BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşenur ÖCALAN

Danışman
Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2022

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Ayşenur ÖCALAN

Danışman
Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2022

TEZ ONAY SAYFASI

Ayşenur ÖCALAN tarafından hazırlanan "Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Gecikmeli Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 18/02/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Başkan **:** Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi

Üye **:** Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18/02/2022

Ayşenur ÖCALAN

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER
OLMAYAN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Ayşenur ÖCALAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan ve şimdiye dek yapılan bazı çalışmalardan söz edilmiştir. Üçüncü bölüm ise orijinal sonuçlara adanmıştır. Üçüncü bölümde, $1 \leq i \leq m$ için $\{p_i(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$n \geq 0 \text{ için } \tau_i(n) \leq n-1, \lim_{n\to\infty} \tau_i(n) = \infty, 1 \leq i \leq m$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve

$$f_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ ve } x \neq 0 \text{ için } xf_i > 0, 1 \leq i \leq m$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) f_i\left(x\big(\tau_i(n)\big)\right) = 0$$

birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin
salınımlılığı için yeni salınımlılık şartları elde edilmiştir.
Son olarak tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir.

2022, v+ 33 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, Gecikmeli fark denklemi, Monoton argumanlar, Monoton olmayan argumanlar, Salınımlı çözüm, Salınımlı olmayan çözüm.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

OSCILLATION OF SOLUTIONS OF
FIRST ORDER NONLINEAR DELAY
DIFFERENCE EQUATIONS

Ayşenur ÖCALAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Umut Mutlu ÖZKAN

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, we mention some basic notions and studies so far. Third chapter is devoted to our original results. In the third chapter, new oscillatory conditions are obtained for first order nonlinear delay difference equation given by

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) f_i\left(x\left(\tau_i(n)\right)\right) = 0$$

where $\{p_i(n)\}$ are sequences of positive real numbers and $\{\tau_i(n)\}$ are sequences of integers and are not necessarily monotone for $1 \leq i \leq m$ such that

$$n \geq 0 \text{ için } \tau_i(n) \leq n-1, \lim_{n\to\infty} \tau_i(n) = \infty, 1 \leq i \leq m$$

and

$$f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ve } x \neq 0 \text{ için } x f_i > 0, 1 \leq i \leq m$$

and forward difference operator is given by

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

Finally, the discussion and conclusion part is given.

2022, v + 33 pages

Keywords: Difference equation, Delay difference equation, Monotone arguments, Nonmonoton arguments, Oscillatory solution, Nonoscillatory solution.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca bilgilerinden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam sayın Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN'a ve çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Özkan ÖCALAN'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Bugünlere gelmemde büyük pay sahibi aileme ve dostlarıma göstermiş oldukları sabır ve duydukları güven için sonsuz teşekkür ederim.

Ayşenur ÖCALAN

Afyonkarahisar 2022

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET **i**

ABSTRACT **ii**

TEŞEKKÜR **iii**

İÇİNDEKİLER DİZİNİ **iv**

SİMGELER DİZİNİ **v**

1 GİRİŞ **1**

2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR **7**

2.1 Fark Analizi 7

2.2 Gecikmeli Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı 10

3 BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMI **17**

4 TARTIŞMA ve SONUÇ **27**

5 KAYNAKLAR **28**

ÖZGEÇMİŞ **32**

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel sayılar
$\mathbb{R}^-$	Negatif Reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar
$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R} - 0$
$\mathbb{R}_+$	$[0, \infty)$
τ_i	Monoton olmayan argümanlar
h_i	Monoton argümanlar
Π	Çarpım sembolü
Σ	Toplam sembolü
Δ	İleri fark operatörü
E	Öteleme (kaydırma) operatörü
C	Sürekli fonksiyonların kümesi

1 GİRİŞ

Diferensiyel denklemler gerçek hayatta karşılaştığımız birçok heyecan verici problem için matematiksel model olarak rol oynamasının yanı sıra, sadece bilim ve teknoloji alanında değil, ekonomi, fizyoloji, savunma ve nüfus bilimi gibi bir çok alanda da karşımıza çıkmaktadır. Mühendislik ve matematik biliminin ortak konusu olması diferensiyel denklem gelişimini hızlandırmıştır. Yeni problemler ve yeni denklemlerin üretilmesine neden olmuştur.

Bilindiği üzere uygulamalı bilim dallarının birçoğunda ele alınan problemlerin matematiksel modellemesine bir diferensiyel denklem karşılık gelmektedir. Matematiksel modellemeler yapılırken gecikmeler ortaya çıkabilir. Ortaya çıkan bu gecikmeler göz önünde bulundurulursa, bu modellemeler adi diferensiyel denklemlerden farklı bir yapı sergilerler. Bu durumda gecikmeli diferensiyel denklemler karşımıza çıkar.

Bir gecikmeli diferensiyel denklem, $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon, $\lim\limits_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau(t) < t$ koşulları sağlanmak üzere

$$x'(t) = f(t,\ x(t),\ x(\tau(t))) \tag{1.1}$$

şeklindedir. Yani bu tür denklemler, bilinmeyen bir fonksiyon ve onun en yüksek mertebeden türevi hariç diğer türevlerinin ya da daha çok gecikme değişkenlerine bağlı kalınarak ifade edilen diferensiyel denklemlerdir. Görüldüğü üzere $x'(t)$ nin değişim oranı sadece $x(t)$ değerine değil, aynı zamanda $x(\tau(t))$ değerine de bağlıdır.

$$x'(t) + x(t-3) + x(t+\frac{1}{3}) = 0,$$

$$x'(t) + x(t+2) - 5 = 0,$$

$$x''(t) + 3x'(t) + x(t-\frac{3}{2}) = 1,$$

$$x''(t) - 4x'(t-\sin^2 t) - x(\frac{t}{2}) + t = 1$$

şeklindeki denklemler gecikmeli diferensiyel denklemlerdir.

Gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalar literatüre ilk olarak 1770 yılından sonra girmiştir. Ancak gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili yapılan sistematik ve kayda değer çalışmalar son 70 yılda ortaya çıkmıştır. Gecikmeli diferensiyel denklemler, fizik, biyoloji, ekonomi ve fizyoloji (işlev bilim) gibi bilim dallarında kullanım alanına sahiptirler. Ancak literatür tarandığında bu kullanım alanlarının çok daha geniş alana yayıldığını görmek mümkündür.

Salınımlılık teorisi ise geniş anlamda teknoloji, doğa ve sosyal bilimlerdeki uygulamalı problemlerden kaynaklanan salınımsal olayları inceleyen modern diferensiyel denklemler teorisinin önemli ve köklü bir dalıdır. Ayrıca salınım teorisinin kuramsal yönleri, belirli bir denkleme veya sisteme salınan (periyodik, hemen hemen periyodik vb.) çözümlerinin varlığını, yokluğunu ve bu tür çözümlerin asimptotik davranışlarını tanımlamaktadır. Diğer taraftan salınım teorisi, matematiksel biyolojide yer alan bazı denklemlerin çözümü için de büyük ölçüde önem arz etmektedir. Bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılık karakterizasyonları ile ilgili de birçok sonuca yer vermektedir. Şimdi

$$x'(t) + p(t)x(\tau(t)) = 0 \tag{1.2}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (1.2) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması ile ilgili ilk sistematik çalışma Myshkis (1950) tarafından yapılmıştır. Eğer

$$\limsup_{t\to\infty} [t-\tau(t)] < \infty \quad \text{ve} \liminf_{t\to\infty} [t-\tau(t)] \liminf_{t\to\infty} p(t) > \frac{1}{e}$$

ise (1.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Koplatazde ve Chanturija (1982), (1.2) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için aşağıda verilen sonucu elde etmişlerdir.

$\tau(t)$ monoton olması gerekmeyen bir gecikme olmak üzere,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (1.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Diğer taraftan eğer

$$\int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds \le \frac{1}{e}$$

ise (1.2) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Gyóri ve Ladas (1991)

$$x'(t) + px(t-\tau) = 0 \tag{1.3}$$

denkleminin salınımlı olması için $p, \tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıda verilen ifadelerin birbirine denk olduğunu elde etmişlerdir.

(i) (1.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlı,

(ii) $p\tau > \frac{1}{e}$.

Uygulamalı bilim dallarında ele alınan problemlerde bağımsız değişkenin sürekli olmadığı durumlar da söz konusu olabilir. Bu gibi durumlarda ise karşımıza fark denklemleri çıkmaktadır. Çünkü fark denklemleri; bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bağıntılardır. Diferensiyel denklemlere benzerlik gösteren ve inceleme süreci yönünden daha yeni olan fark denklemlerine fonksiyonel denklemler de denir (Elaydi 2000).

Diğer taraftan fark denklemleri zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin doğal bir ifadesidir. Zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların birçoğu ayrık (kesikli) olduğu için bu tür denklemlere önemli matematiksel modellemelerde yer verilir. Daha da önemli olan nokta ise fark denklemleri diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma yöntemlerinin incelenmesinde karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bu tür denklemlere karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık bir benzeri olarak ele alınır. Ayrıca fark denklemleri, diferensiyel denklemlere göre daha geniş kapsamlı bir yapıya sahiptir. Örneğin, birinci mertebeden bir diferensiyel denklemin ayrık bir benzeri olan bir fark denklemi "ghost" çözümlere ya da kaotik yörüngelere sahip olabilmesine rağmen bu durum ancak yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için geçerlidir. Böylece, fark denklemleri teorisinin diferensiyel denklemler teorisine göre daha zengin olduğu ve yakın gelecekte öneminin artacağını söyleyebiliriz.

Bağımsız değişkenin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkenin değişimi, $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$,... türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x in ayrık (discrete) değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Burada devreye içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri girer. Diferensiyel denklemlerde fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Fakat 20. yüzyılın başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilmeyeceğini göstermiştir. Böylece fark denklemleri kullanılarak diferensiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmak istenmiştir. Günümüzde birçok alanda uygulanan fark denklemleri, daha çok hareket analizinde devreleri matematiksel olarak ifade etmede, ekonomide arz ve talep denklemlerini oluşturmada, ekonomik dalgalanmalar veya devresel hareketleri açıklamada yaygın olarak kullanılmaktadır.

Ayrıca fark denklemleri uygulamalı bilim dallarının birçoğunda da uygulama alanı bulmaktadır. Bu alanlardan bazıları ise kontrol teoride kararlılık durumlarının incelenmesi, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesi, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesi, biyolojide canlı populasyon sayısının araştırılması olduğunu söyleyebiliriz.

Fark denklemlerinin çözümü, pek çok matematikçinin yakın ilgisini çekmiş ve özellikle son 40 yıl içerisinde yapılan çalışmalar sonucunda da bu konuda zengin bir literatür ortaya çıkmıştır. Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle salınımlı olması ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Ladas (1990),

$$x_{n+1} - x_n + px_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.1}$$

$p \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{Z}^+$ lineer otonom gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart vermiştir.

Erbe ve Zhang (1989)

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.2}$$

p_n negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}^+$ lineer otonom gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. Ladas, Philos ve Sficas (1989) yukarıdaki otonom olmayan fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart elde etmişlerdir. Ayrıca diferensiyel denklemler ile fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı arasında ilginç benzerlikler söz konusudur. Ancak bu durum her zaman geçerli olmayabilir. Örneğin,

$$x'(t) + p(t)x(t-k) = 0 \tag{1.3}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (1.2) fark denklemi (1.3) diferensiyel denkleminin ayrık benzeridir. $k = 0$ için (1.3) diferensiyel denklemi

$$x(t) = x(t_0)\exp\left(-\int p(s)ds\right)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir ve bu çözüm hiç bir zaman salınımlı değildir. Ancak (1.2) fark denklemi ise $k = 0$ için

$$x_n = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1}(1-p_j)\right]x_{n_0}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla bu çözüm her $j \geq n_0$ için $1-p_j < 0$ olduğunda salınımlı bir çözüme sahiptir.

Fark denklemleri ile diferensiyel denklemler arasında büyük benzerlikler bulunmaktadır. Fark denklemleri sayesinde diferensiyel denklemlerdeki süreksizlik durumları ortadan kaldırılabilmektedir. Hatta birçok diferensiyel denklem, fark denklemleri kullanılarak kolaylıkla çözülebilmektedir. Bu nedenle yukarıda verilen bilgiler ışığında bu yüksek lisans tez çalışmasında birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denklemleri çalışılmış ve bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için yeni şartlar elde edilmiş ve örneklere yer verilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak lineer ve lineer olmayan birinci mertebeden fark denklemleri ile ilgili genel bir literatür bilgisine yer verilmiştir.
Ayrıca $1 \leq i \leq m$ için $\{p_i(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$n \geq 0 \text{ için } \tau_i(n) \leq n-1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\tau_i(n) = \infty,\ 1 \leq i \leq m$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve

$$f_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ ve } x \neq 0 \text{ için } xf_i(x) > 0,\ 1 \leq i \leq m$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n)f_i(x(\tau_i(n))) = 0,\quad n = 0, 1, ...$$

şeklinde ifade edilen birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeni yeter şartlar elde edilmiştir.

2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezimizde ihtiyaç duyulacak literatürde yer alan bilgilere yer verilecektir. İlk olarak fark analizi tanıtılacak ardından fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili bazı tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

2.1 Fark Analizi

Tanım 2.1.1 E öteleme (kaydırma) operatörü, x sürekli bir değişken olmak üzere

$$Ey(x) = y(x+h) \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. İkinci mertebeden E operatörü

$$E^2 y(x) = E[Ey(x)] = E[y(x+h)] = y(x+2h)$$

şeklinde bulunur. Benzer işlem adımları devam ettirildiğinde

$$E^k y(x) = y(x+kh)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, E^k operatörü k. dereceden bir öteleme operatörünü tanımlar.

E operatörünün özellikleri aşağıdaki gibidir.

(1) $E\left[f(x)+g(x)\right] = Ef(x)+Eg(x)$,

(2) c bir sabit olmak üzere, $E[cf(x)] = cE[f(x)]$,

(3) $E^r\left[E^s f(x)\right] = E^{r+s} f(x)$,

(4) $E^0\left[f(x)\right] = f(x)$.

Tanım 2.1.2 y reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere ileri fark operatörü Δ,

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x), \ \Delta x_n = x_{n+1} - x_n \tag{2.1.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada h herhangi bir sabit x ise bağımsız değişkendir.

Özel olarak $y(x) = x$ olarak alnırsa $\Delta x = (x+h) - x = h$ ya da $h = \Delta x$ bulunur. Bu nedenle h fonksiyon aralığı olarakta adlandırılır.

Yüksek mertebeden ileri farklar her birinin bir öncekine Δ operatörünün uygulanması ile elde edilir.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\left[\Delta f(x)\right] = \Delta\left[f(x+h) - f(x)\right] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

burada Δ^2 ikinci dereceden fark operatörü olarak adlandırılır. Bu fark işlemlerine devam edildiğinde genel bir ifade olarak

$$\Delta^n f(x) = \Delta \left[\Delta^{n-1} f(x)\right]$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç olarak, $f(x)$ fonksiyonunun m. dereceden farkı $(a-b)^m$ ifadesinin Binom açılımına benzer biçimde

$$\Delta^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} f(x + (m-k)h) \qquad (2.1.3)$$

formulü ile elde edilir.

Δ operatörünün özellikleri $f(x)$ ve $g(x)$ farklı iki fonksiyon olmak üzere aşağıdaki şekildedir.

(1) $\Delta \left[f(x) + g(x)\right] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$,

(2) c sabit olmak üzere $\Delta \left[c f(x)\right] = c\Delta f(x)$,

(3) $\Delta \left[f(x) g(x)\right] = \Delta \left[f(x)\right] g(x+h) + f(x)\Delta g(x)$,

(4) $\Delta \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\Delta[f(x)]g(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x+h)g(x)}$,

(5) $\Delta^r \left[\Delta^s f(x)\right] = \Delta^{r+s} f(x)$.

Ayrıca c bir sabit olmak üzere $h = 1$ için bazı temel fonksiyonlar aşağıdaki gibi ifade edilir.

(1) $\Delta c^x = (c-1)c^x$,

(2) $\Delta \sin cx = 2 \sin \frac{c}{2} \cos c(x + \frac{1}{2})$,

(3) $\Delta \cos cx = -2 \sin \frac{c}{2} \sin c(x + \frac{1}{2})$,

(4) $\Delta \log cx = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Böylece Δ ve E operatörü arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = Ef(x) - f(x) = (E-1)f(x) \Rightarrow \Delta = E - 1$$

bu şekilde Δ ve E arasında birinci dereceden bir bağıntı bulunur. Bu işlemden faydalanarak

$$\Delta^m f(x) = (E-I)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} E^{m-k} f(x)$$

m. dereceden Δ ve E operatörleri arasındaki ilişkiyi görmüş oluruz. Benzer şekilde $E = \Delta + 1$ olur, buradan

$$E^m = (\Delta + 1)^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \Delta^{m-k}$$

yazılır.

Toplam operatörü ile ilgili bazı kurallar ise aşağıdaki şekildedir.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{m} = mc$,

(b) $\sum\limits_{k=1}^{m} cf(x) = c \sum\limits_{k=1}^{m} f(x)$,

(c) $\sum\limits_{k=1}^{m} [f(x) \pm g(x)] = \sum\limits_{k=1}^{m} f(x) \pm \sum\limits_{k=1}^{m} g(x)$,

(d) $(A+B)^n = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1.2...k} A^k B^{n-k}$ veya $(A+B)^n = \sum\limits_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^k B^{n-k}$.

Tanım 2.1.4 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olsun.

$$x_n,\ x_{n+1}, ..., x_{n+k} \tag{2.1.4}$$

ifadelerini içeren bir bağıntıya k. mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.5 Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin; $x_{n+4} - x_{n+1} + 4x_n = 0$ denklemi dördüncü mertebeden bir fark denklemidir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.6 Eğer (2.1.4) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = b_n \tag{2.1.5}$$

formunda verilirse k. mertebeden olan (2.1.4) fark denklemine lineerdir denir. Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise bu durumda (2.1.5) fark denklemine homojen olmayan lineer fark denklemi denir.

Eğer (2.1.5) fark denklemi

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = 0 \tag{2.1.6}$$

şeklinde verilirse (2.1.6) fark denklemine homojen lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

2.2 Gecikmeli Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı

Bu bölümde gecikmeli fark denklemleri ile ilgili bilinen bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

$1 \leq i \leq m$ için $\{p_i(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$n \geq 0 \text{ için } \tau_i(n) \leq n-1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \tau_i(n) = \infty,\ 1 \leq i \leq m \tag{2.2.1}$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve

$$f_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ ve } x \neq 0 \text{ için } xf_i(x) > 0,\ 1 \leq i \leq m \tag{2.2.2}$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \tag{2.2.3}$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) f_i(x(\tau_i(n))) = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{2.2.4}$$

şeklinde ifade edilen birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

Ayrıca

$$r = -\min_{n\geq 0}\{\tau_i(n)\},\ 1 \leq i \leq m \tag{2.2.5}$$

ifadesini tanımlayalım. Açık olarak, r pozitif bir tamsayıdır.

$m = 1$ için (2.2.4) denklemi

$$\Delta x(n) + p(n) f(x(\tau(n))) = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{2.2.6}$$

denklemine dönüşür.

Diğer taraftan1 $\leq i \leq m$ için $f_i(x) = x$ olarak alındığında ise (2.2.4) denklemi aşağıda verilen birinci mertebeden lineer gecikmeli fark denkleme dönüşür.

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x(\tau_i(n)) = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{2.2.7}$$

$m = 1$ için (2.2.7) denklemi

$$\Delta x(n) + p(n) x(\tau(n)) = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{2.2.8}$$

denklemine dönüşür.

$l > 0$ olmak üzere $\tau(n) = n - l$ olarak alınırsa (2.2.8) denklemi ise

$$\Delta x(n) + p(n)x(n-l) = 0 \tag{2.2.9}$$

denklemine dönüşür.

Tanım 2.2.3 Eğer pozitif bir N tamsayısı ve $n \geq N$ için $x_n x_{n+1} \leq 0$ ise x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde x_n çözümüne salınımlı olmayan çözüm denir.

Başka bir şekilde ifade edecek olursak, eğer bir x_n çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra ergeç pozitif ya da ergeç negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal vd. 2000, Györi ve Ladas 1991, Elaydi 2000).

Aşağıda verilen teorem Erbe ve Zhang (1989) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.2.1

$$\liminf_{n\to\infty} p(n) > \frac{l^l}{(l+1)^{l+1}} \tag{2.2.10}$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n-l}^{n} p(j) > 1 \tag{2.2.11}$$

ise (2.2.9) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Erbe ve Zhang 1989).

Ladas, Philos ve Sficas (1989) aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.2 Eğer

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\frac{1}{l} \sum_{j=n-l}^{n-1} p(j) \right] > \frac{l^l}{(l+1)^{l+1}} \tag{2.2.12}$$

ise (2.2.9) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Erbe ve Zhang 1989).

Philos (1991) (2.2.12) şartını (2.2.8) denklemine genişletmiştir.

Teorem 2.2.3 $n \geq 0$ için $(\tau(n))$ artan bir dizi olmak üzere, eğer

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n-\tau(n)} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j) \right] > \limsup_{n\to\infty} \frac{(n-\tau(n))^{n-\tau(n)}}{(n-\tau(n)+1)^{n-\tau(n)+1}} \tag{2.2.13}$$

ise (2.2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Philos 1991).

Zhang ve Tian (1998) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 2.2.4 $(\tau(n))$ azalmayan olmak üzere, eğer

$$\lim_{n\to\infty}(n-\tau(n))=\infty \tag{2.2.14}$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=\tau(n)}^{n-1}p(j)>\frac{1}{e} \tag{2.2.15}$$

ise (2.2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Zhang ve Tian 1998).

Ayrıca Zhang ve Tian (1998) (2.2.8) denkleminin salınımlılığı için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.5 $(\tau(n))$ monoton olması gerekmeyen bir dizi olmak üzere (2.2.14) şartının sağlanması durumunda, eğer

$$\limsup_{n\to\infty}p(n)>0 \tag{2.2.16}$$

ise (2.2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Zhang ve Tian 1998).

Chatzarakis, Koplatadze ve Stavroulakis (2008) aşağıda verilen sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.6 $(\tau(n))$ monoton olması gerekmeyen bir dizi olmak üzere, eğer

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=h(n)}^{n}p(j)>1 \tag{2.2.17}$$

ise (2.2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, burada $h(n)=\max\limits_{0\leq s\leq n}\{\tau(s)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Chatzarakis vd. 2008).

Ayrıca Chatzarakis, Koplatadze ve Stavroulakis (2008) (2.2.8) denkleminin salınımlılığı için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.7 $(\tau(n))$ monoton olması gerekmeyen bir dizi olmak üzere (2.2.14) şartının sağlanması durumunda, eğer

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=h(n)}^{n}p(j)<\infty \tag{2.2.18}$$

ise (2.2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, burada $h(n)=\max\limits_{0\leq s\leq n}\{\tau(s)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Chatzarakis vd. 2008).

Yan, Meng ve Yan (2006) $(\tau(n))$ dizisinin azalmayan olması durumunda aşağıda verilen sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.8 Eğer

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n} p(j) > 0 \tag{2.2.19}$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n} p(j) \left(\frac{j-\tau(j)+1}{j-\tau(j)}\right)^{j-\tau(j)+1} > 1 \tag{2.2.20}$$

ise (2.2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Yan vd. 2006).

Öcalan (2016) ise aşağıda verilen sonucu elde etmiştir.

Teorem 2.2.9 $(\tau(n))$ monoton olması gerekmeyen bir dizi olmak üzere $h(n) = \max\limits_{0\leq s\leq n}\{\tau(s)\}$ şeklinde tanımlansın. Eğer (2.2.20) sağlanırsa (2.2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Öcalan 2016).

Diğer taraftan

$$k(n) = \left(\frac{n-\tau(n)+1}{n-\tau(n)}\right)^{n-\tau(n)+1}, \; n \geq 1 \tag{2.2.21}$$

ifadesini tanımlayalım.
Böylece

$$e \leq k(n) \leq 4$$

elde edilir. Bu durumda

$$\sum_{j=\tau(n)}^{n} p(j)k(j) \geq e \sum_{j=\tau(n)}^{n} p(j)$$

ifadesi kolayca elde edilebilir ve böylece (2.2.21) şartı (2.2.15) şartından daha iyi şart olur.

Şimdi (2.2.7) ile ifade edilen lineer birkaç gecikmeli fark denklemini ele alalım.

Berezansky ve Braverman (2006) (2.2.7) denkleminin salınımlılığı için aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 2.2.10 $1 \leq i \leq m$ için $(\tau_i(n))$ monoton olması gerekmeyen diziler olmak üzere, eğer

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} p_i(n) > 0 \;\; \text{ve} \;\; \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > \frac{1}{e} \tag{2.2.22}$$

ise (2.2.7) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, burada $\tau(n) = \max\limits_{1\le i\le m} \{\tau_i(n)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Berezansky ve Braverman 2006).

Chatzarakis, Pinelas ve Stavroulakis (2013) aşağıda verilen koşulu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.11 $1 \le i \le m$ için $(\tau_i(n))$ azalmayan diziler olmak üzere, eğer

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > 1 \tag{2.2.23}$$

ise (2.2.7) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, burada $\tau(n) = \max\limits_{1\le i\le m} \{\tau_i(n)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Chatzarakis vd. 2013).

Ayrıca aşağıda verilen ifadeleri tanımlayalım.

$$h_i(n) := \max_{s\le n} \{\tau_i(s)\}, \;\; n \ge 0 \text{ ve } h(n) = \max_{1\le i\le m} \{h_i(n)\}. \tag{2.2.24}$$

Böylece, açık olarak $1 \le i \le m$ için $(h_i(n))$ dizileri azalmayan ve her $n \ge 0$ ve $1 \le i \le m$ için $\tau_i(n) \le h_i(n) \le h(n)$ olur.

Diğer taraftan, Braverman, Chatzarakis ve Stavroulakis (2015) aşağıda verilen salınımlılık koşulunu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.12 $1 \le i \le m$ için $(\tau_i(n))$ monoton olması gerekmeyen diziler olmak üzere, eğer

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > 1 \tag{2.2.25}$$

ise (2.2.7) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, burada $h(n)$, (2.2.24) ifadesindeki gibi tanımlanmıştır (Braverman vd. 2015).

Ayrıca Kılıç ve Öcalan (2020) (2.2.7) denkleminin salınımlılığı için aşağıdaki koşulu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.13 $1 \le i \le m$ için $(\tau_i(n))$ monoton olması gerekmeyen diziler olmak üzere, eğer

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > \frac{1}{e} \tag{2.2.26}$$

ise (2.2.7) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, burada $h(n)$, (2.2.24) ifadesindeki gibi tanımlanmıştır (Kılıç ve Öcalan 2020).

Son olarak, tek gecikmeli birinci mertebeden lineer olmayan fark denklemi ile ilgili literatüde yer alan sonuçları inceleyelim.

$$\Delta x(n) + p(n)f(x(\tau(n))) = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{2.2.27}$$

$$n \geq 0 \text{ için } \tau(n) \leq n - 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \tau(n) = \infty \tag{2.2.28}$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve

$$f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ve } x \neq 0 \text{ için } xf(x) > 0 \tag{2.2.29}$$

olsun.

Ayrıca (2.2.29) ifadesinde verilen f fonksiyonu aşağıda verilen koşulu sağlasın.

$$\limsup_{x\to 0} \frac{x}{f(x)} = M. \tag{2.2.30}$$

Bu koşullar altında Öcalan, Özkan ve Yıldız (2018) tarafından aşağıda verilen salınımlılık koşulları elde edilmiştir.

Teorem 2.2.14 (2.2.28), (2.2.29) ve (2.2.30) sağlansın. $(\tau(n))$ monoton olması gerekmeyen bir dizi olmak üzere, eğer

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j) > \frac{M}{e}, \; 0 \leq M < \infty \tag{2.2.31}$$

ise (2.2.27) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Öcalan vd. 2018).

Teorem 2.2.15 (2.2.28), (2.2.29), (2.2.30) ve $\sum\limits_{j=n}^{\infty} p(j) = \infty$ sağlansın. $(\tau(n))$ monoton olması gerekmeyen bir dizi ve $\theta > 1$ olmak üzere, eğer

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n} p(j) > \theta M, \; 0 < M < \infty \tag{2.2.32}$$

ise (2.2.27) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, burada $h(n) = \max\limits_{1\leq i\leq m} \{\tau(n)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Öcalan vd. 2018).

Teorem 2.2.16 (2.2.28), (2.2.29), (2.2.30) ve $\sum\limits_{j=n}^{\infty} p(j) = \infty$ sağlansın. $(\tau(n))$ monoton olması gerekmeyen bir dizi ve f azalmayan bir fonkisyon olmak üzere, eğer

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n} p(j) > M, \; 0 < M < \infty \tag{2.2.33}$$

ise (2.2.27) denkleminin tüm çözümleri salınımlıldır, burada $h(n) = \max\limits_{1\leq i\leq m} \{\tau(n)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Öcalan vd. 2018).

Sonuç olarak $(\tau(n))$ azalmayan bir dizi olursa $\tau(n) = h(n)$ olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için (2.2.32) ve (2.2.33) koşulları sırasıyla aşağıdaki koşullara dönüşür.

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n} p(j) > \theta M,\ 0 < M < \infty \tag{2.2.34}$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n} p(j) > M,\ 0 < M < \infty. \tag{2.2.35}$$

Örnek 2.2.1 Aşağıda verilen birinci mertebeden lineer olmayan tek gecikmeye sahip fark denklemini ele alalım.

$$\Delta x(n) + \frac{1}{e} x(\tau(n)) \ln(10 + |x(\tau(n))|) = 0,\ n \geq 0. \tag{2.2.36}$$

Burada

$$\tau(n) = \begin{cases} n-1, & n \in [3k, 3k+1] \\ -3n+12k+3, & n \in [3k+1, 3k+2] \\ 5n-12k-13, & n \in [3k+2, 3k+3] \end{cases},\quad k \in \mathbb{N}_0,$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Ayrca $h(n) = \max\limits_{1\leq i\leq m} \{\tau(n)\}$ olduğundan, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$h(n) := \max_{s\leq n} \tau(s) = \begin{cases} n-1, & n \in [3k, 3k+1] \\ 3k, & n \in [3k+1, 3k+2.6] \\ 5n-12k-13, & n \in [3k+2.6, 3k+3] \end{cases},\quad k \in \mathbb{N}_0$$

Diğer taraftan (2.2.30) yardımıyla

$$M = \limsup_{x\to 0} \frac{x}{f(x)} = \limsup_{x\to 0} \frac{x}{x\ln(10+|x|)} = \frac{1}{\ln 10}$$

ifadesi elde edilir.

Böylece

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} p(j) = \frac{1}{e} > \frac{M}{e} = \frac{1}{e\ln 10}$$

olup, Teorem 2.2.14'ün tüm koşulları sağlanır. Böylece (2.2.36) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Öcalan vd. 2018).

3 BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMI

Salımlılık teorisi ile ilgili çalışmalarda genellikle aşağıda belirtilen durumlar üzerinde durulmuştur:

(i) Salınımlı olmayan çözümün varlığı için yeter şartlar.

(ii) Her çözümün salınımlı olması için yeter şartlar.

Verilen bu durumlar için yapılan çalışmalar birbirinden farklıdır. İlk durum için sabit işaretli olan bir çözümün var olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda çeşitli sabit nokta teoremleri uygulanabilir ya da salınımlı olmayan bir çözüme yakınsak, monoton bir dizi tanımlanabilir. İkinci durumda ise denklemin bazı çözümleri için bu yöntemlerin kullanılması uygun değildir. Bu yüzden çelişki yöntemi kullanılarak ispat yapılır. Yani, verilen denkleme ait salınımlı olmayan bir çözümün varlığı kabul edilir ve bu denklemin parametreleri için kabul edilen şartların sağlandığı gösterilerek çelişki elde edilir.

Birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin salınımlılık davranışı ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. Ancak birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denklemlerinin salınımı üzerine çok sayıda çalışma bulunmamaktadır. Özellikle daha genel bir durum olan monoton olması gerekmeyen argumanları içeren denklemlerle ilgili yapılan çalışmalar neredeyse yok denecek kadar azdır.

Bu nedenle bu tez çalışmasında

$$\Delta x(n)+\sum_{i=1}^{m}p_i(n)f_i(x(\tau_i(n)))=0,\quad n=0,1,... \tag{3.1}$$

şeklinde verilen birinci mertebeden lineer olmayan birkaç gecikmeli fark denkleminin salınımlılık davranışı ele alınmıştır. Bu denklemin çözümlerinin salınımlılığı için yeni salınımlılık kriterleri elde edilmiştir.

Burada $1\le i\le m$ için $\{p_i(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen ve

$$n\ge 0 \text{ için } \tau_i(n)\le n-1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\tau_i(n)=\infty,\ 1\le i\le m \tag{3.2}$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve

$$f_i\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ ve } x\neq 0 \text{ için } xf_i(x)>0,\ 1\le i\le m \tag{3.3}$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \tag{3.4}$$

eşitliği ile tanımlansın.

Ayrıca

$$r = -\min_{n\geq 0}\{\tau_i(n)\},\ 1 \leq i \leq m \tag{3.5}$$

ifadesini tanımlayalım. Açık olarak, r pozitif bir tamsayıdır.

$1 \leq i \leq m$ için $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen diziler olmak üzere

$$h_i(n) := \max_{s\leq n}\{\tau_i(s)\},\ \ n \geq 0 \text{ ve } h(n) = \max_{1\leq i\leq m}\{h_i(n)\} \tag{3.6}$$

eşitliklerini tanımlayalım. Açık olarak, $1 \leq i \leq m$ için $(h_i(n))$ dizileri azalmayan ve her $n \geq 0$ ve $1 \leq i \leq m$ için $\tau_i(n) \leq h_i(n) \leq h(n)$ olur.

Diğer taraftan (3.1) denkleminde yer alan $1 \leq i \leq m$ için f_i fonksiyonları aşağıda verilen şartı sağlasın.

$$M_i = \limsup_{x\to 0}\frac{x}{f_i(x)},\ 0 \leq M_i < \infty. \tag{3.7}$$

Chatzarakis ve Jadlovskā (2018) tarafından aşağıdaki lemma verilmiştir.

Lemma 3.1 (3.2) sağlansın ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty}\sum_{j=h(n)}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}p_i(j) = \liminf_{n\to\infty}\sum_{j=\tau(n)}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}p_i(j) \tag{3.8}$$

eşitliği vardır, burada $h(n)$, (3.5) eşitliği ile tanımlanmış ve $\tau(n) = \max_{1\leq i\leq m}\{\tau_i(n)\}$ şeklindedir (Chatzarakis ve Jadlovskā 2018).

Lemma 3.2 $(x(n))$, (3.1) denkleminin ergeç pozitif bir çözümü olsun. Eğer

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=h(n)}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_i(j) > 0 \tag{3.9}$$

ise $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ olur. Burada $h(n)$, (3.5) eşitliği ile tanımlanmıştır.

Ayrıca, $(x(n))$, (3.1) denkleminin ergeç negatif bir çözümü olsun. Bu durumda, eğer (3.9) ifadesi sağlanırsa, $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ olur.

İspat $(x(n))$, (3.1) denkleminin ergeç pozitif bir çözümü olsun. Ayrıca, her $n \geq n_1$ için $x(n)$, $x(\tau(n)) > 0$ olacak şekilde $n_1 > n_0$ mevcuttur. Böylece (3.1) denkleminden

$$\Delta x(n) = -\sum_{i=1}^{m} p_i(n) f_i\left(x\left(\tau_i(n)\right)\right) \leq 0, \ \forall n \geq n_1$$

eşitsizliği elde edilir. Yani, $(x(n))$ azalmayan olur ve $l \geq 0$ şeklinde bir limiti mevcuttur. Şimdi biz bu limitin $l = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu nedenle, aksine $l > 0$ olduğunu kabul edelim. (3.1) denklemini $h(n)$ den n ye toplam uygularsak

$$x(n+1) - x(h(n)) + \sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(n) f_i\left(x\left(\tau_i(n)\right)\right) = 0, \ n \geq n_1 \tag{3.10}$$

ifadesini elde ederiz.

$1 \leq i \leq m$ için f_i fonksiyonları sürekli olduğu için $\lim\limits_{n\to\infty} f_i\left(x\left(\tau_i(n)\right)\right) = f_i(l) > 0$ olur. Böylece $1 \leq i \leq m$ ve $n \geq n_2$ için $f_i\left(x\left(\tau_i(n)\right)\right) \geq d_i > 0$ olacak şekilde bir n_2 mevcuttur. Bu ifadeyi ve (3.10) eşitsizliğini kullanarak

$$x(n+1) - x(h(n)) + d \sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) \leq 0, \ n \geq n_2 \tag{3.11}$$

eşitsizliğini elde ederiz, burada $d = \min\limits_{1\leq i\leq m} \{d_i\} > 0$ şeklinde tanımlanmıştır.
Diğer taraftan (3.9) ifadesinden, $k \to \infty$ iken $n_k \to \infty$ ve

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=h(n_k)}^{n_k} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > 0 \tag{3.12}$$

olacak şekilde en az bir $\{n_k\}$ dizisi mevcuttur.
Böylece (3.11) ifadesinde $k \to \infty$ iken $n \to n_k$ yazılırsa

$$d \lim_{k\to\infty} \sum_{j=h(n_k)}^{n_k} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) \leq 0 \tag{3.13}$$

eşitsizliği elde edilir. Ancak, elde edilen (3.13) ifadesi (3.12) ifadesi ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Benzer işlem adımları takip edilerek $(x(n))$, (3.1) denkleminin ergeç negatif bir çözümü olduğunda ve (3.9) ifadesi sağlandığında $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = 0$ olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 3.1 (3.2), (3.3) ve (3.7) sağlansın. Eğer $1 \leq i \leq m$ için $(\tau_i(n))$ monoton olması gerekmeyen diziler ve

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > \frac{M^*}{e}, \ 0 \leq M^* < \infty \tag{3.14}$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, burada $M^* = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \{M_i\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

İspat $(x(n))$, (3.1) denkleminin ergeç pozitif bir çözümü olsun. Eğer $(x(n))$ (3.1) denkleminin ergeç negatif bir çözümü olursa, bu durumda ispat aşağıda verilen işlem adımları takip edilerek benzer şekilde yapılabilir. Ayrıca her $n \geq n_1$ ve $1 \leq i \leq m$ için $x(n),\ x(\tau_i(n)),\ x(h(n)) > 0$ olacak şekilde $n_1 \geq n_0$ mevcuttur. Böylece (3.1) denkleminden

$$\Delta x(n) = -\sum_{i=1}^{m} p_i(n) f_i\left(x\left(\tau_i(n)\right)\right) \leq 0,\ \forall n \geq n_1$$

eşitsizliği elde edilir. Yani, $(x(n))$ artmayan olur. Böylece (3.14) şartından ve Lemma 3.2 yardımıyla $\lim\limits_{n \to \infty} x(n) = 0$ olur.

Şimdi $1 \leq i \leq m$ için $M_i > 0$ olsun. (3.7) yardımıyla

$$f_i(x(n)) \geq \frac{1}{2M_i} x(n) \ \geq \frac{1}{2M^*} x(n),\ n \geq n_2 \tag{3.15}$$

olacak şekilde $n_2 \geq n_1$ seçebiliriz.

$1 \leq i \leq m$ için $h(n) \geq \tau_i(n)$ ve $(x(n))$ artmayan olduğundan, (3.1) ve (3.15) yardımıyla

$$\Delta x(n) + \frac{1}{2M^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x\left(h(n)\right) \leq 0,\ n \geq n_2 \tag{3.16}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Ayrıca (3.14) ve Lemma 3.1 yardımıyla

$$\sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) \geq \sum_{j=h(n)}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) \geq c > \frac{M^*}{e},\ n \geq n_3 \geq n_2 \tag{3.17}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti mevcuttur.

Böylece (3.17) ifadesinden

$$\sum_{j=h(n)}^{n^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > \frac{M^*}{2e} \quad \text{ve} \quad \sum_{j=n^*}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) > \frac{M^*}{2e} \tag{3.18}$$

olacak şekilde her $n \geq n_3$ için $n^* \in [h(n), n]$ tamsayısı mevcuttur.

Şimdi, $(x(n))$ in artmayan olduğunu kullanarak (3.16) eşitsizliğine $h(n)$ den n^* a kadar toplam uygulanırsa

$$x(n^* + 1) - x\left(h(n)\right) + \frac{1}{2M^*} \sum_{j=h(n)}^{n^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) x\left(h(j)\right) \leq 0$$

ya da

$$x(n^*+1) - x\left(h(n)\right) + \frac{1}{2M^*} x\left(h(n^*)\right) \sum_{j=h(n)}^{n^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) \leq 0$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.18) yardımıyla son eşitsizlikten

$$-x\left(h(n)\right) + \frac{1}{2M^*} x\left(h(n^*)\right) \frac{M^*}{2e} < 0$$

ya da

$$x\left(h(n)\right) > \frac{1}{4e} x\left(h(n^*)\right) \tag{3.19}$$

ifadesi elde edilir.

Ayrıca, $(x(n))$ in artmayan olduğunu kullanarak (3.16) eşitsizliğine n^* dan n ye kadar toplam uygulanırsa

$$x(n+1) - x\left(n^*\right) + \frac{1}{2M^*} \sum_{j=n^*}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) x\left(h(j)\right) ds \leq 0$$

ya da

$$x(n+1) - x\left(n^*\right) + \frac{1}{2M^*} x\left(h(n)\right) \sum_{j=n^*}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.18) yardımıyla son eşitsizlikten

$$-x\left(n^*\right) + \frac{1}{2M^*} x\left(h(n)\right) \frac{M^*}{2e} < 0$$

ya da

$$x\left(n^*\right) > \frac{1}{4e} x\left(h(n)\right) \tag{3.20}$$

ifadesi elde edilir.

Böylece (3.19) ve (3.20) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde

$$x(n^*) > x\left(h(n)\right) \frac{1}{4e} > x\left(h(n^*)\right) \left(\frac{1}{4e}\right)^2$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\frac{x\left(h(n^*)\right)}{x(n^*)} < (4e)^2, \ n \geq n_3$$

bulunur.

Diğer taraftan aşağıdaki eşitliği tanımlayalım.

$$w = \liminf_{n\to\infty} \frac{x(h(n^*))}{x(n^*)} \geq 1. \tag{3.21}$$

Böylece, $1 \le w \le (4e)^2$ olduğundan w sınırlı olur.

Şimdi (3.1) denklemini $x(n)$ ile bölüp $h(n)$ den $n-1$ e toplam uygularsak

$$\sum_{j=h(n)}^{n-1} \frac{\Delta x(j)}{x(j)} + \sum_{j=h(n)}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) \frac{f_i(x(\tau_i(j)))}{x(j)} = 0 \tag{3.22}$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca

$$\ln \frac{x(n)}{x(h(n))} \le \sum_{j=h(n)}^{n-1} \frac{\Delta x(j)}{x(j)} \tag{3.23}$$

eşitsizliği mevcuttur. Böylece (3.22) ve (3.23) yardımıyla

$$\ln \frac{x(n)}{x(h(n))} + \sum_{j=h(n)}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) \frac{f_i(x(\tau_i(j)))}{x(\tau_i(j))} \frac{x(\tau_i(j))}{x(j)} \le 0$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece $1 \le i \le m$ için $h(n) \ge \tau_i(n)$ ve $(x(n))$ artmayan olduğundan

$$\ln \frac{x(h(n))}{x(n)} \ge \sum_{j=h(n)}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) \frac{f(x(\tau_i(j)))}{x(\tau_i(j))} \frac{x(h(j))}{x(j)} \tag{3.24}$$

elde edilir.

Ayrıca $h(n) \le \mu \le n$ olacak şekilde bir μ tamsayısı mevcuttur. Böylece (3.24) ifadesinden

$$\ln \frac{x(h(n))}{x(n)} \ge \sum_{i=1}^{m} \frac{f(x(\tau_i(\mu)))}{x(\tau_i(\mu))} \frac{x(h(\mu))}{x(\mu)} \sum_{j=h(n)}^{n-1} p_i(j) \tag{3.25}$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen (3.25) eşitsizliğinin (3.2), (3.14) ve (3.21) ifadelerini kullanarak, her iki tarafının alt limitini alırsak $\ln w > \frac{w}{e}$ elde ederiz. Ancak her $x > 0$ için $\ln x \le \frac{x}{e}$ olduğundan çelişki elde edilir.

Şimdi $1 \le i \le m$ için $M_i = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.7) ifadesinden $1 \le i \le m$ için

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{f_i(x)} = 0 \tag{3.26}$$

eşitliği elde edilir. $1 \le i \le m$ için $\frac{x}{f_i(x)} > 0$ olduğundan, (3.26) yardımıyla yeterince büyük tamsayılar için aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\frac{x}{f_i(x)} < \epsilon_i \le \epsilon^*, \ 1 \le i \le m$$

ya da

$$\frac{f_i(x)}{x} > \frac{1}{\epsilon^*},\ 1 \leq i \leq m, \tag{3.27}$$

burada $\epsilon^* = \max\limits_{1\leq i\leq m}\{\epsilon_i\} > 0$ şeklinde tanımlanan keyfi bir reel sayıdır. Böylece $1 \leq i \leq m$ için $\tau_i(n) \leq h(n)$ ve $(x(n))$ artmayan olduğundan, (3.27) yardımıyla (3.1) denklemi

$$\Delta x(n) + \frac{1}{\epsilon^*}\sum_{i=1}^{m} p_i(n)x(h(n)) < 0, \quad n \geq n_1. \tag{3.28}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Elde edilen (3.28) eşitsizliğine $(h(n))$ nin azalmayan olduğu göz önünde bulundurarak $h(n)$ den n ye toplam uygulanırsa,

$$x(n+1) - x(h(n)) + \frac{1}{\epsilon^*}\sum_{j=h(n)}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i(j)x(h(j)) < 0$$

eşitsizliği elde edilir ve

$$-x(h(n)) + \frac{1}{\epsilon^*}x(h(n))\sum_{j=h(n)}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i(j) < 0 \tag{3.29}$$

bulunur. (3.17) ve (3.29) ifadeleri yardımıyla

$$\frac{c}{\epsilon^*} < 1$$

ya da

$$\epsilon^* > c \tag{3.30}$$

elde edilir. ϵ^* keyfi bir reel sayı olduğundan, bu durum $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)} = 0$ olması ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2 (3.2), (3.3) ve (3.7) sağlansın. Eğer $1 \leq i \leq m$ için $(\tau_i(n))$ monoton olması gerekmeyen diziler ve

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=h(n)}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i(j) > M^*,\ 0 < M^* < \infty \tag{3.31}$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, burada $h(n)$ (3.6) ifadesindeki gibi tanımlanmıştır ve $M^* = \max\limits_{1\leq i\leq m}\{M_i\}$ şeklindedir.

İspat $(x(n))$, (3.1) denkleminin ergeç pozitif bir çözümü olsun. Eğer $(x(n))$ (3.1) denkleminin ergeç negatif bir çözümü olursa, bu durumda ispat aşağıda verilen işlem adımları takip edilerek benzer şekilde yapılabilir. Ayrıca her $n \geq n_1$ ve $1 \leq i \leq m$ için $x(n), \ x(\tau_i(n)), \ x(h(n)) > 0$ olacak şekilde $n_1 \geq n_0$ mevcuttur. Teorem 3.1 den $(x(n))$ artmayan olur. Ayrıca (3.31) ifadesinden ve Lemma 3.2 yardımıyla $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ olur. Diğer taraftan (3.7) ifadesi yardımıyla $\theta > 1$ olmak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$f_i(x(n)) \geq \frac{1}{\theta M_i} x(n) \geq \frac{1}{\theta M^*} x(n), \ 1 \leq i \leq m. \tag{3.32}$$

(3.31) ifadesinden,

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) = K > M^* \tag{3.33}$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti mevcuttur.

$K > M^*$ olduğundan $M^* < \frac{K+M^*}{2} < K$ elde edilir. Ayrıca (3.32) yardımıyla, (3.1) denklemi

$$\Delta x(n) + \frac{1}{\theta M^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) x(\tau_i(n)) \leq 0 \tag{3.34}$$

eşitsizliğine dönüşür.

$1 \leq i \leq m$ için $h(n) \geq \tau_i(n)$ ve $(x(n))$ artmayan olduğundan

$$\Delta x(n) + \frac{1}{\theta M^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) x(h(n)) \leq 0 \tag{3.35}$$

elde edilir.

$(h(n))$ nin azalmayan olduğu göz önüne alınarak (3.35) eşitsizliğne $h(n)$ den n ye toplam uygulanırsa

$$x(n+1) - x(h(n)) + \frac{1}{\theta M^*} \sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) x(h(j)) \leq 0$$

ya da

$$-x(h(n)) + \frac{1}{\theta M^*} x(h(n)) \sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) < 0$$

ifadeleri elde edilir.

Buradan

$$-x(h(n)) \left[1 - \frac{1}{\theta M^*} \sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) \right] < 0, \ n \geq n_2$$

olup

$$\sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) < \theta M^*$$

bulunur.

Böylece

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) \leq \theta M^*$$

elde edilir. $\theta > 1$ ve $\frac{K+M^*}{2M^*} > 1$ olduğundan bu ifade θ olarak seçilebilir. Eğer $\theta = \frac{K+M^*}{2M^*} > 1$ ifadesi son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=h(n)}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) = K \leq \frac{K+M^*}{2} \tag{3.36}$$

ifadesi elde edilir. Ancak bu durum $K > \frac{K+M^*}{2}$ olması ile çelişir, böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.1 Aşağıda verilen birinci mertebeden lineer olmayan birkaç gecikmeye sahip fark denklemini ele alalım.

$$\Delta x(n) + \frac{0.2}{e} x(\tau_1(n)) \ln(10 + |x(\tau_1(n))|) + \frac{0.5}{e} x(\tau_2(n)) \ln(5 + |x(\tau_2(n))|) = 0, \quad n \geq 0. \tag{3.37}$$

Burada

$$\tau_1(n) = \begin{cases} n-1, & n \in [3k, 3k+1] \\ -3n+12k+3, & n \in [3k+1, 3k+2] \\ 5n-12k-13, & n \in [3k+2, 3k+3] \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

ve

$$\tau_2(n) = \tau_1(n) - 1$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Ayrıca (3.6) yardımıyla

$$h_1(n) := \max_{s\leq n} \tau_1(s) = \begin{cases} n-1, & n \in [3k, 3k+1] \\ 3k, & n \in [3k+1, 3k+2.6] \\ 5n-12k-13, & n \in [3k+2.6, 3k+3] \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

ve

$$h_2(n) = h_1(n) - 1$$

olduğu görülür. Böylece

$$h(n) = \max_{1\leq i\leq 2}\{h_i(n)\} = h_1(n)$$

olur.

Diğer taraftan

$$M_1 = \limsup_{x\to 0} \frac{x}{f_1(x)} = \limsup_{x\to 0} \frac{x}{x\ln(10+|x|)} = \frac{1}{\ln 10}$$

ve

$$M_2 = \limsup_{x\to 0} \frac{x}{f_2(x)} = \limsup_{x\to 0} \frac{x}{x\ln(5+|x|)} = \frac{1}{\ln 5}$$

elde edilir. Buradan

$$M^* = \max_{1\le i\le 2}\{M_i\} = M_2$$

olduğu görülür.

Son olarak

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=\tau(n)}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(j) = \frac{0.7}{e} > \frac{M^*}{e} = \frac{1}{e\ln 5}$$

olup Teorem 3.1 in tüm koşulları sağlanır ve (3.37) denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur.

4 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında $1 \leq i \leq m$ için $\{p_i(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$n \geq 0 \text{ için } \tau_i(n) \leq n-1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \tau_i(n) = \infty, \ 1 \leq i \leq m$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve

$$f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ve } x \neq 0 \text{ için } x f_i(x) > 0, \ 1 \leq i \leq m$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) f_i(x(\tau_i(n))) = 0, \quad n = 0, 1, ...$$

şeklinde verilen birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli fark denklemleri çalışılmıştır. Bu denklemin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeni yeter şartlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlarda literatürde yer alan diğer sonuçlardan farklı olarak gecikme terimlerinin monoton olması gerekmemektedir. Ayrıca tezimizde yer alan sonuçların ilerleyen zamanlarda bu konular üzerinde çalışacak olan araştırmacılara yol gösterici nitelikte olacağı düşünülmektedir.

5 KAYNAKLAR

Agarwal R P, 2000, Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, New York.

Agarwal R P, Grace S R, O'Regan D, 2000, Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Berezansky L, Braverman E, 2006, On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays, Advances in Dynamical Systems and Applications, 1, 29–47.

Braverman E, Chatzarakis G E, Stavroulakis I P, 2015, Iterative oscillation tests for difference equations with several non-monotone arguments, Journal of Difference Equations and Applications, 21(9), 854-874.

Chatzarakis G E, Koplatadze R, Stavroulakis I P, 2008, Oscillation criteria of first order linear difference equations with delay argument, Nonlinear Analysis, 68, 994–1005.

Chatzarakis G E, Koplatadze R, Stavroulakis I P, 2008, Optimal oscillation criteria for first order difference equations with delay argument, Pacific Journal of Mathematics, 235, 15–33.

Chatzarakis G E, Philos Ch.G, Stavroulakis I P, 2008, On the oscillation of the solutions to linear difference equations with variable delay, Electronic Journal of Differential Equations, 2008, 50.

Chatzarakis G E, Philos Ch.G, Stavroulakis I P, 2009, An oscillation criterion for linear difference equations with general delay argument, Portugaliae Mathematica, 66(4), 513–533 (2009)

Chatzarakis G E, Pinelas S, Stavroulakis I P, 2014, Oscillations of difference equations with several deviated arguments, Aequationes Mathematicae, 88, 105–123.

Chatzarakis G E, Kusano T, Stavroulakis I P, 2015, Oscillation conditions for difference equations with several variable arguments, Mathematica Bohemica, 140 (3), 291–311.

Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2018, Difference equations with several nonmonotone deviating arguments: Iterative oscillation tests, Dynamic Systems and Applications, 27(2), 271-298.

Chen M P, Yu J.S, 1994, Oscillations of delay difference equations with variable coefficients, In: Proceedings of the First International Conference on Difference Equations, 105–114. Gordon and Breach, London.

Elaydi S, 2000, An Introduction to Difference Equations Third Edition, Springer, New York.

Erbe L H, Zhang B G, 1989, Oscillation of discrete analogues of delay equations, Differential Integral Equations, 2(3), 300–309.

Györi I, Ladas G, 1989, Linearized oscillations for equations with piecewise constant arguments, Differential Integral Equations, 2, 123–131.

Györi I, Ladas G, 1991, Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, Clarendon Press, Oxford.

Jiang J C, Tang X H, 2002, Oscillation of nonlinear delay difference equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 146, 395–404.

Kılıç N, Öcalan Ö, 2020, Oscillation criteria for difference equations with several arguments, International Journal of Difference Equations, 15 (1), 109–119.

Ladde G S, Lakshmikantham V, Zhang B G, 1987, Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 110, Marcel Dekker, Inc., New York.

Ladas G, Philos Ch G, Sficas Y G, 1989, Sharp condition for the oscillation of delay difference equations, Journal of Applied Mathematics and Simulation, 2, 101-112.

Ladas G, 1990, Explicit conditions for the oscillation of difference equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 153, 276-287.

Philos, Ch.G, 1991, On oscillations of some difference equations, Funkcialaj Ekvacioj, 34, 157–172.

Öcalan Ö, 2016, An improved oscillation criterion for first order difference equations, Bulletin Mathematique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, 59(107)(1), 65–73.

Öcalan Ö, Özkan U M, Yıldız M K, 2018, Oscillation analysis for nonlinear difference equation with non-monotone arguments, Advances in Difference Equations, 166, 11 pages.

Öcalan A, Öcalan Ö, Özkan U M, 2022, Oscillatory behavior for nonlinear delay difference quation with non-monotone arguments, Dynamic Systems and Applications, 31, No.1, 53-62.

Tang X H, Yu J S, 2000, Oscillation of nonlinear delay difference equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 249, 476–490.

Yan W, Meng Q, Yan J, 2006, Oscillation criteria for difference equation of variable delays, DCDIS Series A: Mathematical Analysis, 13A, Part 2, suppl., 641–647.

Yu J S, Wang Z C, 1992, Some further results on oscillation of neutral differential equations, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 46, 149–157.

Zhang B G, Tian C J, 1998, Oscillation criteria for difference equations with unbounded delay, Computers and Mathematics with Applications, 35 (4), 19–26.

Zhang B G, Tian C J, 1998, Nonexistence and existence of positive solutions for difference equations with unbounded delay, Computers and Mathematics with Applications, 36, 1–8.

Zhang B G, Yan X Z, Liu X Y, 2005, Oscillation criteria of certain delay dynamic equations on time scales, Journal of Difference Equations and Applications, 11(10), 933–946.

Zhou Y, 2006, Oscillation of higher-order delay difference equations, Advances in Difference Equations, Article ID 65789, 7 pages.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ayşenur ÖCALAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Erzincan/ 21.10.1996
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: aysenurocalann@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Erzincan Milliyet Anadolu Öğretmen Lisesi, 2015
Lisans	: Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü, 2019
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2022

Çalıştığı Kurum(lar)

: ....

Yayınları (SCI ve diğer)

Öcalan A, Öcalan Ö, Özkan U M, 2022, Oscillatory Behavior for Nonlinear Delay Difference Equation with Non-monotone Arguments, Dynamic Systems and Applications, 31 (2022) No.1, 53-62.