Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **18** (2018) 011303 (131- 155)   AKU J. Sci. Eng. **18** (2018) 011303 (131- 155)
DOİ: 10.5578/fmbd.66855

54 Boyutlu (Exceptional) Kuadratik Jordan Cebiri

Atilla Akpınar
Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Bursa.
e-posta: aakpinar@uludag.edu.tr

Geliş Tarihi: 15.08.2016; Kabul Tarihi: 18.04.2018

Anahtar kelimeler
Exceptional (kuadratik) Jordan cebirleri; Lokal halka; Octonion düzlem

Özet

Bu makalede, O karakteristiği 2 ve 3 den farklı bir R cismi üzerinde tanımlı bir octonion (Cayley-Dickson) R-cebiri, $\varepsilon \notin \mathrm{O}$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere girdileri $\mathbf{A} = \mathrm{O} + \mathrm{O}\varepsilon$ lokal halkasından alınarak oluşturulan 3x3 matris uzayının $\mathrm{H}(\mathbf{A}_3, J_\Gamma)$ ile gösterilen simetrik elemanlarının bir özel alt kümesi ile çalışılmıştır. Bu küme üzerinde bir norm form (determinant) ve bir iz form (bir matrisin izi) yardımıyla önce bir kübik cebir yapısı kurulmuş ve bu sayede 54 boyutlu (exceptional) kuadratik Jordan cebiri elde edilmiştir.

Quadratic (Exceptional) Jordan Algebra of Dimension 54

Keywords
Exceptional (quadratic) Jordan algebras; Local ring; Octonion plane

Abstract

In this paper, the special subset of symmetric elements denoted by $\mathrm{H}(\mathbf{A}_3, J_\Gamma)$ of 3x3 matrix spaces, whose entries are taken from $\mathbf{A} = \mathrm{O} + \mathrm{O}\varepsilon$ local ring where O is an octonion (Cayley-Dickson) algebra defined over a field of characteristic not two and three, $\varepsilon \notin \mathrm{O}$ and $\varepsilon^2 = 0$, is studied. A cubic algebra structure is first constructed by a norm form (determinant of a matrix) and a trace form (trace of a matrix) on the set, and so it is obtained (exceptional) quadratic Jordan algebra of dimension 54.

1. Giriş

Jordan cebirleri, bir fizikçi olan ve kuantum mekaniğinin cebirsel formulasyonunu elde etmeye çalışan P. Jordan tarafından 1930 ların başlarında çalışılmıştır. Bu yöndeki çalışmalarıyla, bu cebirler ile Lie grupları arasındaki ilişkinin görülmesine ve bazı geometrik keşiflere yol açmıştır.

Moufang (1933), Harmonik Nokta Teoremini sağlayan Dezargsel olmayan bir projektif düzlem örneği olan bir projektif octonion düzlem kurmuş ve bu düzlemi octonion (Cayley-Dickson) bölümlü cebiri ile koordinatlamıştır.

Girdileri bir O octonion R-cebirden alınarak oluşturulan 3x3 matris uzayının $X \mapsto \bar{X}^t$ involusyonu altında simetrik kalan elemanların $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3)$ alt uzayı üzerinde, $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ çarpma (Jordan çarpımı) işlemi tanımlanırsa $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3)$ bir Jordan R-cebiri yapısına sahip olur. Faulkner (1970)'a göre, $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3)$ cebirini bir octonion düzlemi tanımlamakta ilk olarak Jordan (1949) kullanmıştır. Jordan bu çalışmasında O yu reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir reel octonion bölümlü cebiri olarak almış ve bir projektif düzlemin nokta ve doğrularını temsil etmek için $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3)$ deki primitive idempotentleri kullanmıştır. Freudenthal (1951), Jordan'ın (1949) çalışmasındakine benzer bir kuruluş vermiştir.

Springer (1960), Jordan ve Freudenthal tarafından verilen tanımın O nun karakteristiği 2 ve 3 den farklı bir cisim üzerinde tanımlı bir octonion bölümlü cebir olması durumunda da geçerli olduğunu göstermiştir ve bu sayede bir projektif düzlemin nokta ve doğrularını temsil edebilmiştir.

Faulkner (1970), Jordan-Freudenthal-Springer den farklı olarak O yu keyfi karakteristikli bir cisim üzerinde tanımlı bir octonion (Cayley-Dickson) cebiri almıştır ve buradan elde edilen bir kuadratik Jordan cebir sınıfı yardımıyla tanımlanan octonion düzlemler üzerinde çalışmıştır.

Özkan (2016); R özdeşlikli, değişmeli ve birleşmeli lokal halka olmak üzere girdileri O octonion R-cebirinden alınarak oluşturulan 3x3 matris uzayının bir kanonik involusyona göre simetrik kalan elemanlarının bir özel alt kümesi ile çalışmıştır. Bu küme üzerinde ikinci bir iç işlem olarak Jordan çarpımı alınarak bu küme önce bir Jordan $R-$ cebir yapısına sahip hale getirilmiş ve daha sonra bu küme üzerinde bir norm form (determinant) ve bir iz form (bir matrisin izi) tanımlanmıştır. Bu Jordan $R-$ cebirin bir kübik cebir olduğu gösterilerek bu cebirin literatürden iyi bilinen 27 boyutlu bir (exceptional) kuadratik Jordan cebiri olduğu ifade edilmiştir. Üstelik, bu cebir üzerinde iz ve norm formun sağladığı özellikler ile bu cebir yardımıyla Bix (1980) de verilen octonion düzlem tanımındaki bağıntılar detaylı bir biçimde incelenmiştir.

Bu makalede, O yu karakteristiği 2 ve 3 den farklı bir R cismi üzerinde tanımlı bir octonion R-cebiri olarak seçeceğiz ama $\varepsilon \notin \mathrm{O}$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere girdileri $\mathbf{A} = \mathrm{O} + \mathrm{O}\varepsilon$ lokal halkasından alınarak oluşturulan 3x3 matris uzayının $\mathrm{H}(\mathbf{A}_3, J_\Gamma)$ ile gösterilen simetrik elemanlarının bir özel alt kümesi ile çalışacağız. Özkan (2016)'ın yüksek lisans tezindekine benzer metotla ve bu tezde elde edilen bazı sonuçları da kullanarak önce bu cebirin bir kübik cebir olduğunu göstereceğiz ve elde edilen cebirin 54 boyutlu (exceptional) kuadratik Jordan cebiri olduğunu ifade edeceğiz.

2. bölüm, ihtiyaç duyulan temel bilgilerin tanım ve teoremler olarak verildiği bölümdür. 3. bölümde bir özdeşlikli kuadratik Jordan cebir sınıfı tanıtılacaktır. 4. bölümde $\mathrm{H}(\mathbf{A}_3, J_\Gamma)$ kümesinin bir kübik R-cebir olduğuna dair işlemler detaylı bir şekilde incelenmiştir ve nihayetinde bu cebirin 54 boyutlu kuadratik Jordan cebiri olduğu ifade edilmiştir.

2. Ön Bilgiler

Bu bölümde; bu çalışmaya temel teşkil edecek tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Genel bilgilerin bir araya getirilmesinde, alfabetik sırayla, Beachy (1999), Blyth ve Robertson (2002), Çiftçi (2015), Elman ve ark. (2008), Faulkner (2014), Fraleigh (1982), Hungerford (1974), Jacobson (1985), Malik ve ark. (1997), McDonald (1976), Schafer (1996) çalışmalarından faydalanılmıştır. Üstelik, bu bölüm içinde verilen spesifik bilgiler için gerekli görülen yerlerde ayrıca başka çalışmalar da referans gösterilmiştir.

Tanım 2.1. R nin her a elemanı için $aI \subseteq I$ ve $Ia \subseteq I$ şartlarını sağlayan bir I alt halkasına R halkasının bir *ideali* denir.

Tanım 2.2. R bir halka ve $M \neq R$, R nin bir ideali olsun. Eğer $M \subset I \subset R$ şartını sağlayan hiçbir I ideali yoksa M ye R nin *maksimal ideali* denir.

Tanım 2.3. Aşağıda birbirine denk olarak verilen şartlardan bir tanesini sağlayan bir R halkasına *lokal halka* denir:

a) R nin bir tek maksimal ideali vardır.

b) R nin tüm birim olmayan (tersi olmayan) elemanları bir tek has idealde kapsanır.

c) R nin birim olmayan (tersi olmayan) elemanları bir has ideal oluşturur.

d) $\forall\, r \in R$ için ya r ya da $1-r$ birimdir.

Tanım 2.4. Birleşmeli olmayan bir R halkasında her $a,b \in R$ için

$$a(ab) = (aa)b$$

ve

$$(ab)b = a(bb)$$

sırasıyla, sol ve sağ alterne şartları sağlanıyorsa R ye *alterne halka* denir.

Teorem 2.5. R bir alterne halka olsun. Bu takdirde, Moufang özdeşlikleri olarak da isimlendirilen, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Pickert, 1955; Faulkner, 2014):

a) $b((ac)a) = ((ba)c)a$

b) $(a(ca))b = a(c(ab))$

c) $(ab)(ca) = a(bc)a$ **.**

Tanım 2.6. M bir $R-$modül olmak üzere, M nin M_1 ve M_2 ile gösterilen iki alt modülü (alt uzayı) verilsin. Eğer,

1) $M = M_1 + M_2$ dir.

2) $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ dır.

şartları sağlanıyorsa M ye M_1 ve M_2 nin direkt toplamı denir ve bu durumda $M = M_1 \oplus M_2$ yazılır.

Tanım 2.7. R özdeşlikli bir halka ve M bir $R-$ modül olsun. M nin kendisini üreten (veya geren) lineer bağımsız bir alt kümesine M bir *bazı* denir. Eğer M nin bir bazını oluşturan sonlu sayıda $i_1, i_2, ..., i_n$ elemanları varsa M ye bir *serbest (free)* $R-$modül denir.

Tanım 2.8. Bir M $R-$modülün herhangi bir bazındaki eleman sayısına M nin *boyutu* denir.

Tanım 2.9. $M_1, M_2, ..., M_n$ ve M' $R-$modülleri verilsin. i, $1 \le i \le n$ özelliğinde seçilmiş bir tamsayı, $x, y \in M_i$, $1 \le j \le n$ ve $j \ne i$ için $\alpha_j \in M_j$ ve $\lambda \in R$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \to M'$ dönüşümüne bir *n-lineer dönüşüm* denir:

NL1)

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x + y, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) = f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) + f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, y, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$$

dir.

NL2)

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \lambda x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) = \lambda f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$$

dir.

Burada sadece i. bileşen göz önüne alınırsa f nin bu bileşen için lineer olduğu görülür. n tane bileşen için lineerlik şartlarının sağlanması istendiğinden f ye n-lineer dönüşüm adı verilmektedir. Özel olarak $n = 2$ alınırsa f ye *2-lineer* (*bilineer*) *dönüşüm* denir.

Tanım 2.10. M bir $R-$modül olsun. $M^n = M \times M \times \cdots \times M$ olmak üzere $f : M^n \to R$ dönüşümü n-lineer ise f ye M *üzerinde n-lineer dönüşüm* ya da kısaca *n-lineer form* adı verilir.

Tanım 2.11. f , M üzerinde bir n-lineer dönüşüm olsun. Eğer her $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sıralı n-lisi ve her $i \ne j$ için

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n) = f(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)$$

ise f ye *simetrik n-lineer dönüşüm*,

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n) = -f(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)$$

ise f ye *anti-simetrik n-lineer dönüşüm* denir.

Tanım 2.12. M ve M' iki $R-$modül olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $Q : M \to M'$ dönüşümüne bir *kuadratik dönüşüm* denir:

KU1) Her $\lambda \in R$ ve her $y \in M$ için $Q(\lambda y) = \lambda^2 Q(y)$ dir (yani Q 2 dereceden homojen polinom fonksiyondur).

KU2) Her $x, y \in M$ için

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}\left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\right]$$ özelliğinde

$M \times M$ den M' ye bir simetrik ve 2-lineer dönüşüm vardır (Linerizasyon ya da polarizasyon özelliği).

$M' = M$ iken Q kuadratik dönüşümüne M üzerinde bir kuadratik dönüşüm denir. $M' = R$ iken Q kuadratik dönüşümüne bir *kuadratik form*, bu durumda $Q(x, y)$ ye de *birleştirilmiş 2-lineer form* denir (Burada $Q(x, x) = Q(x)$ olduğuna dikkat ediniz.).

Tanım 2.13. M ve M' iki $R-$modül olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $N : M \to M'$ dönüşümüne bir *kübik dönüşüm* denir:

KÜ1) Her $\lambda \in R$ ve her $y \in M$ için $N(\lambda y) = \lambda^3 N(y)$ dir (yani N 3. dereceden homojen polinom fonksiyondur).

KÜ2) Her $x, y, z \in M$ için

$$N(x, y, z) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} N(x + y + z) - N(x + y) - N(y + z) \\ -N(x + z) + N(x) + N(y) + N(z) \end{bmatrix}$$

özelliğinde $M \times M \times M$ den M' ye bir simetrik ve 3-lineer dönüşüm vardır (Linerizasyon ya da polarizasyon özelliği).

$M' = M$ iken N kübik dönüşümüne M üzerinde bir kübik dönüşüm denir. $M' = R$ iken N kübik dönüşümüne bir *kübik form*, bu durumda $N(x, y, z)$ ye de *birleştirilmiş 3-lineer form* denir (Burada $N(x, x, x) = N(x)$ olduğuna dikkat ediniz.).

Thomas (2014)'ın çalışması yardımıyla Tanım 2.12 ve Tanım 2.13 ün genellemesi aşağıdaki biçimde yapılabilir.

Tanım 2.14. M ve M' iki $R-$modül olsun. $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : M \to M'$ dönüşümüne bir *n. dereceden dönüşüm* denir:

ND1) Her $\lambda \in R$ ve her $y \in M$ için $f(\lambda y) = \lambda^n f(y)$ dir (yani f n. dereceden homojen polinom fonksiyondur).

ND2) Her $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ ve $H \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ için

$$n! B_f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{H, |H|=k} f(S_H),\ S_H := \sum_{i \in H} x_i$$

özelliğinde $M^n = M \times M \times \ldots \times M$ den M' ye bir B_f simetrik ve n-lineer dönüşüm vardır (Linerizasyon ya da polarizasyon özelliği).

$M' = M$ iken n. dereceden dönüşüme M *üzerinde n. dereceden dönüşüm* denir. $M' = R$ iken n. dereceden dönüşüme bir *n. dereceden form*, bu durumda $B_f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ye de *birleştirilmiş n-lineer form* denir (Burada $B_f(x, x, \ldots, x) = f(x)$ olacağına dikkat ediniz.).

Özel olarak; M üzerindeki bir 1. dereceden form bir lineer form olarak isimlendirilir. $n = 2$ için Tanım 2.12 de kuadratik ve $n = 3$ için Tanım 2.13 de kübik ifadeleri daha önce kullanılmıştı.

Schafer (1996) dan, bir birleşmeli cebirden bir Lie cebiri veya bir Jordan cebirinin nasıl elde edildiği aşağıda verilecektir.

M bir birleşmeli $R-$ cebir iken M üzerinde her $x, y \in M$ için

$$x \circ y = xy - yx$$

biçiminde yeni bir çarpma (*Lie çarpımı*) işlemi tanımlansın. Burada, $x \circ x = 0$ dır. Bu yeni çarpma işlemi ile M den elde edilen cebir M^- ile gösterilsin. M^- deki çarpma hem anti-komütatiftir hem de *Jakobi Özdeşliği* olarak bilinen

$$(x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0$$

eşitliğini sağlar. Bu şekilde elde edilen M^- ye bir *Lie cebiri* denir. Üstelik M^- nin bu işleme göre kapalı olan herhangi bir alt cebiri de Lie cebiri yapısına sahip olur.

M bir birleşmeli $R-$ cebir iken M üzerinde her $x, y \in M$ için

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

biçiminde yeni bir çarpma (*Jordan çarpımı*) işlemi tanımlansın. Burada, $x \cdot x = xx$ yani $x^{\cdot 2} = x^2$ dir. Bu yeni çarpma işlemi ile M den elde edilen cebir M^+ ile gösterilsin. M^+ daki çarpma hem değişmelidir hem de *Jordan Özdeşliği* olarak bilinen

$$(x \cdot y) \cdot (x^{\cdot 2}) = x \cdot [y \cdot (x^{\cdot 2})]$$

eşitliğini sağlar. Bu şekilde elde edilen M^+ ya bir *Jordan cebiri* denir. Üstelik M^+ nın bu işleme göre kapalı olan herhangi bir alt cebiri de Jordan cebiri yapısına sahip olur.

Böylece, Jacobson (1968) dan aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 2.15. Herhangi bir cebir M^+ Jordan cebirinin herhangi bir alt cebirine izomorf ise bu cebire *özel Jordan cebiri* adı verilir. Özel olmayan Jordan cebirleri *exceptional Jordan cebirleri* olarak adlandırılır.

Tanım 2.16. $(R, +, \cdot)$ ve $(R', +', \cdot')$ iki halka olsun. $\Phi : R \to R'$ birebir ve örten bir homomorfizm (veya anti-homomorfizm) ise Φ dönüşümüne R den R' ye bir *izomorfizm* (veya *anti-izomorfizm*) denir. R nin kendisi üzerine bir izomorfizmine (veya anti-izomorfizmine) R üzerinde bir *otomorfizm* (veya *anti-otomorfizm*) denir.

Tanım 2.17. R bir halka olsun. i, R üzerinde özdeşlik dönüşümü olmak üzere mertebesi (peryodu) 2 (yani $f \neq i$ iken $f^2 = i$) olan bir f otomorfizmine (veya anti-otomorfizmine) R nin bir *involusyonu* (veya *anti-involusyonu*) denir.

Tanım 2.18. R bir halka ve f de R nin bir involusyonu (ya da anti-involusyonu) olsun. R nin f involusyonu (ya da anti-involusyonu) altında değişmez kalan elemanlarına R nin *simetrik elemanları* denir.

A bir alterne cisim ve $\varepsilon \notin A$ olsun. $\mathbf{A} := A(\varepsilon) = A + A\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = 0$) üzerinde toplama ve çarpma iç işlemleri her $a, b \in \mathbf{A}$ için

$$a + b = (x + y\varepsilon) + (z + w\varepsilon) = (x + z) + (y + w)\varepsilon$$

$$a \cdot b = (x + y\varepsilon)(z + w\varepsilon) = xz + (xw + yz)\varepsilon$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 2.19. $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ bir lokal alterne halkadır ve birim olmayan elemanlarının oluşturduğu küme $\mathbf{I} = A\varepsilon$ bir idealdir (Blunck, 1991).

Bu çalışmada $\mathbf{A}$, reel sayılar üzerinde bilinen $\mathbf{D}$ dual sayılar halkasının (Benz, 1973) bir genellemesi olduğundan, *alterne dual sayılar halkası* olarak da isimlendirilebilir. $\mathbf{A}$ hakkında daha detaylı bilgi için Blunck (1992)'a bakılabilir.

Teorem 2.20. $\mathbf{A}$ nın birleşmeli olması için gerek ve yeter şart A nın birleşmeli olmasıdır.

A nın merkezi Z ile gösterilsin. Bu durumda,

$$Z(\mathbf{A}) := Z(\varepsilon) = Z + Z\varepsilon$$

kümesi $\mathbf{A}$ nın merkezi olup $\mathbf{A}$ nın değişmeli ve birleşmeli bir alt halkasıdır (Blunck, 1992).

A birleşmeli değil ise bu takdirde A kendi Z merkezi üzerinde bir Cayley-Dickson (octonion) bölümlü cebiridir (Bruck-Kleinfeld Teoremi olarak da isimlendirilen bu teorem için bkz. (Stevenson, 1972; Faulkner 2014)). A birleşmeli değil ise A nın Schafer (1996) da tanımlanan çarpma ile birlikte $\{e_0 = 1, e_1, ..., e_7\}$ biçiminde bir baza sahip olduğu Blunck (1991) da ifade edilmiştir. Karakteristiğin 2 den farklı olması durumunda Jacobson (1985), s. 448 deki çarpım tablosu ile birlikte c_1, c_2, c_3 sıfırdan farklı elemanlar olmak üzere A nın $\{\mathrm{i}_0 = 1, \mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \mathrm{i}_3, \mathrm{i}_4, \mathrm{i}_5, \mathrm{i}_6, \mathrm{i}_7\}$ biçiminde bir bazı vardır. Bundan sonra A ile, Z üzerinde karakteristiği 2 den farklı olan bir Cayley-Dickson (octonion) bölümlü cebiri kastedilecektir ve bu cebir O ile gösterilecektir.

Şimdi, O cebiri üzerinde aşağıdaki tanımları ve bu tanımlardan elde edilen sonuçları verebiliriz.

Tanım 2.21. $x = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_7 i_7 \in \mathrm{O}$ olmak üzere $\bar{\ } : \mathrm{O} \to \mathrm{O}$ için

$$x \to \bar{x} = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - ... - a_7 i_7$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme *eşlenik alma dönüşümü* denir.

Bu tanıma göre $x \in \mathrm{O}$ için $\bar{\bar{x}} = x$ ve $x, y \in \mathrm{O}$ için $\overline{xy} = \bar{y}\,\bar{x}$ dir, yani eşlenik alma dönüşümü O nun bir anti-involusyonudur.

Tanım 2.22. $n : \mathrm{O} \to Z$ için $x \to n(x) = x\bar{x}$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *norm form*, $n(x)$ e de x in *normu* veya *norm formu* denir.

Bu tanıma göre $x = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_7 i_7 \in \mathrm{O}$ için

$$n(x) = x\bar{x} = \bar{x}x = n(\bar{x}) = a_0^2 - c_1 a_1^2 - c_2 a_2^2 + c_1 c_2 a_3^2 - c_3 a_4^2 + c_1 c_3 a_5^2 + c_2 c_3 a_6^2 - c_1 c_2 c_3 a_7^2$$

olur.

Tanım 2.23. $t : \mathrm{O} \to Z$ için $x \to t(x) = \dfrac{x + \bar{x}}{2}$ biçiminde tanımlanan dönüşüme $iz-form$, $t(x)$ e de x in izi veya $iz-formu$ denir.

Bu tanıma göre $x = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_7 i_7 \in \mathrm{O}$ için

$$t(x) = \frac{x + \bar{x}}{2} = \frac{\bar{x} + x}{2} = t(\bar{x}) = a_0$$

olur.

Tanım 2.24. $\mathrm{O} \times \mathrm{O} \to Z$ ye her $x, y \in \mathrm{O}$ için

$$n(x,y)=\frac{1}{2}\left[n(x+y)-n(x)-n(y)\right]$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme birleştirilmiş form denir.

Tanım 2.25. $O\times O\to Z$ ye her $x,y\in O$ için $t(x,y):=t(xy)$ olarak tanımlanan t ye jenerik iz form adı verilir.

Bu tanıma göre, her $x\in O$ için $t(x,1)=t(x)$, $t(1,y)=t(y)$ ve $t(1,1)=t(1)=1$ olacağı açıktır.

Bu cebir üzerinde, bu sonuçlar ile birlikte iz ve norm fonksiyonlarının sağladığı özellikleri aşağıdaki teorem yardımıyla veriyoruz. Bu sonuçların ispatı için Schafer (1996), Jacobson (1985), Çelik (1995), Akpınar (2007) ve Özkan (2016) çalışmalarına bakılabilir.

Teorem 2.26. $x,y,z\in O$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

1) t iz formu lineerdir.

2) $n(xy)=n(x)n(y)$ dir (Norm form çarpılabilirdir)

3) $x^2-t(x)x+n(x)=0$ dır.

4) $n(x)=0\Leftrightarrow x=0$ dır. Eğer $x\neq 0$ ise $x^{-1}=n(x)^{-1}\bar{x}$ dir.

5) $n(x,y)=t(x\bar{y})$ dir. Özel olarak, $y=1$ için $n(x,1)=t(x)$ olur.

6) n birleştirilmiş formu simetrik ve 2-lineerdir.

7) t jenerik iz formu simetrik ve 2-lineerdir.

8) $t(x,y)=t(\bar{x},\bar{y})$ dir.

9) $n(xy,zw)+n(zy,xw)=2n(x,z)n(y,w)$ dir.

10) $n(yx,wz)+n(wx,yz)=2n(y,w)n(x,z)$ dir.

11) t asosyatiftir, yani $t(xy,z)=t(x,yz)$ dir.

12) $n(x,y)=n(\bar{x},\bar{y})$ dir.

13) $t(x,y)=2t(x)t(y)-n(x,y)$ dir.

A daki $k:x\mapsto\bar{x}$ eşlenik alma dönüşümü $\mathbf{A}$ ya $\mathbf{k}:x+y\varepsilon\mapsto\bar{x}+\bar{y}\varepsilon$ biçiminde genişletilir. A üzerinde t ile gösterilen $x\mapsto\frac{x+\bar{x}}{2}$ iz form ve n ile gösterilen $x\mapsto x\bar{x}$ norm form dönüşümlerinin $\mathbf{A}$ daki karşılıkları için sırasıyla $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{n}$ sembolleri kullanılacaktır. t ve n dönüşümlerinin, sırasıyla, $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{n}$ nin A ya kısıtlanmışları olduğu açıktır.

Şimdi, O cebiri üzerinde verdiğimiz tüm tanım ve bu tanımlardan elde edilen sonuçları $\mathbf{A}=O+O\varepsilon$ cebiri üzerine taşıyabiliriz.

Tanım 2.27. $\mathbf{A}\times\mathbf{A}\to Z(\mathbf{A})$ ye her $a,b\in\mathbf{A}$ için

$$\mathbf{n}(a,b)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{n}(a+b)-\mathbf{n}(a)-\mathbf{n}(b)\right]$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme birleştirilmiş form denir.

Tanım 2.28. $\mathbf{A}\times\mathbf{A}\to Z(\mathbf{A})$ ye her $a,b\in\mathbf{A}$ için $\mathbf{t}(a,b):=\mathbf{t}(ab)$ olarak tanımlanan $\mathbf{t}$ ye jenerik iz form adı verilir.

Bu durumda aşağıdaki sonuçları hemen ifade edebiliriz.

Her $a=x+y\varepsilon,\ b=z+w\varepsilon\in\mathbf{A}$ için $\bar{\bar{a}}=a$ ve $\overline{ab}=\bar{b}\,\bar{a}$ dir, yani eşlenik alma dönüşümü $\mathbf{A}$ nın bir anti-involusyonudur (Blunck, 1991). Üstelik, $\mathbf{n}(a)=n(x)+2n(x,y)\varepsilon=\mathbf{n}(\bar{a})$ ve $\mathbf{t}(a)=t(x)+t(y)\varepsilon=\mathbf{t}(\bar{a})$ olur (Çelik, 1995). Bu iki sonuca çalışma boyunca sıkça ihtiyaç duyacağız.

Bu cebir üzerinde, bu sonuçlar ile birlikte iz ve norm fonksiyonlarının sağladığı özellikleri aşağıdaki teorem yardımıyla veriyoruz. Bu sonuçların çoğunun ispatı Blunck (1991) ve Çelik (1995) çalışmalarında bulunabilir.

Teorem 2.29. $a,b,c,d\in\mathbf{A}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler sağlanır:

1) $\mathbf{t}$ iz formu lineerdir (Blunck, 1991).

2) $\mathbf{n}(ab)=\mathbf{n}(a)\mathbf{n}(b)$ dir yani norm form çarpılabilirdir (Blunck, 1991).

3) $a^2-\mathbf{t}(a)a+\mathbf{n}(a)=0$ dır (Blunck, 1991).

4) $\mathbf{n}(a)=0\Leftrightarrow a\in\mathbf{I}$ dır. Eğer $a\in\mathbf{A}\setminus\mathbf{I}$ ise $a^{-1}=\mathbf{n}(a)^{-1}\bar{a}$ dir(Blunck, 1991).

5) $\mathbf{n}(a,b)=\mathbf{t}(a\bar{b})$ dir. Özel olarak, $b=1$ için $\mathbf{n}(a,1)=\mathbf{t}(a)$ olur (Çelik, 1995).

6) $\mathbf{n}$ birleştirilmiş formu simetrik ve 2-lineerdir (Blunck, 1991).

7) $\mathbf{t}$ jenerik iz formu simetrik ve 2-lineerdir (Blunck, 1991).

8) $\mathbf{t}(a,b)=\mathbf{t}(\bar{a},\bar{b})$ dir.

9) $\mathbf{n}(ab,cd)+\mathbf{n}(cb,ad)=2\mathbf{n}(a,c)\mathbf{n}(b,d)$ dir.

10) $\mathbf{n}(ba,dc)+\mathbf{n}(da,bc)=2\mathbf{n}(b,d)\mathbf{n}(a,c)$ dir.

11) $\mathbf{t}$ asosyatiftir, yani $\mathbf{t}(ab,c)=\mathbf{t}(a,bc)$ dir (Blunck, 1991).

12) $\mathbf{n}(a,b)=\mathbf{n}(\bar{a},\bar{b})$ dir.

13) $\mathbf{t}(a,b)=2\mathbf{t}(a)\mathbf{t}(b)-\mathbf{n}(a,b)$ dir.

Bu çalışma boyunca çokça kullanacağımız bir sonucun aşağıda ispatını veriyoruz.

Sonuç 2.30. Her $a=x+y\varepsilon,\ b=z+w\varepsilon\in\mathbf{A}$ için $\mathbf{n}(a,b)=n(x,z)+\big(n(x,w)+n(z,y)\big)\varepsilon$ dir.

İspat: Farklı iki yoldan ispatı vermek mümkündür:

1. Yol:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(a,b)&=\mathbf{n}(x+y\varepsilon,\ z+w\varepsilon)\\&=\frac{1}{2}\Big[\mathbf{n}\big((x+y\varepsilon)+(z+w\varepsilon)\big)-\mathbf{n}(x+y\varepsilon)-\mathbf{n}(z+w\varepsilon)\Big]\\&=\frac{1}{2}\Big[\mathbf{n}\big((x+z)+(y+w)\varepsilon\big)-\mathbf{n}(x+y\varepsilon)-\mathbf{n}(z+w\varepsilon)\Big]\end{aligned}$$

olup $\mathbf{n}(a)=n(x)+2n(x,y)\varepsilon$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(a,b)&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}n(x+z)+2n(x+z,y+w)\varepsilon-n(x)\\-2n(x,y)\varepsilon-n(z)-2n(z,w)\varepsilon\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\left[n(x+z)-n(x)-n(z)+2\begin{pmatrix}n(x+z,y+w)\\-n(x,y)-n(z,w)\end{pmatrix}\varepsilon\right]\\&=\frac{1}{2}\big[n(x+z)-n(x)-n(z)\big]+\begin{pmatrix}n(x+z,y+w)\\-n(x,y)-n(z,w)\end{pmatrix}\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte n nin birleştirilmiş form olduğu ve 2-lineerliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(a,b)&=n(x,z)+\begin{pmatrix}n(x,y)+n(x,w)+n(z,y)\\+n(z,w)-n(x,y)-n(z,w)\end{pmatrix}\varepsilon\\&=n(x,z)+\big(n(x,w)+n(z,y)\big)\varepsilon\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2. Yol:

$\mathbf{n}(a,b)=\mathbf{t}(a\bar{b})$ ve $\mathbf{t}(a)=t(x)+t(y)\varepsilon$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(a,b)&=\mathbf{t}\big((x+y\varepsilon)(\bar{z}+\bar{w}\varepsilon)\big)\\&=\mathbf{t}\big(x\bar{z}+(x\bar{w}+y\bar{z})\varepsilon\big)\\&=t(x\bar{z})+t(x\bar{w}+y\bar{z})\varepsilon\end{aligned}$$

olur. Son ifadede $t(x\bar{y})=n(x,y)$ ve t iz formun lineerliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(a,b)&=n(x,z)+\big(t(x\bar{w})+t(y\bar{z})\big)\varepsilon\\&=n(x,z)+\big(n(x,w)+n(y,z)\big)\varepsilon\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3. Özdeşlikli Kuadratik Jordan Cebirleri

Bu bölümde, çalışacağımız Jordan cebir sınıfı hakkındaki bilgiler bir araya getirilmiştir. Jordan cebirleri hakkında daha detaylı bilgi için (Jacobson 1968), kuadratik Jordan cebirleri hakkında daha fazla bilgi için (Jacobson, 1969) çalışmalarına bakılabilir.

Önce kübik cebir tanımı içinde ihtiyaç duyulacak bazı kavramlar detaylı olarak ele alınacaktır.

McCrimmon (2004) dan bir kübik dönüşümün ilk ve tam linerizasyonu ile ilgili bilgiler kullanılarak aşağıda sonuçlar elde edilmiştir.

M bir $R-$modül olsun. Her $X\in M$ ve her $\alpha\in R$ için M üzerinde bir N kübik dönüşümü verilsin. Bu durumda, $X=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n$ olacak biçimde $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in R$ elemanlarının var olduğu kabul edilsin. Böylece, N kübik dönüşümü

$$\begin{aligned}N(X)&=N(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^3N(x_i)+\sum_{i\neq j}^{n}\lambda_i^2\lambda_jN(x_i,x_j)+\sum_{i<j<k}^{n}\lambda_i\lambda_j\lambda_kN(x_i,x_j,x_k)\end{aligned}$$

biçiminde yazılarak $R[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n]$ polinom halkasına genişletilmiş olur.

Şimdi $N(x+\lambda y)$ yi hesaplamak istiyoruz. $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+...+\lambda_n x_n$ ifadesinde $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda$, $\lambda_3=...=\lambda_n=0$ ve $x_1=x$, $x_2=y$ olarak seçilirse $N(x+\lambda y)=N(x)+\lambda N(x,y)+\lambda^2 N(y,x)+\lambda^3 N(y)$ olur. Buradan,

$$N(x+\lambda y)-N(x)=\lambda\left[N(x,y)+\lambda N(y,x)+\lambda^2 N(y)\right]$$

yazılabilir. Son eşitliğin her iki tarafı λ ya bölünür ve $\lambda\to 0$ iken her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{N(x+\lambda y)-N(x)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\left[N(x,y)+\lambda N(y,x)+\lambda^2 N(y)\right]=N(x,y)$$

elde edilir. $N(x,y)$ ye N nin x noktasında y yönündeki diferansiyeli (veya yönlü türevi) denir. Bu durumda, $N(x,y)=\Delta_x^y N=\partial_y N_x$ olarak ifade edilebilir. Üstelik, $N(x,y)$ x de kuadratik y de lineerdir. Bu özellikteki $N(x,y)$ ye N nin *ilk linerizasyonu* adı verilir.

$$N(x+\lambda y)=N(x)+\lambda N(x,y)+\lambda^2 N(y,x)+\lambda^3 N(y)$$

eşitliğinde $\lambda=1$ alarak $N(x,y)$ terimi yalnız bırakılırsa

$$N(x,y)=N(x+y)-N(y,x)-N(x)-N(y) \quad (1)$$

bulunur. Buradan,

$$N(x,y)+N(y,x)=N(x+y)-N(x)-N(y) \quad (2)$$

elde edilir.

(1) de $y=x$ alınırsa,

$$\begin{aligned}N(x,x)&=2\left[N(2x)-N(x)-N(x)\right]\\&\quad-\frac{1}{2}\left[N(3x)-N(x)-8N(x)\right]\\&=2\left[8N(x)-2N(x)\right]-\frac{1}{2}\left[27N(x)-9N(x)\right]\\&=12N(x)-\frac{1}{2}18N(x)\\&=12N(x)-9N(x)\\&=3N(x)\end{aligned}$$

olur.

$^{\#}$, M üzerinde bir kuadratik dönüşüm ve T de M üzerinde tanımlı bir simetrik ve 2-lineer dönüşüm olmak üzere $N:M\times M\to R$ dönüşümü her $(x,y)\in M\times M$ için $N(x,y):=T(x^{\#},y)$ olarak tanımlansın. N; x de kuadratik y de lineer olan 2. dereceden homojen bir polinom fonksiyondur. $T(x,y):=T(xy)$ olmak üzere özel olarak $y=1$ için $N(x,1)=T(x^{\#},1)=T(x^{\#})$ ve $x=1$ için $N(1,y)=T(1^{\#},y)=T(1,y)=T(y)$ olur. Bu durumda $N(x+\lambda y)$ de x yerine $-x$ ve y yerine 1 alarak,

$$\begin{aligned}N(\lambda 1-x)&=N(-x)+\lambda N(-x,1)+\lambda^2 N(1,-x)+\lambda^3 N(1)\\&=-N(x)+\lambda N(x,1)-\lambda^2 N(1,x)+\lambda^3 N(1)\\&=-N(x)+\lambda T(x^{\#})-\lambda^2 T(x)+\lambda^3 1\end{aligned}$$

elde edilir.

$$N(\lambda 1-x):=p_x(\lambda)=\lambda^3-T(x)\lambda^2+T(x^{\#})\lambda-N(x)1$$

olarak tanımlansın. Bu polinoma *jenerik minimum polinom* adı verilir. Burada, $N(0)=0$ olacağından her x için

$$p_x(x)=x^3-x^2T(x)+xT(x^{\#})-N(x)1=0$$

eşitliğinin sağlanacağı açıktır. Buradan, $x^3-x^2T(x)+xT(x^{\#})=N(x)1$ ve $\left(x^2-xT(x)+T(x^{\#})\right)x=N(x)1$ yazılabilir. Böylece, $T(x^{\#}):=S(x)$ ve $x^{\#}:=x^2-xT(x)+S(x)$ olarak tanımlanırsa $x^{\#}x=xx^{\#}=N(x)1$ olarak yazılması mümkün olacaktır.

$S(x)$ dönüşümü için

$S(x,y)=\frac{1}{2}\left[S(x+y)-S(x)-S(y)\right]$ ifadesine birleştirilmiş form denir.

$x\times x=x^{\#}$ özelliğinde M üzerinde 2-lineer ve simetrik olan bir $\times$ dönüşümü $M\times M$ den M ye her $(x,y)\in M\times M$ için

$$x\times y:=\frac{1}{2}\left[(x+y)^{\#}-x^{\#}-y^{\#}\right] \tag{3}$$

olarak tanımlansın. Bu çarpımın bir başka ifadesi Freudenthal çarpım olarak ileride (6) da verilmiştir. (6) yardımıyla $\times$ işleminin $+$ işlemi üzerine dağılma özelliğine sahip olduğu gerçeğini görmek kolaydır.

Aşağıdaki teorem $S(x,y)$ nin bazı özelliklerini belirlemektedir.

Teorem 3.1. $S(x,y)$ birleştirilmiş form için aşağıdaki önermeler doğrudur:

i) $S(x,y)=T(x\times y)$ dir. Bu durumda, $S(x,1)=T(x)T(1)-T(x)$ ve $S(x,x)=S(x)$ dir.

ii) $S(x,y)$ simetrik ve 2-lineerdir.

Şimdi, $N(x+\lambda y+\mu z)$ yi hesaplayabiliriz. $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n$ ifadesinde $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda$, $\lambda_3=\mu$, $\lambda_4=\lambda_5=\ldots=\lambda_n=0$ ve $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ alarak;

$$\begin{aligned}N(x+\lambda y+\mu z)&=N(x)+\lambda^3N(y)+\mu^3N(z)+\lambda N(x,y)\\&\quad+\mu N(x,z)+\lambda^2N(y,x)+\lambda^2\mu N(y,z)\\&\quad+\mu^2N(z,x)+\mu^2\lambda N(z,y)+\lambda\mu N(x,y,z)\end{aligned}$$

elde ederiz. Son eşitlikte $\lambda=\mu=1$ alarak $N(x,y,z)$ terimi yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned}N(x,y,z)&=N(x+y+z)-N(x,y)-N(x,z)-N(y,x)\\&\quad-N(y,z)-N(z,x)-N(z,y)-N(x)-N(y)-N(z)\end{aligned}$$

ve $N(u,v)$ ile $N(v,u)$ biçimindeki tüm terimleri yan yana getirerek

$$\begin{aligned}N(x,y,z)&=N(x+y+z)-\left[N(x,y)+N(y,x)\right]\\&\quad-\left[N(x,z)+N(z,x)\right]-\left[N(y,z)+N(z,y)\right]\\&\quad-N(x)-N(y)-N(z)\end{aligned}$$

buluruz. Bu son eşitlikteki $\left[N(u,v)+N(v,u)\right]$ biçimindeki tüm terimler yerine (2) den eşiti olan $N(u+v)-N(u)-N(v)$ yazılırsa

$$\begin{aligned}N(x,y,z)&=N(x+y+z)-\left[N(x+y)-N(x)-N(y)\right]\\&\quad-\left[N(x+z)-N(x)-N(z)\right]\\&\quad-\left[N(y+z)-N(y)-N(z)\right]\\&\quad-N(x)-N(y)-N(z)\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapılarak $N(x,y,z)$ yi N ye bağlı olarak

$$\begin{aligned}N(x,y,z)&=N(x+y+z)-N(x+y)\\&\quad-N(x+z)-N(y+z)\\&\quad+N(x)+N(y)+N(z)\end{aligned} \tag{4}$$

yazılmış olur. Bu son ifadeye N nin *tam linerizasyonu* adı verilir.

Aşağıdaki ifade de N nin tam linerizasyonuna denktir:

$N(x,y,z):=N(x+z,y)-N(x,y)-N(z,y)$ olarak tanımlansın. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki her bir terim yerine (1) den eşiti yazılırsa

$$\begin{aligned}N(x,y,z)&=\left[N(x+z+y)-N(y,x+z)-N(x+z)-N(y)\right]\\&\quad-\left[N(x+y)-N(y,x)-N(x)-N(y)\right]\\&\quad-\left[N(z+y)-N(y,z)-N(z)-N(y)\right]\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}N(x,y,z)&=N(x+y+z)-N(x+y)-N(x+z)\\&\quad-N(y+z)+N(x)+N(y)+N(z)\end{aligned}$$

elde edilir ki bu (4) deki sonuçla aynıdır. $N(x,y,z)$ de y ve z yerine x alınırsa

$$\begin{aligned}N(x,x,x)&=N(3x)-N(2x)-N(2x)-N(2x)+3N(x)\\&=27N(x)-8N(x)-8N(x)-8N(x)+3N(x)\\&=27N(x)-8N(x)-8N(x)-8N(x)+3N(x)\\&=30N(x)-24N(x)\\&=6N(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $N(x,x,x)=N(x)$ olması istendiğinden

$$N(x,y,z)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} N(x+y+z)-N(x+y)-N(x+z) \\ -N(y+z)+N(x)+N(y)+N(z) \end{bmatrix}$$

olarak alınır. Her $(x,y,z)\in M\times M\times M$ için

$$N(x,y,z)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} N(x+y+z)-N(x+y)-N(x+z) \\ -N(y+z)+N(x)+N(y)+N(z) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan $N:M\times M\times M\to R$ dönüşümüne birleştirilmiş form denir.

İspatı (Özkan, 2016) da bulunan aşağıdaki teorem N ile T dönüşümleri arasındaki ilişkiyi tam olarak ifade etmektedir.

Teorem 3.2. Birleştirilmiş form için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) $N(x,y,z)=\frac{1}{3}T(x\times z,y)$ dir. Bu durumda $3N(x,y,x)=T(x^{\#},y)=N(x,y)$ dir.

ii) $N(x,y,z)$ birleştirilmiş formu simetrik ve 3-lineerdir.

$T(x^{\#},y)=N(x,y)$ dir. Bu durumda

$$T(x,y)=T(x)T(y)-2T(x\times y) \qquad (5)$$

olduğu görülebilir. Bu sonuç ile birlikte $x^{\#}=x^2-xT(x)+S(x)$, $S(x,y)=T(x\times y)$ ve $S(x,y)=\frac{1}{2}\left[S(x+y)-S(x)-S(y)\right]$ olduğu $x\times y=\frac{1}{2}\left[(x+y)^{\#}-x^{\#}-y^{\#}\right]$ eşitliğinde kullanılırsa;

$$x\times y=xgy-\frac{1}{2}xT(y)-\frac{1}{2}yT(x)+\frac{1}{2}\big(T(x)T(y)-T(x,y)\big)1 \qquad (6)$$

sonucuna ulaşılır ki bu eşitlik literatürde *Freudenthal çarpım* olarak bilinmektedir.

(1) ve (3) den elde edilecek $N(x+y)=N(x)+T(x^{\#},y)+T(x,y^{\#})+N(y)$ ve $(x+y)^{\#}=x^{\#}+2(x\times y)+y^{\#}$ eşitlikleri kullanarak ispatlanacak aşağıdaki teorem Faulkner (2014) da Lemma 11.15 olarak ifade edilmiştir.

Teorem 3.3. M bir $R-$modül, N bir kübik dönüşüm olmak üzere $(M,N,1)$ sisteminde (cebirinde) her $x,y,z,w\in M$ için aşağıdaki önermeler geçerlidir:

a) $(x^{\#})^{\#}=N(x)x$

b) $4\left[x^{\#}\times(x\times y)\right]=N(x)y+T(x^{\#},y)x$

c) $4\left[(x\times y)^{\#}\right]+2\left(x^{\#}\times y^{\#}\right)=T(x^{\#},y)y+T(y^{\#},x)x$

d) $8\left[(x\times y)\times(x\times z)\right]+4\left[x^{\#}\times(y\times z)\right]$
$=T(x^{\#},y)z+T(x^{\#},z)y+2T(y\times z,x)x$

e) $4\left[(x\times y)\times(w\times z)+(w\times y)\times(x\times z)+(x\times w)\times(y\times z)\right]$
$=T(x\times w,y)z+T(x\times w,z)y+T(y\times z,x)w+T(y\times z,w)x$

Şimdi, Bix (1980) den kübik cebir tanımını vermek için hazırız.

Tanım 3.4. M, özdeşlikli bir $R-$modül olsun. M üzerinde $x\to x^{\#}$ biçiminde bir kuadratik dönüşüm ve M üzerinde bir N kübik form tanımlansın. Eğer M üzerinde aşağıdaki şartlar sağlanırsa M ye bir kübik $R-$cebir denir:

1) $x^{\#\#}=N(x)x$ dir.

2) $N(1)=1$ dir.

3) $T(x^{\#},y)=N(x,y)$ dir.

4) $1^{\#}=1$ dir.

5) $x\times y=\frac{1}{2}\left[(x+y)^{\#}-x^{\#}-y^{\#}\right]$ ve $T(y)=T(y,1)$ olmak üzere $1\times y=\frac{1}{2}\left[T(y)1-y\right]$ dir.

1-5) şartlarının hepsi R nin tüm skalar genişlemeleri altında sağlanır.

Tanım 3.4 ün 3. şartında $N(x,y):=\Delta_x^y N=\partial_y N_x$ olarak ifade edilebileceğini daha önce belirtmiştik. Bu durumda N dönüşümü x de kuadratik y de lineer olan bir dönüşüm olarak tanımlanmıştı.

Bir kübik cebir $U_x y = T(x,y)x - 2(x^\# \times y)$ eşitliği altında bir özdeşlikli kuadratik Jordan cebiridir (McCrimmon, 1969).

$U_x y = T(x,y)x - 2(x^\# \times y)$ eşitliğinde $x=1$ olarak seçilirse;
$U_1 y = T(1,y)1 - 2(1^\# \times y) = T(y)1 - 2(1\times y)$ olur ve $U_1 y = y$ olacağından bu iki sonuç birleştirilirse $T(y)1 - 2(1\times y) = y$ yani $1\times y = \frac{1}{2}\left[T(y)1 - y\right]$ elde edilir. Bu sonucun Tanım 3.4 ün 5 nolu şartında yer aldığına dikkat ediniz.

$U_x y = T(x,y)x - 2(x^\# \times y)$ eşitliğinde $y=1$ olarak alınırsa;

$$U_x 1 = U_x = x^2 = T(x,1)x - 2(x^\# \times 1)$$
$$\Rightarrow x^2 - T(x)x + 2[x^\# \times 1] = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - T(x)x + 2\left(\frac{1}{2}[T(x^\#)1 - x^\#]\right) = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - T(x)x + T(x^\#) = x^\#$$
$$\Rightarrow x^2 - T(x)x + S(x) = x^\#$$

ve böylece

$$x^2 = T(x)x + x^\# - S(x) \qquad (7)$$

elde edilir.

$U_x y = T(x,y)x - 2(x^\# \times y)$ eşitliğinde $y=x$ olarak seçilirse; $U_x x = xxx = x^3 = T(x,x)x - 2[x^\# \times x]$ eşitliğinden (5) yardımıyla

$$x^3 = \left[T(x)T(x) - 2T(x\times x)\right]x - 2[x^\# \times x]$$

ve (3) yardımıyla

$$x^3 = \left[T(x)\right]^2 x - 2T(x^\#)x - 2[x^\# \times x]$$

elde edilir. Son eşitlikte $x^\# \times x$ in eşiti (6) dan yazılırsa

$$x^3 = \left[T(x)\right]^2 x - 2T(x^\#)x - 2\begin{bmatrix} x^\# x - \frac{1}{2}T(x^\#)x - \frac{1}{2}T(x)x^\# \\ +\frac{1}{2}[T(x^\#)T(x) - T(x^\#,x)] \end{bmatrix}$$

olur ve son eşitlikte $x^\# x = N(x)$ olduğu kullanılırsa

$$x^3 = \left[T(x)\right]^2 x - 2T(x^\#)x - 2N(x) + T(x^\#)x$$
$$+ T(x)x^\# - T(x^\#)T(x) + T(x^\#,x)$$

bulunur ki son eşitlikte gerekli kısaltmalar yapılarak

$$\begin{aligned} x^3 &= \left[T(x)\right]^2 x - T(x^\#)x - 2N(x) \\ &\quad + T(x)x^\# - T(x^\#)T(x) + T(x^\#,x) \end{aligned} \qquad (8)$$

sonucuna varılır. Burada $T(x^\#,x) = N(x,x) = 3N(x)$ olduğundan, (8) den

$$x^3 = \left[T(x)\right]^2 x - T(x^\#)x + N(x) + T(x)x^\# - T(x^\#)T(x)$$

yazabiliriz ki

$$\begin{aligned} x^3 + T(x^\#)x - N(x) &= \left[T(x)\right]^2 x + T(x)x^\# - T(x^\#)T(x) \\ &= T(x)\left[T(x)x + x^\# - T(x^\#)\right] \\ &= T(x)\left[T(x)x + x^\# - S(x)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Burada (7) kullanılırsa, $x^3 - T(x)x^2 + T(x^\#)x - N(x) = 0$ elde edilir. O halde bir kuadratik Jordan cebirinde

$$x^3 - T(x)x^2 + T(x^\#)x - N(x) = 0$$

bağıntısı geçerlidir. Üstelik, $xx^\# = x^\# x = N(x)$ olduğundan bir x elemanının birim olması için gerek ve yeter şart $N(x)$ in birim olmasıdır ve bu durumda $x^{-1} = N(x)^{-1} x^\#$ dir.

Bu kuadratik Jordan cebirinde Teorem 3.3 deki önermeler sağlanır. Bu önermelere benzer daha fazla sonuç görmek için McCrimmon (1969) a bakılabilir.

4. Bir Kuadratik Jordan Cebir Sınıfı

R karakteristiği 2 ve 3 den farklı bir cisim, O bir octonion $R-$cebir, $\varepsilon \notin \mathrm{O}$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere girdileri $\mathbf{A} = \mathrm{O} + \mathrm{O}\varepsilon$ cebirinden alınan tüm 3×3 matrislerin kümesi kısaca $\mathbf{A}_3$ ile gösterilecektir.

$\mathbf{A}_3$ kümesi üzerinde $+$ iç işlemi olarak bildiğimiz matris toplamı ve $R\times \mathbf{A}_3 \to \mathbf{A}_3$ dış işlemi olarak skalarla bir matrisin çarpımı alınırsa $\mathbf{A}_3$ kümesi bu işlemlerle birlikte R cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. $\mathbf{A}_3$ üzerinde ikinci bir iç işlem olarak alışageldiğimiz matris çarpımı alınırsa $(\mathbf{A}_3,+,\cdot)$

sistemi birleşmeli ama değişmeli olmayan özdeşlikli bir halka yani özdeşlikli bir $R-$cebirdir. $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ R nin birimleri yani sıfırdan farklı elemanları olmak üzere $\Gamma=\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}$ diyagonal matrisini ele alalım ve her $X=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\in\mathbf{A}_3$ için $J_\Gamma(X)=\Gamma^{-1}\overline{X}^T\Gamma$ özelliğinde bir $J_\Gamma:\mathbf{A}_3\to\mathbf{A}_3$ dönüşümü tanımlayalım. Bu dönüşüm $\mathbf{A}_3$ $R-$cebiri üzerinde bir involusyondur. Gerçektende; her $X=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\in\mathbf{A}_3$ için

$$
\begin{aligned}
&J_\Gamma(X)\\
&=\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}^{-1}\overline{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}}^T\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}&0&0\\0&\gamma_2^{-1}&0\\0&0&\gamma_3^{-1}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\overline{a}_{11}&\overline{a}_{21}&\overline{a}_{31}\\\overline{a}_{12}&\overline{a}_{22}&\overline{a}_{32}\\\overline{a}_{13}&\overline{a}_{23}&\overline{a}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}\right)\\
&=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}&0&0\\0&\gamma_2^{-1}&0\\0&0&\gamma_3^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\overline{a}_{11}&\gamma_2\overline{a}_{21}&\gamma_3\overline{a}_{31}\\\gamma_1\overline{a}_{12}&\gamma_2\overline{a}_{22}&\gamma_3\overline{a}_{32}\\\gamma_1\overline{a}_{13}&\gamma_2\overline{a}_{23}&\gamma_3\overline{a}_{33}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}\gamma_1\overline{a}_{11}&\gamma_1^{-1}\gamma_2\overline{a}_{21}&\gamma_1^{-1}\gamma_3\overline{a}_{31}\\\gamma_2^{-1}\gamma_1\overline{a}_{12}&\gamma_2^{-1}\gamma_2\overline{a}_{22}&\gamma_2^{-1}\gamma_3\overline{a}_{32}\\\gamma_3^{-1}\gamma_1\overline{a}_{13}&\gamma_3^{-1}\gamma_2\overline{a}_{23}&\gamma_3^{-1}\gamma_3\overline{a}_{33}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\overline{a}_{11}&\gamma_1^{-1}\gamma_2\overline{a}_{21}&\gamma_1^{-1}\gamma_3\overline{a}_{31}\\\gamma_2^{-1}\gamma_1\overline{a}_{12}&\overline{a}_{22}&\gamma_2^{-1}\gamma_3\overline{a}_{32}\\\gamma_3^{-1}\gamma_1\overline{a}_{13}&\gamma_3^{-1}\gamma_2\overline{a}_{23}&\overline{a}_{33}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olup

$$
\begin{aligned}
&J_\Gamma\left(J_\Gamma(X)\right)\\
&=\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}^{-1}\overline{\begin{bmatrix}\overline{a}_{11}&\gamma_1^{-1}\gamma_2\overline{a}_{21}&\gamma_1^{-1}\gamma_3\overline{a}_{31}\\\gamma_2^{-1}\gamma_1\overline{a}_{12}&\overline{a}_{22}&\gamma_2^{-1}\gamma_3\overline{a}_{32}\\\gamma_3^{-1}\gamma_1\overline{a}_{13}&\gamma_3^{-1}\gamma_2\overline{a}_{23}&\overline{a}_{33}\end{bmatrix}}^T\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}\\
&=\left(\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}&0&0\\0&\gamma_2^{-1}&0\\0&0&\gamma_3^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&\gamma_2^{-1}\gamma_1a_{12}&\gamma_3^{-1}\gamma_1a_{13}\\\gamma_1^{-1}\gamma_2a_{21}&a_{22}&\gamma_3^{-1}\gamma_2a_{23}\\\gamma_1^{-1}\gamma_3a_{31}&\gamma_2^{-1}\gamma_3a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}a_{11}&\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1a_{12}&\gamma_1^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_1a_{13}\\\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2a_{21}&\gamma_2^{-1}a_{22}&\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_2a_{23}\\\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_3a_{31}&\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3a_{32}&\gamma_3^{-1}a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\gamma_1\gamma_1^{-1}a_{11}&\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1a_{12}&\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_1a_{13}\\\gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2a_{21}&\gamma_2\gamma_2^{-1}a_{22}&\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_2a_{23}\\\gamma_1\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_3a_{31}&\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3a_{32}&\gamma_3\gamma_3^{-1}a_{33}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=X
\end{aligned}
$$

dir. Böyle bir involusyona *kanonik involusyon* denir. Şayet bu involusyonda özel olarak $\Gamma=I_3$ birim matris olarak seçilirse bu involusyona *standart involusyon* adı verilir (Jacobson, 1968; McCrimmon, 2004).

Üstelik; her $X,Y\in\mathbf{A}_3$ için

$$
\begin{aligned}
J_\Gamma(XY)=\Gamma^{-1}\overline{(XY)}^T\Gamma&=\Gamma^{-1}\left(\overline{Y}^T\overline{X}^T\right)\Gamma\\
&=\Gamma^{-1}\left(\overline{Y}^T\left(\Gamma\Gamma^{-1}\right)\overline{X}^T\right)\Gamma\\
&=\left(\Gamma^{-1}\overline{Y}^T\Gamma\right)\left(\Gamma^{-1}\overline{X}^T\Gamma\right)\\
&=J_\Gamma(Y)J_\Gamma(X)
\end{aligned}
$$

olduğundan J_Γ $\mathbf{A}_3$ üzerinde bir anti-involusyondur.

Şimdi, J_Γ involusyonu yardımıyla $\mathbf{A}_3$ uzayının simetrik elemanlarını bulmak istiyoruz. Simetrik elemanların oluşturduğu küme $\mathrm{H}(\mathbf{A}_3,J_\Gamma)$ ile gösterilirse bu alt kümenin herhangi bir elemanının; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in Z(\mathbf{A})$ olmak üzere

$$X=\begin{bmatrix}\alpha_1&\gamma_2a_3&\gamma_3\overline{a}_2\\\gamma_1\overline{a}_3&\alpha_2&\gamma_3a_1\\\gamma_1a_2&\gamma_2\overline{a}_1&\alpha_3\end{bmatrix}$$

formunda olduğu görülür. Gerçektende;

$$J_\Gamma(X)$$
$$=\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}^{-1}\overline{\begin{bmatrix}\alpha_1&\gamma_2a_3&\gamma_3\bar{a}_2\\\gamma_1\bar{a}_3&\alpha_2&\gamma_3a_1\\\gamma_1a_2&\gamma_2\bar{a}_1&\alpha_3\end{bmatrix}}^T\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}$$
$$=\left(\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}&0&0\\0&\gamma_2^{-1}&0\\0&0&\gamma_3^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1&\gamma_1a_3&\gamma_1\bar{a}_2\\\gamma_2\bar{a}_3&\alpha_2&\gamma_2a_1\\\gamma_3a_2&\gamma_3\bar{a}_1&\alpha_3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}\alpha_1&\gamma_1^{-1}\gamma_1a_3&\gamma_1^{-1}\gamma_1\bar{a}_2\\\gamma_2^{-1}\gamma_2\bar{a}_3&\gamma_2^{-1}\alpha_2&\gamma_2^{-1}\gamma_2a_1\\\gamma_3^{-1}\gamma_3a_2&\gamma_3^{-1}\gamma_3\bar{a}_1&\gamma_3^{-1}\alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}\alpha_1&a_3&\bar{a}_2\\\bar{a}_3&\gamma_2^{-1}\alpha_2&a_1\\a_2&\bar{a}_1&\gamma_3^{-1}\alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\gamma_1\gamma_1^{-1}\alpha_1&\gamma_2a_3&\gamma_3\bar{a}_2\\\gamma_1\bar{a}_3&\gamma_2\gamma_2^{-1}\alpha_2&\gamma_3a_1\\\gamma_1a_2&\gamma_2\bar{a}_1&\gamma_3\gamma_3^{-1}\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1&\gamma_2a_3&\gamma_3\bar{a}_2\\\gamma_1\bar{a}_3&\alpha_2&\gamma_3a_1\\\gamma_1a_2&\gamma_2\bar{a}_1&\alpha_3\end{bmatrix}=X$$

dir.

$\mathrm{H}(\mathbf{A}_3,J_\Gamma)$ kümesi $\mathbf{A}_3$ vektör uzayının bir alt uzayı olur. $\mathrm{H}(\mathbf{A}_3,J_\Gamma)$ alt uzayı üzerinde ikinci bir iç işlem olan "$\circ$" işlemi, her $X,Y\in\mathbf{A}_3$ için $X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$ Jordan çarpımı olarak tanımlanırsa $(\mathrm{H}(\mathbf{A}_3,J_\Gamma),+,\circ)$ sistemi bir Jordan $R-$cebiri olur. Burada XY ile $\mathbf{A}_3$ $R-$cebiri üzerindeki matris çarpımı kast edilmektedir. "$\circ$" işlemi değişmeli olduğundan $(\mathrm{H}(\mathbf{A}_3,J_\Gamma),+,\circ)$ Jordan $R-$cebiri değişmelidir.

Bu çalışmada, $(\mathrm{H}(\mathbf{A}_3,J_\Gamma),+,\circ)$ Jordan $R-$cebirinin önce bir kübik cebir olduğunu göstereceğiz ve 54 boyutlu bir (exceptional) kuadratik Jordan cebiri olduğunu ifade edeceğiz.

Şimdi bu cebir üzerinde Jordan çarpımını biraz daha detaylı inceleyelim:

Her $a_i=x_i+y_i\varepsilon,\ b_i=z_i+w_i\varepsilon\in\mathbf{A}$ $(i=1,2,3)$ olmak üzere her $X,Y\in\mathrm{H}(\mathbf{A}_3,J_\Gamma)$ için $X\circ Y=[d_{ij}]$ eşitliğinden;

$$\begin{aligned}d_{11}&=\frac{1}{2}\left(2\alpha_1\beta_1+\gamma_2\gamma_1\left(a_3\bar{b}_3+b_3\bar{a}_3\right)+\gamma_3\gamma_1\left(\bar{a}_2b_2+\bar{b}_2a_2\right)\right)\\&=\alpha_1\beta_1+\gamma_2\gamma_1\mathbf{n}(a_3,b_3)+\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2,b_2)\\&=\alpha_1\beta_1+\gamma_1\left(\gamma_2\mathbf{n}(a_3,b_3)+\gamma_3\mathbf{n}(a_2,b_2)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{21}&=\frac{1}{2}\left(\beta_1\gamma_1\bar{a}_3+\alpha_2\gamma_1\bar{b}_3+\gamma_3\gamma_1a_1b_2+\gamma_1\alpha_1\bar{b}_3+\beta_2\gamma_1\bar{a}_3+\gamma_3\gamma_1b_1a_2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\gamma_3\left[\gamma_1\left(a_1b_2+b_1a_2\right)\right]+\gamma_1\left[\left(\beta_1+\beta_2\right)\bar{a}_3+\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\bar{b}_3\right]\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{31}&=\frac{1}{2}\left(\beta_1\gamma_1a_2+\gamma_2\gamma_1\bar{a}_1\bar{b}_3+\alpha_3\gamma_1b_2+\gamma_1\alpha_1b_2+\gamma_2\gamma_1\bar{b}_1\bar{a}_3+\beta_3\gamma_1a_2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\gamma_2\left[\gamma_1\left(\bar{b}_1\bar{a}_3+\bar{a}_1\bar{b}_3\right)\right]+\gamma_1\left[\left(\beta_1+\beta_3\right)a_2+\left(\alpha_3+\alpha_1\right)b_2\right]\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{12}&=\frac{1}{2}\left(\alpha_1\gamma_2b_3+\beta_2\gamma_2a_3+\gamma_3\gamma_2\bar{a}_2\bar{b}_1+\beta_1\gamma_2a_3+\gamma_2\alpha_2b_3+\gamma_3\gamma_2\bar{b}_2\bar{a}_1\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\gamma_3\left[\gamma_2\left(\bar{b}_2\bar{a}_1+\bar{a}_2\bar{b}_1\right)\right]+\gamma_2\left[\left(\beta_1+\beta_2\right)a_3+\left(\alpha_1+\alpha_2\right)b_3\right]\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{22}&=\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3,b_3)+\alpha_2\beta_2+\gamma_3\gamma_2\mathbf{n}(a_1,b_1)\\&=\alpha_2\beta_2+\gamma_2\left(\gamma_3\mathbf{n}(a_1,b_1)+\gamma_1\mathbf{n}(a_3,b_3)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{32}&=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\gamma_2a_2b_3+\beta_2\gamma_2\bar{a}_1+\alpha_3\gamma_2\bar{b}_1+\gamma_1\gamma_2b_2a_3+\gamma_2\alpha_2\bar{b}_1+\beta_3\gamma_2\bar{a}_1\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\left[\gamma_2\left(a_2b_3+b_2a_3\right)\right]+\gamma_2\left[\left(\beta_2+\beta_3\right)\bar{a}_1+\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\bar{b}_1\right]\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{13}&=\frac{1}{2}\left(\alpha_1\gamma_3\bar{b}_2+\gamma_2\gamma_3a_3b_1+\gamma_3\beta_3\bar{a}_2+\beta_1\gamma_3\bar{a}_2+\gamma_2\gamma_3b_3a_1+\gamma_3\alpha_3\bar{b}_2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\gamma_2\left[\gamma_3\left(a_3b_1+b_3a_1\right)\right]+\gamma_3\left[\left(\beta_3+\beta_1\right)\bar{a}_2+\left(\alpha_3+\alpha_1\right)\bar{b}_2\right]\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{23}&=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\gamma_3\bar{a}_3\bar{b}_2+\alpha_2\gamma_3b_1+\gamma_3\beta_3a_1+\gamma_1\gamma_3\bar{b}_3\bar{a}_2+\beta_2\gamma_3a_1+\gamma_3\alpha_3b_1\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\left[\gamma_3\left(\bar{b}_3\bar{a}_2+\bar{a}_3\bar{b}_2\right)\right]+\gamma_3\left[\left(\beta_2+\beta_3\right)a_1+\left(\alpha_2+\alpha_3\right)b_1\right]\right),\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}d_{33}&=\gamma_1\gamma_3\mathbf{n}(a_2,b_2)+\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1,b_1)+\alpha_3\beta_3\\&=\alpha_3\beta_3+\gamma_3\left(\gamma_1\mathbf{n}(a_2,b_2)+\gamma_2\mathbf{n}(a_1,b_1)\right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$(i,j,k)=(1,2,3)$ dairesel permütasyonu olmak üzere $X\circ Y$ matrisinin bileşenleri

$$d_{ii}=\alpha_i\beta_i+\gamma_i\left[\gamma_j\mathbf{n}(a_k,b_k)+\gamma_k\mathbf{n}(a_j,b_j)\right]\tag{9}$$

ve

$$d_{ij}=\frac{1}{2}\gamma_j\left[\gamma_k\left(\overline{a_ib_j+b_ia_j}\right)+\left(\beta_i+\beta_j\right)a_k+\left(\alpha_i+\alpha_j\right)b_k\right]\tag{10}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $i=1,2,3$ için $a_i = x_i + y_i\varepsilon$, $b_i = z_i + w_i\varepsilon \in \mathbf{A}$ ve $\mathbf{n}(a_i,b_i) = n(x_i,z_i) + \left(n(x_i,w_i) + n(y_i,z_i)\right)\varepsilon$ olduğu (9) ve (10) da dikkate alınırsa

$$d_{ii} = \alpha_i\beta_i + \gamma_i\begin{bmatrix} \gamma_j\left(n(x_k,z_k) + \left(n(x_k,w_k) + n(y_k,z_k)\right)\varepsilon\right) \\ +\gamma_k\left(n(x_j,z_j) + \left(n(x_j,w_j) + n(y_j,z_j)\right)\varepsilon\right) \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_i\beta_i + \gamma_i\left(\gamma_j n(x_k,z_k) + \gamma_k n(x_j,z_j)\right)$$

$$+\gamma_i\begin{bmatrix} \gamma_j\left(n(x_k,w_k) + n(y_k,z_k)\right) \\ +\gamma_k\left(n(x_j,w_j) + n(y_j,z_j)\right) \end{bmatrix}\varepsilon$$

ve

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_j\begin{bmatrix} \gamma_k\left(\overline{(x_i + y_i\varepsilon)(z_j + w_j\varepsilon) + (z_i + w_i\varepsilon)(x_j + y_j\varepsilon)}\right) \\ +(\beta_i + \beta_j)(x_k + y_k\varepsilon) + (\alpha_i + \alpha_j)(z_k + w_k\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\gamma_j\begin{bmatrix} \gamma_k\left(\overline{x_i z_j + (x_i w_j + y_i z_j)\varepsilon + z_i x_j + (z_i y_j + w_i x_j)\varepsilon}\right) \\ +(\beta_i + \beta_j)(x_k + y_k\varepsilon) + (\alpha_i + \alpha_j)(z_k + w_k\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\gamma_j\begin{bmatrix} \gamma_k\left(\overline{x_i z_j + z_i x_j + (x_i w_j + y_i z_j + z_i y_j + w_i x_j)\varepsilon}\right) \\ +(\beta_i + \beta_j)(x_k + y_k\varepsilon) + (\alpha_i + \alpha_j)(z_k + w_k\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\gamma_j\begin{bmatrix} \gamma_k\left(\left(\overline{x_i z_j + z_i x_j}\right) + \left(\overline{x_i w_j + y_i z_j + z_i y_j + w_i x_j}\right)\varepsilon\right) \\ +(\beta_i + \beta_j)(x_k + y_k\varepsilon) + (\alpha_i + \alpha_j)(z_k + w_k\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\gamma_j\left(\gamma_k\left(\overline{x_i z_j + z_i x_j}\right) + (\beta_i + \beta_j)x_k + (\alpha_i + \alpha_j)z_k\right)$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_j\begin{bmatrix} \left(\gamma_k\left(\overline{x_i w_j + y_i z_j + z_i y_j + w_i x_j}\right)\right) \\ +(\beta_i + \beta_j)y_k + (\alpha_i + \alpha_j)w_k \end{bmatrix}\varepsilon$$

olur.

Burada d_{ij} nin eşleneğinin d_{ji} olduğuna dikkat ediniz. Böylece $X gY$ Jordan çarpımı

$$X gY = (\alpha + x)g(\beta + y)$$
$$= \sum_{(ijk)} e_{ii}d_{ii} + \sum_{(ijk)}\left(d_{ij}e_{ij} + \overline{d_{ij}}e_{ji}\right)$$

olarak da ifade edilebilir.

Şimdi, $\mathbf{J} = \left(\mathrm{H}(\mathbf{A}_3, J_\Gamma), +, g\right)$ kümesi üzerinde kuadratik dönüşüm olarak adjoint (ek) alma dönüşümü, iz form olarak $T(X) = iz(X)$ ve kübik form olarak da $N(X) = \det X$ determinant fonksiyonu alınırsa Tanım 3.4 deki kübik cebir şartlarının sağlandığını yani $\mathbf{J}$ nin bir kübik cebir olduğu göstereceğiz. Bu hedefe hazırlık olarak adjoint alma dönüşümü, iz form, norm form ve kübik formla ilgili temel bilgileri veriyoruz.

$\mathbf{J}$ nin herhangi $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2} \\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3 \end{bmatrix}$ elemanı

için $\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1) \in Z(\mathbf{A})$, $\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2) \in Z(\mathbf{A})$ ve $\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3) \in Z(\mathbf{A})$ olmak üzere

$$X^\# = \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1) & \gamma_2\gamma_3\overline{(a_1a_2)} - \gamma_2\alpha_3 a_3 & \gamma_3\gamma_2(a_3a_1) - \gamma_3\alpha_2\overline{a_2} \\ \gamma_1\gamma_3(a_1a_2) - \gamma_1\alpha_3\overline{a_3} & \alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2) & \gamma_3\gamma_1\overline{(a_2a_3)} - \gamma_3\alpha_1 a_1 \\ \gamma_1\gamma_2\overline{(a_3a_1)} - \gamma_1\alpha_2 a_2 & \gamma_2\gamma_1(a_2a_3) - \gamma_2\alpha_1\overline{a_1} & \alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3) \end{bmatrix}$$

olur. Burada, $\mathbf{n}(a_i) = n(x_i) + 2n(x_i, y_i)\varepsilon$ dir.

$\alpha \in R$ için $(\alpha X)^\# = \alpha^2 X^\#$ dir. Yani, adjoint alma dönüşümü 2. dereceden homojen bir fonksiyondur.

Üstelik $\mathbf{J}$ nin herhangi $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2} \\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3 \end{bmatrix}$ ve

$Y = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2} \\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix}$ elemanları için $\mathbf{J}$ üzerinde

$\times$ ikili işlemi

$$Q(X,Y) = X \times Y := \frac{1}{2}\left[(X+Y)^\# - X^\# - Y^\#\right]$$ olarak

tanımlansın. Burada,

$$X \times X = \frac{1}{2}\left[(2X)^\# - X^\# - X^\#\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[4X^\# - 2X^\#\right] = \frac{1}{2}\left[2X^\#\right] = X^\#$$

olduğuna dikkat ediniz. $X \times Y$ de X ve Y matrisleri yerine yazılırsa, $i=1,2,3$ için $a_i = x_i + \varepsilon$, $b_i = z_i + w_i\varepsilon \in \mathbf{A}$ ve $\mathbf{n}(a_i,b_i) = n(x_i,z_i) + \left(n(x_i,w_i) + n(y_i,z_i)\right)\varepsilon$ olmak üzere

$$X \times Y = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 & \gamma_2 a_3+\gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{a_2}+\gamma_3\overline{b_2} \\ \gamma_1\overline{a_3}+\gamma_1\overline{b_3} & \alpha_2+\beta_2 & \gamma_3 a_1+\gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 a_2+\gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{a_1}+\gamma_2\overline{b_1} & \alpha_3+\beta_3 \end{bmatrix}^{\#} - \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2} \\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3 \end{bmatrix}^{\#} - \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2} \\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix}^{\#} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3 \\ -\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{n}(a_1,b_1) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_2\gamma_3\overline{(a_1b_2+b_1a_2)} \\ -\gamma_2(\alpha_3 b_3+\beta_3 a_3) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_3\gamma_2(a_3b_1+b_3a_1) \\ -\gamma_3(\alpha_2\overline{b_2}+\beta_2\overline{a_2}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_3(a_1b_2+b_1a_2) \\ -\gamma_1(\alpha_3\overline{b_3}+\beta_3\overline{a_3}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1 \\ -\gamma_3\gamma_1 2\mathbf{n}(a_2,b_2) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_3\gamma_1\overline{(a_2b_3+b_2a_3)} \\ -\gamma_3(\alpha_1 b_1+\beta_1 a_1) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2\overline{(a_3b_1+b_3a_1)} \\ -\gamma_1(\alpha_2 b_2+\beta_2 a_2) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \gamma_2\gamma_1(a_2b_3+b_2a_3) \\ -\gamma_2(\alpha_1\overline{b_1}+\beta_1\overline{a_1}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2 \\ -\gamma_1\gamma_2 2\mathbf{n}(a_3,b_3) \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. $Q(X,Y)$ nin $\mathbf{J}$ üzerinde simetrik ve 2-lineer bir dönüşüm olduğunu görmek kolaydır. Böylece, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.1. Adjoint alma dönüşümü $\mathbf{J}$ üzerinde bir kuadratik dönüşümdür.

$X \times Y$ matrisini bileşenleri cinsinden de ifade etmek mümkündür. $(i,j,k)=(1,2,3)$ dairesel permütasyonu göstermek şartıyla $X \times Y$ matrisinin (i,i). bileşeni,

$$(i,i) = \frac{1}{2}\left[\alpha_j\beta_k + \beta_j\alpha_k - 2\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,b_i)\right] \quad (11)$$

ve (i,j). bileşeni,

$$(i,j) = \frac{1}{2}\left(\gamma_j\left[\gamma_k\overline{(a_ib_j+b_ia_j)} - (\alpha_k b_k + \beta_k a_k)\right]\right) \quad (12)$$

biçiminde yazılabilir, burada (i,j) bileşeninin eşleneğinin (j,i). bileşen olduğu görülür. $i=1,2,3$ için $a_i = x_i + y_i\varepsilon,\ b_i = z_i + w_i\varepsilon \in \mathbf{A}$ için $\mathbf{n}(a_i,b_i) = n(x_i,z_i) + (n(x_i,w_i) + n(y_i,z_i))\varepsilon$ olduğu (11) ve (12) de dikkate alınırsa

$$(i,i) = \frac{1}{2}\left[\alpha_j\beta_k + \beta_j\alpha_k - 2\gamma_j\gamma_k\left(n(x_i,z_i) + \begin{pmatrix} n(x_i,w_i) \\ +n(y_i,z_i) \end{pmatrix}\varepsilon\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha_j\beta_k + \beta_j\alpha_k - 2\gamma_j\gamma_k n(x_i,z_i) \\ -2\gamma_j\gamma_k\left(\left(n(x_i,w_i)+n(y_i,z_i)\right)\varepsilon\right) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha_j\beta_k + \beta_j\alpha_k - 2\gamma_j\gamma_k n(x_i,z_i)\right) - \gamma_j\gamma_k\left[\left(n(x_i,w_i)+n(y_i,z_i)\right)\right]\varepsilon$$

ve

(i,j)

$$= \frac{1}{2}\left(\gamma_j\begin{bmatrix} \gamma_k\overline{\left((x_i+y_i\varepsilon)(z_j+w_j\varepsilon)+(z_i+w_i\varepsilon)(x_j+y_j\varepsilon)\right)} \\ -\left(\alpha_k(z_k+w_k\varepsilon)+\beta_k(x_k+y_k\varepsilon)\right) \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\gamma_j\begin{bmatrix} \gamma_k\overline{\left(x_iz_j+(x_iw_j+y_iz_j)\varepsilon+z_ix_j+(z_iy_j+w_ix_j)\varepsilon\right)} \\ -\left((\alpha_kz_k+\alpha_kw_k\varepsilon)+(\beta_kx_k+\beta_ky_k\varepsilon)\right) \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\gamma_j\begin{bmatrix} \gamma_k\left(\left(\overline{x_iz_j+z_ix_j}\right)+\left(\overline{x_iw_j+y_iz_j+z_iy_j+w_ix_j}\right)\varepsilon\right) \\ -\left(\alpha_kz_k+\beta_kx_k+(\alpha_kw_k+\beta_ky_k)\varepsilon\right) \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\gamma_j\left(\gamma_k\left(\overline{x_iz_j+z_ix_j}\right)-(\alpha_kz_k+\beta_kx_k)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\gamma_j\left[\gamma_k\left(\overline{x_iw_j+y_iz_j+z_iy_j+w_ix_j}\right)-(\alpha_kw_k+\beta_ky_k)\right]\varepsilon$$

olur. Özel olarak $X \times X$ yani $X^{\#}$ matrisinin bileşenleri ise

$$(i,i) = \frac{1}{2}\left[\alpha_j\alpha_k + \alpha_j\alpha_k - 2\gamma_j\gamma_k\left(n(x_i,x_i) + \begin{pmatrix} n(x_i,y_i) \\ +n(y_i,x_i) \end{pmatrix}\varepsilon\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\alpha_j\alpha_k - 2\gamma_j\gamma_k n(x_i) - 2\gamma_j\gamma_k\left(2n(x_i,y_i)\varepsilon\right)\right]$$

$$= \alpha_j\alpha_k - \gamma_j\gamma_k n(x_i) - 2\gamma_j\gamma_k n(x_i,y_i)\varepsilon$$

ve

(i,j)

$$=\frac{1}{2}\left(\gamma_j\begin{bmatrix}\gamma_k\overline{\left((x_i+y_i\varepsilon)(x_j+y_j\varepsilon)+(x_i+y_i\varepsilon)(x_j+y_j\varepsilon)\right)}\\-\left(\alpha_k(x_k+y_k\varepsilon)+\alpha_k(x_k+y_k\varepsilon)\right)\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\gamma_j\begin{bmatrix}\gamma_k\overline{\left(x_ix_j+(x_iy_j+y_ix_j)\varepsilon+x_ix_j+(x_iy_j+y_ix_j)\varepsilon\right)}\\-2(\alpha_kx_k+\alpha_ky_k\varepsilon)\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\gamma_j\left[\gamma_k\left(2\left(\overline{x_ix_j}\right)+2\left(\overline{x_iy_j+y_ix_j}\right)\varepsilon\right)-2(\alpha_kx_k+\alpha_ky_k\varepsilon)\right]\right)$$

$$=\gamma_j\left(\gamma_k\left(\overline{x_ix_j}\right)-\alpha_kx_k\right)+\gamma_j\left[\gamma_k\left(\overline{x_iy_j+y_ix_j}\right)-\alpha_ky_k\right]\varepsilon$$

olur.

Tanım 4.2. $T:\mathbf{J}\to R$ için $X\to T(X)=iz(X)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme iz form, $T(X)$ e de X matrisinin izi denir.

Bu tanıma göre, $X=\begin{bmatrix}\alpha_1&\gamma_2a_3&\gamma_3\overline{a_2}\\\gamma_1\overline{a_3}&\alpha_2&\gamma_3a_1\\\gamma_1a_2&\gamma_2\overline{a_1}&\alpha_3\end{bmatrix}\in\mathbf{J}$ için $T(X)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\in Z(\mathbf{A})$ olur.

Teorem 4.3. T iz formu lineerdir.

Tanım 4.4. $N:\mathbf{J}\to R$ için $X\to N(X)=\det(X)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme norm form, $N(X)$ e de X matrisinin determinantı denir.

Teorem 4.5. Her $X,Y\in\mathbf{J}$ için $N(X\circ Y)=N(X)N(Y)$ dir (Yani, norm form çarpılabilirdir.).

İspat:

$N(X\circ Y)=\det(X\circ Y)=\det(X)\det(Y)=N(X)N(Y)$

olur.

Herhangi bir $X=\begin{bmatrix}\alpha_1&\gamma_2a_3&\gamma_3\overline{a_2}\\\gamma_1\overline{a_3}&\alpha_2&\gamma_3a_1\\\gamma_1a_2&\gamma_2\overline{a_1}&\alpha_3\end{bmatrix}\in\mathbf{J}$ için

$$\begin{aligned}N(X)&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1)-\alpha_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2)\\&\quad-\alpha_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left((a_1a_2)a_3\right)\\&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left((a_1a_2)a_3\right)\\&\quad-\sum_{(ijk)}\alpha_i\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\in Z(\mathbf{A})\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada, $a_i=x_i+y_i\varepsilon\in\mathbf{A}$ ($i=1,2,3$) için $\mathbf{n}(a_i)=n(x_i)+2n(x_i,y_i)\varepsilon\in Z(\mathbf{A})$ olduğu kullanılır ve gerekli çarpma işlemleri ile birlikte bazı düzenlemeler de yapılırsa

$$\begin{aligned}N(X)&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\gamma_2\gamma_3\left[n(x_1)+2n(x_1,y_1)\varepsilon\right]-\alpha_2\gamma_3\gamma_1\left[n(x_2)+2n(x_2,y_2)\varepsilon\right]\\&\quad-\alpha_3\gamma_1\gamma_2\left[n(x_3)+2n(x_3,y_3)\varepsilon\right]\\&\quad+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[(x_1+y_1\varepsilon)(x_2+y_2\varepsilon)\right](x_3+y_3\varepsilon)\right)\\&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\gamma_2\gamma_3n(x_1)-\alpha_1\gamma_2\gamma_3 2n(x_1,y_1)\varepsilon\\&\quad-\alpha_2\gamma_3\gamma_1n(x_2)-\alpha_2\gamma_3\gamma_1 2n(x_2,y_2)\varepsilon\\&\quad-\alpha_3\gamma_1\gamma_2n(x_3)-\alpha_3\gamma_1\gamma_2 2n(x_3,y_3)\varepsilon\\&\quad+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[x_1x_2+(x_1y_2+y_1x_2)\varepsilon\right](x_3+y_3\varepsilon)\right)\\&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\gamma_2\gamma_3n(x_1)-\alpha_2\gamma_3\gamma_1n(x_2)-\alpha_3\gamma_1\gamma_2n(x_3)\\&\quad-\begin{bmatrix}\alpha_1\gamma_2\gamma_3 2n(x_1,y_1)+\alpha_2\gamma_3\gamma_1 2n(x_2,y_2)\\+\alpha_3\gamma_1\gamma_2 2n(x_3,y_3)\end{bmatrix}\varepsilon\\&\quad+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left((x_1x_2)x_3+\left[(x_1x_2)y_3+(x_1y_2+y_1x_2)x_3\right]\varepsilon\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte $a=x+y\varepsilon\in\mathbf{A}$ için $\mathbf{t}(a)=t(x)+t(y)\varepsilon\in Z(\mathbf{A})$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}N(X)&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\gamma_2\gamma_3n(x_1)-\alpha_2\gamma_3\gamma_1n(x_2)-\alpha_3\gamma_1\gamma_2n(x_3)\\&\quad-\begin{bmatrix}\alpha_1\gamma_2\gamma_3 2n(x_1,y_1)+\alpha_2\gamma_3\gamma_1 2n(x_2,y_2)\\+\alpha_3\gamma_1\gamma_2 2n(x_3,y_3)\end{bmatrix}\varepsilon\\&\quad+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((x_1x_2)x_3\right)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\begin{pmatrix}(x_1x_2)y_3\\+(x_1y_2+y_1x_2)x_3\end{pmatrix}\varepsilon\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}N(X)&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\gamma_2\gamma_3n(x_1)-\alpha_2\gamma_3\gamma_1n(x_2)-\alpha_3\gamma_1\gamma_2n(x_3)\\&\quad+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((x_1x_2)x_3\right)-\begin{bmatrix}\alpha_1\gamma_2\gamma_3 2n(x_1,y_1)+\alpha_2\gamma_3\gamma_1 2n(x_2,y_2)\\+\alpha_3\gamma_1\gamma_2 2n(x_3,y_3)\\-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((x_1x_2)y_3+(x_1y_2+y_1x_2)x_3\right)\end{bmatrix}\varepsilon\end{aligned}$$

sonucuna varılır. $(i,j,k)=(1,2,3)$ dairesel permütasyonu yardımıyla

$$
\begin{aligned}
N(X) &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \sum_{(ijk)} \alpha_i\gamma_j\gamma_k n(x_i) \\
&+ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\left(x_1x_2\right)x_3\right) \\
&- \left[\sum_{(ijk)} \alpha_i\gamma_j\gamma_k 2n\left(x_i, y_j\right) - \gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\begin{pmatrix} \left(x_1x_2\right)y_3 \\ +\left(x_1y_2 + y_1x_2\right)x_3 \end{pmatrix}\right]\varepsilon
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılabilir.

Ayrıca, $\alpha \in R$ için $N(\alpha X) = \alpha^3 N(X)$ olduğuna dikkat ediniz. Bu sebeple, N dönüşümü 3. dereceden homojen bir fonksiyondur. Üstelik, $\mathbf{J}$ nin herhangi X, Y ve Z elemanları için $\mathbf{J}\times\mathbf{J}\times\mathbf{J}$ den R ye

$$
N(X,Y,Z) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} N(X+Y+Z) - N(X+Y) - N(Y+Z) \\ -N(X+Z) + N(X) + N(Y) + N(Z) \end{bmatrix}
$$

olarak tanımlanan dönüşümün $\mathbf{J}$ üzerinde simetrik bir dönüşüm olduğu açıktır.

Burada

$$
X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix} \text{ ve}
$$

$$
Z = \begin{bmatrix} \mu_1 & \gamma_2 c_3 & \gamma_3 \overline{c_2} \\ \gamma_1 \overline{c_3} & \mu_2 & \gamma_3 c_1 \\ \gamma_1 c_2 & \gamma_2 \overline{c_1} & \mu_3 \end{bmatrix} \text{ yerine}
$$

yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&6N(X,Y,Z) \\
&= (\alpha_1+\beta_1+\mu_1)(\alpha_2+\beta_2+\mu_2)(\alpha_3+\beta_3+\mu_3) \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\right](a_3+b_3+c_3)\right) \\
&-\sum_{(ijk)}(\alpha_i+\beta_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i+b_i+c_i) - (\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)(\alpha_3+\beta_3) \\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[(a_1+b_1)(a_2+b_2)\right](a_3+b_3)\right) + \sum_{(ijk)}(\alpha_i+\beta_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i+b_i) \\
&-(\beta_1+\mu_1)(\beta_2+\mu_2)(\beta_3+\mu_3) - \gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[(b_1+c_1)(b_2+c_2)\right](b_3+c_3)\right) \\
&+\sum_{(ijk)}(\beta_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(b_i+c_i) - (\alpha_1+\mu_1)(\alpha_2+\mu_2)(\alpha_3+\mu_3) \\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[(a_1+c_1)(a_2+c_2)\right](a_3+c_3)\right) + \sum_{(ijk)}(\alpha_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i+c_i) \\
&+\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left((a_1a_2)a_3\right) - \sum_{(ijk)}\alpha_i\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i) \\
&+\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left((b_1b_2)b_3\right) - \sum_{(ijk)}\beta_i\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(b_i) \\
&+\mu_1\mu_2\mu_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left((c_1c_2)c_3\right) - \sum_{(ijk)}\mu_i\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(c_i)
\end{aligned}
$$

olur. Burada benzer terimler bir araya getirilirse

$$
\begin{aligned}
6N(X,Y,Z) &= (\alpha_1+\beta_1+\mu_1)(\alpha_2+\beta_2+\mu_2)(\alpha_3+\beta_3+\mu_3) \\
&-(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)(\alpha_3+\beta_3) - (\beta_1+\mu_1)(\beta_2+\mu_2)(\beta_3+\mu_3) \\
&-(\alpha_1+\mu_1)(\alpha_2+\mu_2)(\alpha_3+\mu_3) + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_1\beta_2\beta_3 + \mu_1\mu_2\mu_3 \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\right](a_3+b_3+c_3)\right) \\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[(a_1+b_1)(a_2+b_2)\right](a_3+b_3)\right) \\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[(b_1+c_1)(b_2+c_2)\right](b_3+c_3)\right) \\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[(a_1+c_1)(a_2+c_2)\right](a_3+c_3)\right) \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left((a_1a_2)a_3\right) + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left((b_1b_2)b_3\right) \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left((c_1c_2)c_3\right) - \sum_{(ijk)}(\alpha_i+\beta_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i+b_i+c_i) \\
&+\sum_{(ijk)}(\alpha_i+\beta_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i+b_i) + \sum_{(ijk)}(\beta_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(b_i+c_i) \\
&+\sum_{(ijk)}(\alpha_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i+c_i) - \sum_{(ijk)}\alpha_i\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i) \\
&-\sum_{(ijk)}\beta_i\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(b_i) - \sum_{(ijk)}\mu_i\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(c_i)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son ifadede bazı çarpma işlemleri yapılarak gerekli sadeleşmeler ve düzenlemeler yapılırsa

$$6N(X,Y,Z)$$
$$=[\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\mu_3$$
$$+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left([b_1c_2+c_1b_2]a_3+[a_1c_2+c_1a_2]b_3+[a_1b_2+b_1a_2]c_3\right)$$
$$-\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[\mathbf{n}(a_i+b_i+c_i)-\mathbf{n}(a_i+b_i)-\mathbf{n}(a_i+c_i)+\mathbf{n}(a_i)\right]$$
$$-\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[\mathbf{n}(a_i+b_i+c_i)-\mathbf{n}(a_i+b_i)-\mathbf{n}(b_i+c_i)+\mathbf{n}(b_i)\right]$$
$$-\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\left[\mathbf{n}(a_i+b_i+c_i)-\mathbf{n}(a_i+c_i)-\mathbf{n}(b_i+c_i)+\mathbf{n}(c_i)\right]$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi

$$\left[\mathbf{n}(a_i+b_i+c_i)-\mathbf{n}(a_i+b_i)-\mathbf{n}(a_i+c_i)+\mathbf{n}(a_i)\right]$$

terimini inceleyelim. Burada $a_i+b_i=r_i$ ve $c_i=s_i$ denirse

$$\left[\mathbf{n}(a_i+b_i+c_i)-\mathbf{n}(a_i+b_i)-\mathbf{n}(a_i+c_i)+\mathbf{n}(a_i)\right]$$
$$=\left[\mathbf{n}(r_i+s_i)-\mathbf{n}(r_i)-\mathbf{n}(a_i+s_i)+\mathbf{n}(a_i)\right]$$

ve son terime $\mathbf{n}(s_i)$ ekleyip çıkarırsak

$$\left[\left(\mathbf{n}(r_i+s_i)-\mathbf{n}(r_i)-\mathbf{n}(s_i)\right)+\left(\mathbf{n}(s_i)-\mathbf{n}(a_i+s_i)+\mathbf{n}(a_i)\right)\right]$$
$$=\left[2\mathbf{n}(r_i,s_i)-2\mathbf{n}(a_i,s_i)\right]$$

elde edilir. $\mathbf{n}$, 2-lineer bir dönüşüm olduğundan

$$\left[2\mathbf{n}(r_i,s_i)-2\mathbf{n}(a_i,s_i)\right]=2\mathbf{n}(r_i-a_i,s_i)$$

olur ki burada $r_i=a_i+b_i$ ile $s_i=c_i$ olduğu kullanılırsa

$$2\mathbf{n}(r_i-a_i,s_i)=2\mathbf{n}(b_i,c_i)$$

sonucuna varılır. Böylece,

$$\left[\mathbf{n}(a_i+b_i+c_i)-\mathbf{n}(a_i+b_i)-\mathbf{n}(a_i+c_i)+\mathbf{n}(a_i)\right]=2\mathbf{n}(b_i,c_i)$$

olduğu görülür. Benzer biçimde,

$$\left[\mathbf{n}(a_i+b_i+c_i)-\mathbf{n}(a_i+b_i)-\mathbf{n}(b_i+c_i)+\mathbf{n}(b_i)\right]=2\mathbf{n}(a_i,c_i)$$

ve

$$\left[\mathbf{n}(a_i+b_i+c_i)-\mathbf{n}(a_i+c_i)-\mathbf{n}(b_i+c_i)+\mathbf{n}(c_i)\right]=2\mathbf{n}(a_i,b_i)$$

olduğu görülebilir. Bu durumda,

$$6N(X,Y,Z)$$
$$=[\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\mu_3$$
$$+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left([b_1c_2+c_1b_2]a_3+[a_1c_2+c_1a_2]b_3+[a_1b_2+b_1a_2]c_3\right)$$
$$-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(b_i,c_i)-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,c_i)$$
$$-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,b_i)$$

olur. Burada, $i=1,2,3$ için $a_i=x_i+y_i\varepsilon,\ b_i=z_i+w_i\varepsilon,\ c_i=u_i+v_i\varepsilon\in\mathbf{A}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$6N(X,Y,Z)=[\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\mu_3$$
$$+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\begin{pmatrix}\left[(z_1+w_1\varepsilon)(u_2+v_2\varepsilon)+(u_1+v_1\varepsilon)(z_2+w_2\varepsilon)\right](x_3+y_3\varepsilon)+\\ \left[(x_1+y_1\varepsilon)(u_2+v_2\varepsilon)+(u_1+v_1\varepsilon)(x_2+y_2\varepsilon)\right](z_3+w_3\varepsilon)+\\ \left[(x_1+y_1\varepsilon)(z_2+w_2\varepsilon)+(z_1+w_1\varepsilon)(x_2+y_2\varepsilon)\right](u_3+v_3\varepsilon)\end{pmatrix}$$
$$-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(z_i+w_i\varepsilon,u_i+v_i\varepsilon)-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(x_i+y_i\varepsilon,u_i+v_i\varepsilon)$$
$$-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(x_i+y_i\varepsilon,z_i+w_i\varepsilon)$$

elde edilir. $\mathbf{t}$ içindeki çarpma işlemleri yapılır ve $a=x+y\varepsilon,\ b=z+w\varepsilon\in\mathbf{A}$ için

$\mathbf{n}(a,b)=n(x,z)+\left(n(x,w)+n(y,z)\right)\varepsilon$ olduğu kullanılırsa,

$$6N(X,Y,Z)$$
$$=[\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\mu_3$$
$$+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}(z_1u_2+(z_1v_2+w_1u_2)\varepsilon)\\+(u_1z_2+(u_1w_2+v_1z_2)\varepsilon)\end{bmatrix}(x_3+y_3\varepsilon)+\\ \begin{bmatrix}(x_1u_2+(x_1v_2+y_1u_2)\varepsilon)\\+(u_1x_2+(u_1y_2+v_1x_2)\varepsilon)\end{bmatrix}(z_3+w_3\varepsilon)+\\ \begin{bmatrix}(x_1z_2+(x_1w_2+y_1z_2)\varepsilon)\\+(z_1x_2+(z_1y_2+w_1x_2)\varepsilon)\end{bmatrix}(u_3+v_3\varepsilon)\end{pmatrix}$$
$$-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(z_i,u_i)+\left(n(z_i,v_i)+n(w_i,u_i)\right)\varepsilon\right]$$
$$-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,u_i)+\left(n(x_i,v_i)+n(y_i,u_i)\right)\varepsilon\right]$$
$$-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,z_i)+\left(n(x_i,w_i)+n(y_i,z_i)\right)\varepsilon\right]$$

bulunur. $\mathbf{t}$ içindeki toplama işlemlerine devam edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&6N(X,Y,Z)\\
&=[\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\mu_3\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\begin{array}{l}
\begin{bmatrix}(z_1u_2+u_1z_2)+\\ (z_1v_2+w_1u_2+u_1w_2+v_1z_2)\varepsilon\end{bmatrix}(x_3+y_3\varepsilon)+\\
\begin{bmatrix}(x_1u_2+u_1x_2)\\ +(x_1v_2+y_1u_2+u_1y_2+v_1x_2)\varepsilon\end{bmatrix}(z_3+w_3\varepsilon)+\\
\begin{bmatrix}(x_1z_2+z_1x_2)\\ +(x_1w_2+y_1z_2+z_1y_2+w_1x_2)\varepsilon\end{bmatrix}(u_3+v_3\varepsilon)
\end{array}\right)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(z_i,u_i)-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(z_i,v_i)+n(w_i,u_i)\right]\varepsilon\\
&-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,u_i)-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,v_i)+n(y_i,u_i)\right]\varepsilon\\
&-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,z_i)-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,w_i)+n(y_i,z_i)\right]\varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\mathbf{t}$ içindeki çarpma işlemlerine devam edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&6N(X,Y,Z)=[\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\mu_3\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\begin{array}{l}
\left((z_1u_2+u_1z_2)x_3+\begin{bmatrix}(z_1u_2+u_1z_2)y_3\\ +(z_1v_2+w_1u_2+u_1w_2+v_1z_2)x_3\end{bmatrix}\varepsilon\right)+\\
\left((x_1u_2+u_1x_2)z_3+\begin{bmatrix}(x_1u_2+u_1x_2)w_3\\ +(x_1v_2+y_1u_2+u_1y_2+v_1x_2)z_3\end{bmatrix}\varepsilon\right)+\\
\left((x_1z_2+z_1x_2)u_3+\begin{bmatrix}(x_1z_2+z_1x_2)v_3\\ +(x_1w_2+y_1z_2+z_1y_2+w_1x_2)u_3\end{bmatrix}\varepsilon\right)
\end{array}\right)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(z_i,u_i)-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,u_i)-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,z_i)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(z_i,v_i)+n(w_i,u_i)\right]\varepsilon\\
&-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,v_i)+n(y_i,u_i)\right]\varepsilon\\
&-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,w_i)+n(y_i,z_i)\right]\varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Bazı düzenlemelerden sonra

$$
\begin{aligned}
&6N(X,Y,Z)\\
&=[\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\mu_3\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\begin{array}{l}
(z_1u_2+u_1z_2)x_3+(x_1u_2+u_1x_2)z_3+(x_1z_2+z_1x_2)u_3+\\
\begin{bmatrix}(z_1u_2+u_1z_2)y_3+(z_1v_2+w_1u_2+u_1w_2+v_1z_2)x_3+\\ (x_1u_2+u_1x_2)w_3+(x_1v_2+y_1u_2+u_1y_2+v_1x_2)z_3+\\ (x_1z_2+z_1x_2)v_3+(x_1w_2+y_1z_2+z_1y_2+w_1x_2)u_3\end{bmatrix}\varepsilon
\end{array}\right)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(z_i,u_i)-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,u_i)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,z_i)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(z_i,v_i)+n(w_i,u_i)\right]\varepsilon\\
&-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,v_i)+n(y_i,u_i)\right]\varepsilon\\
&-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,w_i)+n(y_i,z_i)\right]\varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. $a=x+y\varepsilon\in\mathbf{A}$ için $\mathbf{t}(a)=t(x)+t(y)\varepsilon$ olduğu dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
&6N(X,Y,Z)\\
&=[\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\mu_3\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((z_1u_2+u_1z_2)x_3+(x_1u_2+u_1x_2)z_3+(x_1z_2+z_1x_2)u_3\right)\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\begin{bmatrix}
(z_1u_2+u_1z_2)y_3+\begin{pmatrix}z_1v_2+w_1u_2\\ +u_1w_2+v_1z_2\end{pmatrix}x_3+\\
(x_1u_2+u_1x_2)w_3+\begin{pmatrix}x_1v_2+y_1u_2\\ +u_1y_2+v_1x_2\end{pmatrix}z_3+\\
(x_1z_2+z_1x_2)v_3+\begin{pmatrix}x_1w_2+y_1z_2\\ +z_1y_2+w_1x_2\end{pmatrix}u_3
\end{bmatrix}\right)\varepsilon\\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(z_i,u_i)-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,u_i)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,z_i)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(z_i,v_i)+n(w_i,u_i)\right]\varepsilon\\
&-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,v_i)+n(y_i,u_i)\right]\varepsilon\\
&-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,w_i)+n(y_i,z_i)\right]\varepsilon
\end{aligned}
$$

bulunur ve son bir düzenleme ile

$$
\begin{aligned}
&6N(X,Y,Z)\\
&=[\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\mu_3\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\big((z_1u_2+u_1z_2)x_3+(x_1u_2+u_1x_2)z_3+(x_1z_2+z_1x_2)u_3\big)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(z_i,u_i)-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,u_i)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,z_i)\\
&-2\left(\begin{array}{l}
\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(z_i,v_i)+n(w_i,u_i)\right]+\\
\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,v_i)+n(y_i,u_i)\right]+\\
\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,w_i)+n(y_i,z_i)\right]\\
-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(\begin{array}{l}
(z_1u_2+u_1z_2)y_3+(z_1v_2+w_1u_2+u_1w_2+v_1z_2)x_3+\\
(x_1u_2+u_1x_2)w_3+(x_1v_2+y_1u_2+u_1y_2+v_1x_2)z_3+\\
(x_1z_2+z_1x_2)v_3+(x_1w_2+y_1z_2+z_1y_2+w_1x_2)u_3
\end{array}\right)
\end{array}\right)\varepsilon
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $N(X,Y,Z)$ nin $\mathbf{J}$ üzerinde 3-lineer bir dönüşüm olduğunu görebiliriz. Özetle aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.6. $N(X,Y,Z)$ $\mathbf{J}$ üzerinde bir kübik formdur.

$N(X,Y,Z)$ de Z yerine X alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&6N(X,Y,X)\\
&=[\beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\alpha_3\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\big((z_1x_2+x_1z_2)x_3+(x_1x_2+x_1x_2)z_3+(x_1z_2+z_1x_2)x_3\big)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(z_i,x_i)-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,x_i)\\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,z_i)\\
&-2\left(\begin{array}{l}
\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(z_i,y_i)+n(w_i,x_i)\right]+\\
\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,y_i)+n(y_i,x_i)\right]+\\
\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(x_i,w_i)+n(y_i,z_i)\right]\\
-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(\begin{array}{l}
(z_1x_2+x_1z_2)y_3+(z_1y_2+w_1x_2+x_1w_2+y_1z_2)x_3+\\
(x_1x_2+x_1x_2)w_3+(x_1y_2+y_1x_2+x_1y_2+y_1x_2)z_3+\\
(x_1z_2+z_1x_2)y_3+(x_1w_2+y_1z_2+z_1y_2+w_1x_2)x_3
\end{array}\right)
\end{array}\right)\varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Ortak terimler yan yana getirilerek

$$
\begin{aligned}
&6N(X,Y,X)=2(\beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2)\alpha_3+2(\alpha_1\alpha_2)\beta_3\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 4t\big((z_1x_2+x_1z_2)x_3+(x_1x_2)z_3\big)\\
&-4\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,z_i)-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i)\\
&-4\left(\begin{array}{l}
\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(z_i,y_i)+n(w_i,x_i)\right]+\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(x_i,y_i)\\
-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(\begin{array}{l}
(z_1x_2+x_1z_2)y_3+(z_1y_2+w_1x_2+x_1w_2+y_1z_2)x_3\\
+x_1x_2w_3+(x_1y_2+y_1x_2)z_3
\end{array}\right)
\end{array}\right)\varepsilon
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Tanım 4.7. $X\rightarrow T(X)=izX$ lineer fonksiyonu yardımıyla $(X,Y)\rightarrow T(X,Y):=T(X\circ Y)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme jenerik iz (2-lineer) form adı verilir.

Teorem 4.8. $T(X,Y)$ jenerik iz formu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) T simetriktir yani $T(X,Y)=T(Y,X)$ dir.

ii) $T(X\times Y,Z)=T(X,Y\times Z)$ dir yani T birleşmelidir.

iii) $T(X,Y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+2\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1,b_1)$
$+2\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2,b_2)+2\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3,b_3)$ dir.

İspat: i) $T(X,Y)=T(X\circ Y)=iz(X\circ Y)=iz(Y\circ X)$
$=T(Y\circ X)=T(Y,X)$

olup T simetriktir.

ii) Teorem 3.2 nin i) si gereği $N(X,Y,Z)=\dfrac{1}{3}T(X\times Z,Y)$ ve ii) si gereği $N(X,Y,Z)$ simetrik olduğundan bu sonuç açıktır.

iii) $T(X,Y)=T(X\circ Y)=iz(X\circ Y)$ olup $X\circ Y$ matrisinin izi (9) yardımıyla $d_{11}+d_{22}+d_{33}$ toplamına eşittir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
T(X,Y)&=\alpha_1\beta_1+\gamma_1\big(\gamma_2\mathbf{n}(a_3,b_3)+\gamma_3\mathbf{n}(a_2,b_2)\big)\\
&+\alpha_2\beta_2+\gamma_2\big(\gamma_3\mathbf{n}(a_1,b_1)+\gamma_1\mathbf{n}(a_3,b_3)\big)\\
&+\alpha_3\beta_3+\gamma_3\big(\gamma_1\mathbf{n}(a_2,b_2)+\gamma_2\mathbf{n}(a_1,b_1)\big)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
T(X,Y)&=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+2\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3,b_3)\\
&+2\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1,b_1)+2\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2,b_2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\mathbf{n}(a_i,b_i)=n(x_i,z_i)+\big(n(x_i,w_i)+n(y_i,z_i)\big)\varepsilon$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}T(X,Y)&=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3\\&+2\gamma_1\gamma_2\left[n(x_3,z_3)+\left(n(x_3,w_3)+n(y_3,z_3)\right)\varepsilon\right]\\&+2\gamma_2\gamma_3\left[n(x_1,z_1)+\left(n(x_1,w_1)+n(y_1,z_1)\right)\varepsilon\right]\\&+2\gamma_3\gamma_1\left[n(x_2,z_2)+\left(n(x_2,w_2)+n(y_2,z_2)\right)\varepsilon\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(X,Y)&=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+2\gamma_1\gamma_2 n(x_3,z_3)\\&+2\gamma_2\gamma_3 n(x_1,z_1)+2\gamma_3\gamma_1 n(x_2,z_2)\\&+2\begin{bmatrix}\gamma_1\gamma_2\left(n(x_3,w_3)+n(y_3,z_3)\right)\\+\gamma_2\gamma_3\left(n(x_1,w_1)+n(y_1,z_1)\right)\\+\gamma_3\gamma_1\left(n(x_2,w_2)+n(y_2,z_2)\right)\end{bmatrix}\varepsilon\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

iii) deki sonuç $(i,j,k)=(1,2,3)$ dairesel permütasyonu yardımıyla kısaca

$$T(X,Y)=\sum_{(ijk)}\begin{pmatrix}\alpha_i\beta_i+2\gamma_i\gamma_j n(x_k,z_k)\\+2\gamma_i\gamma_j\left(n(x_k,w_k)+n(y_k,z_k)\right)\varepsilon\end{pmatrix}\quad(13)$$

biçiminde de yazılabilir. (5) den $T(X,Y)=T(X)T(Y)-2T(X\times Y)$ eşitliğinden

$$T(X,Y)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$$
$$-\begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3-2\gamma_2\gamma_3 n(x_1,z_1)-2\gamma_2\gamma_3\left[\begin{pmatrix}n(x_1,w_1)\\+n(y_1,z_1)\end{pmatrix}\right]\varepsilon+\\ \alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1-2\gamma_3\gamma_1 n(x_2,z_2)-2\gamma_3\gamma_1\left[\begin{pmatrix}n(x_2,w_2)\\+n(y_2,z_2)\end{pmatrix}\right]\varepsilon+\\ \alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2-2\gamma_1\gamma_2 n(x_3,z_3)-2\gamma_1\gamma_2\left[\begin{pmatrix}n(x_3,w_3)\\+n(y_3,z_3)\end{pmatrix}\right]\varepsilon\end{pmatrix}$$

yazabiliriz ve burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}T(X,Y)&=\alpha_1(\beta_1+\beta_2+\beta_3)+\alpha_2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\\&+\alpha_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)-\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3+2\gamma_2\gamma_3 n(x_1,z_1)\\&-\alpha_3\beta_1-\beta_3\alpha_1+2\gamma_3\gamma_1 n(x_2,z_2)-\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2\\&+2\gamma_1\gamma_2 n(x_3,z_3)+2\gamma_2\gamma_3\left[\left(n(x_1,w_1)+n(y_1,z_1)\right)\right]\varepsilon\\&+2\gamma_3\gamma_1\left[\left(n(x_2,w_2)+n(y_2,z_2)\right)\right]\varepsilon\\&+2\gamma_1\gamma_2\left[\left(n(x_3,w_3)+n(y_3,z_3)\right)\right]\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadede gerekli sadeleşmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}T(X,Y)&=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+2\gamma_2\gamma_3 n(x_1,z_1)\\&+2\gamma_3\gamma_1 n(x_2,z_2)+2\gamma_1\gamma_2 n(x_3,z_3)\\&+2\begin{bmatrix}\gamma_2\gamma_3\left(n(x_1,w_1)+n(y_1,z_1)\right)\\+\gamma_3\gamma_1\left(n(x_2,w_2)+n(y_2,z_2)\right)\\+\gamma_1\gamma_2\left(n(x_3,w_3)+n(y_3,z_3)\right)\end{bmatrix}\varepsilon\end{aligned}$$

elde ederiz ki bu sonuç (13) deki sonuçla aynıdır.

Böylece, (6) da Freudenthal çarpım olarak ifade ettiğimiz çarpım, jenerik iz form yardımıyla

$$\begin{aligned}X\times Y&=X\circ Y-\frac{1}{2}XT(Y)-\frac{1}{2}YT(X)\\&+\frac{1}{2}\left(T(X)T(Y)-T(X\circ Y)\right)I\end{aligned}\quad(14)$$

olarak yazılır. Burada $Y=X$ seçilirse,

$$\begin{aligned}X\times X&=X\circ X-\frac{1}{2}T(X)X-\frac{1}{2}T(X)X\\&+\frac{1}{2}\left[T(X)T(X)-T(X\circ X)\right]I\\&=X^2-T(X)X+\frac{1}{2}\left[\left(T(X)\right)^2-T(X^2)\right]I\\&=X^{\#}\end{aligned}$$

olup $^{\#}$ dönüşümünün bir kuadratik dönüşüm olduğu görülmektedir.

$X^{\#}=X^2-T(X)X+T(X^{\#})I_3$ eşitliği yukarıdaki sonuçla birlikte düşünülürse $\frac{1}{2}\left[\left(T(X)\right)^2-T(X^2)\right]=T(X^{\#})$ olmalıdır. Şimdi bunu görelim:

$$\left(T(X)\right)^2=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_3+2\alpha_2\alpha_3$$

ve

$$\begin{aligned}T(X^2)&=T(X\circ X)=T(X,X)\\&=\sum_{(ijk)}\left(\alpha_i\alpha_i+2\gamma_i\gamma_j n(x_k,x_k)+2\gamma_i\gamma_j\left(n(x_k,y_k)+n(y_k,x_k)\right)\varepsilon\right)\\&=\sum_{(ijk)}\left(\alpha_i^2+2\gamma_i\gamma_j n(x_k)+4\gamma_i\gamma_j n(x_k,y_k)\varepsilon\right)\end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\left(T(X)\right)^2 - T\left(X^2\right) = 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3 - \sum_{(ijk)}\left(2\gamma_i\gamma_j n(x_k) + 4\gamma_i\gamma_j n(x_k, y_k)\varepsilon\right)$$
$$= 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3 - 2\gamma_2\gamma_3 n(x_1) - 2\gamma_3\gamma_1 n(x_2)$$
$$-2\gamma_1\gamma_2 n(x_3) - 4\begin{bmatrix}\gamma_2\gamma_3 n(x_1, y_1) + \gamma_3\gamma_1 n(x_2, y_2) \\ +\gamma_1\gamma_2 n(x_3, y_3)\end{bmatrix}\varepsilon$$

elde edilir.

$$T\left(X^\#\right) = \alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3 n(x_1) - 2\gamma_2\gamma_3 n(x_1, y_1)\varepsilon$$
$$+ \alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1 n(x_2) - 2\gamma_3\gamma_1 n(x_2, y_2)\varepsilon$$
$$+ \alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 n(x_3) - 2\gamma_1\gamma_2 n(x_3, y_3)\varepsilon$$
$$= \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 - \gamma_2\gamma_3 n(x_1)$$
$$- \gamma_3\gamma_1 n(x_2) - \gamma_1\gamma_2 n(x_3) - 2\gamma_2\gamma_3 n(x_1, y_1)\varepsilon$$
$$- 2\gamma_3\gamma_1 n(x_2, y_2)\varepsilon - 2\gamma_1\gamma_2 n(x_3, y_3)\varepsilon$$

olduğundan

$$\frac{1}{2}\left[\left(T(X)\right)^2 - T\left(X^2\right)\right] = T\left(X^\#\right) \qquad (15)$$

elde edilir.

$$T(X,Y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + 2\sum_{(ijk)}\gamma_j\gamma_k \mathbf{n}(a_i, b_i)$$

eşitliğinde X yerine $X^\#$ alınırsa

$$T\left(X^\#, Y\right) = \left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1)\right]\beta_1 + \left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2)\right]\beta_2$$
$$+\left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3)\right]\beta_3 + 2\sum_{(ijk)}\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}\left(\gamma_i\left(\overline{a_j a_k}\right) - \alpha_i a_i, b_i\right)$$

olur. Bu son ifadedeki toplam açılırsa

$$T\left(X^\#, Y\right) = \left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1)\right]\beta_1 + \left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2)\right]\beta_2$$
$$+\left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3)\right]\beta_3 + 2\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}\left(\gamma_1\left(\overline{a_2 a_3}\right) - \alpha_1 a_1, b_1\right)$$
$$+2\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}\left(\gamma_2\left(\overline{a_3 a_1}\right) - \alpha_2 a_2, b_2\right) + 2\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}\left(\gamma_3\left(\overline{a_1 a_2}\right) - \alpha_3 a_3, b_3\right)$$

elde edilir ve $\mathbf{n}$ nin 2-lineerliği kullanılırsa

$$T\left(X^\#, Y\right) = \left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1)\right]\beta_1 + \left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2)\right]\beta_2$$
$$+\left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3)\right]\beta_3 + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}\left(\left(\overline{a_2 a_3}\right), b_1\right)$$
$$-2\alpha_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1, b_1) + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}\left(\left(\overline{a_3 a_1}\right), b_2\right) - 2\alpha_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2, b_2)$$
$$+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}\left(\left(\overline{a_1 a_2}\right), b_3\right) - 2\alpha_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3, b_3)$$

olarak yazabiliriz. Bu son ifadede $\mathbf{n}(a,b) = \mathbf{t}\left(a, \bar{b}\right)$ olduğu kullanılarak

$$T\left(X^\#, Y\right) = \left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1)\right]\beta_1 + \left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2)\right]\beta_2$$
$$+\left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3)\right]\beta_3 + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{t}\left(\left(\overline{a_2 a_3}\right), \overline{b_1}\right)$$
$$-2\alpha_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1, b_1) + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{t}\left(\left(\overline{a_3 a_1}\right), \overline{b_2}\right) - 2\alpha_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2, b_2)$$
$$+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{t}\left(\left(\overline{a_1 a_2}\right), \overline{b_3}\right) - 2\alpha_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3, b_3)$$

olur ve $\mathbf{t}(a,b) = \mathbf{t}\left(\bar{a}, \bar{b}\right)$ olduğu da kullanılırsa

$$T\left(X^\#, Y\right) = \left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1)\right]\beta_1 + \left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2)\right]\beta_2$$
$$+\left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3)\right]\beta_3 + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{t}(a_2 a_3, b_1)$$
$$-2\alpha_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1, b_1) + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{t}(a_3 a_1, b_2) - 2\alpha_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2, b_2)$$
$$+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{t}(a_1 a_2, b_3) - 2\alpha_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3, b_3)$$

elde edilir. $\mathbf{t}$ nin simetrik ve birleşme özelliğinden

$$T\left(X^\#, Y\right) = \left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1)\right]\beta_1 + \left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2)\right]\beta_2$$
$$+\left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3)\right]\beta_3 + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{t}(b_1 a_2, a_3)$$
$$-2\alpha_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1, b_1) + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{t}(a_1 b_2, a_3) - 2\alpha_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2, b_2)$$
$$+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{t}(a_1 a_2, b_3) - 2\alpha_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3, b_3)$$

sonucuna varırız ve bu sonucu $(i,j,k) = (1,2,3)$ dairesel permütasyonu göstermek şartıyla

$$T\left(X^\#, Y\right) = \sum_{(ijk)}(\beta_i)\left[\alpha_j\alpha_k - \gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]$$
$$-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\left[\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i, b_i)\right] + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{t}(b_1 a_2, a_3)$$
$$+2\gamma_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{t}(a_1 b_2, a_3) + 2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{t}(a_1 a_2, b_3)$$

biçiminde ifade edebiliriz.

$N(X,Y,Z)$ de Z yerine X alınırsa,

$$6N(X,Y,X)$$
$$= \left[\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2\right]\alpha_3 + \left[\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\right]\beta_3 + \left[\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2\right]\alpha_3$$
$$+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2\mathbf{t}\left(\left[b_1 a_2 + a_1 b_2\right]a_3 + \left[a_1 a_2 + a_1 a_2\right]b_3 + \left[a_1 b_2 + b_1 a_2\right]a_3\right)$$
$$-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(b_i, a_i) - 2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i, a_i)$$
$$-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i, b_i)$$

olur. $\mathbf{n}(a,a)=\mathbf{n}(a)$ olduğundan ve bazı ortak terimler bir araya getirilerek

$$\begin{aligned}&6N(X,Y,X)\\&=2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\alpha_j\alpha_k+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 4\mathbf{t}\big((b_1a_2)a_3+(a_1b_2)a_3+(a_1a_2)b_3\big)\\&-4\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,b_i)-2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}&6N(X,Y,X)=2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\left[\alpha_j\alpha_k-\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]\\&-4\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,b_i)\\&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 4\mathbf{t}\big((b_1a_2)a_3+(a_1b_2)a_3+(a_1a_2)b_3\big)\end{aligned}$$

olur ve $\mathbf{t}$ nin lineerliğinden

$$\begin{aligned}&6N(X,Y,X)=2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\left[\alpha_j\alpha_k-\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]\\&-4\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,b_i)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 4\mathbf{t}\big((b_1a_2)a_3\big)\\&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 4\mathbf{t}\big((a_1b_2)a_3\big)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 4\mathbf{t}\big((a_1a_2)b_3\big)\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $\mathbf{t}(ab)=\mathbf{t}(a,b)$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}&6N(X,Y,X)=2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\left[\alpha_j\alpha_k-\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]\\&-4\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,b_i)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 4\mathbf{t}(b_1a_2,a_3)\\&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 4\mathbf{t}(a_1b_2,a_3)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 4\mathbf{t}(a_1a_2,b_3)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $6N(X,Y,X)=2T(X^{\#},Y)$ olduğu, yani $T(X^{\#},Y)=3N(X,Y,X)=N(X,Y)$ eşitliği elde edilmiş olur. Bu sonuç ile kübik cebir tanımının (yani Tanım 3.4 ün) 3. şartının sağlandığını görmüş oluruz. Üstelik,

$$\begin{aligned}&T(X^{\#},Y)=\sum_{(ijk)}(\beta_i)\left[\alpha_j\alpha_k-\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]\\&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\left[\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,b_i)\right]+2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{t}(b_1a_2,a_3)\\&+2\gamma_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{t}(a_1b_2,a_3)+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{t}(a_1a_2,b_3)\end{aligned}$$

eşitliğinde Y yerine X alınmış olsaydı,

$$\begin{aligned}&T(X^{\#},X)=\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\left[\alpha_j\alpha_k-\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]\\&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\left[\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,a_i)\right]+2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{t}(a_1a_2,a_3)\\&+2\gamma_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{t}(a_1a_2,a_3)+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{t}(a_1a_2,a_3)\\&=\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\left[\alpha_j\alpha_k-\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\left[\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]\\&+6\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{t}(a_1a_2,a_3)\\&=\sum_{(ijk)}\alpha_i\alpha_j\alpha_k-3\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\left[\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]+6\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{t}(a_1a_2,a_3)\\&=3\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{t}\big((a_1a_2)a_3\big)-\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right)\\&=3\det X=3N(X)=3N(X,X,X)\end{aligned}$$

bulunurdu. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}N(X,X,X)=N(X)&=\frac{1}{3}T(X^{\#},X)\\&=\frac{1}{3}T(X\times X,X)\end{aligned}$$

olurdu. Bu sonuç Teorem 3.2 (i) deki genel sonuçla uyumludur.

$$\begin{aligned}&T(X^{\#},Y)=\sum_{(ijk)}(\beta_i)\left[\alpha_j\alpha_k-\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]\\&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\left[\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,b_i)\right]+2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\mathbf{t}(b_1a_2,a_3)\\&+2\gamma_2\gamma_3\gamma_1\mathbf{t}(a_1b_2,a_3)+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\mathbf{t}(a_1a_2,b_3)\end{aligned}$$

eşitliğinde Y yerine $1=I_3$ alınmış olsaydı,

$$\begin{aligned}&T(X^{\#},1)=\sum_{(ijk)}\left[\alpha_j\alpha_k-\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i)\right]\\&=\left[\alpha_2\alpha_3-\gamma_2\gamma_3\mathbf{n}(a_1)\right]+\left[\alpha_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1\mathbf{n}(a_2)\right]\\&+\left[\alpha_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2\mathbf{n}(a_3)\right]\\&=T(X^{\#})\\&=3N(X,1,X)\end{aligned}$$

olurdu. Burada $i=1,2,3$ için $a_i=x_i+y_i\varepsilon\in\mathbf{A}$ için $\mathbf{n}(a_i)=n(x_i)+2n(x_i,y_i)\varepsilon$ olduğuna dikkat ediniz.

$N(X,Y,Z)$ de Z yerine $1=I_3$ alınırsa,

$$6N(X,Y,1)=[\beta_1+\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1+\alpha_2]\beta_3 +[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]-2\sum_{(ijk)}\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,b_i)$$
$$=\beta_1\alpha_3+\beta_2\alpha_3+\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_3+\alpha_1\beta_2 +\beta_1\alpha_2-2\sum_{(ijk)}\gamma_j\gamma_k\mathbf{n}(a_i,b_i)$$

olup bu sonuç $X\times Y$ matrisinin (i,i) bileşenlerinin toplamının iki katına yani $2T(X\times Y)$ ye eşittir. O halde $N(X,Y,1)=N(X,1,Y)=\frac{1}{3}T(X\times Y,1)$ dir. Bu sonuç Teorem 3.2 (i) deki genel sonuçla tutarlıdır.

Şimdi, $X\text{g}X^{\#}$ çarpımını hesaplanırsa,

$$X\text{g}X^{\#}=\begin{bmatrix}\det(X) & 0 & 0\\ 0 & \det(X) & 0\\ 0 & 0 & \det(X)\end{bmatrix}$$
$$=\det(X)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\det(X)I_3=N(X)I_3$$

olduğundan $X\text{g}X^{\#}=X^{\#}\text{g}X=\det(X)=N(X)$ yazabiliriz.

$X^{\#}$ matrisinin tekrar eki alınırsa bu durumda $(X^{\#})^{\#}$ matrisinin (i,j). bileşenleri ile $N(X)X$ matrisinin (i,j). bileşenlerinin aynı olduğu yani $(X^{\#})^{\#}=N(X)X$ olduğu görülür. Bu ise kübik cebir tanımın (yani Tanım 3.4 ün) 1. şartının geçerli olduğunu gösterir. $N(1)=1$ ve $1^{\#}=1$ olduğunu görmek çok kolaydır ki bunlar, sırasıyla, kübik cebir tanımının 2 ve 4. şartlarıdır.

Böylece $\mathbf{J}=(\mathrm{H}(\mathbf{A}_3,J_\gamma),+,\text{g})$ nin bir kübik cebir olduğunu göstermiş olduk.

Bir kübik cebirin $U_XY=T(X,Y)X-2(X^{\#}\times Y)$ eşitliği altında bir özdeşlikli kuadratik Jordan cebiri olduğu 3. bölümde ifade edilmiştir. Bu cebirin boyutunun ise 2+2+2+(8+8)+(8+8)+(8+8) = 54 olduğu açıktır.

Kaynaklar

Akpınar, A., 2007. Geometrik Yapılarda Çifte Oran. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa, 84.

Beachy, J.A., 1999. Introductory Lectures on Rings and Modules. London Mathematical Society Student Texts **47**, Cambridge Univ. Press, UK, 238.

Benz, W., 1973. Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Springer, Berlin, 368.

Bix, R., 1980. Octonion planes over local rings. *Trans. Amer. Math. Soc*., **261(2)**, 417-438.

Blunck, A., 1991. Cross-Ratios Over Lokal Alternative Rings. *Result Math*., **19**, 246-256.

Blunck, A., 1992. Cross-ratios in Moufang-Klingenberg planes. *Geometriae Dedicata*, **43**, 93-107.

Blyth, T.S. and Robertson E.F., 2002. Further Linear Algebra. Springer, UK, 230.

Çelik, B., 1995. Non-Assosyatif Cebirler Üzerine Kurulan Projektif Yapılar. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa, 77.

Çiftçi, S., 2015. Lineer Cebir. Dora Basın Yayın Dağıtım, Bursa, 430.

Elman, R., Karpenko, N. and Merkurjev, A., 2008. The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms. Amer. Math. Soc., Colloguium Publications, **56**, 443.

Faulkner, J.R., 1970. Octonion planes defined by quadratic Jordan algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **104**, 71.

Faulkner, J.R., 2014. The Role of Nonassociative Algebra in Projective Geometry. Graduate Studies in Mathematics, **159**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 229.

Fraleigh, J.B., 1982. A First Course in Abstract Algebra. Third Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 478.

Freudenthal, H., 1951. Octaven, Ausnahmegruppen, und Octavengeometrie. Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, Utrecht, 49.

Hungerford, T.W., 1974. Algebra. Holt Rinehart and Winston, Inc., New York, 502.

Jacobson, N., 1968. Structure and Representations of Jordan Algebras. Colloq. Publ., **39**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 453.

Jacobson N., 1969. Lectures on Quadratic Jordan Algebras. Lecture Notes. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 128.

Jacobson, N., 1985. Basic Algebra I. Second Edition, W.H. Freeman and Company, New York, 499.

Jordan, P., 1949. Über Eine Nicht-Desarguessche Ebene Projektive Geometrie. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **16**, 74-76.

Malik, D.S., Mordeson, J.M. and Sen M.K., 1997. Fundementals of Abstract Algebra. The McGraw-Hill, New York, 636.

McCrimmon K., 1969. The Freudenthal-Springer-Tits Constructions of Exceptional Jordan Algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139**, 495-510.

McCrimmon, K., 2004. A Taste of Jordan Algebras. Springer, New York, 562.

McDonald, B.R., 1976. Geometric Algebra over Local Rings. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 421.

Moufang, R., 1933. Alternativekörper und der Satz vom vollstandigen Verseit. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **9**, 207-222.

Özkan, İ., 2016. Lokal Halkalar Üzerine Octonion Düzlemler. Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa, 85.

Pickert, G., 1955. Projektive Ebenen. Springer, Berlin, 343.

Schafer, R.D., 1996. An Introduction to Nonassociative Algebras. Dover Publications Inc., New York, 166.

Springer, T.A., 1960. The Projective Octave Plane. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A,* **63**, Indag. Math., **22**, 74-101.

Stevenson, F.W., 1972. Projective Planes. W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA, 416.

Thomas, E.G.F., 2014. A Polarization Identity for Multilinear Maps. *Indagationes Mathematicae*, **25**, 468-474.