Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **19** (2019) 031302 (601-604) AKU J. Sci. Eng. **19** (2019) 031302 (601-604)

DOI: 10.35414/akufemubid.576944

Araştırma Makalesi / Research Article

Homojen Fonksiyonları Lineer Olan Halkalara Tam Dik İdempotent Kümeler Üzerine

Necat GÖRENTAŞ

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

e-posta: ngortas@yahoo.com ORCID ID: http://orcid.org/000-0002-9861-5753

Geliş Tarihi: 12.06.2019; Kabul Tarihi: 19.09.2019

Anahtar kelimeler
Yakın halka; Homojen fonksiyonlar; Tam dik idempotent; Tamlık bölgesi.

Öz

R birimli bir halka olsun. Eğer R'de bir E tam dik idempotentler kümesi ve bu kümedeki en küçük denklik sınıfının eleman sayısı olan $m(E)\geq 2$ ise $R\in\Re$ dir. [1]'deki B sorusu olan bu şartın gerek olup olmadığı sorulmaktadır. Yani; $R\in\Re$ ise R'deki her tam dik idempotent E kümesi $m(E)\geq 2$ midir? Bu çalışmanın amacı kısmen bu soru ile ilgili olmaklar birlikte aynı zamanda yukarıda tanımlanan R halka sınıflarının halka olmaları altında kapalı olmadığını göstermek ve komutatif halkalarla tamlık bölgeleri dışında ve sonsuz çoklukta idempotente sahip halka örnekleri ile aşikâr olmayan idempotentleri bulunamayan halka örneği vermektedir.

On Complete Sets of Orthogonal Idempotent of Rings for Which Homogeneous Maps are Linear

Keywords
Near rings; Homogeneous maps; Complete orthogonal idempotent; İntegral domain.

Abstract

Let R be a ring with identily. If R has a complete set E of ortgonal idempotent with minimal size of equivalence class $m(E)\geq 2$, then $R\in\Re$. Question B in [1] asks if the conserve hold: If $R\in\Re$ is $m(E)\geq 2$ for any complete set G of orthogonal idempotent. The purpose of this work is partly related to this question, but also to Show that the $\Re$ ring classed deseribed above are not closed under ring contrictions, and to give examples of rings with idempootents with infinite multiplicity of idempotents outside the integral domain with comutative rings.

In the next example, we present examples of the rings excluding non-trival idempotent.

1. Giriş

R birimli bir halka ve V üniter bir modül olsun. $M_R(V)=\{f:V\to V \mid f(rv)=rf(v),\ \forall v\in V,\ r\in R\}$ kümesi bütün $R-$homojen dönüşümlerin yakın halkasını göstersin. [1] de yazarlar bütün $R-$modül V için $M_R(V)=End_R(V)$ olacak şekilde birimli bütün R halkaların sınıfını araştırmışlar. [3] de [1] de yapılan çalışmalara ilaveler yapılmış. Ayrıca açık probleme çözümler aranmıştır. [4] de de homojen fonksiyonların bir halkası olan $M_R(V)$'nin ne zaman yakın halka olduğu araştırılmıştır.

R birimli bir halka G üniter bir sol $R-$modül olsun.

$$M_R(G)=\{f:G\to G \mid f(rx)=rf(x),\ r\in R,\ x\in G\}$$

kümesi fonksiyon toplama ve fonksiyon bileşke işlemleri altında birimli ve sıfır simetrik bir yakın halkadır. [1] de her $R-$modül G için $M_R(G)$'nin bir halka olduğu tüm R halkalarının topluluğu $\Re$ ile gösterilmiş olup Teorem II. 7' de bir R halkasının $\Re$ de olması için yeter bir şart verilmiştir. Ayrıca [1] de $R \in \Re$ ise R'deki her tam dik idempotent E kümesi için $M(E) \geq 2$ midir? Soursu sorulmuştur. Şimdi , R de ortogonal idempotentlerin her bir tam dik E kümesi için $m(E) = 1$olduğunu gösterelim.

2. Bulgular

Önerme 2.1. F bir cisim $m, n \geq 2$ tamsayı ve $X \neq 0,$ bir küme olsun. Tam dik idempotent E kümesi için $m(E) = 1$'dir.

İspat: [1, Teorem II,8] de $M_m(F) \in \Re$

$K = M_m(F)^x = \{f : X \to M_m(F)\} \in \Re$

dir. X'i ayrık bir birleşim olarak $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ biçiminde yazalım ve

$$c_1 : X \to M_m(F), e_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_1 \\ 0, & x \notin X_1 \end{cases}$$

X_1 $(i = 1,2,\ldots,n)$'nin karakteristik fonksiyonu olsun. I ve 0 $M_m(F)$ halkasındaki $m \times m$ birim ve sıfır matrisleridir.

Her bir e_1, K'da birim merkezli idempotent olup $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, K$ da bir tam dik idempotentler kümesi; yani

$i \neq j$ için $e_i . e_j = 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} e_i = I$ dır.

Herhangi i, j için $e_i$ve e_j'nin denk olmadığını görelim. Bunun için $e_i K$ ve $e_j K$ ideallerinin $k-$ izomorfik olmadıklarını görmek yeterlidir. Gerçekten $k-$homomorfik bile değildir. Çünkü aşikar olmayan bir $k-$homomorfizması $\mu : e_i K \to e_j K$ bir $g \in K$ için olsaydı

$$\mu(e_i) = e_j g$$

$$e_j g = \mu(e_i) = \mu(e_i . e_i) = \mu(e_i) e_i = e_j g e_i = g e_j e_i = 0$$

olurdu ve buradan $\mu = 0$ elde edilir. O halde $m(E) = 1$ 'dir.

Örnek 2.1. F bir cisim, X bir küme olsun. F üzerinde 2×2 matrislerin $M_2(F)$ halkası [1, Teorem II, 8]'den $\Re$ de ve X' den $M_2(F)$ye tüm fonksiyonların $R = M_2(F)^x$ halkası [1, Corollary II.3.iii] $\Re$ dedir. Gerçekten bu $R, M_2(F)$ matris halkasını kendisi ile X'in niceliği kadar direk çarpım olup matris halkalarının bir kopyasıdır.

$e \in R$ aşikar olmayan bir idempotent fonksiyon ise $x \in X$ için $e(x) \in M_2(F)$ bir idempotent matris olacağından $e(x)$ ya $b \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{bmatrix} \tag{1}$$

biçiminde ya da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

biçimindedir.

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bir tam dik idempotent kümesi ise $x \in X$ için $e_1(x)$ idempotent matrisinin (1) deki türden

$$e_1(x) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ \frac{a_1 - a_1^2}{b_1} & 1-a_1 \end{bmatrix} \quad (b_1 \neq 0)$$

olduğunu varsayalım. E tam dik olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = I \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ \frac{a_i - a_i^2}{b_i} & 1-a_i \end{bmatrix} = I$$

dır

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \ \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i^2) b_i^{-1} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} (1-a_i) = n - \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

yukarıdaki son denklemde $n = 2$ olduğu, dolayısıyla herhangi bir tam dik idempotentler kümesinin e_1, e_2 gibi yalnızca iki tane idempotentten oluştuğu görülür. O halde her $x \in X$ için

$$e_1(x) = \begin{bmatrix} a & b \\ (a-a^2)b^{-1} & 1-a \end{bmatrix},$$

$$e_1(x) = \begin{bmatrix} 1-a & -b \\ (a-a^2)b^{-1} & a \end{bmatrix} = adj(e_1(x))$$

[2, S 51] deki kriteri kullanarak $e_1$ve 'nin dik olmadıklarını görelim. Burada $e_1$ve e_2'nin denkliği için $fg = e_1$ve $gf = e_2$ olacak şekilde $f, g \in R$ fonksiyonları bulunmaktadır. Bu ise her $x \in X$ için $f(x).g(x) = e_1(x)$ ve $g(x).f(x) = e_2(x)$ olması demektir. Sonuç olarak $e_1$ve e_2'nin denk olmadığını göstermek için $AB = e_1(x)$ ve $BA = e_2(x)$ olacak şekilde $A, B \in M_2(F)$ matrislerinin bulunmadığını göstermeliyiz. Bu ise açıktır; çünkü aksi halde $BA = adj(AB)$ olurdu. Bu ise bir $k \in F$ için $B = k(adjA)$ olmasına denktir. Fakat bu durumda da $AB = BA = k|A|I$ olup $e_1(x)$ ve $e_2(x)$ den hiçbirine eşit olmaz. O halde (1). tür idempotent matrislerle belirlenen tam dik idempotent E kümeleri için $m(E) = 1$'dir. Ancak halkanın tümünü düşündüğümüzde idempotent fonksiyonlar (2) tür idempotent matris değerlerini de alabilecektir. Mesela

$$e_1 : X \to \mu_2(F), e_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_2 : X \to \mu_2(F),\ e_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

idempotent fonksiyonları için $E = \{e_1, e_2\}, R$ de bir tam dik idempotent kümesi olup bu kez $m(E) = 2$ dir. Çünkü her $x \in X$ için

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ile tanımlı

$f, g : X \to \mu_2(F)$

fonksiyonları için $fg = e_1$ ve $gf = e_2$ olup $e_1 \neq e_2$ dir.

[1, Teorem II, 2]'den R halka sınıfı homomorfik görüntüleri altında kapalı olup bunun sonucu olarak R sınıfı halka genişlemeleri altında kapalıdır. Şimdi R sınıfının halka daralmaları altında kapalı olmadığını gösteren örnek verelim.

Örnek 2.2. $R, M_2(F)$' nin Örnek1 deki (1) türündeki idempotentlerinde üretilen alt halkası olsun. Buna göre R, (1) türünde ki idempotentlerin sonlu çarpımı ve toplamından oluşur.

$M_2(F)$' nin birimi $I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ veya $I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gibi yazılışlarda R' ye aittir.

R, (2) ile gösterilen idempotentleri kapsamaz, çünkü

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \in R \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} a & c \\ \frac{a-a^2}{c} & 1-a \end{bmatrix}$$

$\sum_{i=1}^{n} a = 1,\ \sum_{i=1}^{n} (1-a) = 0$ dan $n = 1$ ve

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c = 0 \\ \frac{a-a^2}{c} & 1-a \end{bmatrix}$$

çelişkisi bulunur. Aynı şekilde $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, R deki E idempotentlerin çarpımı biçiminde yazılamaz. Buradan R de her tam dik idempotentler kümesi için yine $m(E) = 1$, fakat $R \notin \Re$ dir, çünkü

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

eşleşmesi R nin tümüne bir halka homomorfizması olacak şekilde genişletilebilir. Görüntü matrislerinin oluşturduğu tamlık bölesi $(R), \begin{bmatrix} a & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$ matrislerinin tamlık bölgesi olup R bir tamlık bölgesini görüntü kabul ettiği için [1, Lemma II. 10] dan $R \notin \Re$ dir.

3.Tartışma ve Sonuç

[1]'de her $R-$modül G için $M_R(G)$'nin bir halka olduğu tüm R halkalarının topluluğu $\Re$ ile gösterilmiş ve açık bazı sorular sorulmuştur. [1]'deki soruya cevap oluşturmak için bu çalışmada $R \in \Re$ ise R deki her tam idempotent E kümesi için $m(E) = 1$ olduğu gösterilmiş aynı zamanda R halka sınıflarının halka daralmaları altında kapalı olmadığı gösterilmiş ve komutatif halkalarla tamlık bölgeleri dışında ve sonsuz çoklukta idempotente sahip halka örnekleri ile aşikar olmayan ve idempotentleri bulunmayan halka örneği verilmiştir.

[1]'de $R \in \Re$ ise $\Re$'de aşikar olmayan idempotentleri bulunmayan halkalar var mıdır? Sorusuna cevap ayrı bir çalışma konusunu oluşturmaktadır.

2. Kaynaklar

Fuchs, P. Maxson C. J. , Pilz, G., 1991. "On rings for which homogeneous maps are linear", *Proc.Amer. Math. Soc.* **112,** 1-7.

Fuchs, P. R., 2000. On modules which force homogeneous maps to be linear. *Proc. Amer. Math. Soc.* **128(1)**, 5–15.

Jeconson, N., 1964. Structure of rings, *Amer. Math. Soc. Collge publ.* **37**.

Maxson, C. J., ; Van Der Merwe, A. B., 1998. Rings of homogeneous functions. *J. Pure Appl. Algebra*. **124(1-3)**, 211–226.