \end{cases}$$

Vektör optimizasyon problemini ele alalım. Sıralama konisi $K = \mathbb{R}^2_+$ olsun. Sıralama konisi konveks ve sivri bir koni olduğu için sıralama bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Dolayısıyla problemi çözerken kısmi sıralama bağıntısı için verilen minimal eleman tanımı kullanılacaktır. f fonksiyonunun görüntü kümeleri ve sıralama konisi Şekil 2.1.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Örnek 2.3.6'daki vektör değerli fonksiyonun görüntü kümeleri ve sıralama konisi

$(-1,-1)$ noktası görüntü kümesinin minimal elemanıdır. Çünkü K konisine göre $f(x) \leq_K (-1,-1)$ olacak şekilde bir $x \in (-1,1]$ yoktur. Olsaydı $(-1,-1) - f(x) \in K$ olmalıydı. Bu durumda $(-1-x, -1-x^3) \in K$ olması gerekirdi. Bu koşulu sağlayan sadece $x = -1$ vardır. Sonuç olarak, $x = -1$ problemin çözümüdür. $x = -1$'den başka çözümünün olmadığını gösterelim. Kabul edelim ki bir $x_0 \in (-1,1]$ problemin çözümü olsun. O halde $f(x) \leq_K f(x_0)$ olacak şekilde bir $x \in [-1,1] \setminus \{x_0\}$ elemanının olmaması gerekir. Fakat, $f(-1) \leq_K f(x_0)$'dir. O halde x_0 problemin bir çözümü değildir. Problemin tek çözümü vardır.

Tanım 2.3.7 $P, R \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun.

$$P -_m R := \{x \in \mathbb{R}^n : x + R \subseteq P\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye P ve R kümelerinin Minkowski (Pontryagin) farkı denir ve

$$P -_m R := \bigcap_{r \in R} (P - r)$$

dir.

R sınırlı, S kapalı ve konveks kümeler olmak üzere $P, R, S \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu kümeler üzerinde sadeleştirme işlemi (cancellation law)

$$P + R \subseteq S + R \Rightarrow P \subseteq S$$

şeklindedir. Aynı zamanda

$$P + R = S + R \Rightarrow P = S$$

dır.

$P, R, S \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda, \mu \geq 0$ için aşağıdaki özellikler verilebilir (Pallaschke ve Urbanski 2002, Schneider 1993).

(i) $P \subseteq R \Rightarrow P -_m S \subseteq R -_m S$

(ii) $P \subseteq R \Rightarrow S -_m R \subseteq S -_m P$

(iii) $(P \cup R) + S = (P + S) \cup (R + S)$

(iv) $(P \cap R) + S \subseteq (P + S) \cap (R + S)$

(v) $\lambda P + \lambda R = \lambda(P + R)$

(vi) $(\lambda + \mu)P \subseteq \lambda P + \mu P$

(vii) $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P$ (P konveks küme)

$(viii)$ $P \subseteq (P + R) -_m R$

(ix) $(P -_m R) + R \subseteq P$

(x) $(P -_m R) + S \subseteq (P + S) -_m R$

(xi) $(P -_m R) -_m S = P -_m (R + S)$

(xii) $P -_m R \subseteq S \Leftrightarrow P \subseteq S -_m R$

$(xiii)$ $P \subseteq (P + R) -_m R$

(xiv) $P + R \subseteq S \Leftrightarrow P \subseteq S -_m R$

(xv) $(P + K) -_m R = P -_m R.$

Eğer $P, R \in C(\mathbb{R}^n)$ ise o zaman,

(i) $(P+R)-_m R = P$

(ii) $cl(P+R) \subseteq cl(S+R) \Rightarrow P \subseteq S$

(iii) $P \cup R$ konveks ise $(P \cap R) + S = (P+S) \cap (R+S)$

(iv) $P \cup R$ konveks ise $(P \cup R) + (P \cap R) = P + R$

Kümeler üzerinde kullanılan sıralama bağıntıları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.8 K, $\mathbb{R}^n$'de sivri, konveks koni ve $\emptyset \neq P, R \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere kümeler üzerinde aşağıdaki sıralama bağıntıları vardır: (Kuroiwa 2001, Jahn ve Ha 2011, Karaman vd. 2018, Karaman vd. 2021, Karaman 2018, Karaman vd. 2020, Khan vd. 2015, Young 1931, Nishnianidze 1984, Kuroiwa vd. 1997, Karaman 2021)

1. $P \preccurlyeq^1 R \Leftrightarrow \forall p \in P, \forall r \in R \; için \; p \leq_K r,$
2. $P \preccurlyeq^2 R \Leftrightarrow \exists p \in P \; öyle \; ki \; \forall r \in R \; için \; p \leq_K r,$
3. $P \preccurlyeq^3 R \Leftrightarrow \forall r \in R \; için \; \exists p \in P \; öyle \; ki \; P \leq_K r,$
4. $P \preccurlyeq^4 R \Leftrightarrow \exists r \in R \; öyle \; ki \; \forall p \in P \; için \; p \leq_K r,$
5. $P \preccurlyeq^5 R \Leftrightarrow \forall p \in P \; için \; \exists r \in R \; öyle \; ki \; p \leq_K r,$
6. $P \preccurlyeq^6 R \Leftrightarrow \exists p \in P \; ve \; \exists r \in R \; için \; p \leq_K r,$
7. $P \preccurlyeq^s R \Leftrightarrow P \preccurlyeq^3 R \; ve \; P \preccurlyeq^5 R,$
8. $P \preccurlyeq_m R \Leftrightarrow minP \preccurlyeq^s minR \; ve \; maksP \preccurlyeq^s maksR$
9. $P \preccurlyeq^{m_1} R \Leftrightarrow (R-_m P) \cap K \neq \emptyset,$
10. $P \preccurlyeq^{m_2} R \Leftrightarrow (P-_m R) \cap (-K) \neq \emptyset.$

Tanım 2.3.9 (Karaman 2021, Pilecka 2014) $P, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$P-_l R := \{x \in \mathbb{R}^n : x + R \subseteq P + K\}$$

veya

$$\begin{aligned} P-_l R &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x + R \subseteq P + K\} \\ &= (P+K)-_m R \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan kümeye P ve R kümelerinin l-farkı denir.

Önerme 2.3.10 $P, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda l-farkı aşağıdaki cebirsel özelliklere sahiptir.

$(i)\ x + (P -_l R) = (x + P) -_l R,$

$(ii)\ (P + K) -_l R = P -_l R,$

$(iii)\ (P -_l R) + K = P -_l R,$

$(iv)\ P -_l \{0_{\mathbb{R}^n}\} = P + K,$

$(v)\ R -_l P = R -_l (P + K).$

İspat.

(i) $y \in x + (P -_l R)$ olsun. O halde, $y - x \in P -_l R$ dir. Dolayısıyla $y - x + R \subseteq P + K$ olur. $y + R \subseteq x + P + K$ ifadesi $y \in (x + P) -_l R$ dır. Diğer yön için $y \in (x + P) -_l R$ olsun. Bu da $y + R \subseteq x + P + K$ dir. Buradan, $y - x + R \subseteq P + K$ dır. $y - x \in P -_l R$ ifadesi $y \in x + P -_l R$ dır. Bu nedenle, $x + P -_l R = (x + P) -_l R$ elde edilir.

(ii) $y \in (P + K) -_l R$ olsun. O halde $y + R \subseteq P + K + K = P + K$ dır. Buradan $y + R \subseteq P + K$ dır. Yani $y \in P -_l R$ dir. Öte yandan, $x \in P -_l R$ olsun. O halde $x + R \subseteq P + K$ ve $x + R \subseteq P + K + K$ dır. Yani $x \in (P + K) -_l R$ dir.

$$
\begin{aligned}
(iii)\ (P -_l R) + K &= \{x + k : x + R \subseteq P + K, k \in K\} \\
&= \{u : u - k + R \subseteq P + K, k \in K\} \\
&= \{u : u + R \subseteq P + K + k = P + K\} \\
&= P -_l R
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(iv)\ P -_l \{0_{\mathbb{R}^n}\} &= \{x : x + 0_{\mathbb{R}^n} \subseteq P + K\} \\
&= \{x : x \in P + K\} \\
&= P + K.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(v)\ R -_l P &= \{x : x + P \subseteq R + K\} \\
&= \{x : x + P + K \subseteq R + K + K = R + K\} \\
&= \{x : x + P + K \subseteq R + K\} \\
&= R -_l (P + K).
\end{aligned}
$$

Küme değerli optimizasyonda ve kümeler üzerinde yaygın olarak kullanılan sıralama bağıntısı, alt küme sıralaması

$$P \preccurlyeq^{l} R :\Leftrightarrow R \subseteq P + K.$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.11 (Karaman 2021) $P, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

(i) l_1 bağıntısı,

$$P \preccurlyeq^{l_1} R :\Leftrightarrow (R -_{l} P) \cap K \neq \emptyset$$

şeklinde,

(ii) kesin l_1 bağıntısı

$$P \prec^{l_1} R :\Leftrightarrow (R -_{l} P) \cap intK \neq \emptyset$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.12 (Karaman vd. 2018) $P, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

(i) m_1 bağıntısı,

$$P \preccurlyeq^{m_1} R :\Leftrightarrow (R -_{m} P) \cap K \neq \emptyset,$$

(ii) kesin m_1 bağıntısı

$$P \prec^{m_1} R :\Leftrightarrow (R -_{m} P) \cap intK \neq \emptyset$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.3.13 (Karaman 2021) $\preccurlyeq^{l_1}$ bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $\preccurlyeq^{l_1}$ bağıntısı toplama ile uyumlu,

(ii) $\preccurlyeq^{l_1}$ bağıntısı pozitif skaler çarpımla uyumlu,

(iii) $\preccurlyeq^{l_1}$ yansıyan,

(iv) $\preccurlyeq^{l_1}$ geçişken,

(v) $\preccurlyeq^{l_1}$ antisimetrik değil,

(vi) $\preccurlyeq^{l_1}$ sıralama bağıntısı $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir ön sıralama bağıntısıdır.

3. MATERYAL ve METOT

3.1 Küme Ailesi Üzerinde Bir Ön Sıralama Bağıntısı

Bu bölümde $l-$ fark kullanılarak kümeler üzerinde bir ön sıralama bağıntısı tamımlanacak ve bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1.1 $P, R \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun.

(i) p bağıntısı

$$P \preccurlyeq^{p} R \Leftrightarrow R -_{l} P \subseteq K$$

şeklinde,

(ii) kesin p bağıntısı

$$P \prec^{p} R \Leftrightarrow R -_{l} P \subseteq intK$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bağıntı l_1 sıralama bağıntısından farklıdır. p bağıntısının avantajlarından biri l_1 bağıntısı ile sıralanamayan elemanları p bağıntısı ile sıralayabilmektir. p bağıntısı daha kısıtlayıcı ve esas olarak kompakt, konveks kümeler için uygun olsa da, küme optimizasyonunda istenen sağlam ve küresel bir baskınlık yapısını sağlar.

$P, R \in P(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere p – bağıntısı için denklik bağıntısı

$$P \sim^p R \Leftrightarrow P \preccurlyeq^p R \text{ ve } R \preccurlyeq^p P.$$

şeklinde tanımlanır. P'nin p – bağıntısına göre denklik sınıfları $[P]^p$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.2 $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde $\preccurlyeq^p$ bağıntısı verilsin ve $P, R, S \in C(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu bağıntı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $\preccurlyeq^p$ toplama ile uyumlu yani $P \preccurlyeq^p R \Rightarrow P + S \preccurlyeq^p R + S$,

(ii) $\preccurlyeq^p$ negatif olmayan skalerle çarpmaya göre uyumlu yani $\lambda \geq 0$ için
$P \preccurlyeq^p R \Rightarrow \lambda P \preccurlyeq^p \lambda R$,

(iii) $P \preccurlyeq^p R \Leftrightarrow P + S \preccurlyeq^p R + S$.

İspat. (i) $P, R, S \in C(\mathbb{R}^n)$ ve $P \preccurlyeq^p R$ olsun. $R -_l P \subseteq K$ dir. Her $x \in R -_l P$ iken $x \in K$ dır. Her $y \in (R + S) -_l (P + S)$ için $y + P + S \subseteq R + S + K$ elde edilir. Kümelerdeki sadeleştirme özelliğinden $y + P \subseteq R + K$ olur. Yani $y \in R -_l P$'dir. $R -_l P \subseteq K$ olduğundan $y \in K$ dır. O halde $(R + S) -_l (P + S) \subseteq K$ elde edilir.
Bu ise $P + S \preccurlyeq^p R + S$ olması demektir. Yani $\preccurlyeq^p$ toplama ile uyumludur.

(ii) $P \preccurlyeq^p R$ olsun. $R -_l P \subseteq K$ dır. Her $x \in R -_l P$ için $x \in K$ olur. Her $\lambda \geq 0$ ve her $x \in \lambda R -_l \lambda P$ için $x + \lambda P \subseteq \lambda R + K = \lambda R + \lambda K$'dır. Buradan her $\lambda \geq 0$ ve $x = \lambda \bar{x}$ olacak şekilde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ var ise $\lambda \bar{x} + \lambda P \subseteq \lambda R + \lambda K$'dır. $\lambda \geq 0$ olduğu için $\bar{x} + P \subseteq R + K$ olur. O halde $\bar{x} \in R -_l P$ elde edilir. $R -_l P \subseteq K$ olduğundan $\bar{x} \in K$ ve $x = \lambda \bar{x}$ olduğu için $x \in K$ dır. Dolayısıyla $\lambda R -_l \lambda P \subseteq K$ ve $\lambda P \preccurlyeq^p \lambda R$ elde edilir. $\preccurlyeq^p$ negatif olmayan skalerle çarpmaya göre uyumludur.

(iii) Sadeleştirme işlemi kullanılarak elde edilir.

Önerme 3.1.3 $C(\mathbb{R}^n)$' de $\preccurlyeq^p$ bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahiptir;

(i) $\preccurlyeq^p$ bağıntısı yansıyandır,

(ii) $\preccurlyeq^p$ bağıntısı geçişkendir,

(iii) $\prec^p$ bağıntısı geçişkendir.

İspat.

(i) $P \in C(\mathbb{R}^n)$ olsun. $P \preccurlyeq^p P \Leftrightarrow P -_l P \subseteq K$ olduğunu gösterelim. $x \in \mathbb{R}^n$ olacak şekilde bir $x \in P -_l P$ seçelim, o zaman $x + P \subseteq P + K$ olur. Kümelerde sadeleştirme özelliğinden $x + P \subseteq P + K$, yani $x \in K$ dır. O halde her $x \in P -_l P$ için $x \in K$ olur. Bu nedenle $P \preccurlyeq^p P$ olur.

(ii) $P, R, S \in C(\mathbb{R}^n)$ ve $P \preccurlyeq^p R$ ve $R \preccurlyeq^p S$ olsun. $R -_l P \subseteq K$ ve $S -_l R \subseteq K$dir. Her $x_1 \in R -_l P$ için $x_1 \in K$ ve her $x_2 \in S -_l R$ için $x_2 \in K$ dır. Buradan x_1 ve x_2 için,

$$\{x_1 : x_1 + P \subseteq R + K\} \tag{3.1}$$

ve

$$\{x_2 : x_2 + R \subseteq S + K\} \tag{3.2}$$

yazılır. $P \preccurlyeq^p S$ nin sağlanmadığını varsayalım. Yani $\{x : x + P \subseteq S + K\} \nsubseteq K$ olsun.

O halde $x + P \subseteq S + K$ ve $x \notin K$ olacak şekilde bir x vardır. $x_1, x_2 \in K$ için (3.1) ve (3.2) den

$$x + P \subseteq x - x_1 + R + K \subseteq x - x_1 - x_2 + S + K \subseteq x + S + K \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) den $x + P \subseteq x + S + K$ ve $x + P \subseteq S + K$ olduğundan, x'in K konisine ait olması gerekir. Yani $x \in K$ dır. Bu varsayımla çelişmektedir. Bu nedende $P \preccurlyeq^p S$ dir.

(iii) İspatı (ii) ye benzer şekilde elde edilebilir.

Uyarı 3.1.4 $C(\mathbb{R}^n)$ de $\preccurlyeq^p$ bağıntısı antisimetrik değildir. Örneğin, $K = \mathbb{R}^2_+$, $P = conv\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)\}$ ve $R = conv\{(1,1),(1.5,1.5),(2,1)\}$ olsun. O zaman $P \preccurlyeq^p R \Leftrightarrow R -_l P \subseteq K$ ve $\{x : x + P \subseteq R + K\} = K \subseteq K$ elde ederiz. Ayrıca $R \preccurlyeq^p P \Leftrightarrow P -_l R \subseteq K$ ve $\{x : x + R \subseteq P + K\} = K \subseteq K$ dır. $P \preccurlyeq^p R$ ve $R \preccurlyeq^p P$ olur. Fakat $P \neq R$ dir. Yani $\preccurlyeq^p$ antisimetrik değildir.

Uyarı 3.1.5 $C(\mathbb{R}^n)$ de $\preccurlyeq^p$ bağıntısı simetrik değildir. Örneğin, $K = \mathbb{R}^2_+$, $P = \{(1,1)\}$ ve $R = \{(2,2)\}$ olsun. $P \preccurlyeq^p R$ iken $R \not\preccurlyeq^p P$ dir. $\preccurlyeq^p$ simetrik değildir.

Sonuç 3.1.6 $\preccurlyeq^p$ sıralama bağıntısı $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir ön sıralama bağıntısıdır.

Lemma 3.1.7 $P, R, S \in C(\mathbb{R}^n)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $P \preccurlyeq^p R \Leftrightarrow \{0_{\mathbb{R}^n}\} \preccurlyeq^p R -_l P$,

(ii) $P \preccurlyeq^p R \Leftrightarrow P + K \preccurlyeq^p R + K$.

İspat.

(i) $(\Rightarrow)$ $P \preccurlyeq^p R \Leftrightarrow R -_l P \subseteq K \Rightarrow (R -_l P) + K \subseteq K + K = K$

$$\Rightarrow (R -_l P) + K \subseteq K$$
$$\Rightarrow (R -_l P) -_l \{0_{\mathbb{R}^n}\} \subseteq K$$
$$\Rightarrow \{0_{\mathbb{R}^n}\} \preccurlyeq^p R -_l P$$

$(\Leftarrow)$ $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \preccurlyeq^p R -_l P \Rightarrow (R -_l P) -_l \{0_{\mathbb{R}^n}\} \subseteq K$

$$\Rightarrow (R -_l P) + K \subseteq K$$
$$\Rightarrow (R -_l P) \subseteq K$$
$$\Rightarrow P \preccurlyeq^p R$$

(ii) Kolay şekilde elde edilebilir.

Önerme 3.1.8 a ve b vektörleri için $a \leq_K b \Leftrightarrow \{a\} \preccurlyeq^p \{b\}$ dir.

İspat. $a \leq_K b$ ise $b - a \in K$ dır.

$$\begin{aligned} \{b\} -_l \{a\} &= \{x : x + a \in b + K\} \\ &= \{x : x \in b - a + K\} \\ &= \{x : x \in K + K = K\} \subseteq K. \end{aligned}$$

olur. O halde $\{a\} \preccurlyeq^p \{b\}$ dir.

Tersine,

$$\begin{aligned} \{a\} \preccurlyeq^p \{b\} &\Rightarrow \{b\} -_l \{a\} \subseteq K \\ &\Rightarrow \{x : x + a \in b + K\} \subseteq K \\ &\Rightarrow \{x : x \in b - a + K\} \subseteq K. \end{aligned}$$

$b - a \in \{x : x \in b - a + K\} \subseteq K$ olduğundan $b - a \in K$ dır. O halde $a \leq_K b$.

O halde $\preccurlyeq^p$ bağıntısı, vektörler üzerinde vektör sıralamasının bir genişlemesidir.

Lemma 3.1.9 $P, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ve $R -_l P \neq \emptyset$ olsun. O halde

$$P \preccurlyeq^p R \Rightarrow P \preccurlyeq^{m_1} R + K$$

ve

$$P \preccurlyeq^p R \Rightarrow P \preccurlyeq^{m_1} R$$

dir.

İspat. $P \preccurlyeq^p R \Rightarrow R -_l P \subseteq K$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (R + K) -_m P \subseteq K \\ &\Rightarrow [(R + K) -_m P] \cap K \neq \emptyset \\ &\Rightarrow P \preccurlyeq^{m_1} R + K \end{aligned}$$

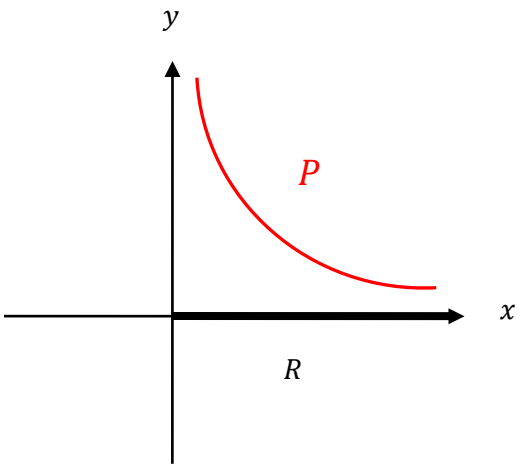
ve

$$P \preccurlyeq^{p} R \Rightarrow R -_{l} P \subseteq K$$
$$\Rightarrow (R + K) -_{m} P \subseteq K$$
$$\Rightarrow (R -_{m} P) \cap K \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow P \preccurlyeq^{m_1} R$$

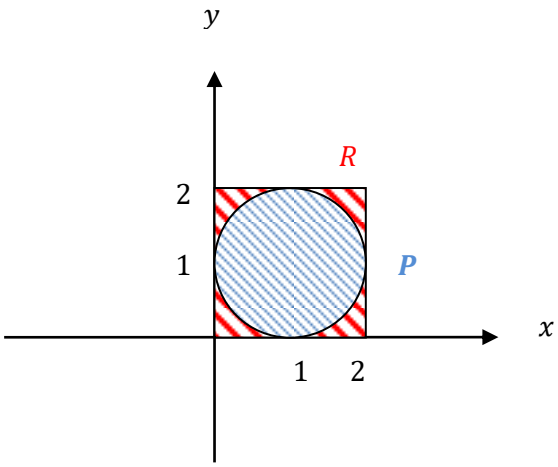
Diğer yön doğru olmayabilir. Örneğin, $\mathbb{R}^2$'de $P = \{(0,0)\}, R = \overline{\mathbb{B}}((0,0),1)$ ve $K = \mathbb{R}^2_+$ olsun. $P \preccurlyeq^{m_1} R$ ve $P \not\preccurlyeq^{p} R$ olduğu kolayca görülebilir.

Uyarı 3.1.10 $P, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $P \preccurlyeq^{l} R$ iken $P \preccurlyeq^{P} R$ olmak zorunda değildir. Örneğin, $P = \{(x,y) : x \leq 0, y \leq 0\}$ ve $R = \{(x,y) : x = y, y \leq 0\}$ alırsak, $P \preccurlyeq^{l} R \Leftrightarrow R \subseteq P + K$ sağlanır. $P \preccurlyeq^{P} R \Leftrightarrow R -_{l} P \subseteq K$ ifadesi sağlanmaz. O halde $P \not\preccurlyeq^{p} R$ dir.

Uyarı 3.1.11 $P, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $P \preccurlyeq^{p} R$ iken $P \preccurlyeq^{l} R$ olmak zorunda değildir. Örneğin, $P = \left\{(x,y) : y = \frac{1}{x}, x > 0\right\}$ ve $R = \{(x,y) : x \geq 0, y = 0\}$ alırsak, Şekil 3.1'den görüldüğü gibi $P \preccurlyeq^{P} R \Leftrightarrow R -_{l} P \subseteq K$ ifadesi sağlanır ancak $R \not\subseteq P + K$ dır. Yani $P \not\preccurlyeq^{l} R$. Ayırıca, $P, R \in C(\mathbb{R}^n)$ olsun. $P \preccurlyeq^{p} R$ iken $P \preccurlyeq^{l} R$ olmak zorunda değildir. Örneğin, $\mathbb{R}^2$ de, $P = \overline{\mathbb{B}}((1,1),1)$, $R = conv\{(0,0),(0,2),(2,2),(2,0)\}$ olsun. Şekil 3.2'den $P \preccurlyeq^{p} R$ ve $P \not\preccurlyeq^{l} R$ olduğu kolayca görülebilir.



Şekil 3.1 $P = \left\{(x,y) : y = \frac{1}{x}, x > 0\right\}$ ve $R = \{(x,y) : x \geq 0, y = 0\}$ kümeleri



Şekil 3.2 $P = \overline{\mathbb{B}}((1,1),1)$ ve $R = conv\{(0,0),(0,2),(2,2),(2,0)\}$ kümeleri

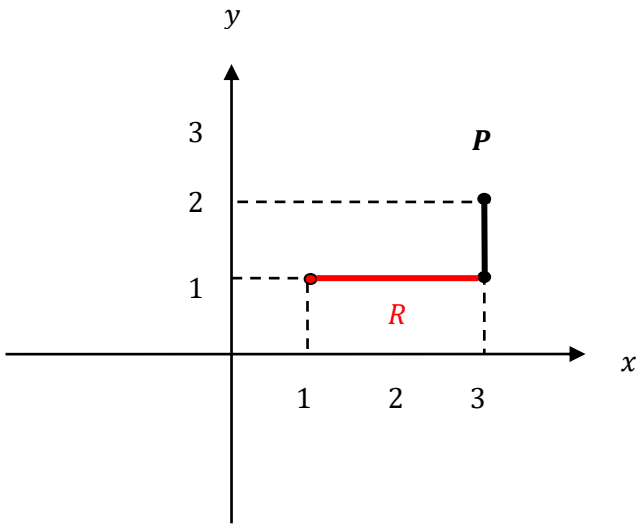
Önerme 3.1.12 $P, R \in C(\mathbb{R}^n)$ olsun. $P \preccurlyeq^l R$ iken $P \preccurlyeq^p R$ dir.

İspat. p ve l sıralama bağıntılarının tanımından kolayca elde edilebilir.

Önerme 3.1.13 $P, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, B sınırlı ve $R -_\iota P \neq \emptyset$ olsun. $P \preccurlyeq^p R$ ise $P \preccurlyeq^{l_1} R$ dir.

İspat. $P \preccurlyeq^p R \Leftrightarrow R -_\iota P \subseteq K$ dir. Her $x \in R -_\iota P$ için $x \in K$ dır. Buradan $(R -_\iota P) \cap K \neq \emptyset$ dır. O halde $P \preccurlyeq^{l_1} R$ dir.

Uyarı 3.1.14 $P, R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $P \preccurlyeq^{l_1} R$ iken $P \preccurlyeq^p R$ olmak zorunda değildir. Örneğin, $P = conv\{(3,1),(3,2)\}$, $R = conv\{(1,1),(3,1)\}$ ve $K = \mathbb{R}^2_+$ alalım. $R -_\iota P = \{x : x + P \subseteq R + K\} = [(-2,\infty) \times (0,\infty)]$ olduğundan $(R -_\iota P) \cap K \neq \emptyset$ dır. O halde Şekil 3.3'den $P \preccurlyeq^{l_1} R$ sağlanır ancak $R -_\iota P = [(-2,\infty) \times (0,\infty)] \not\subseteq K$ dır. $P \not\preccurlyeq^p R$ elde edilir.



Şekil 3.3 $P = conv\{(3,1),(3,2)\}$ ve $R = conv\{(1,1),(3,1)\}$ kümeleri

Tanım 3.1.15 $\mathbb{R}^n$, K konveks konisi ile sıralı gerçel vektör uzayı, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 'nin boştan farklı bir ailesi, $\bar{P} \in \mathcal{A}$ ve $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde $\preccurlyeq^p$ bağıntısını gözönüne alalım.

(i) $P \preccurlyeq^p \bar{P}$ olan her $P \in \mathcal{A}$ için $\bar{P} \preccurlyeq^p P$ oluyorsa $\bar{P}$'ye $\preccurlyeq^p$ bağıntısına göre $\mathcal{A}$'nın bir minimal elemanı,

(ii) $\bar{P} \preccurlyeq^p P$ olan her $P \in \mathcal{A}$ için $P \preccurlyeq^p \bar{P}$ oluyorsa $\bar{P}$'ye $\preccurlyeq^p$ bağıntısına göre maksimal elemanı denir.

S boş olmayan bir küme ve $F: S \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm olsun. Bu durumda küme değerli optimizasyon problemlerini $p-$ sıralaması kullanarak küme optimizasyonuna göre ele aldığımızda optimizasyon problemi,

$$(p-KDOP)\begin{cases}\min(maks)\, F(x) \\ x \in S\end{cases}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca $\boldsymbol{F}$'nin küme ailesini $\boldsymbol{F(S)}$ olarak tanımlayalım, yani $\boldsymbol{F(S)} \coloneqq \{\boldsymbol{F(x)} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}\}$ olsun. Kümeler ve küme değerli optimizasyon için verilen tanımları birleştirerek aşağıdaki ilişkiyi elde edebiliriz:

Eğer $F(x) \preccurlyeq^p F(x_0)$ olan her $x \in S$ için $F(x_0) \preccurlyeq^p F(x)$ oluyorsa x_0'a $\preccurlyeq^p$ bağıntısına göre $(p-KDOP)$'nın bir minimal çözümü, benzer şekilde $F(x_0) \preccurlyeq^p F(x)$ olan her $x \in S$ için $F(x) \preccurlyeq^p F(x_0)$ oluyorsa x_0'a $\preccurlyeq^p$ bağıntısına göre $(p-KDOP)$'nin bir maksimal çözümü denir. Aşağıdaki örnekler $\preccurlyeq^p$ bağıntısına göre küme değerli bir optimizasyon probleminin nasıl çözüleceği ile ilgilidir.

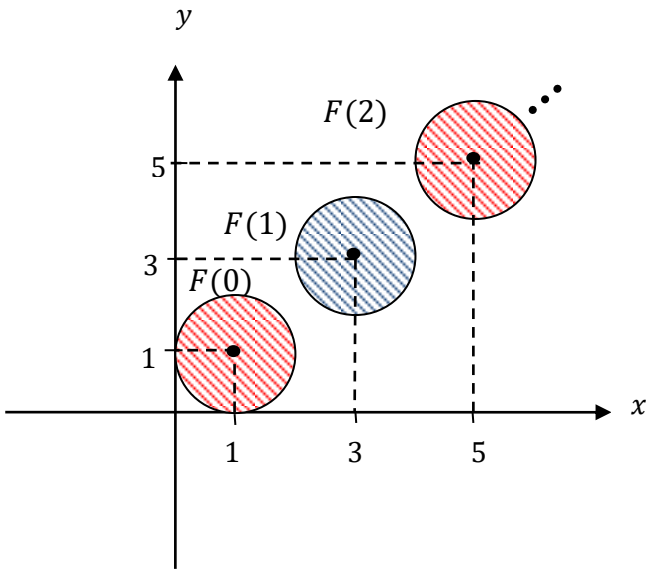
Örnek 3.1.16 $K = \mathbb{R}^2_+,\ F : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü

$$F(n) = \left\{(x, y) : \left(x - (2n+1)\right)^2 + (y - (2n+1))^2 \leq 1\right\}$$

şeklinde tanımlansın.

$$(p - KDOP)\begin{cases}\min F(x) \\ x \in \mathbb{R}_+\end{cases}$$

küme değerli optimizasyon problemini göz önüne alalım. Sıralama konisi $K = \mathbb{R}^2_+$ olsun. $\preccurlyeq^p$ sıralama bağıntısı bir ön sıralama bağıntısı olduğu için problemi çözerken önsıralama bağıntısı için verilen minimal eleman tanımı kullanılacaktır. F küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri Şekil 3.4.'de gösterilmiştir.



Şekil 3.4 Örnek 3.1.16'daki F küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri

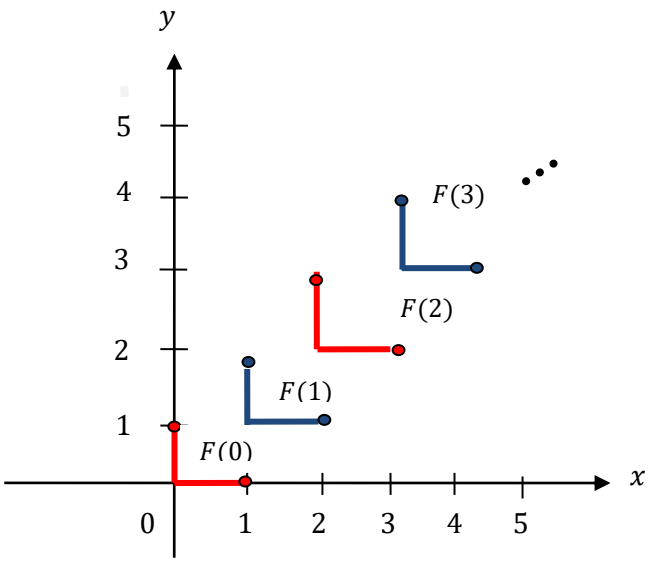
$x = 0$ problemin bir minimal çözümüdür. Çünkü K konisine göre $F(x) \preccurlyeq^p F(0)$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ yoktur. Olsaydı $F(0) -_l F(x) \subseteq K$ olmalıydı. Bu durumda $F(0) -_l F(x) = \{x : x + F(x) \subseteq F(0) + K\} \subseteq K$ olması gerekirdi. $\{x : x + F(x) \subseteq F(0) + K\}$ kümesine ait olan her $x \in \mathbb{R}^2$ K'nın elemanı değildir. O halde $x = 0$ problemin bir çözümüdür. Sonuç olarak, $x = 0$ problemin bir minimal çözümüdür. $x = 0$'dan başka problemin bir minimal çözümü olmadığını gösterelim. Kabul edelim

ki bir $x_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ problemin çözümü olsun. O halde $F(x) \preccurlyeq^p F(x_0)$ olan her $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{x_0\}$ için $F(x_0) \preccurlyeq^p F(x)$ olmalıdır. Fakat, her $x_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ için $F(0) \preccurlyeq^p F(x_0)$ olmasına rağmen $F(x_0) \preccurlyeq^p F(0)$'dır. O halde $x = 0$ problemin tek çözümüdür.

Örnek 3.1.17 $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$, $K = \mathbb{R}_+^2$ ve $F: \mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümü $P = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$ olmak üzere, $F(x) = P + \{(x,x)\}$ şeklinde tanımlansın.

$$(p - KDOP) \begin{cases} \min F(x) \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

küme değerli optimizasyon problemini göz önüne alalım. F küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri Şekil 3.5.'de gösterilmiştir.



Şekil 3.5 Örnek 3.1.17'deki F küme değerli dönüşümünün bazı görüntü kümeleri

$x = 0$ problemin bir minimal çözümüdür. Çünkü $F(x) \preccurlyeq^P F(0)$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ yoktur. Olsaydı $F(0) -_\iota F(x) \subseteq K$ olmalıydı. Bu durumda $\{x : x + F(x) \subseteq F(0) + K\} \subseteq K$ olması gerekirdi. Sonuç olarak, $x = 0$ problemin bir minimal çözümüdür.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada küme değerli dönüşümlerin optimal elemanlarını bulmak için yeni bir sıralama bağıntısı tanımlanmıştır. Bu sıralama bağıntısına göre verilen küme değerli optimizasyonlar problemlerinin çözümleri elde edilmiştir. Bu tür problemleri çözmek için kullanılan yöntemler vardır. Örneğin, skalerizasyon, vektörizasyon, türev bunlara örnek verilebilir. Yeni sıralama bağıntısına göre verilen küme değerli optimizasyonun çözümlerinin bu yöntemler ile elde edilmesi açık bir problemdir.

5. KAYNAKLAR

Ansari Q H, Yao J C, 2012, Recent developments in vector optimization, Berlin: Springer-Verlag.

Ansari Q H, Hussain N, Sharma P K, 2020, Scalarization for Set Optimization in Vector Spaces, In International Conference on Recent Trends in Convex Optimization: Theory, Algorithms and Applications, Singapore: Springer Nature Singapore, 247-277.

Chen G, Huang X, Yang X, 2005, Vector Optimization, Springer, Berlin.

Ehrgott M, 2005, Multicriteria Optimization, Springer, Berlin.

Gutiérrez C, Jiménez B, Miglierin E, Molho E, 2015, Scalarization in set optimization with solid and nonsolid orderin cones, J. Glob. Optim, 62(3), 525–552.

Hernández E, Rodríguez-Marín L, 2007, Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps, J. Math. Anal. Appl. 325, 1–18.

Jahn J, 2004, Vector Optimization, Springer, Heidelberg.

Jahn J, Ha T X D, 2011, New order relations in set optimization, J. Optim. Theory Appl. 148, 209–236.

Jahn J, 2013, Vectorization in set optimization, J. Optim. Theory Appl. 167(3), 783–795.

Jahn J, 2015, Directional derivatives in set optimization with the set less order relation, Taiwanese Journal of Mathematics 737-757.

Karaman E, 2019, Gömme Fonksiyonu Kullanılarak Küme Optimizasyonuna Göre Verilen Küme Değerli Optimizasyon Problemlerinin Optimallik Koşulları, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 14(1), 105-111.

Karaman E, Soyertem M, Atasever Güvenç İ, Tozkan D, Küçük M, and Küçük Y, 2018, Partial order relations on family of sets and scalarizations for set optimization, Positivity, 22 783-802.

Karaman E, Atasever Güvenç İ, Soyertem M, 2021, Optimality conditions in set-valued optimization problems with respect to a partial order relation by using subdifferentials, Optimization 70.3, 613-630.

Karaman E, Atasever Güvenç İ, Soyertem M, Tozkan D, Küçük M, Küçük Y, 2018, A vectorization for nonconvex set-valued optimization, Turkish Journal of Mathematics 42.4, 1815-1832.

Karaman E, Soyertem M, Atasever Güvenç İ, 2020, Optimality conditions in set-valued optimization problem with respect to a partial order relation via directional derivative, Taiwanese Journal of Mathematics 24.3, 709-722.

Karaman E, 2017, Optimization methods of set-valued transformations, Doctoral Thesis, Anadolu University.

Karaman E, 2021, A New Pre-Order Relation for Set Optimization using l-difference, Communications in Advanced Mathematical Sciences 4.3: 163-170.

Khan A A, Tammer C, Z˘alinescu C, 2015, Set-Valued Optimization: An Introduction with Applications, Springer, Berlin.

Khusboo Lalitha C.S, 2019, Scalarizations for a set optimization problem using generalized oriented distance function, 23(5), 1195-1213.

Kuroiwa D, 1998, The natural criteria in set-valued optimization, RIMS Kokyuroku 1031, 85–90.

Kuroiwa D, 2001, On Set-Valued Optimization, Nonlinear Analysis, 47, 1395-1400.

Kuroiwa D, 2003, Existence Theorems of Set Optimization with Set-Valued Maps, Journal of Information and Optimization Science, 24, 73-84.

Kuroiwa D, 2008, On derivatives of set-valued maps in set optimization, Journal of nonlinear and convex analysis, 51-55.

Kuroiwa D, Tanaka T, Ha T X D, 1997, On cone convexity of set-valued maps, Nonlinear Anal-Theor., 30(3), 1487-1496.

Luc D T, 1989, Theory of Vector Optimization, Springer, Berlin.

Nishnianidze Z G, 1984, Fixed points of monotonic multiple-valued operators, Bull., Georgian Acad. Sci., 114, 489-491.

Pallaschke D, Urbanski R, 2002, Pairs of Compact Convex Sets, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Pilecka M, 2014, Optimality conditions in set-valued programming using the set criterion, Thecnical University of Freiberg, Preprint 2014-02.

Schneider R, 1993, Convex Bodies: The Brunn-Minkowski theory, Cambridge: Cambridge University Press.

Webster R, 1994, Convexity Oxford Science Publications, Oxford Univer sity Press, New York, USA, 0-19-853147-8.

Young R C, 1931, The algebra of many-valued quantities, Math. Ann., 104, 260-290.

Zhai Y, Yu G, Tang T, Han W, 2025, Optimal conditions in uncertain set-valued optimization problems via second-order subdifferential involving Minkowski difference with application to zero-sum matrix games, Journal of Computational and Applied Mathematics, 464, 116530.

ÖZGEÇMİŞ