Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **19** (2019) 031306 (626-634) AKU J. Sci. Eng. **19** (2019) 031306 (626-634)
DOI: 10.35414/ akufemubid.623781

Araştırma Makalesi / Research Article

Yardımcı Denklem Yöntemi Yardımı ile Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerinin Analitik Çözümleri

Sera YILMAZ[1], Orkun TAŞBOZAN[2]
[1]Kuşalanı Anadolu Lisesi, Samandağ, Hatay.
[2]Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Hatay.

e-posta: w_sera@hotmail.com ORCİD ID: http://orcid.org/0000-0002-7772-5785
Sorumlu yazar e-posta: otasbozan@mku.edu.tr ORCİD ID: http://orcid.org/0000-0001-5003-6341

Geliş Tarihi: 24.09.2019; Kabul Tarihi: 21.11.2019

Anahtar kelimeler
Conformable Diferansiyel Denklemler; Yardımcı Denklem Yöntemi; Kesirli Mertebeden Konopelchenko-Dubrovsky Denklemi; Kesirli Mertebeden Benjamin-Ono Denklemi.

Öz

Bu makalede conformable kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan kesirli mertebeden Konopelchenko-Dubrovsky ve Benjamin-Ono denklemlerinin analitik çözümleri yardımcı denklem yöntemi ile elde edildi. Her iki denklem dalga dönüşümü yardımıyla lineer olmayan adi türevli diferansiyel denkleme dönüştürüldükten sonra yardımcı denklem yöntemi kullanıldı. Elde edilen çözümlerin üç boyutlu grafikleri verildi. Yardımcı denklem yöntemi, diğer analitik yöntemlere göre daha çok analitik çözüm içermektedir.

Analytical Solutions of Fractional Order Partial Diferantial Equations with the Help of Auxiulary Equation Method

Keywords
Conformable Differential Equations; Auxiulary Equation Method; Fractional Order Konopelchenko-Dubrovsky Equation; Fractional Order Benjamin-Ono Equation.

Abstract

In this article, the analytical solutions of nonlinear fractional order Konopelchenko-Dubrovsky and Benjamin-Ono equations are obtained with the aid of auxiulary equation method where the fractional derivatives are in conformable sense. After both equations were converted to nonlinear ordinary differential equations with the help of wave transformation, auxiliary equation method was used. Three dimensional graphics of the obtained results are given. The auxiliary equation method contains more analytical solutions than other analytical methods.

1. Giriş

Kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi, ele alınan olayın fiziksel davranışını ve değişim sürecini anlamak için çok önemlidir. Çünkü tamsayı mertebeden türev içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem modelleri doğadaki olaylara tam karşılık gelmezken, içinde parametreler mevcut olan kesirli mertebeden türev içeren diferansiyel denklemler yaklaşık olarak tam karşılık gelmektedir. Yani kesirli hesaplama tamsayı hesaplamaya göre fiziksel bir olayı modellenirken ortaya çıkan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin daha açık bir şekilde ifade edilmesine yardımcı olur.

Literatürde sıklıkla karşılaşılan Riemann-Liouville, Caputo ve conformable kesirli türev yaklaşımı içeren kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri çeşitli yöntemler kullanılarak elde edildi. Bu yöntemlerden bazıları, (G'/G) açılım (Khalid vd. 2018), birinci integral (Eslami ve Rezazadeh 2016), üstel fonksiyon (Korkmaz ve Hosseini 2017), jakobi eliptik (Tasbozan vd. 2016; Tasbozan vd. 2019; Tasbozan 2019), homotopi analiz (Tasbozan ve Bayaslı 2018), sonlu elemanlar (Esen ve Tasbozan 2017), sonlu fark (Esen vd. 2016), fonksiyonel değişim (Çenesiz vd. 2017), yardımcı denklem (Alhakim ve Moussa 2019; Atilgan vd. 2019), tanjant hiperbolik (Çenesiz vd. 2017), kalan kuvvet serileri (Senol vd. 2019), yeni genişletilmiş direkt cebirsel (Tasbozan ve Kurt 2019) gibi yöntemler kullanıldı.

Bu makalede, conformable kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan Konopelchenko-Dubrovsky ve Benjamin-Ono denklemlerinin analitik çözümleri yardımcı denklem yöntemi ile elde edildi.

2. Materyal ve Metot

2003 yılında yardımcı denklem yöntemi ilk olarak tarafından lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için kullanıldı (Jiong ve Sirendaoreji 2003). Yapılan bu çalışmada ele alınan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini yardımcı denklem yöntemi ile elde etmek için

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = az^2(\xi) + bz^3(\xi) + cz^4(\xi) \qquad (1)$$

adi türevli diferansiyel denklemin çözümlerinden yararlandılar. Daha sonra 2008 yılında yapılan çalışmada (1) denkleminin çözümlerinin daha geniş bir sınıfı verilerek lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olan Schrödinger, Whitham–Broer–Kaup ve genelleştirilmiş Zakharov denklemlerinin analitik çözümleri elde edildi (Abdou 2008).

Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümünü yardımcı denklem yöntemi ile çözülebilmesi için aşağıdaki adımlar izlenir (Jiong ve Sirendaoreji 2003).

I. Adım: Lineer olmayan zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden türev içeren kısmi diferansiyel denklemin genel formu

$$P\left(\frac{\partial^p u}{\partial t^p}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) = 0 \qquad (2)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada P lineer olmayan bir fonksiyon, $p \in (0,1)$ ve $\frac{\partial^p u}{\partial t^p}$ türevi, $u(x,t)$ fonksiyonunun p-mertebeden conformable kesirli türevi anlamına gelmektedir.

II. Adım: w dalga hızını göstermek üzere (2) eşitliğinde

$$u(x,t) = U(\xi), \ \xi = x + w\frac{t^p}{p}$$

şeklinde dalga dönüşümünü kullanılırsa (2) kısmi diferansiyel denklemi

$$G(U, U', U'', U''', \dots) = 0 \qquad (3)$$

şeklinde adi türevli diferansiyel denkleme dönüşür.

III. Adım: (3.2.3) ile verilen adi türevli diferansiyel denkleminin

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i(\xi) \qquad (4)$$

şeklinde analitik çözümü aransın. Burada $a_i (i = 0,1,\dots,n)$ daha sonra belirlenecek olan katsayılar olup, $z(\xi)$ fonksiyonu ise (1) adi türevli diferansiyel denkleminin çözümleridir. (4) ile verilen eşitlikteki pozitif n değeri homojen denge yardımı ile bulunur. Bunun için (3) ile verilen denklemdeki en yüksek basamaktan lineer olan türev terimi için

$$\mathcal{O}\left(\frac{d^r U}{d\xi^r}\right) = n + r, \ r = 0,1,2,\dots$$

ve en yüksek dereceden lineer olmayan terimi için

$$\mathcal{O}\left(u^q \frac{d^r U}{d\xi^r}\right) = qn + r, r = 0,1,\dots, q = 0,1,\dots$$

yazılan formüller birbirine eşitlenir (Lai *et al.* 2009).

IV. Adım: Son adım olarak, (4) eşitliğinin ve gerekli türevlerinin (3) denkleminde yerlerine yazılmasıyla $z(\xi)$ ifadesinin kuvvetlerini içeren bir eşitlik elde edilir. Elde edilen denklem $z(\xi)$ ifadesinin kuvvetlerine göre düzenlenir ve daha sonra $z(\xi)$ ifadesinin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. a, b, c, w, a_i katsayılarını içeren bu cebirsel denklem sistemi Mathematica programı yardımıyla çözülerek katsayılar bulunur. Bu sistemin çözülmesiyle elde edilen sonuçlar ve Çizelge 1 ile verilen formüllerin kullanılmasıyla (2) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümleri elde edilir.

3. Bulgular

Bu bölümde kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yardımcı denklem yöntemiyle çözüm uygulamalarını göstereceğiz.

Örnek 1: Konopelchenko-Dubrovsky denklemi zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden türev içeren Konopelchenko-Dubrovsky denklem sistemi

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-6\beta u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{2}\alpha^2u^2\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial w}{\partial y}+3\alpha\frac{\partial u}{\partial x}w=0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{5}$$

olarak ele alınsın. Burada α ve β reel sabitler olup, $p \in (0,1)$ şeklindedir. (5) ile verilen conformable kesirli mertebeden Konopelchenko-Dubrovsky denklem sistemine

$u(x,y,t)=u(\xi), w(x,y,t)=w(\xi)$

olmak üzere

$$\xi = x+y+m\frac{t^p}{p} \tag{6}$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa

$$mu_\xi-u_{\xi\xi\xi}-6\beta uu_\xi+\frac{3}{2}\alpha^2u^2u_\xi-3w_\xi+3\alpha u_\xi w=0$$
$$w_\xi-u_\xi=0 \tag{7}$$

adi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (6) ile verilen adi türevli diferansiyel denkleminde bir defa integral alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2mu-2u_{\xi\xi}-6\beta u^2+\alpha^2u^3-6u+3\alpha u^2=0,$$
$$w-u=0 \tag{8}$$

denklemi bulunur. (8) ile verilen denklem sisteminde yer alan ilk eşitlikteki en yüksek mertebeden türev olan $u_{\xi\xi}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan u^3 terimleri arasındaki dengeden

$n+2=3n$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $n=1$ değeri bulunur. Böylece (8) denklem sistemindeki ilk denklemin

$$u(\xi)=a_0+a_1z(\xi) \tag{9}$$

şeklinde analitik çözümü aranır. (9) eşitliği ve ikinci türevi (8) denklem sistemindeki ilk denklemde yerlerine yazılırsa $z(\xi)$ ifadesinin kuvvetlerine bağlı bir eşitlik elde edilir. Bu eşitlikteki $z(\xi)$ ve kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle

$z^0(\xi):\ -6a_0-2a_0m+3a_0^2\alpha+a_0^3\alpha^2-6a_0^2\beta=0,$

$z^1(\xi):\ -6a_1-2aa_1-2a_1m+6a_0a_1\alpha+3a_0^2a_1\alpha^2-12a_0a_1\beta=0,$

$z^2(\xi):\ -3a_1b+3a_1^2\alpha+3a_0a_1^2\alpha^2-6a_1^2\beta=0,$

$z^3(\xi):\ -4a_1c+a_1^3\alpha^2=0$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminin Mathematica programı yardımıyla çözülmesiyle

$$a_0=0,\quad a=-3+m,\quad b=a_1(\alpha-2\beta),\quad c=\frac{a_1^2\alpha^2}{4}$$

değerleri elde edilir. Elde edilen bu değerler (6) ve (9) eşitliklerinde yerlerine yazılıp, Çizelge 3.1 ile verilen çözümlerin kullanılmasıyla (5) ile verilen conformable kesirli mertebeden Konopelchenko-Dubrovsky denklem sisteminin $u(x,y,t)$ ve $w(x,y,t)$ analitik çözümleri:

$m>3$ için

$$u_{1,2}(x,y,t)=\frac{-k(\alpha-2\beta)\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)}{(\alpha-2\beta)^2-\frac{1}{4}k\alpha^2\left(1\pm\tanh\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)\right)^2},$$

$$w_{1,2}(x,y,t)=\frac{-k(\alpha-2\beta)\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)}{(\alpha-2\beta)^2-\frac{1}{4}k\alpha^2\left(1\pm\tanh\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)\right)^2},$$

$$u_{3,4}(x,y,t)=\frac{k(\alpha-2\beta)\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)}{(\alpha-2\beta)^2-\frac{1}{4}k\alpha^2\left(1\pm\coth\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)\right)^2},$$

$$w_{3,4}(x,y,t)=\frac{k(\alpha-2\beta)\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)}{(\alpha-2\beta)^2-\frac{1}{4}k\alpha^2\left(1\pm\coth\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)\right)^2},$$

$$u_{5,6}(x,y,t)=\frac{2k\operatorname{sech}(\sqrt{k}\xi)}{\pm\sqrt{(\alpha-2\beta)^2-k\alpha^2}-(\alpha-2\beta)\operatorname{sech}(\sqrt{k}\xi)},$$

$w_{5,6}(x,y,t)$
$$=\frac{2k\mathrm{sech}\left(\sqrt{m-3}\xi\right)}{\pm\sqrt{(\alpha-2\beta)^2-k\alpha^2}-(\alpha-2\beta)\mathrm{sech}\left(\sqrt{k}\xi\right)}.$$

$m<3$ için

$u_{7,8}(x,y,t)$
$$=\frac{2k\sec\left(\sqrt{-k}\xi\right)}{\pm\sqrt{(\alpha-2\beta)^2-k\alpha^2}-(\alpha-2\beta)\sec\left(\sqrt{-k}\xi\right)},$$

$w_{7,8}(x,y,t)$
$$=\frac{2k\sec\left(\sqrt{3-m}\xi\right)}{\pm\sqrt{(\alpha-2\beta)^2-k\alpha^2}-(\alpha-2\beta)\sec\left(\sqrt{-k}\xi\right)}.$$

$m>3$ için

$u_{9,10}(x,y,t)$
$$=\frac{2k\mathrm{csch}\left(\sqrt{k}\xi\right)}{\pm\sqrt{k\alpha^2-(\alpha-2\beta)^2}-(\alpha-2\beta)\mathrm{csch}\left(\sqrt{k}\xi\right)},$$

$w_{9,10}(x,y,t)$
$$=\frac{2k\mathrm{csch}\left(\sqrt{k}\xi\right)}{\pm\sqrt{k\alpha^2-(\alpha-2\beta)^2}-(\alpha-2\beta)\mathrm{csch}\left(\sqrt{k}\xi\right)}.$$

$m<3$ için

$u_{11,12}(x,y,t)$
$$=\frac{2k\csc\left(\sqrt{-k}\xi\right)}{\pm\sqrt{(\alpha-2\beta)^2-k\alpha^2}-(\alpha-2\beta)\csc\left(\sqrt{-k}\xi\right)},$$

$w_{11,12}(x,y,t)$
$$=\frac{2k\csc\left(\sqrt{-k}\xi\right)}{\pm\sqrt{(\alpha-2\beta)^2-k\alpha^2}-(\alpha-2\beta)\csc\left(\sqrt{-k}\xi\right)}.$$

$m>3$ için

$$u_{13,14}(x,y,t)=\frac{k\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)}{\alpha-2\beta\pm\sqrt{\alpha^2k}\tanh\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)},$$

$$w_{13,14}(x,y,t)=\frac{k\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)}{\alpha-2\beta\pm\sqrt{\alpha^2k}\tanh\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)}.$$

$m<3$ için

$$u_{15,16}(\mathrm{x,y,t})=\frac{-k\sec^2\left(\frac{\sqrt{-k}}{2}\xi\right)}{(\alpha-2\beta)\pm\sqrt{-\alpha^2k}\tan\left(\frac{\sqrt{-k}}{2}\xi\right)},$$

$$w_{15,16}(x,y,t)=\frac{-k\sec^2\left(\frac{\sqrt{-k}}{2}\xi\right)}{(\alpha-2\beta)\pm\sqrt{-\alpha^2k}\tan\left(\frac{\sqrt{-k}}{2}\xi\right)}.$$

$m>3$ için

$$u_{17,18}(x,y,t)=\frac{k\,\mathrm{csch}^2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)}{(\alpha-2\beta)\pm\sqrt{\alpha^2k}\coth\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)},$$

$$w_{17,18}(x,y,t)=\frac{k\,\mathrm{csch}^2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)}{(\alpha-2\beta)\pm\sqrt{\alpha^2k}\coth\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\xi\right)}.$$

$m<3$ için

$$u_{19,20}(x,y,t)=\frac{-k\csc^2\left(\frac{\sqrt{-k}}{2}\xi\right)}{(\alpha-2\beta)\pm\sqrt{-\alpha^2k}\cot\left(\frac{\sqrt{-k}}{2}\xi\right)},$$

$$w_{19,20}(x,y,t)=\frac{-k\csc^2\left(\frac{\sqrt{-k}}{2}\xi\right)}{(\alpha-2\beta)\pm\sqrt{-\alpha^2k}\cot\left(\frac{\sqrt{-k}}{2}\xi\right)}.$$

$m>3$ için

$u_{21,22}(x,y,t)$
$$=\frac{4k\mathrm{a}_1e^{\pm\sqrt{k}\xi}}{-\alpha^2\mathrm{a}_1^2k+\left(e^{\pm\sqrt{k}\xi}-\mathrm{a}_1(\alpha-2\beta)\right)^2},$$

$$w_{21,22}(x,y,t)=\frac{4k\mathrm{a}_1e^{\pm\sqrt{k}\xi}}{\alpha^2\mathrm{a}_1^2k+\left(e^{\pm\sqrt{k}\xi}-\mathrm{a}_1(\alpha-2\beta)\right)^2},$$

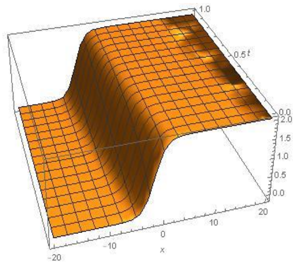
$$u_{23,24}(x,y,t)=\frac{\pm4\mathrm{a}_1ke^{\pm\sqrt{k}\xi}}{1-4\mathrm{a}_1^2\beta^2ke^{\pm2\sqrt{k}\xi}},\alpha=2\beta,$$

$$w_{23,24}(x,y,t)=\frac{\pm4\mathrm{a}_1ke^{\pm\sqrt{k}\xi}}{1-4\mathrm{a}_1^2\beta^2ke^{\pm2\sqrt{k}\xi}},\alpha=2\beta$$

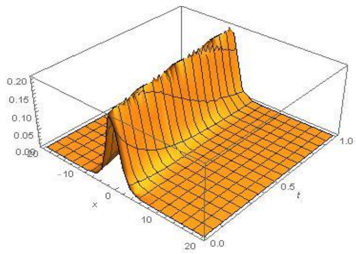
olarak elde edilir. Burada $k=m-3$ ve $\xi=x+y+m\frac{t^p}{p}$ şeklindedir.

(5) ile verilen conformable kesirli mertebeden Konopelchenko-Dubrovsky denkleminin analitik

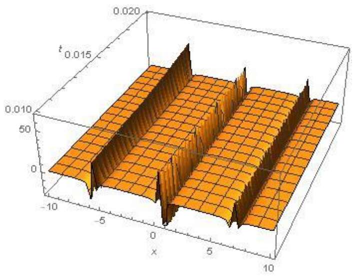
çözümlerinden bazılarının üç boyutlu grafikleri Şekil 1-Şekil 3 ile verildi.



Şekil 1. m=4, α=1, β=1, p=0.75, y=1 için u_1 (x,y,t) çözümünün yüzeyi



Şekil 2. m=4, α=1, β=3, p=0.75, y=1 için u_5 (x,y,t) çözümünün yüzeyi



Şekil 3. m=2, α=1, β=3, p=0.75, y=1 için u_7 (x,y,t) çözümünün yüzeyi

Örnek 2: Benjamin-Ono denklemi zamana bağlı conformable kesirli türev içeren Benjamin-Ono denklemi

$$\frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}}+\alpha\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \qquad (10)$$

olarak ele alınsın. Burada $p\in(0,1)$ olup, α ve β reel sabitlerdir. (10) ile verilen conformable kesirli mertebeden Benjamin-Ono denklemine

$u(x,t)=u(\xi)$

olmak üzere

$$\xi=x+m\frac{t^p}{p} \qquad (11)$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa

$$m^2u_{\xi\xi}+\alpha(u^2)_{\xi\xi}+\beta u_{\xi\xi\xi\xi}=0 \qquad (12)$$

eşitliği elde edilir. (4.2.3) eşitliğinde iki kez integral alınırsa

$$m^2u+\alpha u^2+\beta u_{\xi\xi}=0 \qquad (13)$$

şeklinde lineer olmayan adi türevli diferansiyel denklemi bulunur. (13) ile verilen adi diferansiyel denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev olan $u_{\xi\xi}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan u^2 terimleri arasındaki dengeden

$n+2=2n$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $n=2$ değeri bulunur. Böylece (13) diferansiyel denkleminde

$$u(\xi)=a_0+a_1z(\xi)+a_2z^2(\xi) \qquad (14)$$

şeklinde analitik çözüm aranır. (14) eşitliğinin (13) lineer olmayan diferansiyel denkleminde yerine yazılmasıyla $z(\xi)$ ifadesinin kuvvetlerine bağlı bir eşitlik bulunur. Elde edilen bu eşitlikteki $z(\xi)$ ve kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle;

$z^0(\xi)$: $a_0m^2+a_0^2\alpha=0,$

$z^1(\xi)$: $a_1m^2+2a_0a_1\alpha+aa_1\beta=0,$

$z^2(\xi)$: $2a_2m^2+2a_1^2\alpha+4a_0a_2\alpha+8aa_2\beta+3a_1b\beta=0,$

$z^3(\xi)$: $2a_1a_2\alpha+5a_2b\beta+2a_1c\beta=0,$

$z^4(\xi)$: $\alpha a_2^2+6a_2c\beta=0$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminin Mathematica programı yardımıyla çözülmesiyle

$$c=\frac{a_1^2\alpha^2}{36a\beta^2},b=-\frac{a_1\alpha}{3\beta},a_0=-\frac{a\beta}{\alpha},m=\sqrt{a\beta},a_2=-\frac{a_1^2\alpha}{6a\beta}$$

çözümü elde edilir. Elde edilen bu çözüm kümesinin (11) ve (14) ifadelerinde yerlerine yazılıp, Çizelge 3.1 ile verilen çözümlerin kullanılmasıyla (10) ile verilen conformable kesirli mertebeden Benjamin-Ono denkleminin $u(x,t)$ analitik çözümleri

$$u_{1,2}(x,t)=-\frac{a\beta}{\alpha}+\frac{12\beta a\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}{\alpha\left(4-\left(1\pm\tanh\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)\right)^2\right)}-\frac{24\beta a\,\mathrm{sech}^4\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}{\alpha\left(4-\left(1\pm\tanh\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)\right)^2\right)^2}$$

$$u_{3,4}(x,t)$$

$$= -\frac{\mathrm{a}\beta}{\alpha} - \frac{12\beta \mathrm{a}\,\mathrm{csch}^2\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)}{\alpha\left(4-\left(1\pm\coth\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)\right)^2\right)}$$

$$-\frac{24\beta \mathrm{a}\,\mathrm{csch}^4\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)}{\alpha\left(4-\left(1\pm\coth\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)\right)^2\right)^2}$$

$$u_{5,6}(x,t) = -\frac{\mathrm{a}\beta}{\alpha} - \frac{3\beta \mathrm{a}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)}{\alpha\left(-1\pm\tanh\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)\right)}$$

$$-\frac{3\beta \mathrm{a}\,\mathrm{sech}^4\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)}{2\alpha\left(-1\pm\tanh\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)\right)^2}$$

$$u_{7,8}(x,t) = -\frac{\mathrm{a}\beta}{\alpha} + \frac{3\beta \mathrm{a}\,\mathrm{csch}^2\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)}{\alpha\left(-1\pm\coth\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)\right)}$$

$$-\frac{3\mathrm{a}\beta\,\mathrm{csch}^4\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)}{2\alpha\left(-1\pm\coth\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)\right)^2}$$

$$u_{9,10}(x,t) = -\frac{\mathrm{a}\beta}{\alpha} + \frac{3\mathrm{a}\beta\left(1\pm\tanh\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)\right)}{\alpha}$$

$$-\frac{3\mathrm{a}\beta\left(1\pm\tanh\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)\right)^2}{2\alpha}$$

$$u_{11,12}(x,t) = -\frac{\mathrm{a}\beta}{\alpha} + \frac{3\mathrm{a}\beta\left(1\pm\coth\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)\right)}{\alpha}$$

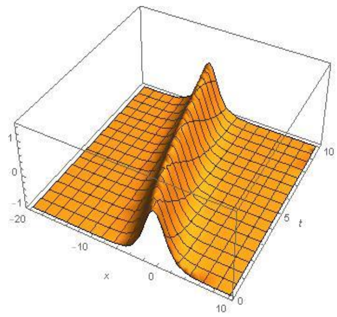
$$-\frac{3\mathrm{a}\beta\left(1\pm\coth\left(\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{2}\xi\right)\right)^2}{2\alpha}$$

$$u_{13,14}(x,t) = -\frac{\mathrm{a}\beta}{\alpha} + \frac{4\mathrm{a}\mathrm{a}_1 e^{\pm\sqrt{\mathrm{a}}\xi}}{\left(e^{\pm\sqrt{\mathrm{a}}\xi}+\frac{\mathrm{a}_1\alpha}{3\beta}\right)^2-\frac{\mathrm{a}_1^2\alpha^2}{9\beta^2}}$$

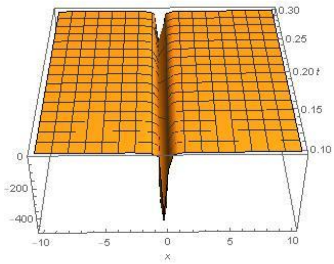
$$-\frac{8\mathrm{a}\mathrm{a}_1^2 e^{\pm 2\sqrt{\mathrm{a}}\xi}\alpha}{3\beta\left(\left(e^{\pm\sqrt{\mathrm{a}}\xi}+\frac{\mathrm{a}_1\alpha}{3\beta}\right)^2-\frac{\mathrm{a}_1^2\alpha^2}{9\beta^2}\right)^2}$$

olarak bulunur. Burada $\xi = \mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{a}\beta}\,\frac{\mathrm{t}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{p}}$ şeklindedir.

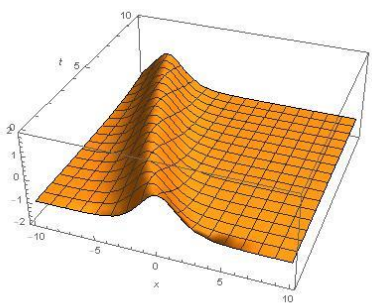
Şekil 4-Şekil 6 ile verilen şekillerde (10) ile verilen conformable kesirli mertebeden Benjamin-Ono denkleminin bazı analitik çözümlerinin yüzeyleri verildi.



Şekil 4. a=1, α=1, β=1, p=0.75 için u_1 (x,t) çözümünün yüzeyi



Şekil 5. a=1, α=1, β=1, p=0.75 için u_7 (x,t) çözümünün yüzeyi



Şekil 6. a=1, α=1, β=1, p=0.75 için u_9 (x,t) çözümünün yüzeyi

Çizelge 1: $\Delta=b^2-4ac$ ve $\varepsilon=\pm 1$ olmak üzere (1) denkleminin çözümleri (Abdou, 2008)

No	$z(\xi)$	Koşul
1	$\dfrac{-ab\,sech^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}{b^2-ac\left(1-\varepsilon\tanh\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)\right)^2}$	$a>0$
2	$\dfrac{ab\,csch^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}{b^2-ac\left(1+\varepsilon\coth\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)\right)^2}$	$a>0$
3	$\dfrac{2ab\,\mathrm{sech}(\sqrt{a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta}-b\,sech(\sqrt{a}\xi)}$	$a>0, \Delta>0$
4	$\dfrac{2ab\sec(\sqrt{-a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta}-b\sec(\sqrt{-a}\xi)}$	$a<0, \Delta>0$
5	$\dfrac{2ab\,\mathrm{csch}(\sqrt{a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{-\Delta}-b\,csch(\sqrt{a}\xi)}$	$a>0, \Delta<0$
6	$\dfrac{2ab\csc(\sqrt{-a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta}-b\csc(\sqrt{-a}\xi))}$	$a<0, \Delta>0$
7	$\dfrac{-a\,sech^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}{b+2\varepsilon\sqrt{ac}\tanh\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}$	$a>0, c>0$
8	$\dfrac{-a\sec^2\left(\frac{\sqrt{-a}}{2}\xi\right)}{b+2\varepsilon\sqrt{-ac}\tan\left(\frac{\sqrt{-a}}{2}\xi\right)}$	$a<0, c>0$
9	$\dfrac{-a\,csch^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}{b+2\varepsilon\sqrt{ac}\coth\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)}$	$a>0, c>0$
10	$\dfrac{-a\csc^2\left(\frac{\sqrt{-a}}{2}\xi\right)}{b+2\varepsilon\sqrt{-ac}\cot\left(\frac{\sqrt{-a}}{2}\xi\right)}$	$a<0, c>0$

11	$-\frac{a}{b}\left(1+\varepsilon tanh\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)\right)$	$a>0, \Delta=0$
12	$-\frac{a}{b}\left(1+\varepsilon coth\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\xi\right)\right)$	$a>0, \Delta=0$
13	$\frac{4ae^{\varepsilon\sqrt{a}\xi}}{\left(e^{\varepsilon\sqrt{a}\xi}-b\right)^2-4ac}$	$a>0$
14	$\frac{\pm 4ae^{\varepsilon\sqrt{a}\xi}}{1-4ace^{2\varepsilon\sqrt{a}\xi}}$	$a>0, b=0$

4. Tartışma ve Sonuç

Bu makalede, zaman değişkenine bağlı conformable kesirli türev içeren lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler olan Konopelchenko-Dubrovsky ve Benjamin-Ono denklemleri ele alındı.

Ele alınan her iki denklem ilk olarak dalga dönüşümü yardımıyla lineer olmayan adi türevli diferansiyel denkleme dönüştürüldü. Bu adi türevli denklemlerin analitik çözümlerini bulmak için yardımcı denklem yöntemi kullanıldı. Bunun için $z(\xi)$ ifadesinin kuvvetlerinden oluşan

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^i(\xi)$$

formunda analitik çözüm arandı. Bu analitik çözüm formunun adi türevli denklemlerde yerine yazılmasıyla $z(\xi)$ ifadesinin kuvvetlerini içeren bir eşitlik bulundu. Bu eşitlikte yer alan $z(\xi)$ ifadesinin kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözümleri Mathematica programı yardımıyla bulundu. Elde edilen bu değerlerin yardımıyla ele alınan denklemlerin analitik çözümleri bulundu.

Sonuç olarak; her bir denklem için elde edilen tüm analitik çözümler denklemlerde yerine koyularak, denklemi sağladığı yine Mathematica programı yardımıyla görüldü.

5. Kaynaklar

Abdou, M.A., 2008. A generalized auxiliary equation method and its applications. *Nonlinear Dynamics*, **52**, 95–102.

Alhakim, L.A. ve Moussa, A.A., 2019. The double auxiliary equations method and its application to space-time fractional nonlinear equations. *Journal of Ocean Engineering and Science,* **4**, 7-13.

Atilgan, E., Senol, M., Kurt, A. ve Tasbozan, O., 2019. New Wave Solutions of Time-Fractional Coupled Boussinesq–Whitham–Broer–Kaup Equation as A Model of Water Waves. *China Ocean Engineering*, **33**, 477-483.

Cenesiz, Y., Kurt, A. ve Tasbozan, O., 2017. On the New Solutions of the Conformable Time Fractional Generalized Hirota-Satsuma Coupled KdV System. *Annals of West University of Timisoara-Mathematics and Computer Science*, **55**, 37-50.

Cenesiz, Y., Tasbozan, O. ve Kurt, A., 2017. Functional Variable Method for conformable fractional modified KdV-ZK equation and Maccari system. *Tbilisi Mathematical Journal*, **10**, 118–126.

Esen A. ve Tasbozan O., 2017. Numerical solution of time fractional Schrödinger equation by using quadratic B-spline finite elements. *Annales Mathematicae Silesianae*, **31,** 83-98.

Esen A., Karaagac B. ve Tasbozan O., 2017. Finite Difference Methods for Fractional Gas Dynamics Equation. *Applied Mathematics & Information Sciences Letters,* **4**, 1-4.

Eslami, M. ve Rezazadeh, H., 2016. The first integral method for Wu–Zhang system with conformable time-fractional derivative. *Calcolo,* **53**, 475–485.

Jiong, S. ve Sirendaoreji, 2003. Auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential equations. *Physics Letters A*, **309,** 387-396.

Khalil, R., Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **264**, 65-70.

Korkmaz, A. ve Hosseini, K., 2017. Exact solutions of a nonlinear conformable time-fractional parabolic equation with exponential nonlinearity using reliable methods. *Optical and Quantum Electronics,* **49**, 278.

Senol, M., Tasbozan, O. ve Kurt, A., 2019. Numerical Solutions of Fractional Burgers' Type Equations with Conformable Derivative. *Chinese Journal of Physics*, **58**, 75-84.

Taşbozan, O., Çenesiz, Y. ve Kurt, A., 2016. New solutions for conformable fractional Boussinesq and combined KdV-mKdV equations using Jacobi elliptic function expansion method. *The European Physical Journal Plus,* **131**, 244.

Taşbozan, O. ve Bayaslı, G., 2018. Numerical Solutions of Conformable Partial Differential Equations By Homotopy Analysis Method**.** *Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering*, **18**, 842-851.

Tasbozan, O., Kurt, A. ve Tozar, A., 2019. New optical solutions of complex Ginzburg–Landau equation arising in semiconductor lasers. *Applied Physics B*, **125**, 104.

Tasbozan, O., 2019. New Analytical Solutions for Time Fractional Benjamin-Ono Equation Arising Internal Waves in Deep Water. *China Ocean Engineering*, **33**, 593-600.

Tasbozan, O. ve Kurt, A., 2019. New Exact Solutions of Fractional Fitzhugh-Nagumo Equation. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, **9**, 1633-1645.