Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineeri

AKÜ FEMÜBİD **19** (2019) 031307 (635-642) AKU J. Sci.Eng. **19** (2019) 031307 (635-642)

DOI: 10.35414/ akufemubid.623574

Araştırma Makalesi / Research Article

Kenmotsu Manifoldlarda Konformal Ricci Solitonlar

Gülhan AYAR

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi, Kamil Özdağ Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Karaman.

e-posta: gulhanayar@gmail.com ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1018-4590

Geliş Tarihi: 23.09.2019; Kabul Tarihi: 06.12.2019

Anahtar kelimeler
Ricci solitonlar; Konformal Ricci solitonlar; Kenmotsu manifoldlar; Ricci-recurrent Kenmotsu manifoldlar; ϕ – recurrent Kenmotsu manifoldlar

Öz

Bu makalede, Kenmotsu manifoldlarında konformal Ricci solitonlarını karakterize eden koşullar incelenmiştir. Öncelikle $(2n+1)$-boyutlu C^{∞}sınıfından diferensiyellenebilir bir M^{2n+1} manifoldunun hemen hemen değme yapısı ve Kenmotsu manifoldların yapısı tanıtılmıştır. Daha sonra, Ricci-recurrent, ϕ-recurrent, psedo-projektif ϕ-recurrent, concircular ϕ-recurrent Kenmotsu manifoldlarının tanımları verilmiştir ve bu tip manifoldlarda konformal Ricci solitonlarının hangi durumlarda daralan, genişleyen veya sabit olduğu şartlar araştırılmıştır.

Conformal Ricci Solitons in Kenmotsu Manifolds

Keywords
Ricci solitons; Conformal Ricci solitons; Kenmotsu manifolds; Ricci-recurrent Kenmotsu manifolds; ϕ – recurrent Kenmotsu manifolds

Abstract

In this paper, we examine the conditions that characterize conformal Ricci solitons in Kenmotsu manifolds. Firstly, almost contact structure of a C^{∞} class $(2n+1)$-dimensional differentiable M^{2n+1} and the structure of a Kenmotsu manifold are introduced. Then, the definitions of Ricci-recurrent, ϕ -recurrent, psedo-projektif ϕ -recurrent, concircularφ-recurrent Kenmotsu manifolds are given and the conditions that determine the conformal Ricci solitons in such manifolds are expanding, steady or shrinking are examined.

1. Giriş

Ricci solitonlar, Hamilton (1982) tarafından Ricci akısının özel bir çözümü olarak tanıtılmıştır. İlk olarak Sharma (1983), değme Riemann geometride Ricci solitonlar çalışmalarını başlatmıştır. Daha sonra, Tripathi (2008), Nagaraja ve Premalatha (2012), Ayar ve Yıldırım (2019), Yıldırım (2019) ve diğer birçok matematikçi tarafından, değme metrik manifoldlarda Ricci solitonlar kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

Riemann manifoldundaki Ricci çözümü (M^{2n+1},g), bir Einstein metriğinin doğal bir genellemesi olarak verilir ve Riemann metrik, V vektör alanı ve λ gerçel skalerolmak üzere (g,V,λ) üçlüsü ile tanımlanır. Buna bağlı olarak Ricci soliton denklemi

$$(\mathcal{L}_V g)(X,Y)+2S(X,Y)+2\lambda g(X,Y)=0, \quad (1)$$

eşitliği ile ifade edilir.Burada S, M^{2n+1} 'nin Ricci tensörüdür ve L_V de V vektör alanı boyunca Lie türev operatörünü belirtir. Ricci solitonu, sırasıyla λ 'nın negatif, sıfır ve pozitif olduğu durumlarda daralan, durağan ve genişlediğini söyleyebiliriz. Nagaraja ve Permalatha bazı özel koşulları sağlayan bir değme Riemann manifoldu sınıfı olan Kenmotsu manifoldlar üzerinde (Sıddıqı, 2018), bu Ricci soliton koşullarını λ 'ya bağlı olarak incelemiştir.

Bununla beraber konformal Ricci solitonları ise ilk olarak Fischer (2005) tarafından konformal Ricci akısı olarak adlandırılan yeni bir konsept ortaya atılarak geliştirilmiştir (Fischer2004). Elde edilen denklemler, konformal akı denklemi ve bir Ricci akı denkleminin vektörel toplamı olduğundan, konformal geometrinin skaler eğirlik üzerindeki rolü sebebiyle konformal Ricci akı denklemleri olarak adlandırılır. Konformal Ricci soliton denklemi

$$\mathcal{L}_X g + 2S = 2\lambda - (p + \tfrac{2}{n}) \qquad (2)$$

eşitliği ile verilir.

Konformal Ricci soliton denklemi, Ricci soliton denkleminin bir genelleştirilmesi olup aynı zamanda da konformal Ricci akı denklemidir.

Konformal Ricci solitonlar bazı özel eğrilik koşulları altındaki Kenmotsu manifoldlar için Basu ve Bhattacharyya tarafından incelenmiştir (Basu and Bhattacharyyaz 2015). Bu makalede ise Kenmotsu manifoldlarda konformal Ricci solitonlarını karakterize eden koşullar üzerine yoğunlaşılmıştır. 2. Bölümde, Kenmotsu manifoldlar ve Ricci solitonları hakkında kısa bir bilgi verilmiştir. Bölüm 3-6 'da, Ricci-recurrent, ϕ-recurrent, psedo-projektifϕ-recurrent, concircular ϕ-recurrent Kenmotsu manifoldlarda konformal Ricci solitonlarını karakterize eden koşullar incelenmiştir.

2. Ön Bilgiler

Bu bölümde, diğer bölümlerde çalışmamız için gerekli olan manifoldlar ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir. Öncelikli olarak, $(2n+1)$-boyutlu C^∞sınıfından diferensiyellenebilir bir M^{2n+1} manifoldunun hemen hemen değme yapısı tanıtılmıştır. Devamında Kenmotsu manifoldların yapısı tanıtılarak temel eğrilik özellikleri verilmiştir.

Ayrıca çalışmanın temelini oluşturan Kenmotsu manifoldlarda konformal Ricci solitonlar tanımı verilerek konformal Ricci solitonuna sahip Kenmotsu manifoldlar için Ricci operatörü, Ricci eğriliği ve skaler eğrilik bağıntıları elde edilmiştir.

M^{2n+1}, $(2n+1)$-boyutlu C^∞sınıfından diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\phi, (1,1)$ tipli tensor alanı, ξ bir vektör alanı, η bir 1-form olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan g Riemann metriğini ile birlikte (ϕ, ξ, η, g) yapısındaki M^{2n+1} manifoldu hemen hemen değme metrik manifold olarak adlandırılır (Blair 2015).

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \phi\xi = 0, \quad g(X, \xi) = \eta(X), \quad \eta(\xi) = 1 = 1, \eta \circ \phi = 0 \qquad (3)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \qquad (4)$$

Kenmotsu (1972) Yine aşağıdaki koşullar ile birlikte, hemen hemen değme metrik manifoldu, bir Kenmotsu manifold olarak adlandırılır,

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(X, \phi Y)\xi - \eta(Y)\phi X, \qquad (5)$$

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi, \qquad (6)$$

Burada ∇, g nin Riemann konneksiyonudur. Ayrıca bir Kenmotsu manifoldunda aşağıdaki özellikler vadır (Bagewadi and Prasad 1999).

$$\eta(R(X,Y)Z) = g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X), \qquad (7)$$

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X, \qquad (8)$$

$$R(X,\xi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, \qquad (9)$$

$$S(X,\xi) = -2n\eta(X), \qquad (10)$$

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X,Y) + 2n\eta(X)\eta(Y), \qquad (11)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y). \qquad (12)$$

Burada R Riemann eğrilik tensörü, S ise Ricci eğrilik tensörüdür.

(g, V, λ)Kenmotsu manifoldunda bir konformal Ricci soliton olsun.

$V = \xi$ alınırsa, (6) ve (2) eşitliklerinden

$$S(X,Y) = [-(\lambda+1) + \tfrac{1}{2}(p + \tfrac{2}{n})]g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y) \qquad (13)$$

elde edilir. Bu denklemden konformal Ricci solitonuna sahip Kenmotsu manifoldu için sırasıyla Ricci operatörü, Ricci eğriliği ve skaler eğrilik;

$$QX = [-(\lambda+1) + \tfrac{1}{2}(p + \tfrac{2}{n})]X + \eta(X)\xi, \qquad (14)$$

$$S(X,\xi) = [-\lambda + \tfrac{1}{2}(p + \tfrac{2}{n})]\eta(X), \quad (15)$$

$$r = (-\lambda + 1)(2n + 1) + 1 \quad (16)$$

bağıntıları ile ifade edilir. Bunun yanı sıra Ricci operatörünün kovaryant türevi

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = \nabla_W S(Y,\xi) - S(\nabla_W Y,\xi) - S(Y,\nabla_W \xi). \quad (17)$$

eşitliği ie verilmektedir.

Daha sonraki sonuçlarda kullanmak üzere aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 2.1.$(M^{2n+1},g), \phi$-recurrent Kenmotsu manifoldunda karakteristik vektör alanı ξ ile A 1 −formuile bağlantılı ρ vektör alanı eş-yönlüdürve A 1 −formu

$$A(W) = \eta(\rho)\eta(W) \quad (18)$$

şeklinde tanımlıdır (Nagaraja and Venu 2016).

(18) denkleminde W yerine ξ alınarak,

$$A(\xi) = \eta(\rho) \quad (19)$$

elde edilir.

3. Ricci-recurrent Kenmotsu Manifoldlar

Tanım 3.1. A, sıfırdan farklı bir 1 −form olmak üzere, Kenmotsu manifold üzerinde

$$(\nabla_W S)(Y,Z) = A(W)S(Y,Z) \quad (20)$$

koşulu sağlanırsa, bu manifold Ricci-recurrent Kenmotsu manifold manifold olarak adlandırılır (Nagaraja and Venu 2016).

Buradaki (20) denkleminde Z yerine ξ alınır ve (15) eşitliğini kullanılırsa;

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = [-\lambda + \tfrac{1}{2}(p + \tfrac{2}{n})]A(W)\eta(Y) \quad (21)$$

elde edilir. (15) ve (6) eşitlikleri (17) de yerine koyularak

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = [-\lambda + \tfrac{1}{2}(p + \tfrac{2}{n})]g(Y,W) - S(Y,W) \quad (22)$$

ifadesi elde edilir. (21) ve (22) eşitliklerinden ise;

$$S(Y,W) = \left[-\lambda + \tfrac{1}{2}\left(p + \tfrac{2}{n}\right)\right]g(Y,W) - [-\lambda + \tfrac{1}{2}(p + \tfrac{2}{n})]A(W)\eta(Y) \quad (23)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $Y = \xi$ alınarak

$$S(\xi,W) = \left[-\lambda + \tfrac{1}{2}\left(p + \tfrac{2}{n}\right)\right]\eta(W) - [-\lambda + \tfrac{1}{2}(p + \tfrac{2}{n})]A(W) \quad (24)$$

elde edilir. Lemma2.1'in bir sonucu olarak (3.5)eşitliği

$$S(\xi,W) = [-\lambda + \tfrac{1}{2}(p + \tfrac{2}{n})]\eta(W)[1 - \eta(\rho)] (25)$$

olarak ifade edilir.

Son olarak (10) ve (19) eşitlikleri (25) denklemiyle ele alırnırsa,

$$\lambda = \frac{1}{n} - \frac{2n}{-1 + A(\xi)} + \frac{p}{2} \quad (26)$$

elde edilir.(26) eşitliği dikkate alınarak, konformal Ricci solitonu belirli koşullar attında aşağıdaki teoremlerle verilir:

Teorem 3.1. (M^{2n+1},g), A 1 −formu ile birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir Ricci-recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}$, $n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanması halinde konformal Ricci solitonu genişleyendir:

$i)\ p \le -2\ \ ve\ \ n > 1\ \ için\ \ \frac{4n^2+np+2}{np+2} < A(\xi) < 1$ ise,

$ii)\ p = -1\ ve\ n = 2\ \ için\ \ A(\xi) < 1$ ise,

$iii)\ p = -1\ ve\ n > 2\ \ için\ \ \frac{4n^2+np+2}{np+2} < A(\xi) < 1$ ise,

$iv)\ p \geq 0\ ve\ n > 1\ için\ \ A(\xi) < 1\ \ veya\ A(\xi) > \frac{4n^2+np+2}{np+2}$ ise.

Teorem 3.2. (M^{2n+1}, g), A $1-$formu ile birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir Ricci-recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanması halinde konformal Ricci solitonu daralandır:

$i)\ p \leq -2\ \ ve\ \ n > 1\ için\ A(\xi) < \frac{4n^2+np+2}{np+2}\ veya\ A(\xi) > 1$ ise,

$ii)\ p = -1\ ve\ n = 2\ \ için\ \ A(\xi) > 1$ ise,

$iii)\ p = -1\ ve\ n > 2\ \ için\ \ A(\xi) < \frac{4n^2+np+2}{np+2}\ veya\ A(\xi) > 1$ ise,

$iv)\ p \geq 0\ ve\ n > 1\ \ için 1 < A(\xi) < \frac{4n^2+np+2}{np+2}$ ise.

Teorem 3.2. (M^{2n+1}, g), A $1-$formu ile birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir Ricci-recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşulun sağlanması halinde konformal Ricci solitonu durağandır:

$A(\xi) = \frac{4n^2}{np+2} + 1$ ise.

4. ϕ-recurrent Kenmotsu Manifoldlar

Tanım 4.1. A, sıfırdan farklı bir $1-$form olmak üzere, bir Kenmotsu manifold üzerinde keyfi vektör alanları X, Y, Z, W için

$$\phi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = A(W)R(X,Y)Z \qquad (27)$$

koşulu sağlamırsa, bu manifold ϕ-recurrent Kenmotsumanifold olarak adlandırılır (Nagaraja and Venu 2016).

Bir ϕ-recurrent Kenmotsu manifoldunu ele alalım. (3) ve (27) eşitliklerinden

$$-(\nabla_W R)(X,Y)Z + \eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\xi = A(W)R(X\ ,Y\ )Z \qquad (28)$$

yazılır. (28) denklemi U vektör alanı ile iç çarpılarak,

$$-g((\nabla_W R)(X,Y)Z,U) + \eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\eta(U) = A(W)g(R(X,Y)Z,U) \qquad (29)$$

elde edilir. $e_i (i = 1,2,\ldots,2n+1)$, manifoldun herhangi bir noktasındaki teğet uzayının ortonormal bir bazı olsun. (29) denkleminde $X = U = e_i$ için $1 \leq i \leq 2n+1$ toplamı alınacak olursa

$$-(\nabla_W S)(Y,Z) = A(W)S(Y,Z) \qquad (30)$$

elde edilir. (30) ifadesinde Z yerine ξ alınırsa, (15) eşitliği ile birlikte

$$-(\nabla_W S)(Y,\xi) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right]A(W)\eta(Y) \qquad (31)$$

sonucuna ulaşılır. (15) ve (2.4) eşitliklerini (17) ifadesinde yerine koyularak

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right]g(Y,W) - S(Y,W) \qquad (32)$$

elde edilir. (31) ve (32) denklemlerinden

$$S(Y,W) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right]g(Y,W) + \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right]A(W)\eta(Y) \qquad (33)$$

elde edilir. Burada $Y = \xi$ alınarak

$$S(\xi,W) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right]\eta(W) + \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right]A(W) \qquad (34)$$

elde edilir. Lemma2.1'in bir sonucu olarak (34) eşitliği

$$S(\xi,W) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right]\eta(W)[1 - \eta(\rho)] \qquad (35)$$

olarak ifade edilir.

Son olarak (10) ve (19) eşitlikleri (35) denklemiyle ele alınırsa,

$$\lambda = \frac{1}{n} - \frac{2n}{-1+\mathrm{A}(\xi)} + \frac{p}{2} \qquad (36)$$

elde edilir.(36) eşitliği dikkate alınarak, konformal Ricci solitonu belirli koşullar attında aşağıdaki teoremlerle verilir.

Teorem 4.1. (M^{2n+1}, g), A $1-$formu ile birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir ϕ -recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanması halinde konformal Ricci solitonu genişleyendir:

$i)\ p \leq -2\ \ ve\ \ n > 1\ için\ \frac{4n^2+np+2}{np+2} < A(\xi) < 1$ ise,

$ii)\ p = -1\ ve\ n = 2\ için\ A(\xi) < 1$ ise,

$iii)\ p = -1\ ve\ n > 2\ için\ \frac{4n^2+np+2}{np+2} < A(\xi) < 1$ ise,

$iv)\ p \geq 0\ ve\ n > 1\ için\ A(\xi) < 1\ veya\ A(\xi) > \frac{4n^2+np+2}{np+2}$ ise.

Teorem 4.2. (M^{2n+1}, g), A $1-$formu ile birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir ϕ -recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanması halinde konformal Ricci solitonu daralandır:

$i)\ p \leq -2\ \ ve\ \ n > 1\ için\ A(\xi) < \frac{4n^2+np+2}{np+2}\ veya\ A(\xi) > 1$ ise,

$ii)\ p = -1\ ve\ n = 2\ için\ A(\xi) > 1$ ise,

$iii)\ p = -1\ ve\ n > 2\ için\ A(\xi) < \frac{4n^2+np+2}{np+2}\ veya\ A(\xi) > 1$ ise,

$iv)\ p \geq 0\ ve\ n > 1\ için 1 < A(\xi) < \frac{4n^2+np+2}{np+2}$ ise.

Teorem 4.2. (M^{2n+1}, g), A $1-$formuile birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir ϕ -recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşulun sağlanması halinde konformal Ricci solitonu sabittir:

$$A(\xi) = \frac{4n^2}{np+2} + 1 \text{ ise.}$$

5. Pseudo-projektif ϕ-recurrent Kenmotsu Manifoldlar

Bir Kenmotsu manifoldunda, pseudo-projektif eğrilik tensörü $\overline{P}$ (Sıddıqı 2018).

$$\overline{P}(X,Y)Z = aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y] - \frac{r}{2n+1}\left(\frac{a}{2n} + b\right)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \quad (37)$$

eşitliği ile verilir. Burada a ve b sıfırdan farklı sabitlerdir.

Tanım 5.1. A, sıfırdan farklı bir 1-form olmak üzere, bir Kenmotsu manifold üzerinde keyfi vektör alanları X, Y, Z, W için

$$\phi^2(\nabla_W \overline{P})(X,Y)Z) = A(W)\overline{P}(X,Y)Z \quad (38)$$

koşulu sağlamırsa, bu manifold pseudo-projektif ϕ-recurrent Kenmotsumanifold olarak adlandırılır (Nagaraja and Venu 2016).

Bir pseudo-projektif ϕ-recurrent Kenmotsu manifoldunu ele alalım. (3) ve (38) eşitliklerinden

$$-(\nabla_W \overline{P})(X,Y)Z + \eta((\nabla_W \overline{P})(X,Y)Z)\xi = A(W)\overline{P}(X,Y)Z \quad (39)$$

yazılır. (39) denklemi U vektör alanı ile iç çarpılarak,

$$-g((\nabla_W \overline{P})(X,Y)Z, U) + \eta((\nabla_W \overline{P})(X,Y)Z)\eta(U) = A(W)g(\overline{P}(X,Y)Z, U) \quad (40)$$

elde edilir. $e_i (i = 1,2,\ldots,2n+1)$, manifoldun herhangi bir noktasındaki teğet uzayının ortonormal bir bazı olsun. (40) denkleminde $X = U = e_i$ için $1 \leq i \leq 2n+1$ toplamı alınacak olursa

$$(\nabla_W S)(Y,Z) = A(W)\left\{S(Y,Z) - \frac{r}{2n+1}g(Y,Z)\right\} \quad (41)$$

elde edilir. (41) ifadesinde Z yerine ξalınırsa, (15) eşitliği ile birlikte

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = A(W)\left\{\left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right] - \frac{r}{2n+1}\right\}\eta(Y) \quad (42)$$

sonucuna ulaşılır. (15) ve (6) eşitlikleri (17) denleminde yerine koyularak

$(\nabla_W S)(Y,\xi) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right] g(Y,W) - S(Y,W)$ (43)

elde edilir. (42)ve (43) denklemlerinden

$S(Y,W) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right] g(Y,W) - \left\{\left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right] - \frac{r}{2n+1}\right\} A(W)\eta(Y)$ (44)

elde edilir. Burada $Y = \xi$ alınırsa

$S(\xi,W) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right] \eta(W) - \left\{\left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right] - \frac{r}{2n+1}\right\} A(W)$ (45)

elde edilir. Lemma2.1'in bir sonucu olarak (34) eşitliği

$S(\xi,W) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right] \eta(W) - \left\{\left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p + \frac{2}{n}\right)\right] - \frac{r}{2n+1}\right\} \eta(\rho)\eta(W)$ (46)

olarak ifade edilir.

Son olarak (10), (16) ve (19) eşitlikleri (35) denklemiyle ele alınırsa,

$\lambda = \frac{(2n^2+n)p + \mathrm{A}(\xi)(8n(n+1)+4)n + 8n^3 + 4n^2 + 4n + 2}{2(\mathrm{A}(\xi)+1)n(2n+1)}$ (47)

elde edilir. (47) eşitliği dikkate alınarak, konformal Ricci solitonu belirli koşullar attında aşağıdaki teoremlerle verilir:

Teorem 5.1. (M^{2n+1}, g), $\mathrm{A}\ 1-\mathrm{formuile}$ birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir pseudo-projektif ϕ-recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanması halinde konformal Ricci solitonu genişleyendir:

$i)\ r \leq 6\ için\ p < \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ ve\ \frac{8n^3+2n^2p+4n^2+np+4n+2}{2n^2p+np+2nr+4n+2} < A(\xi) < 1$ ise,
$ii)\ r \leq 6\ için\ p = \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ ve\ A(\xi) < 1$ ise,
$iii) r \leq 6\ için\ p > \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}$ ve $A(\xi) < 1$ ise,
$iv) r \leq 6\ için\ p > \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ ve\ A(\xi) > \frac{8n^3+2n^2p+4n^2+np+4n+2}{2n^2p+np+2nr+4n+2}$ ise.

Teorem 5.2. (M^{2n+1}, g), $\mathrm{A}\ 1-\mathrm{formuile}$ birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir pseudo-projektif ϕ-recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanması halinde konformal Ricci solitonu daralandır:

$i)\ r \leq 6\ için\ p < \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ ve\ \ A(\xi) < \frac{8n^3+2n^2p+4n^2+np+4n+2}{2n^2p+np+2nr+4n+2}$ ise,
$ii)\ r \leq 6\ için\ p < \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}$ ve $A(\xi) > 1$ ise,
$iii)\ r \leq 6\ için\ p = \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ ve\ A(\xi) > 1$ ise,
$iv)\ r \leq 6\ için\ p > \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ \ ve\ \ 1 < A(\xi) < \frac{8n^3+2n^2p+4n^2+np+4n+2}{2n^2p+np+2nr+4n+2}$ ise.

Teorem 5.2. (M^{2n+1}, g), $\mathrm{A}\ 1-\mathrm{formuile}$ birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir pseudo-projektif ϕ-recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşulun sağlanması halinde konformal Ricci solitonu durağandır:

$A(\xi) = \frac{(2n+1)(n(4n+p)+2)}{n(2np+p+2r+4)+2}$ ise.

6. Concircular ϕ-recurrent Kenmotsu Manifoldlar

Bir Kenmotsu manifoldunda concircular eğrilik tensörü

$\overline{C}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{r}{2n(2n+1)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$ (48)

eşitliği ile verilir (Tripathi 2008).

Tanım 6.1. A, sıfırdan farklı bir 1 −formolmak üzere, bir Kenmotsu manifold üzerinde keyfi vektör alanları X, Y, Z, W için

$\phi^2((\nabla_W \overline{C})(X,Y)Z) = A(W)\overline{C}(X,Y)Z$ (49)

koşulu sağlamırsa, bu manifold bir concircular ϕ-recurrentKenmotsu manifold olarak adlandırılır (Nagaraja and Venu 2016).

Bir concircular ϕ-recurrent Kenmotsu manifoldunu ele alalım. (3) ve (49) eşitliklerinden

$$-(\nabla_W \overline{C})(X,Y)Z + \eta((\nabla_W \overline{C})(X,Y)Z)\xi = A(W)\overline{C}(X,Y)Z \quad (50)$$

yazılır. (50) denklemi U vektör alanı ile iç çarpılarak,

$$-g((\nabla_W \overline{C})(X,Y)Z,U) + \eta((\nabla_W \overline{C})(X,Y)Z)\eta(U) = A(W)g(\overline{C}(X,Y)Z,U) \quad (51)$$

elde edilir. $e_i(i = 1,2,\ldots,2n+1)$, manifoldun herhangi bir noktasındaki teğet uzayının ortonormal bir bazı olsun. (51) denkleminde $X = U = e_i$için$1 \leq i \leq 2n+1$ toplamı alınacak olursa

$$(\nabla_W S)(Y,Z) = \frac{dr(W)}{2n+1} g(Y,Z) - A(W)\left\{S(Y,Z) - \frac{r}{2n+1} g(Y,Z)\right\} \quad (52)$$

elde edilir. (52) ifadesinde Z yerine ξ alınırsa, (3) ve (15) eşitliği ile birlikte

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = \frac{dr(W)}{2n+1}\eta(Y) + A(W)\left\{\left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p+\frac{2}{n}\right)\right] - \frac{r}{2n+1}\right\}\eta(Y) \quad (53)$$

elde edilir. Burada sabit bir r için (53) denkleminde

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = A(W)\eta(Y)\left\{\left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p+\frac{2}{n}\right)\right] - \frac{r}{2n+1}\right\} \quad (54)$$

sonucuna ulaşılır. (15) ve (6) eşitlikleri (17) denkleminde yerine koyularak

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p+\frac{2}{n}\right)\right] g(Y,W) - S(Y,W) \quad (55)$$

elde edilir. (53) ve (55) denklemlerinden

$$S(Y,W) = \left\{\left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p+\frac{2}{n}\right)\right] + \frac{r}{2n+1}\right\} A(W)\eta(Y) + \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p+\frac{2}{n}\right)\right] g(Y,W) \quad (56)$$

elde edilir. Burada $Y = \xi$ alınırsa

$$S(\xi,W) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p+\frac{2}{n}\right)\right]\eta(W) - \left\{\left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p+\frac{2}{n}\right)\right] - \frac{r}{2n+1}\right\} A(W) \quad (57)$$

elde edilir. Lemma2.1'in bir sonucu olarak (57) eşitliği

$$S(\xi,W) = \left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p+\frac{2}{n}\right)\right]\eta(W) - \left\{\left[-\lambda + \frac{1}{2}\left(p+\frac{2}{n}\right)\right] - \frac{r}{2n+1}\right\}\eta(\rho)\eta(W) \quad (58)$$

olarak ifade edilir.
Son olarak (10), (16) ve (19) eşitlikleri (58) denklemiyle ele alınırsa,

$$\lambda = \frac{(2n^2+n)p + \mathrm{A}(\xi)(8n(n+1)+4)n + 8n^3 + 4n^2 + 4n + 2}{2(\mathrm{A}(\xi)+1)n(2n+1)} \quad (59)$$

elde edilir.(59) eşitliği dikkate alınarak, konformal Ricci solitonu belirli koşullar attında aşağıdaki teoremlerle verilir:

Teorem 6.1. (M^{2n+1},g),A $1-$formuile birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir concircular ϕ-recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$olmak üzere, aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanması halinde konformal Ricci solitonu genişleyendir:

$i)\ r \leq 6\ için\ p < \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ ve\ \frac{8n^3+2n^2p+4n^2+np+4n+2}{2n^2p+np+2nr+4n+2} < A(\xi) < 1$ ise,
$ii)\ r \leq 6\ için\ p = \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ ve\ A(\xi) < 1$ ise,
$iii) r \leq 6\ için\ p > \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}$ ve $A(\xi) < 1$ ise,
$iv) r \leq 6\ için\ p > \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ ve\ A(\xi) > \frac{8n^3+2n^2p+4n^2+np+4n+2}{2n^2p+np+2nr+4n+2}$ ise.

Teorem 6.2. (M^{2n+1},g),A $1-$formu ile birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir concircular ϕ-

recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanması halinde konformal Ricci solitonu daralandır:

$i)\ r \leq 6\ için\ p < \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ ve\ A(\xi) < \frac{8n^3+2n^2p+4n^2+np+4n+2}{2n^2p+np+2nr+4n+2}$ ise,
$ii)\ r \leq 6\ için\ p < \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}$ ve $A(\xi) > 1$ ise,
$iii)\ r \leq 6\ için\ p = \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ ve\ A(\xi) > 1$ ise,
$iv) r \leq 6\ için\ p > \frac{-2nr-4n-2}{2n^2+n}\ \ ve\ \ 1 < A(\xi) < \frac{8n^3+2n^2p+4n^2+np+4n+2}{2n^2p+np+2nr+4n+2}$ ise.

Teorem 6.2. (M^{2n+1}, g),A $1-$formuile birlikte konformal Ricci solitonuna sahip bir concircular ϕ-recurrent Kenmotsu manifold olsun. $p \in \mathbb{R}, n > 1$ olmak üzere, aşağıdaki koşulun sağlanması halinde konformal Ricci-solitonu durağandır:

$A(\xi) = \frac{(2n+1)(n(4n+p)+2)}{n(2np+p+2r+4)+2}$ ise.

7. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada Ricci recurrent, ϕ-recurrent, pseudo-projektif ϕ-recurrent ve concircular ϕ –recurrent Kenmotsu manifoldlarda konformal Ricci solitonları, eğrilik koşullarıyla ilişkili $1-$formunun doğasına bağlı olarak genişleyen, daralan veya durağan olarak sınıflandırılmıştır.

Bu çalışma kompleks uzay formlarının gerçel hiper yüzeylerinde η –Riccisolitanlarını incelenmek üzere genişletilebilir.

8. Kaynaklar

Ayar, G., Yıldırım, M., 2019. η –Ricci solitons on nearly Kenmotsu Manifolds. *Asian Europan journal of Mathematics*, **13(1)**, 2040002, 8.

Ayar, G., Yıldırım, M., 2019. Ricci solitons and gradient Ricci solitons on nearly Kenmotsu manifolds. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, **34(3)**, 503-510.

Bagewadi C.S., Prasad, V.S. 1999. Note on Kenmotsu manifolds. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society* **91**, 379–384.

Basu, N., Bhattacharyyaz A., 2015. Conformal ricci soliton in kenmotsu manifold. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, **4(1)**, 15-21.

Blair, D.E., 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. 509, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

Catino, G., Mastrolia, P., Monticelli, D. D., Rigoli, M., 2014. Conformal Ricci Solitons And Related Integrability Conditions. *Advances in Geometry* , **16 (3)**.

Dutta, T., Basu N., Bhattacharyyaz A., 2016. Almost conformal Ricci solituons on 3-dimensional trans-Sasakian manifold. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **45(5)**, 1379 -1392.

Fischer, A.E., 2004. An introduction to conformal Ricci flow. Class, *Quantum Grav,* **21**, 171 – 218.

Hamilton, R.S., 1988. The Ricci flow on surfaces. *Contemporary Mathematics*, **71**, 237-262.

Kenmotsu, K., 1972. A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J.*, **24**, 93-103,

Nagaraja, H.G., Premalatha, C.R., 2012. Ricci Solitons In Kenmotsu Manifolds. *Journal of Mathematical Analysis*, **3(2)**, 18-24.

Nagaraja, H.G., Venu, K., 2016. Ricci Solitons in Kenmotsu Manifold. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, **8(1)**, 29–36.

Sıddıqı, M. D., 2018. Conformal η - Ricci Solitons In Lorentzian Trans Sasakian Manifolds. *International Journal of Maps in Mathematics* **1(1)**, 15-34.

Sinha B.B. and Sharma, R., 1983. On para-A-Einstein manifolds. *Publications De L'Institute Mathematique, Nouvelle Serie., tome* **34(48)**, 211-215.

Tripathi, M.M., 2008. Ricci solitons in contact metric manifolds. *arXiv:0801,4222v1*, [math DG].

Yıldırım M., 2019. Kenmotsu manifoldlar üzerinde $\eta-$ Ricci solitonlar. Gece Akademi, Basımda.