

Mikro Hasarlı Plakların Riesz-Caputo Kesirli Türevi ile Titreşim AnaliziSoner AYDINLIK^{1*}, Ahmet KIRIS²¹Doğuş Üniversitesi, Yazılım Mühendisliği, Ümraniye, 34775, İstanbul²İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği, Maslak, 34469, İstanbulSorumlu yazar e-posta: saydinlik@dogus.edu.tr* ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0321-4920>

kiris@itu.edu.tr

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-3687-6640>

Geliş Tarihi: 08.02.2022

Kabul Tarihi: 05.10.2022

Öz**Anahtar kelimeler**

Riesz-Caputo kesirli türevi; Nonlokal plak titreşimi; Uzay-zaman kesirli türev; Mikrojenleşme teorisi

Bu çalışmada Riesz Caputo kesirli türev tanımı yardımıyla, nonlokal çekirdekler tanımlamadan, mikrojenleşme teorisi ile modellenen mikro hasarlı plakların nonlokal titreşim analizi yapılmıştır. Dört ucu ankastre-“clamped” (CCCC) mikro hasarlı plağın frekans spektrumu ve mod şekilleri kesirli türev mertebesinin (α) ve birim uyum katsayısının (l) farklı değerleri için elde edilmiştir. 3-boyutlu titreşim analizi Ritz enerji yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın bilimsel literatüre temel katkısı, kesirli türev kavramıyla modellenen nonlokal titreşim analizinin klasik teoriye göre daha uygun bir model olduğunun ve deneysel sonuçlarla daha iyi örtüşüğünün gösterilmesidir.

Vibration Analysis of Micro-Damaged Plates with Riesz-Caputo Fractional Derivative**Keywords**

Riesz-Caputo fractional derivative; Nonlocal plate vibration; Space-time fractional derivative; Microelongation theory

Abstract

In this study, with the help of Riesz Caputo fractional derivative definition, non-local analysis of micro-damaged plates are investigated by micro-elongation theory without defining the nonlocal kernels. The frequency spectrum and mode shapes of the microelongated plate with four clamped edges for different values of the fractional continua order (α) and the material length scale parameter (l) are carried out. 3-dimensional vibration analysis are done using the Ritz energy method. The main contribution of the study to the scientific literature is the demonstration that the nonlocal vibration analysis modeled with the concept of fractional derivative is a more suitable model than the classical theory and it fits better with the experimental results.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

Klasik sürekli ortamlar mekaniği, makro özellik gösteren malzemelerin modellenmesinde deneysel sonuçlara uygun sonuçlar vermesine rağmen mikro hasarlar, mikro yapıli kompozitler gibi mikro yapılar içeren malzemeler için yeterince iyi bir model sunamamaktadır. Örneğin akustik dalga yayılımında, yüzey dalgaları altında doğrusal olmayan yer değiştirmelerin hesabında, tek boyutlu durum için bile klasik teorinin yetersizliği gözlenebilmektedir (Mindlin and Eshel 1968, Eringen and Edelen 1972). Eringen'in mikropolar ve mikrogerme teorileri (Eringen 1968, 1990), Mindlin' in birinci ve ikinci mertebeye genleme gradyanı teorileri (Mindlin 1964,

1965) gibi alternatif yaklaşımlar, Cosserat kardeşlerin yaklaşık yarım yüzyıldır unutulmuş çalışmalarını (Cosserat 1896) ortaya çıkarmıştır. Eringen'in mikropolar teorisi Cosserat teorisi ile tamamen örtüşmekte olup, elementer parçacığın makro hareketinin yanısıra, mikro çapta bağımsız bir mikro dönme hareketi yaptığı kabulüne dayanmaktadır. Mikrogerme teorisinde ise, bu mikro dönme hareketine ek olarak parçacığın, yine makro hareketten bağımsız bir hacimsel genleşme yapabildiği varsayılır. Mikrojenleşme teorisi ise, parçacığın sadece mikro hacimsel genleşme yapabildiği özel bir durum olarak düşünülebilir. Mikropolar ve mikrogerme teorileri mikro

parçacıklar, kompozitler içeren mikro yapılı malzemeler için iyi sonuç verirken, mikrogenleşme teorisi bu teorilerin getirdiği denklem ve bilinmeyen malzeme sabiti sayısını azaltmakla birlikte özellikle mikro hasarlı malzemelerin modellenmesinde daha iyi sonuçlar vermektedir.

Günümüzün gelişen teknolojisi ile birlikte, önceki yüzyıllara göre daha üstün mekanik, termal, elektriksel ve manyetik etki gösteren malzemelere duyulan ihtiyaç her geçen gün daha fazla artmaktadır. Bu tür malzemeler için gerilme ve şekil değiştirmenin doğru olarak hesaplanması özellikle gemi, uçak, uzay bilimleri, inşaat, otomotiv, elektronik ve biyomedikal alanlarında oldukça önemlidir. Dahası, malzemelerin bu üstün özelliklerinin yanısıra, ağırlık ve boyut olarak mümkün olduğunca küçük olmasının istenmesi bir başka güçlüktür. Deneyle, bu sınırlamalar altında, boyut-etkisinin daha önemli olduğunu ve bu etkinin hesaplamalara katılması gerektiğini göstermektedir (Cottone *et al.* 2009).

Eringen' in mikropolar ve mikrogerme teorileri klasik teoriye göre daha iyi sonuç verseler de, sadece incelenen noktanın katkısıyla sınırlı olup, nonlokal davranışı yansıtamazlar. Nonlokalite, malzemenin bir noktadaki davranışının sadece o noktadaki özelliklerine değil, o noktanın civarındaki noktaların özelliklerinden de etkilendiği gerçeğine dayanır. Bu nonlokal etki, küçük boyut ölçekli malzemelerin davranışının tahmini ve açıklanmasında etkilidir. Örneğin, zaman-harmonik Rayleigh yüzey dalgalarının nonlokal teorisiyle elde edilen dispersiyon eğrileri atomik dispersiyon eğrileri ile tamamen çakışır (Khuruna and Tomar 2017). Sarmal dislokasyon ve Rayleigh yüzey dalgaları (Eringen 1983) ve doğrusal isotropik nonlokal mikropolar elastik katılarda enine düzlem dalgalar için dispersiyon ilişkilerinin analizi (Eringen 1984) nonlokalite teorisinin üstünlüğünü açıkça göstermektedir.

Mikrogerme ve mikropolar teorileri bu üstünlüklerine rağmen, klasik teoriye göre daha çok malzeme özelliği ve daha fazla sayıda karmaşık denklem içermektedir. Ayrıca nonlokalitenin etkisi

de nonlokal çekirdekler kullanılarak işlemlere dahil edildiğinde, hesaplar daha da güçleşmektedir. Dolayısıyla bu karmaşıklık yerine, kesirli türev kavramından faydalanan, kesirli mekaniğin doğal nonlokal yapısı, var olan modellerin kesirli mekaniğe genişletilmesini oldukça popüler kılmaktadır (Aydınlik ve Kırış 2020, Aydınlik vd. 2021a, Aydınlik vd. 2021b)

Bu çalışmada, dört ucu ankastre (CCCC) mikro hasarlı plaklar mikrogenleşme teorisi ile modellenmiş ve 3-boyutlu nonlokal titreşim analizi kesirli mekanik kapsamında incelenmiştir. Bu anlamda çalışmada verilen kesirli Kirchoff-Love plak teorisi genelleştirilmiştir (Sumelka 2015) ve klasik birinci mertbe gradyanlar yerine, nonlokaliteyi modelleyen yerdeğiştirme alanının kesirli Riesz-Caputo türevi kullanılmıştır. Zhou vd.' nin (2002) çalışmasına benzer şekilde, frekans spektrumu ve mod şekilleri için Ritz enerji yaklaşımı kullanılmıştır. Genlik fonksiyonları sınır koşullarına uygun sınır fonksiyonları ile çarpılan üçlü Chebyshev serileri cinsinden yazılmıştır. Plagın frekans spektrumu ve mod şekilleri kesirli türev mertebesinin ve uzunluk ölçü parametresi parametresinin farklı değerleri için şekil ve tablolarla verilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar deneysel frekanslarla (Low *et al.* 1998) karşılaştırılarak, kesirli malzeme özelliklerinin belirli değerleri için kesirli hesapla elde edilen frekansların klasik frekanslara göre deneysel sonuçlara daha yakın olduğu gözlenmiştir, ki bu durum, çalışmanın temel sonuçlarından biridir. Ayrıca kesirli türevin mertebesi tamsayı türeve ve birim uyum katsayısı sıfıra yaklaştıkça, sonuçların beklendiği üzere klasik sonuçlarla uyum içinde olduğu da gösterilmiştir.

Bu çalışmada, Riesz-Caputo kesirli türev opertörü ve kesirli türev tanımına genişletilen modifiye trapez yöntemi (Odibat 2006) 2. Bölümde verilmiştir. 3. Bölümde, mikrogenleşen dikdörtgen plakların nonlokal titreşim analizi verilmiştir. 4. Bölüm, sunulan kesirli modelin etkinliğinin deneysel olarak doğrulanmasına ayrılarak, bu bölümde kesirli modelin klasik modele göre deneysel sonuçları daha iyi yansıttığı gösterilmiştir.

2. Materyal ve Metot

2.1 Riesz-Caputo Kesirli Türevi

Tanım. Riesz-Caputo kesirli türevi

$${}^{RC}D_b^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}({}_a^C D_t^\alpha f(t) + (-1)^n {}_t^C D_b^\alpha f(t)), & n-1 \leq \alpha < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n, \end{cases} \quad (1)$$

olarak tanımlanır. Burada, ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ ve ${}_t^C D_b^\alpha f(t)$ sırasıyla sol ve sağ Caputo kesirli türevine karşılık gelmektedir ve bu türevler

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds \quad a > t, \quad n-1 \leq \alpha < n, \quad (2)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(s)}{(s-t)^{\alpha-n+1}} ds \quad t < b, \quad n-1 \leq \alpha < n. \quad (3)$$

olarak tanımlanırlar. Bu çalışmada, sol ve sağ Caputo kesirli türevlerinin yaklaşık değerleri modifiye trapez kuralı kullanılarak elde edilmiştir (Odibat 2006). Ayrıca bu çalışmada Riesz-Caputo kesirli türevi

$${}_{t-l_t}^{RC} D_{t+l_t}^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{2} I_t^{\alpha-1} ({}_{t-l_t}^C D_t^\alpha f(t) + (-1)^n {}_t^C D_{t+l_t}^\alpha f(t)), & n-1 \leq \alpha < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n, \end{cases} \quad (4)$$

olacak şekilde tanımlanmıştır. Burada l_t birim uyum katsayısıdır. (4) denkleminde sadece $\alpha \rightarrow n$ değil $l_t \rightarrow 0$ iken, kesirli türev tamsayı mertebeden türeve yakınsar;

$$\begin{aligned} \lim_{l_t \rightarrow 0} {}^{RC} D_{t+l_t}^\alpha f(t) &= \\ \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{2\Gamma(n-\alpha)} \lim_{l_t \rightarrow 0} I_t^{\alpha-1} \left(\int_{t-l_t}^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{n-\alpha-1}} ds + \int_t^{t+l_t} \frac{f^{(n)}(s)}{(s-t)^{n-\alpha-1}} ds \right) &= \\ \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{2\Gamma(n-\alpha)} \lim_{l_t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_{t-l_t}^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{n-\alpha-1}} ds + \int_t^{t+l_t} \frac{f^{(n)}(s)}{(s-t)^{n-\alpha-1}} ds \right)}{I_t^{1-\alpha}} &= \\ \frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{2\Gamma(n-\alpha)} \lim_{l_t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f^{(n)}(t-l_t)}{I_t^\alpha} + \frac{f^{(n)}(t+l_t)}{I_t^\alpha} \right)}{I_t^{\alpha}(n-\alpha)} &= f^{(n)}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 Mikro Hasarlı Dikdörtgen Plakların Nonlokal Titreşim Analizi

Mikrogenleşme teorisinde şekil değiştirme bileşenleri

$$\varepsilon_{kl} = \frac{u_{l,k} + u_{k,l}}{2} \quad \gamma_k = \theta_{,k} \quad (6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, \mathbf{u} ve θ , sırasıyla yer değiştirme vektörü ve mikrogenleşme katsayısıdır. Virgül ve sonrasında gelen indis \mathbf{x} konum vektörünün k . elemanına göre kısmi türevini göstermektedir. Burada bundan sonra tekrarlanan indisler üzerine Einstein'ın toplama uzlaşımı kullanılacaktır. Genleme alanlarının kesirli formları

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^\alpha &= \frac{1}{2} \left({}_{x_j-l_{x_j}}^{RC} D_{x_j+l_{x_j}}^\alpha u_i + {}_{x_i-l_{x_i}}^{RC} D_{x_i+l_{x_i}}^\alpha u_j \right), \\ \gamma_i^\alpha &= {}_{x_i-l_{x_i}}^{RC} D_{x_i+l_{x_i}}^\alpha \theta, \end{aligned} \quad (7)$$

olarak tanımlanmıştır ve burada l_{x_i} , x_i doğrultusundaki birim uyum katsayısıdır.

Üç boyutlu elastisite teorisinde gerilmenin kesirli mekaniğe genişletilmesi

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (8)$$

denkleminde verilir. Kesirli elastik genleme enerjisi integral formda

$$V = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha dv. \quad (9)$$

dir. Mikrogenleşme teorisinde kesirli elastik genleme enerjisi

$$V = \frac{1}{2} \int_v \left((\sigma^\alpha \varepsilon^\alpha)_{\text{klasik}} + ((s^\alpha - t^\alpha)\theta)_{\text{mikrogenleşme}} \right) dv \quad (10)$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}^\alpha &= \lambda \varepsilon_{mm}^\alpha \delta_{kl} + \mu \varepsilon_{kl}^\alpha + \mu \varepsilon_{lk}^\alpha + \lambda_0 \theta \delta_{kl}, \\ m_k^\alpha &= a_0 \theta_{,k}^\alpha, \\ s^\alpha - t^\alpha &= \lambda_1 \theta + \lambda_0 \varepsilon_{kk}^\alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

σ_{kl}^α kesirli gerilme bileşeni iken m_k^α mikrogenleşme vektörünün bileşenidir ve $s^\alpha = m_{kk}^\alpha$, $t^\alpha = \sigma_{kk}^\alpha$ şeklindedir. λ ve μ Lamé sabitleri ve $\lambda_0, \lambda_1, a_0$ mikrogenleşme katsayılarıdır.

Elastik genleme enerjisinin indis notasyonu yardımıyla gösterimi

$$V = \frac{1}{2} \int_v \left(\left(\frac{1}{2} (\lambda \varepsilon_{kk}^\alpha \varepsilon_{ll}^\alpha + 2\mu \varepsilon_{kl}^\alpha \varepsilon_{kl}^\alpha) \right)_{\text{klasik}} + \left(\frac{1}{2} \lambda_1 \theta^2 + \lambda_0 \theta \varepsilon_{kk}^\alpha + \frac{1}{2} a_0 \gamma_k^\alpha \gamma_k^\alpha \right)_{\text{mikrogenleşme}} \right) dv \quad (12)$$

şeklindedir. Kinetik enerji

$$T = \frac{1}{2} \int_v \left((\rho \dot{u}_i \dot{u}_i)_{\text{klasik}} + (3\rho j \dot{\theta} \dot{\theta})_{\text{mikrogenleşme}} \right) dv \quad (13)$$

olarak tanımlanır. Burada ρ yoğunluk ve j mikro atalettir.

Uzunluğu a , genişliği b ve kalınlığı h olan mikro hasarlı plağın maksimum enerji fonksiyoneli

$$\Pi = V_{\max} - T_{\max} \quad (14)$$

olarak verilmiştir.

Serbest harmonik hareket altında, klasik yer değiştirme ve mikrogenleşme bileşenleri genlik fonksiyonlar cinsinden,

$$\{u(x, y, z, t), \theta(x, y, z, t)\} = \{U(x, y, z), \Theta(x, y, z)\} e^{i\omega t}, \quad (15)$$

tanımlanmıştır. Burada, ω doğal frekanstır. Boyutsuz değişkenler,

$$\xi = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{2y}{b}, \quad \zeta = \frac{2z}{h} \quad (16)$$

olarak tanımlandığında, elastik genleme V_{\max} ve T_{\max} kinetik enerjileri,

$$\begin{aligned} V_{\max} &= \frac{bh}{4a} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\lambda \bar{\Lambda}_1^2 + (2\mu) \bar{\Lambda}_2 + 2\mu \bar{\Lambda}_3 + (\mu) \bar{\Lambda}_4 + a_0 \bar{\Lambda}_5] d\zeta d\eta d\xi \\ &+ \frac{bh}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2\lambda_0 \Theta \bar{\Lambda}_1] d\zeta d\eta d\xi + \frac{abh}{16} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\lambda_1 \Theta^2] d\zeta d\eta d\xi, \end{aligned} \quad (17)$$

$$T_{\max} = \frac{\rho}{16} abh \omega^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ [U_1^2 + U_2^2 + U_3^2] + 3j \Theta^2 \} d\zeta d\eta d\xi, \quad (18)$$

haline gelir. Burada

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1 &= \bar{\varepsilon}_{\xi\xi}^2 + \bar{\varepsilon}_{\eta\eta}^2 + \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta}^2, \quad \bar{\Lambda}_2 = \bar{\varepsilon}_{\xi\xi}^2 + \bar{\varepsilon}_{\eta\eta}^2 + \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta}^2, \\ \bar{\Lambda}_3 &= {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\eta} {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\xi} + {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta} {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\xi} + {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta} {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\eta}, \\ \bar{\Lambda}_3 &= ({}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\eta} - {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\xi}) {}_2\bar{\varepsilon}_{\xi\eta} + ({}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta} - {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\xi}) {}_2\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta} \\ &+ ({}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta} - {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\eta}) {}_2\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta}, \\ \bar{\Lambda}_3 &= {}_2\bar{\varepsilon}_{\xi\eta}^2 + {}_2\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta}^2 + {}_2\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta}^2, \\ \bar{\Lambda}_4 &= {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\eta}^2 + {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\xi}^2 + {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta}^2 + {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\xi}^2 + {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta}^2 + {}_1\bar{\varepsilon}_{\zeta\eta}^2, \\ \bar{\Lambda}_5 &= \bar{\Theta}_{,\xi}^2 + \bar{\Theta}_{,\eta}^2 + \bar{\Theta}_{,\zeta}^2, \end{aligned} \quad (19)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{\xi\xi} &= \frac{\partial^\alpha U_1}{\partial \xi^\alpha}, \quad \bar{\varepsilon}_{\eta\eta} = \alpha_1 \frac{\partial^\alpha U_2}{\partial \eta^\alpha}, \quad \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^\alpha U_3}{\partial \zeta^\alpha}, \\ {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\eta} &= \frac{\partial^\alpha U_2}{\partial \xi^\alpha}, \quad {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\xi} = \alpha_1 \frac{\partial^\alpha U_1}{\partial \eta^\alpha}, \quad {}_1\bar{\varepsilon}_{\xi\zeta} = \frac{\partial^\alpha U_3}{\partial \xi^\alpha}, \\ \bar{\varepsilon}_{\xi\xi} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^\alpha U_1}{\partial \xi^\alpha}, \quad {}_1\bar{\varepsilon}_{\eta\zeta} = \alpha_1 \frac{\partial^\alpha U_3}{\partial \eta^\alpha}, \quad \bar{\varepsilon}_{\zeta\eta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^\alpha U_2}{\partial \zeta^\alpha}, \\ \bar{\Theta}_{,\xi} &= \frac{\partial^\alpha \Theta}{\partial \xi^\alpha}, \quad \bar{\Theta}_{,\eta} = \alpha_1 \frac{\partial^\alpha \Theta}{\partial \eta^\alpha}, \quad \bar{\Theta}_{,\zeta} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^\alpha \Theta}{\partial \zeta^\alpha}, \\ \alpha_1 &= \frac{a}{b}, \quad \alpha_2 = \frac{h}{b}. \end{aligned} \quad (20)$$

dir. Bu çalışmada kabul edilebilir fonksiyonlar sınır fonksiyonlarıyla çarpılmış Chebyshev polinomları

serisi olarak seçilmiştir. Bu yüzden her genlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 U_1(\xi, \eta, \zeta) &= F_{u_1}(\xi, \eta) \sum_{i,j,k=1}^{\infty} A_{ijk} P_i(\xi) P_j(\eta) P_k(\zeta), \\
 U_2(\xi, \eta, \zeta) &= F_{u_2}(\xi, \eta) \sum_{l,m,n=1}^{\infty} B_{lmn} P_l(\xi) P_m(\eta) P_n(\zeta), \\
 U_3(\xi, \eta, \zeta) &= F_{u_3}(\xi, \eta) \sum_{p,q,r=1}^{\infty} C_{pqr} P_p(\xi) P_q(\eta) P_r(\zeta), \\
 \Theta(\xi, \eta, \zeta) &= F_{\theta}(\xi, \eta) \sum_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}=1}^{\infty} \hat{A}_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} P_{\hat{i}}(\xi) P_{\hat{j}}(\eta) P_{\hat{k}}(\zeta).
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

şekindedir ve sınır koşulları için kabul edilebilir fonksiyonlar,

$$F_{\delta}(\xi, \eta) = f_{\delta}^1(\xi) f_{\delta}^2(\eta), \quad (\delta = u_1, \theta, \quad i = 1, \dots, 3).
 \tag{22}$$

olarak seçilebilir. Chebyshev polinomlarının katsayılarına göre enerji fonksiyonunun minimize edilmesi,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{ijk}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial B_{lmn}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C_{pqr}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{A}_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}} = 0
 \tag{23}$$

frekanslar için özdeğer-özvektör problemini

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{Z} = \mathbf{0}
 \tag{24}$$

verir. Burada,

$$\Omega = \omega a \sqrt{\rho/E}.
 \tag{25}$$

şekindedir. \mathbf{K} , \mathbf{M} matrisleri ve \mathbf{Z} sütun vektörleri

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} [K_{u_1 u_1}] & [K_{u_1 u_2}] & [K_{u_1 u_3}] & [K_{u_1 \theta}] \\ [K_{u_1 u_2}]^T & [K_{u_2 u_2}] & [K_{u_2 u_3}] & [K_{u_2 \theta}] \\ [K_{u_1 u_3}]^T & [K_{u_2 u_3}]^T & [K_{u_3 u_3}] & [K_{u_3 \theta}] \\ [K_{u_1 \theta}]^T & [K_{u_2 \theta}]^T & [K_{u_3 \theta}]^T & [K_{\theta \theta}] \end{pmatrix},
 \tag{26}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} [M_{u_1 u_1}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [M_{u_2 u_2}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{u_3 u_3}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\theta \theta}] \end{pmatrix},
 \tag{27}$$

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \hat{\mathbf{A}}\},
 \tag{28}$$

şekindedir. (28) da bulunan her bir alt sütun vektörleri örneğin \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \{A_{111}, \dots, A_{11N}, \dots, A_{1k1}, \dots, A_{1kN}, \dots, A_{111}, \dots, A_{1JK}\}
 \tag{29}$$

gibidir. \mathbf{K} ve \mathbf{M} matrisleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir. Her iki matrisin köşegenlerindeki 3×3 lük sol üst bloklar klasik durumdan gelmektedir.

$$\begin{aligned}
 [K_{u_1 u_1}] &= (\lambda + 2\mu) D_{u_1 i u_1 \underline{i}}^{1,1} G_{u_1 j u_1 \underline{j}}^{0,0} H_{kk}^{0,0} \\
 &+ (\mu) \alpha_1^2 \left(D_{u_1 i u_1 \underline{i}}^{0,0} G_{u_1 j u_1 \underline{j}}^{1,1} H_{kk}^{0,0} + \frac{1}{\alpha_2^2} D_{u_1 i u_1 \underline{i}}^{0,0} G_{u_1 j u_1 \underline{j}}^{0,0} H_{kk}^{1,1} \right), \\
 [K_{u_2 u_2}] &= \alpha_1^2 \left((\lambda + 2\mu) D_{u_2 l u_2 \underline{l}}^{0,0} G_{u_2 m u_2 \underline{m}}^{1,1} H_{nn}^{0,0} \right. \\
 &+ (\mu) \frac{1}{\alpha_2^2} D_{u_2 l u_2 \underline{l}}^{0,0} G_{u_2 m u_2 \underline{m}}^{0,0} H_{nn}^{1,1} \left. \right) + (\mu) D_{u_2 l u_2 \underline{l}}^{1,1} G_{u_2 m u_2 \underline{m}}^{0,0} H_{nn}^{0,0}, \\
 [K_{u_1 u_2}] &= \alpha_1 \left(\lambda D_{u_1 i u_2 \underline{i}}^{1,0} G_{u_1 j u_2 \underline{j}}^{0,1} H_{kn}^{0,0} + \mu D_{u_1 i u_2 \underline{i}}^{0,1} G_{u_1 j u_2 \underline{j}}^{1,0} H_{kn}^{0,0} \right), \\
 [K_{u_3 u_3}] &= \alpha_1^2 \left(\frac{1}{\alpha_2^2} (\lambda + 2\mu) D_{u_3 p u_3 \underline{p}}^{0,0} G_{u_3 q u_3 \underline{q}}^{0,0} H_{rr}^{1,1} \right. \\
 &+ (\mu) D_{u_3 p u_3 \underline{p}}^{0,0} G_{u_3 q u_3 \underline{q}}^{1,1} H_{rr}^{0,0} \left. \right) + (\mu) D_{u_3 p u_3 \underline{p}}^{1,1} G_{u_3 q u_3 \underline{q}}^{0,0} H_{rr}^{0,0}, \\
 [K_{u_1 u_3}] &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\lambda D_{u_1 i u_3 \underline{i}}^{1,0} G_{u_1 j u_3 \underline{j}}^{0,0} H_{kr}^{0,1} + \mu D_{u_1 i u_3 \underline{i}}^{0,1} G_{u_1 j u_3 \underline{j}}^{0,0} H_{kr}^{1,0} \right), \\
 [K_{u_2 u_3}] &= \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} \left(\lambda D_{u_2 l u_3 \underline{l}}^{0,0} G_{u_2 m u_3 \underline{m}}^{1,0} H_{nr}^{0,1} + \mu D_{u_2 l u_3 \underline{l}}^{0,0} G_{u_2 m u_3 \underline{m}}^{0,1} H_{nr}^{1,0} \right), \\
 [M_{u_1 u_1}] &= \frac{1}{4} D_{u_1 i u_1 \underline{i}}^{0,0} G_{u_1 j u_1 \underline{j}}^{0,0} H_{kk}^{0,0}, \\
 [M_{u_2 u_2}] &= \frac{1}{4} D_{u_2 l u_2 \underline{l}}^{0,0} G_{u_2 m u_2 \underline{m}}^{0,0} H_{nn}^{0,0}, \\
 [M_{u_3 u_3}] &= \frac{1}{4} D_{u_3 p u_3 \underline{p}}^{0,0} G_{u_3 q u_3 \underline{q}}^{0,0} H_{rr}^{0,0}
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Her iki matrisin köşegenlerindeki 1×1 lik sağ alt bloklar, mikrogenleşmeden gelir.

$$[K_{\theta\theta}] = a_0 \left(D_{\theta\hat{i}\hat{i}}^{1,1} G_{\theta\hat{j}\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0} + \alpha_1^2 D_{\theta\hat{i}\hat{i}}^{0,0} G_{\theta\hat{j}\hat{j}}^{1,1} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} D_{\theta\hat{i}\hat{i}}^{0,0} G_{\theta\hat{j}\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{1,1} \right) + \frac{a^2}{4} \lambda_1 D_{\theta\hat{i}\hat{i}}^{0,0} G_{\theta\hat{j}\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0}, \quad (35)$$

$$[M_{\theta\theta}] = \frac{3}{4} j D_{\theta\hat{i}\hat{i}}^{0,0} G_{\theta\hat{j}\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0} \quad (31)$$

Son olarak, köşegen olmayan bloklar, aralarındaki bağlantıdan gelir.

$$\begin{aligned} [K_{u_1,\theta}] &= \frac{a}{2} \lambda_0 D_{u_1\theta\hat{i}}^{1,0} G_{u_1\theta\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{k}\hat{k}}^{0,0}, \\ [K_{u_2,\theta}] &= \frac{a}{2} \lambda_0 \alpha_1 D_{u_2\theta\hat{i}}^{0,0} G_{u_2\theta\hat{j}}^{1,0} H_{\hat{n}\hat{k}}^{0,0}, \\ [K_{u_3,\theta}] &= \frac{a}{2} \lambda_0 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} D_{u_3\theta\hat{i}}^{0,0} G_{u_3\theta\hat{j}}^{0,0} H_{\hat{r}\hat{k}}^{1,0} \end{aligned} \quad (32)$$

Burada,

$$\begin{aligned} D_{\beta_1\tau_1\beta_2\tau_2}^{s,\bar{s}} &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d^s (f_{\beta_1}^1(\xi) P_{\tau_1}(\xi))}{d\xi^s} \frac{d^{\bar{s}} (f_{\beta_2}^1(\xi) P_{\tau_2}(\xi))}{d\xi^{\bar{s}}} \right\} d\xi, \\ H_{\tau_1\tau_2}^{s,\bar{s}} &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d^s P_{\tau_1}(\xi)}{d\xi^s} \frac{d^{\bar{s}} P_{\tau_2}(\xi)}{d\xi^{\bar{s}}} \right\} d\xi, \\ G_{\beta_1\tau_1\beta_2\tau_2}^{s,\bar{s}} &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d^s (f_{\beta_1}^2(\eta) P_{\tau_1}(\eta))}{d\eta^s} \frac{d^{\bar{s}} (f_{\beta_2}^2(\eta) P_{\tau_2}(\eta))}{d\eta^{\bar{s}}} \right\} d\eta, \end{aligned} \quad (33)$$

$(0 \leq s, \bar{s} \leq 1 \quad \beta_1, \beta_2 = u_1, u_2, u_3, \theta,$
 $\tau_1, \tau_2 = i, j, k, l, m, n, p, q, r, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{l}, \underline{m}, \underline{n},$
 $\underline{p}, \underline{q}, \underline{r}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{l}, \hat{m}, \hat{n}, \hat{p}, \hat{q}, \hat{r}).$

(33) denklemindeki boyutsuz birim uyum katsayıları

$$l_\beta = \begin{cases} 1 + \beta, & \beta \in [-1, -1 + l] \\ l, & \beta \in [-1 + l, 1 - l] \\ 1 - \beta, & \beta \in [1 - l, 1] \end{cases}, \quad \beta = \xi, \eta, \zeta \quad (34)$$

şeklinde verilir. (16) ve (20) yardımıyla (x, y, z) yönlerindeki birim uyum katsayıları otomatik tanımlanır:

$$l_x = \frac{a}{2} l_\xi, \quad l_y = \frac{b}{2} l_\eta, \quad l_z = \frac{h}{2} l_\zeta.$$

(24) nin çözümü frekans, Ω , ve elde edilen frekansa karşılık gelen mod şekillerini verir. Deney sonuçlarıyla karşılaştırebilmek için, doğal frekans $f = \Omega / 2\pi$ ile ifade edilir.

3. Bulgular

Kesirli türev tarafından modellenen CCCC sınır koşuluna sahip mikrohasarlı plağın sayısal frekansları ve karşılık gelen mod şekilleri verilmiş ve deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır (Low vd. 1998). Mevcut yöntem, çok inceden çok kalın durumlara kadar değişen tüm durumlar için sayısal hesaplamada oldukça iyi kararlılığa sahiptir. Terim sayısı sadece çok ince plakalar için rol oynayabilir. Burada serinin terim sayısı $8 \times 8 \times 4$ olarak alınmıştır ve malzeme özellikleri Çizelge 1 de verilmiştir.

Çizelge 1. Plağın material özellikleri (Low et al. 1998).

Young Modülü (E)	72 GPa	Poisson oranı (ν)	0.3
Yoğunluk (ρ)	2644.76 kg / m ³	Mikro atalet (j)	$1.96 \times 10^{-7} m^2$
Boyutlar ($a \times b \times h$)	$0.6 \times 0.3 \times 0.002 m^3$		
Sınır koşulları	CCCC (C: Ankastre)		
Mikro Sabitler ($\alpha_0, \lambda_0, \lambda_1$)	$(8 \times 10^{-8}, 8 \times 10^{-8}, 1.5 \times 10^{-6})$ (GN)		

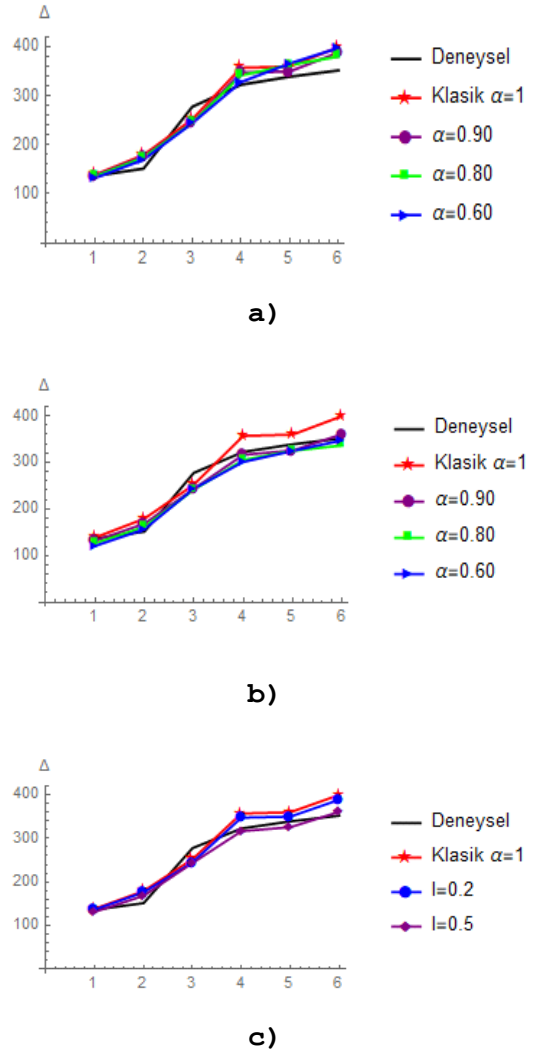
3.1. Frekans Analizi Ve Deney Sonuçları İle Karşılaştırma

Bu çalışmada CCCC sınır koşuluna sahip mikrogenleşen plağın frekans analizi yapılmış ve elde edilen sonuçlar deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Burada klasik frekanslara ek olarak mikrogenleşme frekansları da elde edilmiştir. Elde edilen frekans spektrumları farklı kesirli türev mertebeleri (α) ve birim uyum katsayıları (l) ile incelenmiş ve sonuçlar Çizelge 2 de verilmiştir.

Çizelge 2. Farklı l ve α parametreleri için mikro ve makro frekanslar.

l	α	Klasik ve Deneysel frekanslar normal, Mikro frekanslar ise koyu yazılarak verilmiştir.
0.01	0.6	138.403, 156.309 , 179.091, 245.266 , 251.98, 356.566, 359.528, 399.326
	0.8	138.414, 156.309 , 179.11, 245.267 , 252.033, 356.708, 359.586, 399.392
	0.9	138.42, 156.309 , 179.121, 245.268 , 252.063, 356.789, 359.619, 399.429
	0.99	138.425, 156.309 , 179.131, 245.269 , 252.093, 356.869, 359.651, 399.466
0.2	0.6	132.04, 156.309 , 169.52, 232.526 , 244.04, 328.011, 366.013, 397.568
	0.8	134.899, 156.309 , 173.896, 238.368 , 244.609, 341.441, 362.86, 379.892
	0.9	136.586, 156.309 , 176.143, 243.94 , 244.926, 347.197, 349.601, 388.437
	0.99	138.234, 156.309 , 178.777, 245.233 , 251.127, 354.583, 358.551, 398.233
0.5	0.6	120.453, 155.093 , 156.309, 237.662 , 243.235, 300.943, 324.484, 347.262
	0.8	126.015, 156.309 , 161.44, 227.444 , 241.339, 305.119, 325.028, 336.168
	0.9	131.368, 156.309 , 168.20, 228.886 , 243.272, 316.232, 325.33, 360.727
	0.99	137.65, 156.309 , 177.772, 245.067 , 248.71, 349.676, 355.473, 394.848
0	1	138.426, 156.309 , 179.133, 245.269 , 252.097, 356.878, 359.655, 399.471
(Klasik)		
Deneysel		136.30, 151.30, 277.50, 322.50, 338.80, 351.80, 411.30, 473.80

Çizelge 2 den rahatlıkla görülebileceği üzere kesirli türev mertebesi ve birim uyum katsayısının belirli değerleri için elde edilen frekanslar klasik duruma göre deney sonuçlarına daha yakındır. Bu durum, kesirli mekanik ile nonlokal modellemenin gerçeğe daha uygun olduğunu göstermektedir. Farklı (α) ve (l) parametreleri için elde edilen makro frekanslar ile klasik teoriden elde edilen frekanslar ve deney sonuçları Şekil 1 de verilmiştir.

**Şekil 1.** Plâğın makro frekansları: $l = 0.2$ (a) , $l = 0.5$ (b) ve $\alpha = 0.9$ (c) .

Çizelge 2 ve Şekil 1 den $\alpha = 0.9$ ve $l = 0.2$ alınarak elde edilen frekansların, klasik frekanslara göre deneysel sonuçlara daha yakın olduğu anlaşılmaktadır.

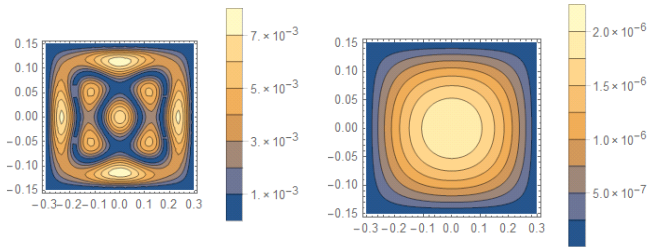
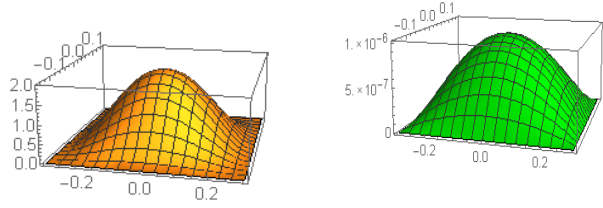
3.2. Mod Şekilleri Analizi

Özdeğerlerin yanı sıra mod şekillerinin analizi de çok önemlidir. Çizelge 3' te sırasıyla $\alpha = 0.9$ ve $l = 0.2$ için CCCC plâğının ilk iki makro ve mikro mod şekilleri sunulmaktadır. Ayrıca, klasik ve kesirli modlar arasındaki mutlak farklar kontur grafikleri kullanılarak verilmiştir.

Çizelge 3. $\alpha = 0.9$ ve $l = 0.2$ için ilk iki makro ve mikro frekansa karşı gelen mod şekilleri ve kesirli ve klasik z -yer değiştirmeleri arasındaki mutlak farklar.

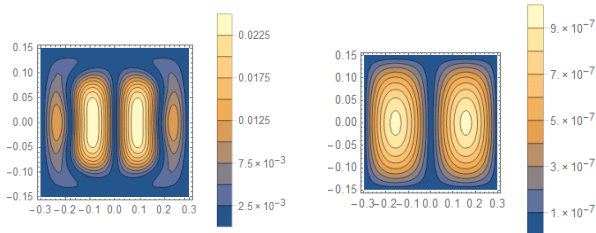
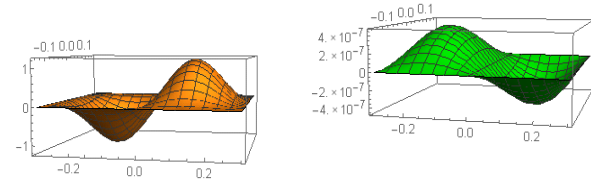
1. Makro Frekans (138.426)

1. Mikro Frekans (156.308)



2. Makro Frekans (176.142)

2. Mikro Frekans (243.939)



4. Tartışma ve Sonuç

Mikrogenleşme teorisi ile modellenen mikro hasarlı dört ucu ankastre bağlı dikdörtgen plakların nonlokal titreşim analizi kesirli mekanik kullanılarak hesaplanmıştır. Frekans spektrumu ve mod şekilleri üzerine nonlokalitenin etkisi kesirli türev mertebesinin (α) ve birim uyum katsayısının (l) farklı değerleri için incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır.

- Klasik teoriden elde edilen sonuçlara göre, kesirli mekanik yardımıyla uygulanan nonlokal teori ile elde edilen sonuçlar kesirli malzeme sabitlerinin belirli değerleri için deneysel sonuçlara çok daha yakındır. Bu durum, nonlokal titreşim analizi için kesirli mekanik yaklaşımının yeni ve iyi bir model oluşturabileceğini göstermektedir.
- Kesirli türevin tanımı gereği, nonlokal etkiler nonlokal çekirdekler kullanılmadan hesaplara kolayca yansıtılabilmektedir.
- Beklenileceği üzere, kesirli türevin mertebesinin klasik türeve ve birim uyum katsayısının sıfıra yaklaştığı limit durumunda elde edilen sonuçların klasik teoriden elde edilen sonuçlarla örtüştüğü gözlenmektedir.

5. Kaynaklar

- Aydınlik, S., and Kırış, A., 2020. Fractional Calculus Approach to Nonlocal Three-Dimensional Vibration Analysis of Plates. *AIAA Journal*, **58**, 355–361.
- Aydınlik, S., Kırış, A. and Sumelka, W., 2021a. Nonlocal vibration analysis of microstretch plates in the framework of space-fractional mechanics—theory and validation. *The European Physical Journal Plus*, **136**, 169.
- Aydınlik, S., Kırış, A. and Sumelka, W., 2021b. Three-dimensional analysis of nonlocal plate vibration in the framework of space-fractional mechanics — Theory and validation. *Thin-Walled Structures*, **163**, 107645.
- Cosserat, E. and Cosserat F., 1896. Sur la théorie de l'élasticité, *Ann. Toulouse*, **10**, 1-116.
- Cottone, G., Di Paola, M. and Zingales, M., 2009. Elastic waves propagation in 1D fractional non-local continuum. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, **42(2)**, 95-103.
- Eringen, A.C., 1968. Theory of micropolar elasticity, New York, Fracture, an advanced treatise (Ed. Leibowitz H.): Academic Press.
- Eringen, A.C., 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and

- surface waves. *Journal of Applied Physics*, **54(9)**, 4703-4710.
- Eringen, A.C., 1984. Plane waves in nonlocal micropolar elasticity. *International Journal of Engineering Science*, **22**, 1113-1121.
- Eringen, A.C., 1990. Theory of thermo-microstretch elastic solids. *International Journal of Engineering Science*, **28**, 1291-1301.
- Eringen, A.C. and Edelen, D.G.B., 1972. Nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, **10(3)**, 233–248.
- Khurana, A. and Tomar S.K., 2017. Rayleigh-type waves in nonlocal micropolar solid half-space. *Ultrasonics*, **73**, 162-168.
- Low, K.H., Chai, G.B., Lim, T.M. and Sue, S.C., 1998. Comparisons of experimental and theoretical frequencies for rectangular plates with various boundary conditions and added masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, **40**, 1119-1131.
- Mindlin, R.D., 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 51–78.
- Mindlin, R.D., 1965. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, **1(4)**, 417-438.
- Mindlin, R.D. and Eshel, N.N., 1968. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Engineering Science*, **4(1)**, 109–124.
- Odibat, Z., 2006. Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives, *Applied Mathematics and Computation*, **178**, 6527–6533.
- Sumelka, W., 2015. Non-local Kirchhoff–Love plates in terms of fractional calculus. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, **15**, 231-242.
- Zhou, D., Cheung, Y.K., Aub, F.T.K. and Lo, S.H. 2002. Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method. *International Journal of Solids and Structures*, **39**, 6339–6353.