# $\mathcal{I}$-LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeliha DENİZ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2018

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# $\mathcal{I}$-LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

**Zeliha DENİZ**

**DANIŞMAN**
**Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**OCAK 2018**

# TEZ ONAY SAYFASI

Zeliha DENİZ tarafından hazırlanan "$\mathcal{I}$-Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 05/01/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

**Başkan** : Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi Fen Edeb. Fak.

**Üye** : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

---

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2018 tarih ve
.............. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

## BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

# Afyon Kocatepe Üniversitesi

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

05/01/2018

Zeliha DENİZ

**ÖZET**

Yüksek Lisans Tezi

$\mathcal{I}$-LACUNARY İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Zeliha DENİZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

**Danışman :** Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılarak konunun tarihi gelişimi ve genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, reel sayı dizilerinin $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklığı, $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli $\mathcal{I}$-lacunary toplanabilirliği kavramları tanıtılarak bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler örnekler ve teoremlerle açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, herhangi bir normlu lineer uzayda $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık, $\mathcal{I}-\lambda$-istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}-[V,\lambda]$-toplanabilirlik kavramları verilerek bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler örnekler ve teoremlerle açıklanmıştır. Beşinci bölümde, $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere, üçüncü bölümde verilen kavramlar genelleştirilerek; reel sayı dizileri için $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık, $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $\mathcal{I}$-lacunary toplanabilirlik kavramları tanıtılıp, bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler örnekler ve teoremlerle açıklanmıştır.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, çalışma boyunca yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

**2018, v + 35 sayfa**

**Anahtar Kelimeler :** İdeal, Süzgeç, $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık, $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık, $\mathcal{I}-\lambda$-istatistiksel yakınsaklık, $\alpha$. mertebe.

**ABSTRACT**

M. Sc. Thesis

ON $\mathcal{I}$-LACUNARY
STATISTICAL CONVERGENCE

Zeliha DENİZ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

**Supervisor :** Assist. Prof. Uğur ULUSU

This thesis consists of six chapters.

First chapter has been devoted to introduction, historical development of the topic and general literature are given. In the second chapter, some basic concepts necessary for a better understanding of work are recalled. In the third chapter, the concepts of $\mathcal{I}$-statistical convergence, $\mathcal{I}$-lacunary statistical convergence and strong $\mathcal{I}$-lacunary summability of real number sequences are introduced and their specific properties and relations between these concepts are explained by examples and theorems. In the fourth chapter, the concepts of $\mathcal{I}$-statistical convergence, $\mathcal{I}-\lambda$-statistical convergence and $\mathcal{I}-[V,\lambda]$-summability are given in any normed linear space and their specific properties and relations between these concepts are explained by examples and theorems. In the fifth chapter, the concepts given in the third section are generalized where $0<\alpha\leq 1$; the concepts of $\mathcal{I}$-statistical convergence, $\mathcal{I}$-lacunary statistical convergence and strong $\mathcal{I}$-lacunary summability of order $\alpha$ for real number sequences are introduced, their specific properties and relations between these concepts are explained by examples and theorems.

In the sixth section, which is the last chapter, the sources in the literature that have been utilized throughout the study are listed.

**2018, v + 35 pages**

**Key Words :** İdeal, Filter, $\mathcal{I}$-statistical convergence, $\mathcal{I}$-lacunary statistical convergence, $\mathcal{I}-\lambda$-statistical convergence, order $\alpha$.

**TEŞEKKÜR**

Yüksek lisans eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda yol gösteren saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca üzerimde emeği geçen ve bu branşı seçmemde katkısı olan tüm öğretmenlerime teşekkür ederim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Zeliha DENİZ

AFYONKARAHİSAR, 2018

## İÇİNDEKİLER

Sayfa

# SİMGELER DİZİNİ

| Simgeler | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $(x_k)$ | Reel sayı dizisi |
| $\ell_\infty$ | Sınırlı reel sayı dizilerinin kümesi |
| $x_k \to x$ | $(x_k)$ dizisinin $x$ e yakınsaması |
| $(x_{k_j})$ | $(x_k)$ reel sayı dizisinin alt dizisi |
| $[\sqrt{\lambda_n}]$ | $\sqrt{\lambda_n}$ sayısının tam değeri |
| $A^c$ | $A$ kümesinin tümleyeni |
| $\inf A$ | $A$ kümesinin alt sınırlarının en büyüğü |
| $\sup A$ | $A$ kümesinin üst sınırlarının en küçüğü |
| $\liminf x_k$ | $(x_k)$ dizisinin alt limiti |
| $\limsup x_k$ | $(x_k)$ dizisinin üst limiti |
| $\lvert K_n \rvert$ | $K_n$ kümesinin eleman sayısı |
| $\theta = \{k_r\}$ | Lacunary dizi |
| $2^{\mathbb{N}}$ | $\mathbb{N}$ nin kuvvet kümesi |
| $\mathcal{I}$ | İdeal |
| $\mathcal{F}$ | Süzgeç |
| $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ | İdeal ile ilişkili süzgeç |
| $\mathcal{I}_d$ | Doğal yoğunluğu sıfır olan kümelerden oluşan ideal |
| $\mathcal{I}_f$ | Sonlu elemanlı kümelerden oluşan ideal |
| $S(\mathcal{I})$ | $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak diziler sınıfı |
| $S_\theta(\mathcal{I})$ | $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsak diziler sınıfı |
| $N_\theta[\mathcal{I}]$ | Kuvvetli $\mathcal{I}$-lacunary toplanabilir diziler sınıfı |
| $S_\lambda(\mathcal{I})$ | $\mathcal{I} - \lambda$-istatistiksel yakınsak diziler sınıfı |
| $[V,\lambda](\mathcal{I})$ | $[V,\lambda](\mathcal{I})$-toplanabilir diziler sınıfı |
| $S(\mathcal{I})^\alpha$ | $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak diziler sınıfı |
| $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ | $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-lacunary ist. yakınsak diziler sınıfı |
| $N_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ | $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-lacunary yakınsak diziler sınıfı |

# 1 GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, Analiz ve Fonksiyonel Analiz alanının temel kavramlarından biridir. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan İstatistiksel Yakınsaklık kavramı ise Toplanabilme Teorisinde büyük öneme sahiptir. Fast (1951)' in istatistiksel yakınsak kavramını tanıtmasından bu yana bu kavramın uygulamaları ve bazı genelleştirmeleri başta Schoenberg (1959), Maddox (1978), Salat (1980), Freedman ve Sember (1981), Fridy (1985), Kolk (1991) ve Savaş (2002) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından günümüze kadar verilmiştir. Son zamanlarda Çolak (2010) ve Bhunia vd. (2012) tarafından yapılan çalışmalarda, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, $\alpha$. mertebeden doğal yoğunluk kavramı kullanılarak istatistiksel yakınsaklık kavramı genelleştirilmiştir.

Fridy ve Orhan (1993) lacunary dizi kavramını kullanarak, istatistiksel yakınsaklıkla aralarında önemli ilişkiler bulunan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmıştır. Lacunary toplanabilme yöntemleri arasındaki bazı kapsama bağıntıları Li (2000) tarafından verilmiştir. Savaş ve Karakaya (2007) lacunary dizi kavramını kullanılarak bazı yeni dizi uzayları tanımlamıştır.

Mursaleen (2000), Leindler (1965) tarafından tanıtılan $[V, \lambda]$-toplanabilmenin bir genelleştirilmesi olan $\lambda$-istatistiksel yakınsaklık kavramını vermiştir. Bu kavram Çolak ve Bektaş (2011) tarafından $\alpha$. mertebeden $\lambda$-istatistiksel yakınsaklık kavramına genişletilmiştir.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinden oluşan bir ideal kavramına dayanan ve istatistiksel yakınsaklığın da bir genelleştirmesi olan $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı ise Kostyrko vd. (2000) tarafından tanıtılmıştır. Bu kavramın da uygulamaları ve birkaç genelleştirmesi başta Kostyrko vd. (2005), Das ve Ghosal (2010) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından günümüze kadar verilmiştir.

Son zamanlarda, Das vd. (2011) ideal kavramını kullanarak, istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarının bir genelleştirmesi olan,

$\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarını vererek, bu kavramların bazı özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri incelemiştir.

Savaş ve Das (2011), herhangi bir reel normlu lineer uzayda $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık, ve $\mathcal{I} - \lambda$-istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanıtmış, bu kavramların bazı özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri incelemiştir.

Das ve Savaş (2014), $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ve $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanıtıp, bunların kendine özgü özelliklerini ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri örnekler ve teoremlerle açıklamıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, matematik alanında önemli olan ve çalışmamızın daha iyi anlaşılabilmesi için gereken temel kavramlardan bahsedilmiştir.

İlerleyen bölümlerde, sırasıyla Das vd. (2011), Savaş ve Das (2011) ve Das ve Savaş (2014) tarafından yapılan çalışmalardaki temel tanım, örnek ve teoremler analiz edilmiştir.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

# 2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmanın daha anlaşılır olması için gerekli olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

**Tanım 2.1** Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona *dizi* denir. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise, diziye *reel terimli dizi* veya *reel sayı dizisi* ya da *reel dizi* denir. Yani reel terimli dizi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biçiminde bir fonksiyondur (Balcı 2010).

Genel terimi $x_n$ olan bir dizi $(x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ biçiminde gösterilir.

Çalışma boyunca, aksi belirtilmedikçe, $(x_n)$ dizisi bir reel sayı dizisi olarak kabul edilecektir.

**Tanım 2.2** Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı varsa, $(x_n)$ dizisine *sınırlı dizi* denir. Tüm sınırlı reel dizilerin kümesi $l_\infty$ ile gösterilir (Balcı 2010).

**Tanım 2.3** $(x_n)$ bir dizi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x| < \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon$ a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa, $(x_n)$ dizisinin *limiti* $x$ dir veya $x$ e *yakınsaktır* denir ve $\lim x_n = x$ veya $x_n \to x$ biçiminde gösterilir (Balcı 2010).

**Tanım 2.4** Bir $(x_n)$ dizisi verilmiş olsun. Eğer

i. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x_{n+1}$ ise, diziye *azalmayan dizi*,

ii. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > x_{n+1}$ ise, diziye *monoton azalan dizi* denir (Balcı 2010).

**Tanım 2.5** $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$ dizisi verilmiş olsun. $k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $k(n) = k_n$ fonksiyonu (dizisi) bir artan dizi olmak üzere $(xok) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonuna $x$ dizisinin bir *alt dizisi* denir (Balcı 2010).

$$(xok)(n) = x\big(k(n)\big) = x(k_n) = x_{k_n}$$

olacağından $(x_n)$ dizisinin bir alt dizisini bulmak için, $(k_n)$ doğal sayıların artan bir dizisi olmak şartıyla, $n$ yerine $k_n$ koymak yetecektir.

**Tanım 2.6** $(x_{k_n}), (x_n)$ dizisinin bir alt dizisi olsun. $(x_{k_n})$ yakınsak ve limiti $x$ ise, bu $x$ noktasına $(x_n)$ dizisinin bir *limit noktası* denir (Balcı 2010).

**Tanım 2.7** $(x_n)$ bir reel terimli dizi ve $C$ de $(x_n)$ dizisinin alt dizilerinin limitlerinin kümesi olsun. $C$, genişletilmiş reel sayılar kümesinin bir altkümesidir. $\sup C$ ve $\inf C$ genişletilmiş reel sayılarına, sırasıyla, $(x_n)$ dizisinin *üst limiti* ve *alt limiti* denir. Üst limit, $\limsup x_n$ ve alt limit $\liminf x_n$ ile gösterilir (Balcı 2010).

**Tanım 2.8** $(x_n)$ bir reel terimli dizi olsun. $(x_n)$ bir *Cauchy dizisi*dir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $m, n \geq n_0$ için $|x_m - x_n| < \varepsilon$ dur (Balcı 2010).

**Tanım 2.9** $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. Buna göre $K$ kümesinin doğal yoğunluğu,

$$d(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : k \in K\right\}\right|$$

biçiminde tanımlanır (Niven *et al.* 2008).

Burada $|K_n|$ ifadesindeki dikey çizgiler, içerisinde bulunan $K_n$ kümesinin eleman sayısını göstermektedir.

**Tanım 2.10** $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\left\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}$ kümesinin doğal yoğunluğu 0, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise, $x$ dizisi $L$ ye *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - \lim x = L$ biçiminde gösterilir (Fridy 1985).

**Tanım 2.11** $x = (x_k)$ bir dizi olsun. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise, $x$ dizisi $L$ ye $\alpha$. *mertebeden istatistiksel yakınsaktır* denir (Çolak 2010).

**Tanım 2.12** $\theta = \{k_r\}$ dizisi $(r = 1, 2, 3, ...)$, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir dizisi ise, *lacunary dizi* olarak adlandırılır (Fridy and Orhan 1993).

Çalışma boyunca $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile belirtilip, ayrıca $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı da $q_r$ ile gösterilecektir.

**Tanım 2.13** $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r}^{n} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir $L$ sayısı varsa, $x$ dizisi $L$ ye *kuvvetli lacunary toplanabilirdir* denir (Fridy and Orhan 1993).

**Tanım 2.14** $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \Big| \big\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| = 0$$

ise, $x$ dizisi $L$ ye *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve $S_\theta - \lim x = L$ biçiminde gösterilir (Fridy and Orhan 1993).

**Tanım 2.15** $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ ve $\lambda_1 = 1$ olmak üzere pozitif sayıların azalmayan ve sonsuza giden bir dizisi olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir $L$ sayısı varsa, $(x_k)$ dizisine $[V, \lambda]$-*toplanabilirdir* denir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \Big| \big\{ k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| = 0$$

ise, $(x_k)$ dizisi $L$ sayısına $\lambda$-istatistiksel yakınsaktır denir (Mursaleen 2000).

**Tanım 2.16** Bir $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesinin $\mathbb{N}$ de bir *ideal* olması için gerek ve yeter şart,

i. $\emptyset \in \mathcal{I}$,

ii. Her $A, B \in \mathcal{I}$ için $A \cup B \in \mathcal{I}$,

iii. Her $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset A$ için $B \in \mathcal{I}$

şartlarını sağlamasıdır (Kostyrko *et al.* 2000).

Eğer $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ ise, $\mathcal{I}$ ya bir *gerçek ideal* denir. Ayrıca $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa, $\mathcal{I}$ idealine *uygun ideal* denir.

Bu çalışmadaki bütün idealler, aksi belirtilmedikçe, uygun ideal olarak kabul edilecektir.

**Tanım 2.17** Boştan farklı bir $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesinin $\mathbb{N}$ de bir *süzgeç* olması için gerek ve yeter şart,

i. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

ii. Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$,

iii. Her $A \in \mathcal{F}$ ve her $B \supset A$ için $B \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlamasıdır (Kostyrko *et al.* 2000).

**Önerme 2.18** Eğer $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ nin gerçek ideali ise, bu durumda

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset \mathbb{N} : \exists A \in \mathcal{I} : M = \mathbb{N} \backslash A\}$$

ailesi $\mathbb{N}$ de bir süzgeçtir. Bu $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ya $\mathcal{I}$ ile ilişkili süzgeç denir (Kostyrko *et al.* 2000).

**Tanım 2.19** $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x$ dizisi $L$ ye *$\mathcal{I}$-yakınsaktır* denir ve $\mathcal{I} - \lim x = L$ biçiminde gösterilir (Kostyrko *et al.* 2000).

Eğer $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olarak alınırsa; $I_f$, $\mathbb{N}$ nin bir uygun idealidir ve bu durumda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile Tanım 2.3 deki alışılmış yakınsaklık çakışır.

**Tanım 2.20** $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\mathcal{I}$ idealine ait karşılıklı ayrık her $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümeler ailesi için, $A_n \triangle B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sonlu küme ve

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümeler ailesi varsa, $\mathcal{I}$ ideali *(AP) şartını sağlıyor* denir (Kostyrko *et al.* 2000).

**Tanım 2.21** $X \neq \emptyset$ olsun. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

M1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

M3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

şartlarını sağlıyorsa, $\rho$ fonksiyonuna $X$ de bir *metrik* denir (Bayraktar 2006).

**Tanım 2.22** $N$, lineer bir uzay olsun. $\| \cdot \| : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x$ deki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Eğer bu fonksiyon her $x, y \in N$ ve her $\alpha$ skaleri için

N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, $\| \cdot \|$ fonksiyonuna $N$ de bir *norm* ve $(N, \| \cdot \|)$ ikilisine de bir *normlu uzay* denir (Bayraktar 2006).

Lineer uzay üzerinde bir norm tanımlanmışsa, bu uzaya *normlu lineer uzay* denir.

Boş olmayan herhangi bir $A$ kümesi üzerinde tanımlı skaler değerli sınırlı fonksiyonların kümesi $S(A)$ ile gösterilsin. $S(A)$ kümesi fonksiyonların toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır.

$$\begin{aligned} \|.\|_\infty : &\quad S(A) \to \mathbb{R}, \\ \|f\|_\infty : &\quad \sup\{|f(x) : x \in A|\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa, $\|.\|_\infty$ bir normdur.

**Tanım 2.23** $(x_n), (N, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $n$ için $\|x_n\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, $(x_n)$ dizisine *sınırlı dizi* denir (Bayraktar 2006).

**Tanım 2.24** $(x_n), (N, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0$ sayısı varsa, $(x_n)$ dizisi $x$ e yakınsaktır denir (Bayraktar 2006).

**Tanım 2.25** $(x_n), (N, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0$ sayısı varsa, $(x_n)$ dizisine *Cauchy dizisi* denir (Bayraktar 2006).

**Tanım 2.26** $(N, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ olarak tanımlanırsa, $d$ metrik şartlarını sağlar. Bu $d$ metriğine *norm metriği* denir (Bayraktar 2006).

**Tanım 2.27** Eğer $N$, norm metriğine göre tam ise (yani $N$ deki her Cauchy dizisi yakınsak ise) $N$ ye *Banach uzayı* denir (Bayraktar 2006).

# 3 BAZI TOPLANABİLME YÖNTEMLERİNİN İDEALLER KULLANILARAK GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde, Das vd. (2011) tarafından "$\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık" ve $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık" kavramları ile ilgili yapılan çalışmadaki temel tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

**Tanım 3.1** $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x$ dizisi $L$ ye $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaktır veya $L$ ye $S(\mathcal{I})$-yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \to L\big(S(\mathcal{I})\big)$ biçiminde gösterilir.

Tüm $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S(\mathcal{I})$ ile gösterilecektir.

**Uyarı 3.2** $\mathcal{I} = \mathcal{I}_d$ olarak alınsın. $(\lambda_n)$ dizisi; $1 \leq n < 10$ için $\lambda_n = 1$ ve her $n \geq 10$ için $\lambda_n = n - 10$ olarak tanımlansın. Ayrıca $A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ...\}$ olsun.

$X$ normlu lineer uzayında $x = (x_k)$ dizisi; $u \in X$ ($\|u\| = 1$) sabit bir eleman ve $\theta$, $X$ in birim (özdeş) elemanı olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} ku & , \ n - [\sqrt{\lambda_n}] + 1 \leq k \leq n, \ n \notin A \ \text{ ise} \\ ku & , \ n - \lambda_n + 1 \leq k \leq n, \ n \in A \ \text{ ise} \\ \theta & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

Burada, Savaş ve Das (2011) tarafından yapılan çalışmadaki Teorem 2.3 ve yine aynı çalışmadaki Uyarı 2 dikkate alındığında, $x = (x_k)$ dizisi $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak olan fakat istatistiksel yakınsak olmayan diziye bir örnektir.

**Tanım 3.3** $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x$ dizisi $L$ ye $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaktır veya $L$ ye $S_\theta(\mathcal{I})$-yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$ biçiminde gösterilir.

Tüm $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S_\theta(\mathcal{I})$ ile gösterilecektir.

$S(\mathcal{I})$ ve $S_\theta(\mathcal{I})$ nın her ikisi de tüm reel diziler uzayı $s$ nin lineer altuzaylarıdır. Bu iddiadaki ifadelerin ispatları benzer olduğu için, burada sadece $S_\theta(\mathcal{I})$ için ispat verilecektir.

**Teorem 3.4** $S_\theta(\mathcal{I}) \cap \ell_\infty$ kümesi $\ell_\infty$ un kapalı bir alt kümesidir.

**İspat:** $(x^n) \subseteq S_\theta(\mathcal{I}) \cap \ell_\infty$ dizisi yakınsak bir dizi ve $x^n \to x \in \ell_\infty$ olsun. $x \in S_\theta(\mathcal{I}) \cap \ell_\infty$ olduğu gösterilmelidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \to L_n\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$ olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ olmak üzere, monoton azalan bir pozitif $(\varepsilon_n)$ dizisi alınsın. $(\varepsilon_n)$ dizisinin 0 a yakınsadığı açıktır. $\|x - x^n\|_\infty < \dfrac{\varepsilon_n}{4}$ olacak şekilde pozitif bir $n$ tam sayısı seçilsin. $0 < \delta < 1$ olsun. O zaman

$$A = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |x_k^n - L_n| \geq \frac{\varepsilon_n}{4}\right\}\right| < \frac{\delta}{3} \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

ve

$$B = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |x_k^{n+1} - L_{n+1}| \geq \frac{\varepsilon_{n+1}}{4}\right\}\right| < \frac{\delta}{3} \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

dır. $A \cap B \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $\emptyset \notin \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğu için $r \in A \cap B$ seçilebilir. O zaman

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |x_k^n - L_n| \geq \frac{\varepsilon_n}{4}\right\}\right| < \frac{\delta}{3}$$

ve

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |x_k^{n+1} - L_{n+1}| \geq \frac{\varepsilon_{n+1}}{4}\right\}\right| < \frac{\delta}{3}$$

tür ve bu yüzden

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |x_k^n - L_n| \geq \frac{\varepsilon_n}{4} \quad \vee \quad |x_k^{n+1} - L_{n+1}| \geq \frac{\varepsilon_{n+1}}{4}\right\}\right| < \delta < 1$$

dir. Böylece, $|x_k^n - L_n| < \dfrac{\varepsilon_n}{4}$ ve $|x_k^{n+1} - L_{n+1}| < \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{4}$ olacak şekilde bir $k \in I_r$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned} |L_n - L_{n+1}| &\leq |L_n - x_k^n| + |x_k^n - x_k^{n+1}| + |x_k^{n+1} - L_{n+1}| \\ &\leq |x_k^n - L_n| + |x_k^{n+1} - L_{n+1}| + \|x - x^n\|_\infty + \|x - x^{n+1}\|_\infty \\ &\leq \frac{\varepsilon_n}{4} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{4} + \frac{\varepsilon_n}{4} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{4} \leq \varepsilon_n \end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu ise $(L_n)$ dizisinin $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir ki bu yüzden $n \to \infty$ iken $L_n \to L$ olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. $x \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$ olduğu gösterilmelidir. Her $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_n < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $\|x - x^n\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $|L_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçilsin. O zaman

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| &\leq \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k^n - L_n| + \|x_k - x_k^n\|_\infty \\
&\quad +|L_n - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\
&\leq \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k^n - L_n| + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \geq \varepsilon\big\}\Big| \\
&\leq \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k^n - L_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\big\}\Big|
\end{aligned}
$$

dır. Bu ise

$$
\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| < \delta\right\}
$$

$$
\supseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k^n - L_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\big\}\Big| < \delta\right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})
$$

olmasını gerektirir. Bu yüzden

$$
\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| < \delta\right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})
$$

ve böylece

$$
\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}
$$

dır. Bu ise $x \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$ olduğunu gösterir ve ispatı tamamlar.

**Tanım 3.5** $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$
\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}
$$

oluyorsa, $x$ dizisi $L$ ye kuvvetli $\mathcal{I}$-lacunary yakınsaktır veya $N_\theta[\mathcal{I}]$-yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \to L\big(N_\theta[\mathcal{I}]\big)$ biçiminde gösterilir.

Tüm kuvvetli $\mathcal{I}$-lacunary yakınsak dizilerin sınıfı $N_\theta[\mathcal{I}]$ ile gösterilecektir.

**Teorem 3.6** $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. O zaman

i. (a) $x_k \to L\big(N_\theta[\mathcal{I}]\big) \Rightarrow x_k \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$

(b) $N_\theta[\mathcal{I}]$, $S_\theta(\mathcal{I})$ nın özalt kümesidir.

ii. $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})\big) \Rightarrow x_k \to L(N_\theta[\mathcal{I}]\big)$

iii. $S_\theta(\mathcal{I}) \cap \ell_\infty = N_\theta[\mathcal{I}] \cap \ell_\infty$

dur.

**İspat:** (i.) (a) $x_k \to L\big(N_\theta[\mathcal{I}]\big)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon \cdot \Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big|$$

yazılabilir ve bu yüzden

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \frac{1}{h_r} \Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big|$$

dır. O zaman her $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \varepsilon \cdot \delta\right\}$$

elde edilir. Burada $x_k \to L\big(N_\theta[\mathcal{I}]\big)$ olduğu da dikkate alınırsa ispat tamamlanır.

(b) $N_\theta[\mathcal{I}] \subseteq S_\theta(\mathcal{I})$ kapsamasının doğru olduğunu göstermek için; $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun ve $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = 1, 2, ..., [\sqrt{h_r}], 0, 0, ... \qquad (r = 1, 2, 3, ...)$$

biçiminde tanımlansın. O zaman, her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r} \Big|\big\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\big\}\Big| \leq \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r}$$

ve buradan her $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \Big|\big\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r} \geq \delta\right\}$$

elde edilir. Bu kapsam ifadesinde, sağ taraftaki küme sonlu ve bu yüzden $\mathcal{I}$ idealine ait olduğu için $x_k \to 0\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$ sonucuna ulaşılır.

Diğer taraftan

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k-0| = \frac{1}{h_r}\cdot\frac{[\sqrt{h_r}]([\sqrt{h_r}]+1)}{2}$$

dır. O zaman $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan, $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ya ait bazı $m\in\mathbb{N}$ ler için

$$\begin{aligned}\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k-0|\geq\frac{1}{4}\right\} &= \left\{r\in\mathbb{N}:\frac{[\sqrt{h_r}]([\sqrt{h_r}]+1)}{h_r}\geq\frac{1}{2}\right\}\\ &= \{m,m+1,m+2,...\}\end{aligned}$$

dir. Buradan $x_k \not\to 0\big(N_\theta[\mathcal{I}]\big)$ sonucuna ulaşılır.

(ii.) $x=(x_k)\in\ell_\infty$ ve $x_k\to L\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$ olsun. Bu durumda her $k\in\mathbb{N}$ için $|x_k-L|\leq M$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. Verilen $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k-L| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\|x_k-L|\geq\frac{\varepsilon}{2}}}|x_k-L|+\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\|x_k-L|<\frac{\varepsilon}{2}}}|x_k-L|\\ &\leq \frac{M}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:|x_k-L|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}&\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k-L|\geq\varepsilon\right\}\\ &\qquad\subseteq\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:|x_k-L|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2M}\right\}\in\mathcal{I}\end{aligned}$$

elde ederiz ve ispat tamamlanır.

(iii.) $(i)$ ve $(ii)$ den elde edilir.

**Teorem 3.7** Herhangi bir $\theta=\{k_r\}$ lacunary dizi için; $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklığın $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklığı gerektirmesi için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r>1$ olmasıdır. Eğer $\liminf_r q_r=1$ ise, o zaman $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak olan fakat $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsak olmayan sınırlı bir $(x_k)$ dizisi vardır.

**İspat:** ($\Leftarrow$): $\liminf_r q_r>1$ olsun. O zaman, yeterince büyük $r$ için $q_r\geq 1+\alpha$ olacak şekilde $\alpha>0$ sayısı vardır öyle ki

$$\frac{h_r}{k_r}\geq\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylece, her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük $r$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_r}\Big|\{k \le k_r : |x_k - L| \ge \varepsilon\}\Big| &\ge \frac{1}{k_r}\Big|\{k \in I_r : |x_k - L| \ge \varepsilon\}\Big| \\ &\ge \frac{1}{1+\alpha}\cdot\frac{1}{h_r}\Big|\{k \in I_r : |x_k - L| \ge \varepsilon\}\Big|\end{aligned}$$

dır. O zaman, her $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\Big|\{k \in I_r : |x_k - L| \ge \varepsilon\}\Big| \ge \delta\right\}$$
$$\subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{k_r}\Big|\{k \le k_r : |x_k - L| \ge \varepsilon\}\Big| \ge \frac{\delta\alpha}{1+\alpha}\right\}$$

elde edilir. Bu kapsama bağıntısından ise $x_k \to L\big(S(\mathcal{I})\big) \Rightarrow x_k \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$ olduğunu anlaşılır.

Tersine $\liminf_r q_r = 1$ olsun. $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizinin

$$\frac{k_{r_j}}{k_{r_j-1}} < 1 + \frac{1}{j} \quad \text{ve} \quad \frac{k_{r_j-1}}{k_{r_{j-1}}} > j, \qquad (r_j \ge r_{j-1} + 2)$$

olacak şekilde bir $(k_{r_j})$ alt dizisi seçilebilir. Bir $(x_i)$ dizisi

$$x_i = \begin{cases} 1 & , \ i \in I_{r_j} \\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman, herhangi bir $L$ reel sayısı için

$$\frac{1}{h_{r_j}}\sum_{k \in I_{r_j}} |x_i - L| = |1 - L|, \qquad (j = 1, 2, ...)$$

ve

$$\frac{1}{h_{r_j}}\sum_{k \in I_r} |x_i - L| = |L|, \qquad (r \ne r_j)$$

dir. Öyleyse $(x_i)$ dizisinin $N_\theta[\mathcal{I}]$ ya ait olmadığı oldukça açıktır. $(x_i)$ dizisi sınırlı olduğundan, Teorem 3.6 nın $(iii)$ şıkkından dolayı $x_i \not\to L\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$ dır.

Şimdi, bütün bunların ardından $k_{r_j-1} \le n \le k_{r_{j+1}-1}$ olsun. O zaman Fast (1951) tarafından yapılan çalışmadaki Teorem 2.1 den

$$\frac{\varepsilon}{n}\Big|\{i \le n : |x_i - L| \ge \varepsilon\}\Big| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i| \le \frac{k_{r_j-1} + h_{r_j}}{k_{r_j-1}} \le \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j}$$

yazılabilir. Böylece herhangi bir $\mathcal{I}$ uygun ideali için $(x_i)$ dizisi $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaktır.

**Uyarı 3.8** $\liminf_r q_r > 1$ şartını sağlayan herhangi bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi için, Uyarı 3.2 de verilen dizi $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsak diziye bir örnektir.

**Teorem 3.9** $\mathcal{I}$ ideali $(AP)$ şartını sağlayan bir uygun ideal ve $\theta = \{k_r\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olsun. Eğer $x \in S(\mathcal{I}) \cap S_\theta(\mathcal{I})$ ise, o zaman $S(\mathcal{I}) - \lim x = S_\theta(\mathcal{I}) - \lim x$ dir.

**İspat:** $S(\mathcal{I}) - \lim x = L$, $S_\theta(\mathcal{I}) - \lim x = L'$ ve $L \neq L'$ olsun. Ayrıca $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|L - L'|$ olarak alınsın. $\mathcal{I}$ ideali $(AP)$ şartını sağladığından

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{m_r}\Big|\Big\{k \leq m_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\Big\}\Big| = 0$$

olacak şekilde bir $M = \{m_1, m_2, m_3, ...\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ (yani $\mathbb{N}\backslash M \in \mathcal{I}$) kümesi vardır.

$$A = \Big\{k \leq m_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\Big\} \quad \text{ve} \quad B = \Big\{k \leq m_r : |x_k - L'| \geq \varepsilon\Big\}$$

olsun. O zaman

$$m_r = |A \cup B| \leq |A| + |B|$$

dir. Bu ise

$$1 \leq \frac{|A|}{m_r} + \frac{|B|}{m_r}$$

olmasını gerektirir.

$$\frac{|B|}{m_r} \leq 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{|A|}{m_r} = 0$$

olduğu için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|B|}{m_r} = 1$$

dir. $M^* = \{k_{l_1}, k_{l_2}, k_{l_3}, ...\} = M \cap \theta \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olsun. O zaman, $x_k \to L'\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$ olduğu için

$$t_i = \frac{1}{h_i}\Big|\Big\{k \in I_i : |x_k - L'| \geq \varepsilon\Big\}\Big| \xrightarrow{\mathcal{I}} 0$$

olmak üzere

$$\frac{1}{m_r}\Big|\Big\{k \leq m_r : |x_k - L'| \geq \varepsilon\Big\}\Big|$$

istatistiksel limit ifadesinin $k_{l_p}$ inci terimi

$$\frac{1}{k_{l_p}}\left|\left\{k \in \bigcup_{i=1}^{l_p} I_i : |x_k - L'| \geq \varepsilon\right\}\right| = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{l_p} h_i}\sum_{i=1}^{l_p} t_i h_i \tag{3.1}$$

dir. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olduğu için (3.1) ifadesi $t_i$ nin regüler bir ağırlıklı ortalama dönüşümüdür. Bundan dolayı $(t_i)$ dizisi aynı zamanda $p \to \infty$ iken sıfıra $\mathcal{I}$-yakınsaktır ve bu yüzden $(t_i)$ dizisi, $\mathcal{I}$ ideali $(AP)$ şartını sağladığı için sıfıra yakınsak bir altdiziye sahiptir. Fakat bu

$$\left\{\frac{1}{n}\Big|\{k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}\Big|\right\}_{n \in M}$$

nin bir altdizisi olduğu için

$$\left\{\frac{1}{n}\Big|\{k \leq n : |x_k - L'| \geq \varepsilon\}\Big|\right\}_{n \in M}$$

nin 1 e yakınsamadığı sonucu elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

# 4 İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞIN İDEALLER KULLANILARAK GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde, Savaş ve Das (2011) tarafından "$\mathcal{I} - [V, \lambda]$-istatistiksel yakınsaklık" ve "$\mathcal{I} - \lambda$-istatistiksel yakınsaklık" kavramları ile ilgili yapılan çalışmadaki temel tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

Bu bölüm boyunca, $(X, \|.\|)$ reel normlu lineer uzay ve $x = (x_k)$ da bu uzayın elamanlarının bir dizisi olarak kabul edilecektir.

**Tanım 4.1** $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x$ dizisi $L \in X$ e $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \to L\big(S(\mathcal{I})\big)$ biçiminde gösterilir.

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olması durumunda, $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

$\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ ve $\lambda_1 = 1$ olmak üzere pozitif sayıların azalmayan ve sonsuza giden bir dizisi olsun. Böyle $\lambda$ dizilerinin sınıfı $\Delta$ ile gösterilecektir.

Genelleştirilmiş *de la Valée-Pousin* ortalaması, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlanır.

**Tanım 4.2** $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer

$$\mathcal{I} - \lim_n t_n(x) \to L$$

ise, yani her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : |t_n(x) - L| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x$ dizisi $L \in X$ e $\mathcal{I} - [V, \lambda]$-toplanabilirdir denir ve bu durum $x_k \to L[V, \lambda](\mathcal{I})$ biçiminde gösterilir.

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olması durumunda, $\mathcal{I} - [V, \lambda]$-toplanabilirlik $[V, \lambda]$-toplanabilirlik ile çakışır.

**Tanım 4.3** $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x$ dizisi $L \in X$ e $\mathcal{I} - \lambda$-istatistiksel yakınsaktır veya $\mathcal{I} - S_\lambda$-yakınsaktır denir ve bu durum $\mathcal{I} - S_\lambda - \lim x = L$ veya $x_k \to L\big(S_\lambda(\mathcal{I})\big)$ biçiminde gösterilir.

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olması durumunda, $\mathcal{I} - S_\lambda$-yakınsaklık $\lambda$-istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

Tüm $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak, $\mathcal{I} - [V, \lambda]$-toplanabilir ve $\mathcal{I} - S_\lambda$-yakınsak dizilerin sınıfı sırasıyla $S(\mathcal{I})$, $[V, \lambda](\mathcal{I})$ ve $S_\lambda(\mathcal{I})$ ile gösterilecektir.

**Teorem 4.4** $x = (x_k)$ bir dizi ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Delta$ olsun. O zaman

i. $x_k \to L[V, \lambda](\mathcal{I}) \Rightarrow x_k \to L\big(S_\lambda(\mathcal{I})\big)$ ve
$[V, \lambda](\mathcal{I}) \subset S_\lambda(\mathcal{I})$ kapsaması her $\mathcal{I}$ ideali için doğrudur.

ii. $X$ deki tüm sınırlı dizilerinin uzayı $m(X)$ olmak üzere,
eğer $(x_k) \in m(X)$ ve $x_k \to L(S_\lambda(\mathcal{I}))$ ise, o zaman $x_k \to L[V, \lambda](\mathcal{I})$ dır.

iii. $S_\lambda(\mathcal{I}) \cap m(X) = [V, \lambda](\mathcal{I}) \cap m(X)$ dir.

**İspat:** (i.) $x_k \to L[V, \lambda](\mathcal{I})$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k \in I_n} \|x_k - L\| \geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ \|x_k - L\| \geq \varepsilon}} \|x_k - L\| \geq \varepsilon \cdot \left| \left\{ k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

dır. Bu yüzden verilen bir $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \Rightarrow \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \|x_k - L\| \geq \varepsilon \cdot \delta$$

yani,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \subset \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \|x_k - L\| \geq \varepsilon \cdot \delta \right\}$$

dir. $x_k \to L[V, \lambda](\mathcal{I})$ olduğu için sağ taraftaki küme $\mathcal{I}$ ya aittir ve böylece $x_k \to L\big(S_\lambda(\mathcal{I})\big)$ dır.

$S_\lambda(\mathcal{I}) \subsetneq [V,\lambda](\mathcal{I})$ olduğunu göstermek için sabit bir $A \in \mathcal{I}$ alınsın. $x = (x_k)$ dizisi; $u \in X$ ($\|u\| = 1$) sabit bir eleman ve $\theta$, $X$ in birim (özdeş) elemanı olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} ku & , \quad n - [\sqrt{\lambda_n}] + 1 \le k \le n, \ n \notin A \ \text{ ise}, \\ ku & , \quad n - \lambda_n + 1 \le k \le n, \ n \in A \ \text{ ise}, \\ \theta & , \quad \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman $x \notin m(X)$ ve her $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$ için $n \to \infty$ ve $n \notin A$ iken

$$\frac{1}{\lambda_n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - \theta\| \ge \varepsilon\big\}\Big| = \frac{[\sqrt{\lambda_n}]}{\lambda_n} \to 0$$

olduğundan, her $\delta > 0$ ve bazı $m \in \mathbb{N}$ ler için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - \theta\| \ge \varepsilon\big\}\Big| \ge \delta\right\} \subset A \cup \{1, 2, ..., m\}$$

dır. $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan $x_k \to \theta\big(S_\lambda(\mathcal{I})\big)$ dır. Açıkca $n \to \infty$ iken

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k \in I_n} \|x_k - \theta\| \to \infty$$

yani, $x_k \not\to \theta[V,\lambda](\mathcal{I})$ dır.

Burada eğer $A \in \mathcal{I}$ sonsuz ise, o zaman $x_k \not\to \theta(S_\lambda)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu örnek aynı zamanda $\mathcal{I} - \lambda$-istatistiksel yakınsaklığın $\lambda$-istatistiksel yakınsaklıktan daha genel olduğunu gösterir.

(ii.) $(x_k) \in m(X)$ ve $x_k \to L\big(S_\lambda(\mathcal{I})\big)$ olsun. $(x_k) \in m(X)$ olduğundan her $k$ için $\|x_k - L\| \le M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Böylece verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k \in I_n} \|x_k - L\| &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k \in I_n \\ \|x_k - L\| \ge \varepsilon}} \|x_k - L\| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k \in I_n \\ \|x_k - L\| < \varepsilon}} \|x_k - L\| \\ &\le \frac{M}{\lambda_n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \ge \varepsilon\big\}\Big| + \varepsilon \end{aligned}$$

dır. Burada, $x_k \to L\big(S_\lambda(\mathcal{I})\big)$ olduğu için

$$A(\varepsilon) := \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \ge \varepsilon\big\}\Big| \ge \frac{\varepsilon}{M}\right\} \in \mathcal{I}$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Eğer $n \in \big(A(\varepsilon)\big)^c$ ise, o zaman

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\|x_k - L\| < 2\varepsilon$$

dur. Böylece

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\|x_k - L\| \geq 2\varepsilon\right\} \subset A(\varepsilon)$$

dur ve bu yüzden sol taraftaki küme de $\mathcal{I}$ ya aittir ki bu da $x_k \to L[V,\lambda](\mathcal{I})$ olduğunu gösterir.

(iii.) $(i)$ ve $(ii)$ den elde edilir.

**Teorem 4.5**

i. Eğer $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n} > 0$ ise, o zaman $S(\mathcal{I}) \subset S_\lambda(\mathcal{I})$ dır.

ii. Eğer $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n} = 0$ ve $\mathcal{I}$-kuvvetli ($\exists n_j$ alt dizisi vardır öyle ki $\forall j$ için $\frac{\lambda_{n_j}}{n_j} < \frac{1}{j}$ ve $\{n_j : j \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{I}$) ise, o zaman $S(\mathcal{I}) \subsetneqq S_\lambda(\mathcal{I})$ dır.

**İspat:** (i.) Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| &\geq \frac{1}{n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\ &= \frac{\lambda_n}{n}\frac{1}{\lambda_n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big|\end{aligned}$$

dır. Eğer $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n} = a$ ise, o zaman $\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{\lambda_n}{n} < \frac{a}{2}\right\}$ sonludur. Böylece, $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}&\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \delta\right\} \\ &\qquad \subset \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \frac{a}{2}\,\delta\right\} \cup \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{\lambda_n}{n} < \frac{a}{2}\right\}\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğu için, sağ taraftaki küme $\mathcal{I}$ ya aittir ve bu da $(i)$ nin ispatını tamamlar.

(ii.) Bir $(x_i)$ dizisi; $u \in X$ $(\|u\| = 1)$ sabit bir eleman ve $\theta$, $X$ in birim (özdeş) sıfır elemanı olmak üzere

$$x_i = \begin{cases} u & , \quad i \in I_{n(j)} \quad (j = 1, 2, ...), \\ \theta & , \quad \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman $(x_i)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır ve bu yüzden ($\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan) $(x_i) \in S(\mathcal{I})$ dır. Fakat $(x_i) \notin [V, \lambda](\mathcal{I})$ dır ve böylece Teorem 4.4 ün $(ii)$ şıkkından dolayı $x \notin S_\lambda(\mathcal{I})$ dır.

**Teorem 4.6** Eğer $\lim_n \frac{\lambda_n}{n} = 1$ olacak şekilde $\lambda \in \Delta$ ise, o zaman $S_\lambda(\mathcal{I}) \subset S(\mathcal{I})$ dır.

**İspat:** $\delta > 0$ verilsin. $\lim_n \frac{\lambda_n}{n} = 1$ olduğu için, tüm $n \geq m$ için $\left|\frac{\lambda_n}{n} - 1\right| < \frac{\delta}{2}$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. Şimdi $\varepsilon > 0$ ve tüm $n \geq m$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| &= \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n - \lambda_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\ &\quad + \frac{1}{n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\ &\leq \frac{n - \lambda_n}{n} + \frac{1}{n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\ &\leq 1 - \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) + \frac{1}{n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\ &= \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \end{aligned}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bundan dolayı

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \delta\right\}$$
$$\subset \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\Big|\big\{k \in I_n : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \frac{\delta}{2}\right\} \cup \{1, 2, 3, ..., m\}$$

dir. Eğer $\mathcal{I} - S_\lambda - \lim x = L$ ise, o zaman sağ taraftaki küme $\mathcal{I}$ ya aittir ve bu yüzden sol taraftaki küme de $\mathcal{I}$ ya ait olur. Bu da $x = (x_k)$ dizisinin $L$ ye $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir.

**Teorem 4.7** Eğer $X$ bir Banach uzayı ise, o zaman $S_\lambda(\mathcal{I}) \cap m(X)$ kümesi $m(X)$ in kapalı bir altkümesidir.

**İspat:** $(x^n) \subset S_\lambda(\mathcal{I}) \cap m(X)$ yakınsak bir dizi ve $x^n \to x \in m(X)$ olsun. $x \in S_\lambda(\mathcal{I}) \cap m(X)$ olduğu gösterilmelidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \to L_n\big(S_\lambda(\mathcal{I})\big)$ olsun. Pozitif sayıların monoton azalan ve sıfıra yakınsayan bir $(\varepsilon_n)$ dizisi alınsın. Tüm $j \geq n$ için $\|x - x^j\|_\infty < \dfrac{\varepsilon_n}{4}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunabilir. $0 < \delta < \dfrac{1}{5}$ seçilsin. Şimdi

$$A = \left\{ m \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_m} \left| \left\{ k \in I_m : \|x_k^n - L_n\| \geq \frac{\varepsilon_n}{4} \right\} \right| < \delta \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

ve

$$B = \left\{ m \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_m} \left| \left\{ k \in I_m : \|x_k^{n+1} - L_{n+1}\| \geq \frac{\varepsilon_n}{4} \right\} \right| < \delta \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

dır. $A \cap B \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $\emptyset \notin \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğu için $m \in A \cap B$ seçilebilir. O zaman

$$\frac{1}{\lambda_m} \left| \left\{ k \in I_m : \|x_k^n - L_n\| \geq \frac{\varepsilon_n}{4} \ \ \vee \ \ \|x_k^{n+1} - L_{n+1}\| \geq \frac{\varepsilon_n}{4} \right\} \right| \leq 2\delta < 1$$

dir. $\lambda_m \to \infty$ ve $A \cap B \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ sonsuz olduğu için, yukarıdaki $m$ aslında $\lambda_m > 5$ olacak şekilde seçilebilir. Bundan dolayı

$$\|x_k^n - L_n\| < \frac{\varepsilon_n}{4} \quad \text{ve} \quad \|x_k^{n+1} - L_{n+1}\| < \frac{\varepsilon_n}{4}$$

eşitsizliklerinin her ikisini de aynı anda sağlayan bir $k \in I_m$ var olmalı. Böylece

$$\begin{aligned} \|L_n - L_{n+1}\| &\leq \|L_n - x_k^n\| + \|x_k^n - x_k^{n+1}\| + \|x_k^{n+1} - L_{n+1}\| \\ &\leq \|x_k^n - L_n\| + \|x_k^{n+1} - L_{n+1}\| + \|x - x^n\|_\infty + \|x - x^{n+1}\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon_n}{4} + \frac{\varepsilon_n}{4} + \frac{\varepsilon_n}{4} + \frac{\varepsilon_n}{4} = \varepsilon_n \end{aligned}$$

dir. Bu da $(L_n)$ nin $X$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $n \to \infty$ iken $L_n \to L \in X$ olsun. Şimdi $x \to L\big(S_\lambda(\mathcal{I})\big)$ olduğu ispatlanacak.

$\varepsilon > 0$ ve $\varepsilon_n < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $\|x - x^n\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $\|L_n - L\| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ seçilsin.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_\gamma}\Big|\big\{k \in I_\gamma : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| &\leq \frac{1}{\lambda_\gamma}\Big|\big\{k \in I_\gamma : \|x_k - x_k^n\| + \|x_k^n - L_n\| \\ &\quad +\|L_n - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_\gamma}\left|\left\{k \in I_\gamma : \|x_k^n - L_n\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\end{aligned}$$

olduğundan verilen her $\delta > 0$ için

$$\left\{\gamma \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_\gamma}\Big|\big\{k \in I_\gamma : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \delta\right\}$$

$$\subset \left\{\gamma \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_\gamma}\left|\left\{k \in I_\gamma : \|x_k^n - L\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \geq \delta\right\}$$

dır. Bu da $x \to L\big(S_\lambda(\mathcal{I})\big)$ olduğunu gösterir.

# 5 $\alpha$. MERTEBEDEN $\mathcal{I}$-İSTATİSTİKSEL VE $\mathcal{I}$-LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, Das ve Savaş (2014) tarafından "$\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık" ve "$\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık" kavramları ile ilgili yapılan çalışmadaki temel tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

**Tanım 5.1** $x = (x_k)$ bir dizi olsun. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x$ dizisi $L$ ye $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaktır veya $S(\mathcal{I})^\alpha$-yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \to L\big(S(\mathcal{I})^\alpha\big)$ biçiminde gösterilir.

Tüm $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S(\mathcal{I})^\alpha$ ile gösterilecektir.

**Uyarı 5.2** $S(\mathcal{I})^\alpha$-yakınsaklık kavramı;

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olması durumunda, Bhunia vd. (2012) ve Çolak (2010) tarafından verilen $\alpha$. mertebeden istatistiksel yakınsaklık ile çakışır,

Keyfi bir $\mathcal{I}$ ideali ve $\alpha = 1$ için, Das vd. (2011) tarafından verilen $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ile çakışır,

$\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ ve $\alpha = 1$ olması durumunda, istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

**Örnek 5.3** $\mathcal{I} = \mathcal{I}_d$ olarak alınsın. $(\lambda_n)$ dizisi; $1 \leq n < 10$ için $\lambda_n = 1$ ve her $n \geq 10$ için $\lambda_n = n - 10$ olarak tanımlansın. Ayrıca $A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ...\}$ olsun.

$x = (x_k)$ dizisi;

$$x_k = \begin{cases} k & , \quad n - [\sqrt{\lambda_n^\alpha}] + 1 \leq k \leq n, \; n \notin A \text{ ise} \\ k & , \quad n - \lambda_n + 1 \leq k \leq n, \; n \in A \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

Bu $x$ dizisi, $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak olan fakat $\alpha$. mertebeden istatistiksel yakınsak olmayan diziye bir örnektir.

**Tanım 5.4** $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^{\alpha}} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x$ dizisi $L$ ye $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaktır veya $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$-yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha\big)$ biçiminde gösterilir.

Tüm $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ ile gösterilecektir.

**Uyarı 5.5** $\alpha = 1$ olması durumunda, $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık Das vd. (2011) tarafından verilen $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

**Teorem 5.6** $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda $S(\mathcal{I})^\alpha \subset S(\mathcal{I})^\beta$ dır ve bu kapsama, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olmak üzere bir $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha < \frac{1}{k} < \beta$ şartını sağlayan $\exists\alpha, \exists\beta$ için kesindir.

**İspat:** $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. O zaman

$$\frac{\left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^\beta} \leq \frac{\left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^\alpha}$$

dır ve bu yüzden her $\delta > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{\left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^\beta} \geq \delta \right\} \subset \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{\left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^\alpha} \geq \delta \right\}$$

dır. O halde, yukarıdaki kapsam ifadesinin sağ tarafı $\mathcal{I}$ ya ait ise sol tarafının da $\mathcal{I}$ ya ait olduğu açıktır. Bu ise $S(\mathcal{I})^\alpha \subset S(\mathcal{I})^\beta$ olduğunu gösterir.

Teoremde bahsedilen $\exists\alpha, \exists\beta$ ile ilgili olarak kapsamanın kesin olduğunu göstermek için, $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_n = \begin{cases} 1 \ , & n = j^k \ \text{ ise,} \\ 0 \ , & n \neq j^k \ \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $(x_n)$ dizisi gözönüne alınsın. O zaman, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olmak üzere $S(\mathcal{I})^\beta - \lim x_n = 0$, yani $x \in S(\mathcal{I})^\beta$ fakat $x \notin S(\mathcal{I})^\alpha$ dır.

**Sonuç 5.7** Bazı $0 < \alpha \leq 1$ için bir dizi $L$ ye $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak ise, o zaman bu dizi $L$ ye $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaktır, yani $S(\mathcal{I})^\alpha \subset S(\mathcal{I})$ dır.

**Teorem 5.8** $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. O zaman

i. $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \subset S_\theta(\mathcal{I})^\beta$ dır,

ii. Özellikle $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \subset S_\theta(\mathcal{I})$ dır

ve bu kapsama $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olmak üzere, bir $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha < \frac{1}{k} < \beta$ şartını sağlayan $\exists\alpha, \exists\beta$ için kesindir.

$S(\mathcal{I})^\alpha$ ve $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ nın her ikisi de tüm reel diziler uzayı $s$ nin lineer altuzayıdır. Aşağıdaki iki teorem bu uzayların topolojik bir karakterizasyonunu verir. Her iki-si için de ispatlar benzer olduğundan, burada sadece $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ için detaylı bir ispat verilmiştir.

**Teorem 5.9** $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \cap \ell_\infty$, $\ell_\infty$ un kapalı bir altkümesidir.

**İspat:** $0 < \alpha \leq 1$ ve $(x^n) \subseteq S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \cap \ell_\infty$ dizisi $x \in \ell_\infty$ a yakınsak olsun. $x \in S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \cap \ell_\infty$ olduğu gösterilmelidir. Teorem 5.8 in $(ii)$ şıkkından dolayı $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \subset S_\theta(\mathcal{I})$ ve $S_\theta(\mathcal{I}) \cap \ell_\infty$, $\ell_\infty$ da kapalı (bkz. Theorem 1, Das *et al.* 2011) olduğu için $x \in S_\theta(\mathcal{I}) \cap \ell_\infty$ dur. Yine, tüm $n = 1, 2, 3, ...$ için $x^n \in S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \subset S_\theta(\mathcal{I})$ olduğundan, $x^n$ dizisi $n = 1, 2, 3, ...$ için bir $L_n$ sayısına $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaktır. Öncelikle $(L_n)$ dizisinin bir $L$ sayısına yakınsadığı ve $x = (x_k)$ dizisinin $L$ ye $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsak olduğu gösterilecektir. Pozitif sayıların monoton azalan ve 0 a yakınsak bir $(\varepsilon_n)$ dizisi alınsın. $\|x - x^n\|_\infty < \dfrac{\varepsilon_n}{4}$ olacak şekilde pozitif bir $n$ tamsayısı seçilsin. $0 < \delta < 1$ olsun. O zaman

$$A = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k^n - L_n| \geq \frac{\varepsilon_n}{4} \right\} \right| < \frac{\delta}{3} \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

ve

$$B = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k^{n+1} - L_{n+1}| \geq \frac{\varepsilon_{n+1}}{4} \right\} \right| < \frac{\delta}{3} \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

dır. $A \cap B \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $\emptyset \notin \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğu için $r \in A \cap B$ seçilebilir.

O zaman

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:|x_k^n-L_n|\geq\frac{\varepsilon_n}{4}\right\}\right|<\frac{\delta}{3}$$

ve

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:|x_k^{n+1}-L_{n+1}|\geq\frac{\varepsilon_{n+1}}{4}\right\}\right|<\frac{\delta}{3}$$

ve bu yüzden

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:|x_k^n-L_n|\geq\frac{\varepsilon_n}{4}\quad\vee\quad|x_k^{n+1}-L_{n+1}|\geq\frac{\varepsilon_{n+1}}{4}\right\}\right|<\delta<1$$

dır. Dolayısıyla $|x_k^n-L_n|<\frac{\varepsilon_n}{4}$ ve $|x_k^{n+1}-L_{n+1}|<\frac{\varepsilon_{n+1}}{4}$ olacak şekilde bir $k\in I_r$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned}|L_n-L_{n+1}| &\leq |L_n-x_k^n|+|x_k^n-x_k^{n+1}|+|x_k^{n+1}-L_{n+1}|\\ &\leq |x_k^n-L_n|+|x_k^{n+1}-L_{n+1}|+\|x-x^n\|_\infty+\|x-x^{n+1}\|_\infty\\ &\leq \frac{\varepsilon_n}{4}+\frac{\varepsilon_{n+1}}{4}+\frac{\varepsilon_n}{4}+\frac{\varepsilon_{n+1}}{4}\leq\varepsilon_n\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise $(L_n)$ in $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir ve bu yüzden $n\to\infty$ iken $L_n\to L$ olacak şekilde bir $L\in\mathbb{R}$ vardır. Şimdi $x\to L\big(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha\big)$ olduğu gösterilmelidir. Her $\varepsilon>0$ için $\varepsilon_n<\dfrac{\varepsilon}{4}$, $\|x-x^n\|_\infty<\dfrac{\varepsilon}{4}$, $|L_n-L|<\dfrac{\varepsilon}{4}$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ seçilsin. O zaman

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r:|x_k-L|\geq\varepsilon\right\}\right| &\leq \frac{1}{h_r^\alpha}\Big|\Big\{k\in I_r:|x_k^n-L_n|+\|x_k-x_k^n\|_\infty\\ &\qquad +|L_n-L|\geq\varepsilon\Big\}\Big|\\ &\leq \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r:|x_k^n-L_n|+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\geq\varepsilon\right\}\right|\\ &\leq \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r:|x_k^n-L_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\end{aligned}$$

dir. Bu ise

$$\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r:|x_k-L|\geq\varepsilon\right\}\right|<\delta\right\}$$

$$\supseteq\left\{r\in\mathbb{N}:\frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k\in I_r:|x_k^n-L_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|<\delta\right\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$$

olduğunu gösterir.

Böylece

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| < \delta\right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

ve bu yüzden

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

dır. Bu ise $x \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha\big)$ oluğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 5.10** $S(I)^\alpha \cap \ell_\infty$, $\ell_\infty$ un kapalı bir altkümesidir.

**Uyarı 5.11** $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olarak alınırsa, Teorem 3 (bkz. Bhunia *et al.* 2012) Teorem 5.10 un özel bir durumudur. Benzer şekilde $\alpha = 1$ olarak alınırsa, Teorem 1 (bkz. Das *et al.* 2011) Teorem 5.9 un özel bir durumudur.

**Tanım 5.12** $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}$$

oluyorsa, $x$ dizisi $L$ ye $N_\theta(\mathcal{I})^\alpha$-yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \to L\big(N_\theta(\mathcal{I})^\alpha\big)$ biçiminde gösterilir.

Tüm $N_\theta(\mathcal{I})^\alpha$-yakınsak dizilerin sınıfı $N_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ ile gösterilecektir.

**Teorem 5.13** $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. O zaman

i. $x_k \to L\big(N_\theta(\mathcal{I})^\alpha\big) \Rightarrow x_k \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha\big)$,

ii. $N_\theta(\mathcal{I})^\alpha$, $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ nın özalt kümesidir.

**İspat:** (i.) Verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon\big|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\big|$$

yazılabilir ve bu yüzden

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot h_r^\alpha}\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \frac{1}{h_r^\alpha}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big|$$

dur.

O zaman her $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{k \in \mathcal{I}_r} |x_k - L| \geq \varepsilon \cdot \delta\right\}$$

dır. Eğer $x_k \to L\big(N_\theta(\mathcal{I})^\alpha\big)$ ise, yukarıdaki kapsam ifadesinin sağ tarafı $\mathcal{I}$ idealine aittir. Dolayısıyla

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

olup ispat tamamlanır.

(ii.) $N_\theta(\mathcal{I})^\alpha \subseteq S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ kapsamasının doğru olduğunu göstermek için; $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun ve $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = 1, 2, ..., [\sqrt{h_r^\alpha}], 0, 0, ... \qquad (r = 1, 2, 3, ...)$$

biçiminde tanımlansın. O zaman, her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \frac{[\sqrt{h_r^\alpha}]}{h_r^\alpha}$$

ve böylece her $\delta > 0$ için

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{[\sqrt{h_r^\alpha}]}{h_r^\alpha} \geq \delta\right\}$$

elde edilir. Bu kapsam ifadesinde, sağ tarafındaki küme sonlu ve bu yüzden $\mathcal{I}$ idealine ait olduğu için $x_k \to 0\big(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha\big)$ sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{1}{h_r^\alpha} \cdot \frac{[\sqrt{h_r^\alpha}]([\sqrt{h_r^\alpha}] + 1)}{2}$$

dir. O zaman $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan, $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ya ait bazı $m \in \mathbb{N}$ ler için

$$\begin{aligned}\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{k \in I_r} |x_k - 0| \geq \frac{1}{4}\right\} &= \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{[\sqrt{h_r^\alpha}]([\sqrt{h_r^\alpha}] + 1)}{h_r^\alpha} \geq \frac{1}{2}\right\} \\ &= \{m, m+1, m+2, ...\}\end{aligned}$$

dir. Buradan $x_k \not\to 0\big(N_\theta(\mathcal{I})^\alpha\big)$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ve $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiler incelenecektir.

**Teorem 5.14** Her $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi için, eğer $\liminf_r q_r^\alpha > 1$ ise, $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklığı gerektirir.

**İspat:** $\liminf_r q_r^\alpha > 1$ olsun. O zaman, yeterince büyük $r$ için $q_r^\alpha \geq 1+\sigma$ olacak şekilde $\sigma > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\frac{h_r^\alpha}{k_r^\alpha} \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük $r$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_r^\alpha}\Big|\big\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| &\geq \frac{1}{k_r^\alpha}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\ &\geq \frac{\sigma}{1+\sigma}.\frac{1}{h_r^\alpha}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big|\end{aligned}$$

dır. O zaman her $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}&\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^\alpha}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \delta\right\} \\ &\qquad\subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{k_r^\alpha}\Big|\big\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \frac{\delta\sigma}{(1+\sigma)}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu kapsama bağıntısından ise

$$x_k \to L\big(S(\mathcal{I})^\alpha\big) \Rightarrow x_k \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha\big)$$

olduğu anlaşılır.

Aşağıdaki iki teoremde, $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizinin her $C \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi için $\bigcup\left\{n : k_{r-1} < n < k_r, r \in C\right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ şartını sağladığı kabul edilecektir.

**Teorem 5.15** Yukarıdaki şartı sağlayan $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi için eğer $\limsup_r q_r < \infty$ ise, o zaman $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklığı gerektirir.

**İspat:** Eğer $\limsup_r q_r < \infty$ ise, o zaman genelliği bozmadan, tüm $r \geq 1$ için $q_r < B$ olacak şekilde bir $0 < B < \infty$ var olduğu kabul edilebilir. $\varepsilon$, $\delta$, $\delta_1 > 0$ için

$$C = \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| < \delta\right\}$$

ve

$$T=\left\{n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}\Big|\big\{k\leq n:|x_k-L|\geq\varepsilon\big\}\Big|<\delta_1\right\}$$

kümeleri tanımlansın. Eğer $x_k\to L\big(S_\theta(\mathcal{I})\big)$ ise, o zaman $C\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğu açıktır. Ayrıca burada tüm $j\in C$ ler için

$$A_j=\frac{1}{h_j}\Big|\big\{k\in I_j:|x_k-L|\geq\varepsilon\big\}\Big|<\delta$$

olduğu görülür. Bazı $r\in C$ ler için $k_{r-1}<n<k_r$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\Big|\big\{k\leq n:|x_k-L|\geq\varepsilon\big\}\Big| &\leq \frac{1}{k_{r-1}}\Big|\big\{k\leq k_r:|x_k-L|\geq\varepsilon\big\}\Big|\\
&= \frac{1}{k_{r-1}}\Big|\big\{k\in I_1:|x_k-L|\geq\varepsilon\big\}\Big|\\
&\quad +...+\frac{1}{k_{r-1}}\Big|\big\{k\in I_r:|x_k-L|\geq\varepsilon\big\}\Big|\\
&= \frac{k_1}{k_{r-1}}\frac{1}{h_1}\Big|\big\{k\in I_1:|x_k-L|\geq\varepsilon\big\}\Big|\\
&\quad +\frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}\frac{1}{h_2}\Big|\big\{k\in I_2:|x_k-L|\geq\varepsilon\big\}\Big|\\
&\quad +...+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}\frac{1}{h_r}\Big|\big\{k\in I_r:|x_k-L|\geq\varepsilon\big\}\Big|\\
&= \frac{k_1}{k_{r-1}}A_1+\frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}A_2+...+\frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}A_r\\
&\leq \sup_{j\in C}A_j\cdot\frac{k_r}{k_{r-1}}\\
&< B\delta
\end{aligned}$$

dır. Burada $\delta_1=\frac{\delta}{B}$ seçilir ve böylece $C\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ olmak üzere

$$\bigcup\left\{n:k_{r-1}<n<k_r,r\in C\right\}\subset T$$

olduğu gerçeği göz önüne alınırsa, $\theta=\{k_r\}$ lacunary dizi üzerindeki şarttan dolayı $T$ kümesinin aynı zamanda $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ya ait olduğu anlaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 5.16** $0 < \alpha < 1$ olsun. Yukarıdaki şartı sağlayan $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi için eğer

$$\sup_r \sum_{i=0}^{r-1} \frac{h_{i+1}^{\alpha}}{(k_{r-1})^{\alpha}} = B < \infty$$

ise, o zaman $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık $\alpha$. mertebeden $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklığı gerektirir.

**İspat:** $\varepsilon$, $\delta$, $\delta_1 > 0$ için

$$C = \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_r^{\alpha}} \Big| \big\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| < \delta \right\}$$

ve

$$T = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^{\alpha}} \Big| \big\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| < \delta_1 \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Eğer $x_k \to L\big(S_\theta(\mathcal{I})^{\alpha}\big)$ ise, o zaman $C \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğu açıktır. Ayrıca burada tüm $j \in C$ ler için

$$A_j = \frac{1}{h_j^{\alpha}} \Big| \big\{ k \in I_j : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| < \delta$$

olduğu görülür. Bazı $r \in C$ ler için $k_{r-1} < n < k_r$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{\alpha}} \Big| \big\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| &\leq \frac{1}{k_{r-1}^{\alpha}} \Big| \big\{ k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}^{\alpha}} \Big| \big\{ k \in I_1 : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| \\
&\quad +\ldots+ \frac{1}{k_{r-1}^{\alpha}} \Big| \big\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| \\
&= \frac{k_1^{\alpha}}{k_{r-1}^{\alpha}} \frac{1}{h_1^{\alpha}} \Big| \big\{ k \in I_1 : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| \\
&\quad + \frac{(k_2 - k_1)^{\alpha}}{k_{r-1}^{\alpha}} \frac{1}{h_2^{\alpha}} \Big| \big\{ k \in I_2 : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| \\
&\quad +\ldots+ \frac{(k_r - k_{r-1})^{\alpha}}{k_{r-1}^{\alpha}} \frac{1}{h_r^{\alpha}} \Big| \big\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k_1^\alpha}{k_{r-1}^\alpha}A_1 + \frac{(k_2-k_1)^\alpha}{k_{r-1}^\alpha}A_2 + ... + \frac{(k_r-k_{r-1})^\alpha}{k_{r-1}^\alpha}A_r \\
&\leq \sup_{j\in C} A_j \cdot \sup_r \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(k_{i+1}-k_i)^\alpha}{k_{r-1}^\alpha} \\
&< B\delta
\end{aligned}
$$

dır. Burada $\delta_1 = \frac{\delta}{B}$ seçilir ve böylece $C \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olmak üzere

$$\bigcup \left\{ n : k_{r-1} < n < k_r, r \in C \right\} \subset T$$

olduğu gerçeği göz önüne alınırsa, $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi üzerindeki şarttan dolayı $T$ kümesinin aynı zamanda $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ya ait olduğu anlaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

# 6 KAYNAKLAR


Balcı, M. (2010). Matematik Analiz - 1. Balcı Yayınları, Ankara.

Bayraktar, M. (2006). Fonksiyonel Analiz. Gazi Kitabevi, Ankara.

Bhunia, S., Das, P. and Pal, S. (2012). Restricting statistical convergence. *Acta Mathematica Hungarica*, **134**(1-2)**:** 153-161.

Çolak, R. (2010). Statistical convergence of order $\alpha$. In: Modern Methods in Analysis and its Applications, Anamaya Publishers, New Delhi.

Çolak, R. and Bektaş, Ç. A. (2011). $\lambda$-statistical convergence of order $\alpha$. *Acta Mathematica Scientia*, **31**(3)**:** 953-959.

Das, P. and Ghosal, S. (2010). Some further results on $\mathcal{I}$-Cauchy sequences and condition (AP). *Computers & Mathematics with Applications*, **59**(8)**:** 2597-2600.

Das, P. and Savaş, E. (2014). On $\mathcal{I}$-statistical and $\mathcal{I}$-lacunary statistical convergence of order $\alpha$. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **40**(2)**:** 459-472.

Das, P., Savaş, E. and Ghosal, S. (2011) On generalizations of certain summability methods using ideal. *Applied Mathematics Letters*, **24**(9)**:** 1509-1514.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2:** 241–244.

Freedman, A. R. and Sember, J. J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, **95**(2)**:** 293-305.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5**(4)**:** 301-313.

Fridy, J. A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, **160**(1)**:** 43-51.

Kolk, E. (1991). The statistical convergence in Banach spaces. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, **928:** 41-52.

Kostyrko, P., Šalát, T. and Wilczyński, W. (2000). $\mathcal{I}$-convergence. *Real Analysis Exchange*, **26**(2)**:** 669-686.

Kostyrko, P., Mačaj, M., Šalát, T. and Sleziak, M. (2005). $\mathcal{I}$-convergence and extremal $\mathcal{I}$-limit points. *Mathematica Slovaca*, **55:** 443–464.

Leinder, L. (1965). Über die de la Vallée-Pousnsche Summierbarkeit allge meiner orthogonalreihen. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, **16:** 375-387.

Li, J. (2000). Lacunary statistical convergence and inclusion properties between lacunary methods. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **23**(3)**:** 175-180.

Maddox, I. J. (1978). A new type of convergence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **83**(1)**:** 61-64.

Mursaleen, M. (2000). $\lambda$-statistical convergence. *Mathematica Slovaca*, **50:** 111-115.

Niven, I., Herbert S. Z. and Hugh L. M. (2008). An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons, New York.

Savaş, E. (2002). Some sequence spaces and statistical convergence. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **29**(5)**:** 303-306.

Savaş E. and Das, P. (2011). A generalized statistical convergence via ideals. *Applied Mathematics Letters*, **24**(6)**:** 826-830.

Savaş, E. and Karakaya, V. (2007). Some new sequence spaces defined by lacunary sequences. *Mathematica Slovaca*, **57**(4)**:** 393-399.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *The American Mathematical Monthly*, **66:** 361–375.

Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*, **30**(2)**:** 139–150.

**ÖZGEÇMİŞ**

| | | |
|---|---|---|
| Adı Soyadı | : | Zeliha DENİZ |
| Doğum Yeri ve Tarihi | : | Uşak, 01/03/1992 |
| Yabancı Dili | : | İngilizce |
| İletişim (Tel/e-posta) | : | zelisdeniz-64@hotmail.com |

## Eğitim Durumu

| | | |
|---|---|---|
| Lise | : | Sait Sabri Ağaoğlu Lisesi, 2010 |
| Lisans | : | Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2014 |