3-BOYUTLU YARI-SİMETRİK VE PSÖDO-SİMETRİK HEMEN HEMEN ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra TAŞ (ULUKAVAK)

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2019

Bu tez çalışması 16.FEN.BİL.16 numaralı proje ile Afyon Kocatepe Üniversitesi
Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU YARI-SİMETRİK VE PSÖDO-SİMETRİK HEMEN HEMEN ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Esra TAŞ (ULUKAVAK)

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2019

TEZ ONAY SAYFASI

Esra TAŞ (ULUKAVAK) tarafından hazırlanan "3-Boyutlu Yarı-Simetrik ve Pseudo-Simetrik Hemen Hemen Alfa-Kosimplektik Manifoldlar" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 28/02/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Hakan ÖZTÜRK

Başkan : Doç. Dr. Yasin ÜNLÜTÜRK
Kırklareli Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Afyon Meslek Yüksekokulu

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Afyon Meslek Yüksekokulu

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

28/02/2019

Esra TAŞ (ULUKAVAK)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

3-BOYUTLU YARI-SİMETRİK VE
PSÖDO-SİMETRİK HEMEN HEMEN
ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Esra TAŞ (ULUKAVAK)

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hakan ÖZTÜRK

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisine adanmıştır. İkinci bölümde, gerekli temel tanımlar ve kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, hemen hemen alfa-kosimplektik manifold yapısı tanıtılmış ve bir örnekle açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, belli bazı yarı-simetrik hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldları ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Beşinci bölümde, belli bazı üç boyutlu psödo-simetrik alfa-Kenmotsu manifoldları ayrıntılı bir şekilde ele alınmış ve bazı sonuçlar verilmiştir.

2019, v + 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen alfa-kosimplektik manifold, Hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold, Alfa-Kenmotsu manifold, Yarı-Simetri, Psödo-Simetri.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

THREE DIMENSIONAL SEMI-SYMMETRIC
AND PSEUDO-SYMMETRIC
ALMOST ALPHA-COSYMPLECTIC MANIFOLDS

Esra TAŞ (ULUKAVAK)
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Hakan ÖZTÜRK

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a general knowledge of literature. In the second chapter, the necessary basic concepts and definitions are presented. In the third chapter, the structure of almost alpha-cosymplectic manifold is introduced and explained with an example. In the fourth chapter, some results related to some certain semi-symmetric almost alpha-cosymplectic manifolds are obtained. In the fifth chapter, three dimensional pseudo-symmetric alpha-Kenmotsu manifolds are addressed in detail and some results are given.

2019, v + 46 pages

Keywords: Almost alpha-cosymplectic manifold, Almost alpha-Kenmotsu manifold, Alpha-Kenmotsu manifold, Semi-Symmetry, Pseudo-Symmetry.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hakan ÖZTÜRK'e teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca 16.FEN.BİL.16 numaralı proje ile desteğini esirgemeyen Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederim.

Son olarak, bu tez çalışması boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Esra TAŞ (ULUKAVAK)
AFYONKARAHİSAR, 2019

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
R	Riemann eğrilik tensör alanı
D	Değme dağılımı
S	Ricci eğrilik tensör alanı
Q	Ricci operatörü
N	Nijenhuis tensör alanı
∇	Levi-Civita konneksiyonu
$\chi(M)$	M üzerindeki C^{∞} vektör alanları uzayı
U(n)	Üniter grup
div	Diverjans operatörü
TM	M üzerindeki tanjant demeti
$TM^{\perp}$	M üzerindeki tanjant demetinin ortogonal tümleyeni
O(s)	Ortogonal grup
R_{η} (M)	M üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların bir alt halkası
F	Hemen hemen kompleks yapı
c	Konformal eğrilik tensörünün diverjansı
P	Projektif eğrilik tensör alanı
C	Weyl konformal eğrilik tensör alanı
$\bar{C}$	Konsirküler eğrilik tensör alanı
r	Manifoldun skalar eğriliği

1 GİRİŞ

Bir uzayın geometrisi esas olarak o uzayın eğriliğine bağlıdır. Bir uzay için en önemli geometrik özelliklerden birisi simetridir. Bir manifoldun simetrisi ile ilgili çalışmalar Cartan (1926) ile başlamıştır. Bundan sonra Cartan tarafından ortaya konulan bu notasyon birçok yazar tarafından farklı yöntemlerle belli bazı eğrilik kısıtlamalarına gidilerek biraz daha zayıflatılmış haliyle ele alınmıştır. Cartan ilk defa Riemann manifoldları için tam açık bağlantılı lokal simetrik uzayları sınıflandırmıştır. Bu sınıflandırmanın bir benzeri Riemann olmayan manifoldlar için Cahen ve Parker (1970) tarafından yapılmıştır. Ayrıca, Walker (1950) rekürent manifoldlar üzerinde Cartan'ın tanımını daha zayıf simetriler için ele almıştır. Benzer olarak, Dubey (1979) genelleştirilmiş rekürent manifoldları ve bundan başka, Shaikh ve Roy (2010) kuasi-genelleştirilmiş rekürent manifoldları çalıştılar. Literatürdeki yarı-simetri kavramı için ilk tanımlama $R \cdot R = 0$ denklemiyle ilk kez Nomizu tarafından verilmiştir (Nomizu 1968). Cartan notasyonuna göre Nomizu'nun tanımlamasından sonra yarı-simetrik manifoldlar Riemann anlamında Szabó tarafından sınıflandırılmıştır (Szabó 1982). Bu tanımlardaki yarı-simetri kavramının esası yarı-simetrik manifold kavramından gelmektedir. Bir Riemann M^n manifoldu üzerinde R^{n+1} Öklid uzayının tam bağlantılı bir yarı-simetrik hiperyüzeyi ($n > 3$) yani, $R \cdot R = 0$ ise M^n manifoldu lokal simetriktir. Başka bir ifadeyle, $\nabla R = 0$ denklemini sağlar. Bu çalışmalar manifold sınıflandırmalarında lokal simetriyi ve yarı-simetriyi çok önemli hale getirmiştir.

Yarı-simetrinin bir genelleştirmesi olarak psödo-simetrik kavramını ilk olarak Chaki ve daha sonra Deszcz ortaya koymuştur. Şu an literatürde bu iki farklı psödo-simetrik kavramı mevcuttur (Chaki 1987, Deszcz 1992). Bilindiği üzere bir (M, g) Riemann manifoldu $R \cdot R = 0$ denklemini sağlıyorsa yarı-simetrik manifold olarak adlandırılır. Burada R, Riemann eğrilik tensörü ve $R \cdot R$ ise R ye göre R Riemann eğrilik tensörünün türevidir. Lokal simetrik uzaylar yarı-simetrik uzaylardır. Yani lokal simetriklik yarı-simetrikliği kapsamaktadır. Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir. Yani, yarı-simetrik uzay lokal simetrik bir uzay olmak zorunda değildir.

Bir (M, g) Riemann manifoldu M üzerinde keyfi vektör alanları X ve Y olmak üzere, eğer $R(X,Y)\cdot R = L\{(X\wedge Y)\cdot R\}$ olacak şekilde bir L fonksiyonu mevcutsa bir psödo-simetrik manifold olarak adlandırılır. Burada $(X\wedge Y)$

$$(X\wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(Z,X)Y$$

şeklinde tanımlı bir endomorfizm tensör alanıdır (Deszcz 1992). Eğer M manifoldu yarı-simetrik değilse (M,g) psödo-simetrik uzayı tam psödo-simetrik uzay olarak adlandırılır. Özellikle, eğer L fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise uzaya sabit tipli bir psödo-simetrik uzay denir. Yarı-simetrik uzaylar $L=0$ ile verilen sabit tipli psödo-simetrik uzaylardır. Üç boyutlu sabit tipli psödo-simetrik uzaylar Kowalski ve Sekizawa (1997) tarafından ele alınmıştır. Ayrıca, sabit tipli konformal flat psödo-simetrik manifoldlar Hashimoto ve Sekizawa (2000) tarafından sınıflandırılmıştır. Üç boyutlu bir Riemann manifoldu için Riemann eğrilik formülü Ricci eğriliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= S(Y,Z)X - S(Z,X)Y + g(Y,Z)QX \\ &\quad -g(Z,X)QY - \tfrac{r}{2}(X\wedge Y)Z \end{aligned}$$

şeklinde belirlenir. Burada S Ricci tensörü, Q Ricci operatörü ve r skalar eğriliktir. Bu temel formül üç boyutlu Riemann geometrisinde kesit eğriliğinin değişmezliğinin Einstein koşuluna denk olduğunu göstermektedir. Yani, Ricci tensörünün $\{\sigma_j\}$ özdeğerleri için $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ dır. Bundan başka, psödo-simetri de bu koşula denktir; üç boyutlu uzayda Ricci tensörünün $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ özdeğerleri $\sigma_1=\sigma_2$ eşitliğini sağlar. Böylece üç boyut için psödo-simetri sabit eğrilik özelliğinin bir doğal genelleştirmesidir.

Şimdi, Chaki (1987) tarafından tanımlanan psödo-simetrik manifold kavramını verelim. (M^n,g) $(n\geq 2)$ flat olmayan bir Riemann manifoldu her X vektör alanı için

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y,Z)W &= 2A(X)R(Y,Z)W + A(Y)R(X,Z)W \\ &\quad +A(Z)R(Y,X)W + A(W)R(Y,Z)X \\ &\quad +g(R(Y,Z)W,X)\rho \end{aligned}$$

şeklinde bir R eğrilik tensörüne sahipse bu tür manifoldlara psödo-simetrik manifoldlar denir. Burada A, $g(X,\rho)=A(X)$ ile verilen sıfır olmayan bir 1-form ve ∇, g metriğine göre kovaryant türev operatörüdür. Bu tür manifoldlar $(PS)_n$ ile gösterilirler (Chaki

1987). Benzer olarak, Chaki Ricci tensörü yardımıyla (M^n, g) $(n > 3)$ flat olmayan bir Riemann manifoldu için

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = 2A(X)S(Y,Z) + A(X)S(X,Z) + A(Z)S(Y,X)$$

eşitliğinden psödo-Ricci simetrik manifold tanımını vermiştir. Bu tür manifoldları ise $(PRS)_n$ ile sembolize etmiştir.

Deszcz ve Chaki'nin ortaya koyduğu tanımlamalar farklı olmasına karşın bu iki tanımlama arasındaki ilişkileri inceleyen çok az sayıda çalışma yapılmıştır (Mantica and Molinari 2011). Biz bu tez çalışmasında Deszcz tanımını göz önüne alarak tüm işlem ve hesaplarımızı onun üzerinden yapacağız.

Değme ve hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerinde Deszcz anlamında oldukça fazla çalışma ortaya çıkmıştır (De *et al.* 2015, Cho and Inoguchi 2005). Özellikle çalışmamızda kullanacağımız temel kaynaklardan biri olan Özgür (2006) tarafından yapılan çalışma oldukça önemlidir. Bu çalışmada Kenmotsu manifoldları üzerinde psödo-simetrik koşullar incelenmiştir.

Simetri kavramı sadece geometri de değil fizik alanında da çok değerlidir. Bazı simetri anlamındaki hassasiyetlerin uzaya katılması genel rölativite kuramında çok önemli bir role sahiptir. Bir simetri özelliği olmaksızın küresel simetri, aksi simetri, Einstein alan denklemlerinin çözümü gibi kavramların çözülmesi çok zor hale gelirken, simetri olmadan olanaksız problemlere dönüşürler (Deszcz *et al.* 2004).

Bu çalışmada, lokal simetri, yarı-simetri ve psödo-simetri kavramları dışında belli bazı paralellik koşullarını da üzerinde çalışacağımız manifold üzerinde vereceğiz. Bir M manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon olan ∇ ile verilen bir T tensör alanı, M üzerinde eğriler boyunca paralel yer değiştirmeler altında invaryanttır (Sharpe 1997). Başka bir deyişle, her $a, b \in M$ için T_a değeri (a noktasındaki T tensör alanının değeri) a ve b noktalarıyla birleşen herhangi bir düzgün eğri boyunca b noktasına paralel yer değiştirmeler altında T_b tensör değerine dönüşür. Bir T tensör alanının paralel olması için gerek ve yeter şart herhangi bir keyfi Y vektör alanı doğrultusunda onun kovaryant türevinin özdeş olarak sıfıra eşit olmasıdır. Yani, ∇ konneksiyonuna göre, $\nabla_Y T = 0$ veya

T tensör alanının kovaryant diferensiyelinin sıfır olmasıdır. Levi-Civita konneksiyonu ile verilen bir Riemann manifoldu üzerinde diferensiyel formların paralel alanları özel bir ilgi alanı olmuştur (Blair 2002).

Bu tez çalışmasında ele aldığımız manifold yapısının en temel kaynağı Kenmotsu (1972) tarafından ortaya koyulmuştur. Kenmotsu hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerinde yeni bir karakterizasyon ortaya koyarak bir sınıflandırmaya gitmiştir. Bu yapı yardımıyla kurulan manifold daha sonraları Kenmotsu olarak isimlendirilmiştir (Kenmotsu 1972). Bunları takiben, hemen hemen Kenmotsu yapılar hemen hemen alfa-Kenmotsu yapılara dönüştürülerek bu tür manifoldlar daha da genelleştirilmiştir (Vanhecke 1981).

Son zamanlarda hemen hemen alfa-Kenmotsu ve hemen hemen kosimplektik yapılar birlikte düşünülerek, hemen hemen değme metrik manifoldların bir sınıfı olan hemen hemen alfa-kosimplektik manifold kavramı tanımlanmıştır (Kim and Pak 2005). Bir $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen alfa-kosimplektik yapısı $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\alpha\,(\eta \wedge \Phi)$ eşitlikleriyle birlikte ele alınmıştır. Burada α, herhangi bir reel sayı ve Φ, temel 2-formdur (Kim and Pak 2005). Burada $\alpha = 0$ için manifold hemen hemen kosimplektik, $\alpha \neq 0$ için hemen hemen alfa-Kenmotsu yapısındadır. Ayrıca, $\alpha = 0$ ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere, sırasıyla yapılar normal olduğunda o zaman bu yapılar alfa-kosimplektik ve alfa-Kenmotsu olarak adlandırılırlar. Özel olarak, alfa-kosimplektik yapı için $\alpha = 1$ durumu Kenmotsu ve hemen hemen alfa-kosimplektik yapı için $\alpha = 1$ durumu ise hemen hemen Kenmotsu formundadır.

Riemann geometrisinde, R Riemann eğrilik tensöründen başka önemli tensör alanları vardır. Bunlardan bazıları Weyl konformal eğrilik tensörü C, projektif eğrilik tensörü P ve konsirküler eğrilik tensörü $\overline{C}$ dir (Yano and Kon 1984). Bu nedenle, yazarların çoğu tensör çarpımları manasında bu özel eğrilikleri kullanmışlardır. Bunlara örnek olarak, konformal yarı-simetrik, projektif yarı-simetrik, konsirküler yarı-simetrik tensörleri sırasıyla $R(X,Y)\cdot C = 0$, $R(X,Y)\cdot P = 0$ ve $R(X,Y)\cdot \overline{C} = 0$ şeklinde tanımlanmıştır (Bagewadi *et al.* 2007, Özgür 2006). Burada $R(X,Y)$ manifoldun her bir noktasındaki tensör cebirinin türevi olarak alınmıştır.

Ayrıca, hemen hemen Kenmotsu manifoldlar üzerinde bazı tensör alanlarına göre paralellik ve eta-paralellik araştırılmıştır (Dileo and Pastore 2009, Murathan *vd.* 2010). Özellikle $(h \circ \phi)$ bileşke tensör alanının eta-paralelliği üzerinde çalışılmıştır. Bundan başka, hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde h ve $(\phi \circ h)$ tensör alanlarına göre eta-paralellik şartları incelenmiştir (Öztürk 2009, Murathan *vd.* 2014).

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı ek şartlar altında üç boyutlu uzayda psödo-simetrik koşullar ve bu şartlarla birlikte ortaya çıkan geometri incelenmiştir. Burada alfa fonksiyonu $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde düzgün bir fonksiyon olarak seçilmiştir. Ayrıca, belli bazı paralel tensör alanları yardımıyla yarı-simetrik koşullar da hemen hemen alfa-kosimplektik ve hemen hemen alfa-Kenmotsu manifoldları üzerinde çalışılmıştır.

İkinci bölümde, çalışmamızın esasını teşkil eden temel manifold teori ile ilgili tanım ve kavramlar sunulmuştur. Bu bölümün ilk alt kısmında belli bazı manifoldların temel kavramları tanıtılırken, ikinci alt kısımda ise psödo-simetrik, yarı-simetrik ve bazı paralel tensör alanları ile ilgili tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar ele alınmıştır. Özellikle, hemen hemen alfa-kosimplektik yapılar üzerinde temel eğrilik özellikleri verilmiştir. Bölüm açıklayıcı 3-boyutlu bir hemen hemen alfa-kosimplektik örneği ile sonlandırılmıştır. Buradaki hesaplamalarda alfa düzgün bir fonksiyon olarak alınmıştır.

Dördüncü bölümde, hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı yarı-simetrik koşullar belli bazı paralellik şartlarına bağlı olarak ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Özellikle eta-paralellik koşuluna bağlı olarak yarı-simetrik, projektif yarı-simetrik, konformal yarı-simetrik ve konsirküler flat gibi bazı flat durumlar çalışılmıştır. Bazı ek şartlar ortaya konularak ortaya çıkan geometri ele alınmıştır.

Son bölümde, bazı psödo-simetrik şartları sağlayan üç boyutlu alfa-Kenmotsu manifoldlar araştırılmıştır. Hesaplamalarda alfa hem sıfırdan farklı sabit bir reel sayı hem de $d\alpha \wedge \eta = 0$ ile tanımlanan sıfırdan farklı düzgün bir pozitif fonksiyon olarak alınmıştır.

Özellikle, psödo-simetrik, psödo-Ricci simetrik, genelleştirilmiş psödo-Ricci simetrik gibi bazı özel psödo-simetrik koşullar alfa-Kenmotsu manifoldları üzerinde incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız temel kavramlar verilmiştir.

2.1 Manifoldlar

Tanım 2.1.1 Bir n-boyutlu C^∞ manifold M^n, M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ ve reel değerli C^∞ dif.bilir fonksiyonların halkası $C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

ile tanımlanan simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M^n, g) ikilisiyle verilen manifolda da bir Riemann manifoldu denir. M^n manifoldunun herhangi iki a ve b noktası için M^n üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa M^n ye bağlantılı manifold adı verilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.2 M^n bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\overset{\text{2-lineer}}{\longrightarrow} \chi(M^n) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall\ f, g \in C^\infty(M^n, \mathbb{R})$, $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

(i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\ \nabla_X Z + g\ \nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X(f\ Y) = f\ \nabla_X Y + X(f)Y$,

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M^n üzerinde bir afin konneksiyon denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.3 (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

(ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M^n üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin Levi-Civita konneksiyonu denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.4 (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} R &: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow \chi(M^n) \\ R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $(1,3)$-tipli tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir. Ayrıca, $\forall\ X, Y, Z, V, W \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

(i) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$, (ii) $g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V)$,

(iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$, (iv) $g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$,

eşitlikleri sağlanır (O'neill 1983).

Önerme 2.1.1 (M^n, g) bir Riemann manifold, ∇ konneksiyonu M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu, K, (1.1)-tipli bir tensör alanı, U simetrik bir tensör alanı ve T ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere,

$$(\nabla_X K)Y = \nabla_X KY - K(\nabla_X Y)$$

$$g((\nabla_X U)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X U)Z), \ \ g((\nabla_X T)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X T)Z)$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.5 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$$g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2}$$

eşitliğine Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.6 (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} S &: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\longrightarrow S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$-tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir.

Bundan başka, $(0,2)$-tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y) = g(QX,Y)$$

denklemi ile verilir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.7 (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

reel sayısına M^n nin skalar eğriliği denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.8 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n nin eğrilik tensörü paralel yani, $\nabla R = 0$ ise o zaman, M^n ye lokal simetrik uzay denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.9 (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve M^n üzerinde bir pozitif fonksiyon ς olsun. Bu durumda, $g^* = \varsigma^2 g$ eşitliği M^n üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmezdir. Bu nedenle, bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ς fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ς fonksiyonu özdeş olarak 1 e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır.

Eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise o zaman, M^n Riemann manifolduna konformal flat denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.10 (M^{2n+1}, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^{2n+1} nin $(1,3)$-tipli Weyl konformal eğrilik tensör alanı C, M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \tfrac{1}{2n-1}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y - g(X,Z)QY \\ &\quad + g(Y,Z)QX] + \tfrac{r}{2n(2n-1)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Bundan başka, C nin divergensi c olmak üzere ($c = \operatorname{div} C$),

$$c(X,Y) = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X - \tfrac{1}{2(2n-1)}\left[(\nabla_X r)Y - (\nabla_Y r)X\right]$$

dır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.11 (M^{2n+1}, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^{2n+1} nin $(1,3)$-tipli konsirküler eğrilik tensör alanı $\overline{C}$ ve projektif eğrilik tensör alanı P olmak üzere,

$$\overline{C}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \tfrac{r}{2n(2n+1)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right] \tag{2.4}$$

ve

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \tfrac{1}{2n}\left[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\right] \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada S Ricci tensörü ve $r = \dot{I}z(S)$ skalar eğriliktir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.12 (M^{2n+1}, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^{2n+1}üzerinde tüm keyfi X, Y vektör alanları için, bir (M, g) Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y).R = 0 \tag{2.6}$$

şartını sağlıyorsa (M^{2n+1}, g) bir yarı-simetrik uzaydır denir (Yano and Kon 1984).

Teorem 2.1.1 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin konformal flat olması için gerek ve yeter koşul $n > 3$ için $C = 0$ ve $n = 3$ için $c = 0$ olmasıdır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.13 $(2n+1)$-boyutlu bir manifold M, ϕ, ξ, η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. O halde, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{2.7}$$

eşitlikleri geçerli ise (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.14 M^{2n+1}manifoldu (ϕ, ξ, η) üçlüsüyle birlikte hemen hemen bir değme yapı olsun. O zaman M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X, \xi), \\ g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \end{aligned} \tag{2.8}$$

biçiminde veriliyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen değme metrik yapı ve (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano and Kon 1984).

Önerme 2.1.2 M^{2n+1}, (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \tag{2.9}$$

dır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.15 M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.16 M^n bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her a noktası için $F^2 = -I$ olacak şekilde T_aM tanjant uzayının bir F endomorfizması var ise, o zaman M^n üzerindeki F tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir F hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.17 M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1, 1)$-tipli bir tensör alanı G olsun. $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_G(X, Y) = G^2[X, Y] + [GX, GY] - G[GX, Y] - G[X, GY]$$

şeklinde tanımlı N_G tensör alanına G tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.18 (M^{2n}, F) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_F = 0$ ise F dönüşümüne integrallenebilirdir denir Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir F hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise, (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.1.3 M^{2n+1} üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin geçerli olmasıdır. Burada N_ϕ, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.19 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, $d\Phi = 0$ ve $d\eta = 0$ şartları sağlanıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir (Olszak 1981).

Tanım 2.1.20 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Eğer M^{2n+1} manifoldu üzerinde her X, Y, Z vektör alanları ve $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ için $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\alpha\,(\eta \wedge \Phi)$ şartlarını sağlıyorsa, M^{2n+1} manifolduna bir hemen hemen alfa-Kenmotsu manifoldu denir (Vanhecke 1981).

Teorem 2.1.2 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} nin bir Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Kenmotsu 1972).

2.2 Psödo-simetrik Koşullar ve Bazı Paralel Tensör Alanları

Tanım 2.2.1 (M^n, g) bir n-boyutlu C^∞ Riemann manifoldu $(n \geq 3)$ olsun. ∇, M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve $R(X, Y)$ ile $(X \wedge Y)$ endomorfizmleri sırasıyla, her vektör alanı için

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ve

$$(X \wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(Z,X)Y \tag{2.11}$$

ile verilsin. Bu durumda, $R \cdot R$, $R \cdot S$, $Q(g,R)$ ve $Q(g,S)$ tensör alanları her X, Y, U, W ve Z vektör alanları için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}(R(X,Y) \cdot R)(U,W)Z &= R(X,Y)R(U,W)Z - R(R(X,Y)U,W)Z \\ &\quad -R(U,R(X,Y)W)Z - R(U,W)R(X,Y)Z,\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$(R(X,Y) \cdot S)(U,W) = -S(R(X,Y)U,W) - S(U,R(X,Y)W, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}Q(g,R)(U,W,Z;X,Y) &= (X \wedge Y)R(U,W)Z - R((X \wedge Y)U,W)Z \\ &\quad -R(U,(X \wedge Y)W)Z - R(U,W)(X \wedge Y)Z,\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$Q(g,S)(U,W;X,Y) = -S((X \wedge Y)U,W) - S(U,(X \wedge Y)W), \tag{2.15}$$

burada $R \cdot C$ ve $Q(g,C)$ tensör çarpımları da $R \cdot R$ ve $Q(g,R)$ deki gibi aynı şekilde tanımlanır.

Tanım 2.2.2 (M^n, g) bir n-boyutlu C^∞ Riemann manifoldu $(n \geq 3)$ olsun. Eğer $R \cdot R$ ve $Q(g,R)$ lineer bağımlı ise o zaman M^n manifoldu psödo-simetrik olarak adlandırılır. Yani, bu önerme $U_R = \{x \in M^n : Q(g,R) \neq 0,\ x \text{ noktasında}\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$R \cdot R = L_R Q(g,R) \tag{2.16}$$

önermesine denktir. Burada L_R, U_R üzerinde bir fonksiyondur (Deszcz 1992).

Hatırlatma 2.2.1 Eğer $R \cdot R = 0$ ise M^n yarı-simetrik olarak adlandırılır. Her yarı-simetrik manifold psödo-simetriktir fakat tersi doğru değildir. Eğer M^n lokal simetrik ise yarı-simetrik olduğu aşikardır.

Tanım 2.2.3 (M^n, g) bir n-boyutlu C^∞ Riemann manifoldu $(n \geq 3)$ olsun. Eğer $R \cdot S$ ve $Q(g,S)$ lineer bağımlı ise o zaman M^n manifoldu psödo-Ricci simetrik olarak adlandırılır. Yani, bu önerme $U_S = \left\{x \in M^n : S \neq \frac{r}{n},\ x \text{ noktasında}\right\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$R \cdot S = L_S Q(g,S) \tag{2.17}$$

önermesine denktir. Burada L_S, U_S üzerinde bir fonksiyondur (Deszcz 1992).

Hatırlatma 2.2.2 Her psödo-simetrik manifold psödo-Ricci simetriktir fakat tersi doğru değildir. Eğer $R \cdot S = 0$ ise o zaman M^n Ricci yarı-simetriktir. Her yarı-simetrik manifold Ricci yarı-simetriktir. Fakat bu durumun tersi doğru değildir. Her Ricci yarı-simetrik manifold psödo-Ricci simetriktir ama bu durumun da tersi doğru değildir.

Tanım 2.2.4 (M^n, g) bir n-boyutlu C^∞ Riemann manifoldu $(n \geq 3)$ olsun. Eğer $R \cdot R$ ve $Q(S, R)$ lineer bağımlı ise o zaman M^n manifoldu genelleştirilmiş psödo-Ricci simetrik olarak adlandırılır. Yani, bu önerme $U = \{x \in M^n : Q(S, R) \neq 0,\ x \text{ noktasında}\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$R \cdot R = LQ(S, R) \tag{2.18}$$

önermesine denktir. Burada L, U üzerinde bir fonksiyondur (Deszcz 1992). Burada $Q(S, R)$ ve $(X \wedge_S Y)$ aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\begin{aligned} &Q(S, R)(U, W, Z; X, Y) = (X \wedge_S Y)R(U, W)Z - R((X \wedge_S Y)U, W)Z \\ &-R(U, (X \wedge_S Y)W)Z - R(U, W)(X \wedge_S Y)Z \end{aligned} \tag{2.19}$$

ve

$$(X \wedge_S Y)Z = S(Y, Z)X - S(X, Z)Y.$$

Tanım 2.2.5 (M^n, g) bir n-boyutlu C^∞ Riemann manifoldu $(n \geq 4)$ olsun. Eğer $R \cdot C$ ve $Q(g, C)$ lineer bağımlı ise o zaman M^n manifoldu Weyl psödo-simetrik olarak adlandırılır. Yani, bu önerme $U_C = \{x \in M^n : C \neq 0,\ x \text{ noktasında}\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$R \cdot C = L_C Q(g, C)$$

önermesine denktir. Burada L_C, U_C üzerinde bir fonksiyondur (Deszcz 1992).

Hatırlatma 2.2.3 Eğer $R \cdot C = 0$ ise o zaman M^n Weyl konformal yarı-simetriktir. Eğer M^n Weyl yarı-simetrik ise o zaman aşikar olarak aynı zamanda Weyl psödo-simetriktir. Fakat bu durumun tersi doğru değildir (Deszcz 1992).

Tanım 2.2.6 $(M^n, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik $(1, 1)$-tipli tensör alanı T olmak üzere, her $X, Y, Z \in \mathcal{D}$

$(\eta = 0)$ olmak üzere,

$$g((\nabla_X T)\, Y, Z) = 0 \tag{2.20}$$

şartını sağlanıyorsa T ye eta-paraleldir denir (Boeckx 2005).

Tanım 2.2.7 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik $(1,1)$-tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$(\nabla_X T)Y = (\nabla_Y T)X \tag{2.21}$$

ise T ye Codazzi tensör alanı denir (Blair 2002).

Tanım 2.2.8 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik $(1,1)$-tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X T)\, Y, Z) + g((\nabla_Y T)\, Z, X) + g((\nabla_Z T)\, X, Y) = 0 \tag{2.22}$$

eşitliği sağlanıyorsa T ye devirli paralel tensör alanı denir (Boeckx and Cho 2006).

Tanım 2.2.9 $(M^n, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \mathcal{D}$ olmak üzere, M^n üzerinde herhangi simetrik $(1,1)$-tipli T tensör alanı

$$g((\nabla_X T)\, Y, Z) + g((\nabla_Y T)Z, X) + g((\nabla_Z T)X, Y) = 0 \tag{2.23}$$

eşitliği sağlanıyorsa T ye devirli eta-paralel tensör alanı denir (Boeckx and Cho 2006).

Önerme 2.2.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer ϕh tensör alanı eta-paralel ise o zaman, keyfi vektör alanları için

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi h)Y &= \eta(X)\left[lY - (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 Y - 2\alpha\phi hY + h^2 Y\right] \\ &\quad -\eta(Y)\left[\alpha\phi hX - h^2 X\right] - g(Y, \alpha\phi hX - h^2 X)\xi \end{aligned} \tag{2.24}$$

denklemi geçerlidir (Aktan *vd.* 2013). Burada alfa, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde düzgün bir fonksiyondur.

Önerme 2.2.2 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer ϕh tensör alanı eta-paralel ise o zaman, keyfi vektör alanları için

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY \tag{2.25}$$

denklemi sağlanır (Aktan *vd.* 2013). Burada alfa, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ ile verilen düzgün bir fonksiyondur.

Önerme 2.2.3 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer h tensör alanı eta-paralel ise o zaman, keyfi vektör alanları için

$$\begin{aligned}(\nabla_X h)Y &= -\eta(X)\left[\phi lY + (\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi Y + 2\alpha hY + \phi h^2 Y\right] \\ &\quad -\eta(Y)\left[-\alpha\phi^2 hX + \phi h^2 X\right] + g(Y, \alpha hX + \phi h^2 X)\xi\end{aligned} \tag{2.26}$$

denklemi sağlanır (Aktan *vd.* 2013). Burada $l = R(.,\xi)\xi$ ve alfa, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ ile verilen düzgün bir fonksiyondur.

3 HEMEN HEMEN ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, üzerinde çalıştığımız hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar ile ilgili bazı özellikler sunulmuştur.

Tanım 3.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Alfa keyfi bir reel sayı olmak üzere, manifold üzerinde

$$d\eta = 0 \text{ ve } d\Phi = 2\alpha\,(\eta \wedge \Phi) \tag{3.1}$$

denklemleri aynı anda gerçekleniyor ise M^{2n+1} manifolduna hemen hemen alfa-kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için yapı hemen hemen kosimplektik ve $\alpha \neq 0$ için hemen hemen alfa-Kenmotsudur (Kim and Pak 2005).

Önerme 3.1 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, keyfi vektör alanları için,

$$hX = \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi)X, \quad h(\xi) = 0, \tag{3.2}$$

$$\nabla_X \xi = -\alpha\phi^2 X - \phi h X,\ (\phi \circ h)X + (h \circ \phi)X = 0 \tag{3.3}$$

$$\nabla_\xi \xi = 0,\ \nabla_\xi \phi = 0,\ \delta\eta = -2\alpha n,\ \dot{I}z(h) = 0, \tag{3.4}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha\,[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)] + g(\phi Y, hX), \tag{3.5}$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla\xi = -\alpha\phi^2,\ (\nabla_\xi h) \circ \phi + \phi \circ (\nabla_\xi h) = 0, \tag{3.6}$$

denklemleri sağlanır (Öztürk 2009).

Önerme 3.2 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. O halde,

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \alpha^2\,[\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha\,[\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad + (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \end{aligned} \tag{3.7}$$

denklemi geçerlidir (Öztürk 2009).

Önerme 3.3 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir lokal simetrik hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. O zaman $\nabla_\xi h = 0$ denklemi geçerlidir (Öztürk 2009).

Önerme 3.4 $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. O halde, aşağıdaki eğrilik özellikleri sağlanır:

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y - \alpha\left[\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX\right] \\ &\quad + \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right]\left[\eta(X)Y - \eta(Y)X\right], \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$R(X,\xi)\xi = \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right]\phi^2 X + 2\alpha\phi hX - h^2X + \phi(\nabla_\xi h)X, \tag{3.9}$$

$$R(X,\xi)\xi - \phi R(\phi X,\xi)\xi = 2\left[(\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X - h^2 X\right], \tag{3.10}$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\phi R(X,\xi)\xi - \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right]\phi X - 2\alpha hX - \phi h^2 X, \tag{3.11}$$

$$S(X,\xi) = -2n\left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right]\eta(X) - (\mathrm{div}(\phi h))X, \tag{3.12}$$

$$S(\xi,\xi) = -\left[2n(\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \dot{I}z(h^2)\right], \tag{3.13}$$

burada alfa M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ ile verilen düzgün bir fonksiyon ve $\xi(\alpha)$ gösterimi alfa düzgün fonksiyonunun ξ vektör alanı yönündeki ∇ konneksiyonuna göre kovaryant türevidir (Aktan *vd.* 2014).

Örnek 3.1 $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ standart koordinat sistemi olmak üzere, 3-boyutlu $M \subset \mathbb{R}^3$ manifoldu

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\right\},$$

ile verilsin. M üzerindeki vektör alanları,

$$E_1 = e^{z^3}\frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = e^{z^3}\frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

şeklinde seçilsin. $\{E_1, E_2, E_3\}$ cümlesinin M nin her noktasında lineer bağımsız olduğu aşikardır. Bundan başka, g Riemann metriği

$$g = \frac{1}{e^{2z^3}}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) + dz \otimes dz$$

tensör çarpımı yardımıyla verilir.

Ayrıca, eta 1-formu keyfi X vektör alanı için $\eta(X) = g(X, E_3)$ eşitliği ile tanımlansın ve ϕ $(1,1)$ tensör alanı $\phi(E_1) = E_2$, $\phi(E_2) = -E_1$, $\phi(E_3) = 0$ denklemleriyle verilsin.

Bu tensör alanlarına ilaveten, $(1,1)$-tipli h tensör alanı $h(E_1) = -\lambda E_1$, $h(E_2) = \lambda E_2$ ve $h(E_3) = 0$ ile verilsin. Bu takdirde, g ve ϕ için,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)E_3,\ \ \eta(E_3) = 1$$
$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

dır. ∇, g metriği ile verilen Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere,

$$[E_{1,}E_2] = 0,\ \ [E_{1,}E_3] = -3z^2 E_1,\ \ [E_{2,}E_3] = -3z^2 E_2.$$

Böylece (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü elde edilir. Bu nedenle, bu dörtlü yapının bir hemen hemen alfa-kosimplektik yapısı olabilmesi için temel 2-formunun sıfırdan farklı bileşenlerini kontrol etmek yeterli olacaktır. O halde,

$$\Phi(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{1}{e^{2z^3}},\ \Phi = -\frac{1}{e^{2z^3}}(dx \wedge dy) \tag{3.14}$$

dır. Burada $\Phi(E_{1,}E_2) = -1$ ve aksi halde $i \leq j$ için $\Phi(E_{i,}E_j) = 0$ olacaktır. Buradan Φ nin dış türevi tanımından

$$d\Phi = 6z^2 e^{-2z^3}(dx \wedge dy \wedge dz) \tag{3.15}$$

bulunur. Ayrıca, $\eta = dz$ olduğundan (3.14) ve (3.15) denklemlerinden

$$d\Phi = -6z^2\,(\eta \wedge \Phi) \tag{3.16}$$

elde edilir. Burada alfa düzgün fonksiyonu $\alpha(z) = -3z^2$ biçimindedir. Bunlara ilaveten, $N_\phi = 0$ olduğundan hemen hemen alfa-kosimplektik manifold normal bir yapıya sahiptir. Başka bir deyişle, örnekte verdiğimiz 3-boyutlu manifold alfa-kosimplektik yapıdadır.

4 BAZI YARI–SİMETRİK HEMEN HEMEN ALFA-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, bazı flat şartlarını sağlayan tensör alanları ve belli bazı yarı-simetrik koşullar hemen hemen alfa-kosimplektik manifold üzerinde incelenmiştir. Bazı durumlarda boyut üç alınırken bazı durumlarda ise en genel boyut üzerinden çalışmalar yürütülmüştür. Burada alfa, manifold üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan düzgün bir fonksiyondur. Belli bazı ilave şartlar ortaya konulmuş ve bunun sonucunda karşımıza çıkan geometri ele alınmıştır.

Hatırlatma 4.1 (2.5) denklemiyle verilen projektif eğrilik tensörü keyfi vektör alanları için özdeş olarak sıfır olursa projektif flat olarak isimlendirilir. Yani, $P(X,Y)Z = 0$ koşulu mevcutsa manifoldumuz projektif flat hemen hemen alfa-kosimplektik olarak adlandırılır.

Teorem 4.1 M^{2n+1} bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer M^{2n+1} bir projektif flat manifold ise o zaman,

$$r = -(2n+1)\left[2n(\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \dot{I}z(h^2)\right] + 2n\dot{I}z(\phi(\nabla_\xi h)) \tag{4.1}$$

skalar eğriliğine sahiptir. Burada alfa, ξ vektör alanı boyunca paralel olarak alınan $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan düzgün bir fonksiyondur.

İspat: Kullanacağımız benzer bir ispat metodu Öztürk (2016) tarafından hemen hemen alfa-Kenmotsu manifoldlar üzerinde alfanın sabit olması durumu için verilmiştir. Öncelikle $P = 0$ olsun. O zaman (2.5) denklemi ve R Riemann eğrilik tensörü özelliklerinden

$$g(R(Z,\xi)\xi, Y) = \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z) - \eta(Y)S(Z,\xi)\right] \tag{4.2}$$

elde edilir. Burada (4.2) ve (3.12) denklemleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} S(X,Y) \quad = \quad & -2n\left[(\alpha^2 + \xi(\alpha))g(Y,Z) + 2\alpha g(\phi Y, hZ) + g(hZ, hY)\right. \\ & \left. + g((\nabla_\xi h)Z, \phi Y) + \tfrac{1}{2n}\eta(Y)(\mathrm{div}(\phi h))Z\right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

bulunur. Şimdi, (4.3) denkleminin her iki tarafına kontraksiyon uygulayalım. Bunun için öncelikle tanjant uzayın keyfi bir noktasındaki bir ortonormal baz olarak $\{e_i\}$,

$i = 1, \ldots, 2n+1$ cümlesini düşünelim. O zaman $1 \leq i \leq 2n+1$ için $Y = Z = e_i$ olmak üzere, (4.3) denkleminin her iki tarafının Y ve Z ye göre kontraksiyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} r &= -2n \Bigg[\sum_{i=1}^{2n+1} (\alpha^2 + \xi(\alpha)) g(e_i, e_i) + 2\alpha g(\phi e_i, h e_i) + g(h e_i, h e_i) \\ &\quad + g((\nabla_\xi h) e_i, \phi e_i) + \frac{1}{2n} \eta(e_i)(\mathrm{div}(\phi h)) e_i \Bigg] \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Burada $\sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i, e_i) = r$, $\dot{I}z(\phi h) = \dot{I}z(h) = 0$ ve

$$(\mathrm{div}(\phi h))\xi = \sum_{i=1}^{2n+1} \left[-\alpha g(\phi h e_i, e_i) + g(h^2 e_i, e_i) \right] = \dot{I}z(h^2).$$

Buradan (4.4) hesaba katılırsa

$$\begin{aligned} r = &-2n \Big[(\alpha^2 + \xi(\alpha))(2n+1) - 2\alpha \ \dot{I}z(\phi h) + \dot{I}z(h^2) \\ &- \dot{I}z(\phi(\nabla_\xi h)) + \tfrac{1}{2n} (\mathrm{div}(\phi h))\xi \Big] \end{aligned} \tag{4.5}$$

bulunur. Burada alfanın ξ vektör alanı boyunca paralel olduğu hipotezini kullanırsak (4.5) denklemi sadeleştirildiğinde istenen sonuç olan (4.1) denklemine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2 M^3 bir hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer M^3 bir projektif flat manifold ise o zaman,

$$r = 3S(\xi, \xi) + 2\dot{I}z(\phi(\nabla_\xi h)) \tag{4.6}$$

skalar eğriliğine sahiptir. Burada alfa, ξ vektör alanı boyunca paralel olarak alınan $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan düzgün bir fonksiyondur.

İspat: Yukarıda verilen ispata benzer olarak $n = 1$ alınarak 3-boyutlu durum için ispat açıktır (Öztürk *vd.* 2018).

Hatırlatma 4.2 (2.4) eşitliğiyle tanımlanan konsirküler eğrilik tensör alanı keyfi vektör alanları için özdeş olarak sıfır olursa konsirküler flat olarak isimlendirilir. Bundan dolayı manifold üzerinde $\overline{C} = 0$ koşulu sağlandığında manifolda konsirküler flat hemen hemen alfa-kosimplektik adı verilir.

Teorem 4.3 M^{2n+1} bir konsirküler yarı-simetrik hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer manifold üzerinde ϕh tensör alanına göre eta-paralellik sağlanıyorsa $\mathcal{D}$ dağılımı üzerindeki vektör alanları için manifold konsirküler flattir.

İspat: Hipotez gereğince (2.4), (2.24) ve (2.25) denklemlerinden

$$\begin{aligned} g((\overline{C}(U,V)Y,\xi) &= -\eta(V)g(lU,Y)+\eta(U)g(lV,Y) \\ &\quad -\frac{r}{2n(2n+1)}(\eta(U)g(V,Y)-\eta(V)g(U,Y)) \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada Y yerine ξ vektör alanı alınırsa

$$\eta(C(U,V)\xi)=0 \tag{4.8}$$

bulunur. Tekrardan (4.7) denkleminde U yerine ξ seçildiğinde

$$\eta(\overline{C}(\xi,V)Y)=g(lV,Y)-\frac{r}{2n(2n+1)}(g(V,Y)-\eta(V)\eta(Y)) \tag{4.9}$$

yazılır. Şimdi, $R(X,Y)\cdot\overline{C}$ konsirküler yarı-simetrik tensör çarpımını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{aligned} (R(X,Y)\cdot\overline{C})(U,V)W &= R(X,Y)\overline{C}(U,V)W-\overline{C}(R(X,Y)U,V)W \\ &\quad -\overline{C}(U,R(X,Y)V)W-\overline{C}(U,V)R(X,Y)W. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ayrıca, (4.7), (4.8) ve (4.9) birlikte düşünüldüğünde

$$g(lV,Y)=\frac{r}{2n(2n+1)}(g(V,Y)-\eta(V)\eta(Y)) \tag{4.11}$$

bulunur. Hipotezden $R(X,Y)\cdot\overline{C}=0$ seçersek

$$\begin{aligned} 0 &= R(X,Y)\overline{C}(U,V)W-\overline{C}(R(X,Y)U,V)W \\ &\quad -\overline{C}(U,R(X,Y)V)W-\overline{C}(U,V)R(X,Y)W \end{aligned} \tag{4.12}$$

yazılır. Burada $\overline{C}(U,V,W,Y)=g(\overline{C}(U,V)W,Y)$ olarak alınmıştır. Böylece sonuca ulaşmak için (4.12) denkleminin sağ tarafındaki ifadeleri hesaplar ve sadeleştirirsek (4.12) denklemi

$$\begin{aligned} \overline{C}(U,V,lX,W) &= -K[\eta(U)\eta(V)g(lX,W)+\eta(W)\eta(V)g(lX,U) \\ &\quad +\eta(U)\eta(W)g(lX,U)]-\eta(W)\eta(X)g(lX,V)+\eta(W)\eta(X)\eta(V) \end{aligned} \tag{4.13}$$

ifadesine dönüşür. Burada

$$K=-\eta(U)\eta(V)\left[\frac{r}{2n(2n+1)}\right] \tag{4.14}$$

şeklindedir. Bundan başka ξ vektör alanına dik olan $\mathcal{D}$ dağılımını

$$\mathcal{D}=Ker(\eta)=\{X:\eta(X)=0\}$$

ile tanımlayalım. Bu tanımı (4.13) denkleminde kullanır ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında $\overline{C}=0$ sonucuna $X,Y\in\mathcal{D}$ için ulaşılır. Bu sonuç ispatı tamamlar.

Teorem 4.4 M^3 bir konsirküler yarı-simetrik hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Eğer manifold üzerinde ϕh tensör alanına göre eta-paralellik sağlanıyorsa $\mathcal{D}$ dağılımı üzerindeki vektör alanları için manifold konsirküler flattir.

İspat: Yukarıdaki ispat metoduyla üç boyutlu uzayda $n=1$ için,

$$K=-\left(\tfrac{r}{6}\right)\eta(U)\eta(V)$$

alınarak benzer hesaplamalar yapıldığında sonuç aşikardır.

Teorem 4.5 M^{2n+1}, ϕh tensör alanına göre Codazzi şartını sağlayan bir yarı-simetrik hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. O halde, alfa ξ vektör alanı boyunca paralel olmak üzere, manifold kosimplektik yapıdadır.

İspat: Kabul edelim ki, ϕh tensör alanı Codazzi şartını sağlasın. Yani,

$$0 = g((\nabla_Y\phi h)X,Z)-g((\nabla_X\phi h)Y,Z) \tag{4.15}$$

dır. (3.8) ve (4.15) denklemleri birlikte ele alınırsa $\xi(\alpha)=0$ için,

$$R(X,Y)\xi=\alpha^2\left[\eta(X)Y-\eta(Y)X\right]-\alpha\left[\eta(X)\phi hY-\eta(Y)\phi hX\right] \tag{4.16}$$

yazılır. Şimdi, $R(X,Y)\cdot R$ yarı-simetrik tensör çarpımını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\cdot R)(U,V)Z &= R(X,Y)R(U,V)Z-R(R(X,Y)U,V)Z\\ &\quad -R(U,R(X,Y)V)Z-R(U,V)R(X,Y)Z. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Yukarıdaki eşitlik $R(X,Y)\cdot R=0$ için aşağıdaki önermeye

$$\begin{aligned} 0 &= R(X,\xi)R(U,V)\xi - R(R(X,\xi)U,V)\xi \\ &\quad -R(U,R(X,\xi)V)\xi - R(U,V)R(X,\xi)\xi \end{aligned} \tag{4.18}$$

denktir. Burada $R(X,Y)\cdot R=0$ önermesinin $R(X,\xi)\cdot R=0$ önermesine denk olduğunu unutmayalım. O halde, istenilen sonuca ulaşmak için (4.18) denkleminin sağ tarafındaki dört ifadeyi ayrı ayrı hesaplamalıyız. Böylece (4.16) ve (4.18) birlikte hesaba katılırsa (4.18) denklemi keyfi vektör alanları için,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^3\left[\eta(U)g(hV,\phi X) - \eta(V)g(hU,\phi X)\right] \\ &\quad +\alpha^2\left[\eta(U)g(hX,hV) - \eta(V)g(hU,hX)\right] \end{aligned} \tag{4.19}$$

denklemine indirgenir. Bu son elde edilen denklem düzenlenirse

$$\alpha\left[\eta(U)g(hV,\phi X) - \eta(V)g(hU,\phi X)\right] = -\eta(U)g(hX,hV) + \eta(V)g(hU,hX)$$

bulunur. Bu son denklem sadeleştirilirse alfa sıfır değeri için,

$$\eta(U)g(h^2X,V) - \eta(V)g(h^2X,hU) = 0 \tag{4.20}$$

elde edilir. Buradan $h^2=0$ olduğu açıktır. Böylece h tensör alanı özdeş olarak sıfırdır. Bundan dolayı hem alfa sıfır hem de h tensör alanı sıfır olduğundan üzerinde çalıştığımız hemen hemen alfa-kosimplektik manifold bir kosimplektik yapıya sahiptir ki bu da istenen sonuca bizi ulaştırır.

Teorem 4.6 M^3, ϕh tensör alanına göre Codazzi şartını sağlayan bir yarı-simetrik hemen hemen alfa-Kenmotsu manifold olsun. O zaman alfa ξ vektör alanı boyunca paralel olmak üzere, bu şartı sağlayan alfa-Kenmotsu yapı mevcut değildir.

İspat: Kabul edelim ki, manifold üç boyutlu uzayda bir hemen hemen alfa-Kenmotsu olsun. Bu durumda Teorem 4.5 de uyguladığımız metodoloji gereğince benzer işlem yapıldığında alfa sıfır değeri için (4.20) denklemine ulaşılır. Fakat bu sonuç kabulümüzle çelişir. Bu nedenle, h tensör alanı özdeş olarak sıfır olmak zorunda değildir. Bundan dolayı normallik şartı sağlanamayacağından bu şartları sağlayan alfa-Kenmotsu manifold yoktur.

Teorem 4.7 M^{2n+1} $(n>0)$, bir ϕh tensör alanına göre eta-paralel olan projektif yarı-simetrik hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. Bu takdirde, alfa ξ vektör alanı boyunca paralel olmak üzere, manifold projektif flattir.

İspat: (2.5) denklemi yardımıyla $R(X,Y)\cdot P$ tensör çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\cdot P)(U,V)Z &= R(X,Y)P(U,V)Z-P(R(X,Y)U,V)Z\\ &\quad -P(U,R(X,Y)V)Z-P(U,V)R(X,Y)Z. \qquad (4.21)\end{aligned}$$

Hipotezden dolayı manifoldun projektif yarı-simetrik olduğunu varsayalım. Bir başka deyişle, $R\cdot P=0$ olsun. (4.21) denklemini takiben her keyfi vektör alanı için,

$$\begin{aligned}0 &= R(X,Y)P(U,V)Z-P(R(X,Y)U,V)Z\\ &\quad -P(U,R(X,Y)V)Z-P(U,V)R(X,Y)Z \qquad (4.22)\end{aligned}$$

yazılır. (2.5) eşitliği göz önüne alındığında

$$\eta(P(X,Y)Z)=g(R(X,Y)Z,\xi)-\frac{1}{2n}\left[S(Y,Z)\eta(X)-S(X,Z)\eta(Y)\right]$$

ve

$$\eta(P(\xi,Y)Z)=g(R(Y,\xi)\xi,Z)-\frac{1}{2n}\left[S(Y,Z)-S(Z,\xi)\eta(Y)\right] \qquad (4.23)$$

bulunur. Şimdi, ek şart olarak kullandığımız ϕh tensör alanına göre eta-paralellik koşulunu kullanalım. (2.25) eşitliği yardımıyla

$$S(Y,\xi)=\eta(Y)\dot{I}z(l) \qquad (4.24)$$

ve

$$S(\xi,\xi)=\eta(Y)\dot{I}z(l) \qquad (4.25)$$

elde edilir. Burada kullandığımız tüm şartlar altında (4.22) denkleminin sağ tarafındaki dört ifadeyi ayrı ayrı hesaplayarak bir arada düşündüğümüzde

$$\begin{aligned}0 &= -P(U,V,Z,lX)-\eta(U)R(lX,V,Z,\xi)+g(lU,X)R(\xi,V,Z,\xi)\\ &\quad +\frac{1}{2n}\eta(Y)S(V,Z)-\frac{1}{2n}\eta(V)S(Y,Z)-\eta(V)R(U,lX,Z,\xi)\\ &\quad +g(lV,X)R(U,\xi,Z,\xi)+\frac{1}{2n}\eta(U)S(Y,Z)-\frac{1}{2n}\eta(Y)S(U,Z)\\ &\quad -\eta(Z)R(U,V,lX,\xi)+g(lZ,X)R(U,V,\xi,\xi)+\frac{1}{2n}\eta(U)S(V,Y)\\ &\quad -\frac{1}{2n}\eta(V)S(U,Y) \qquad (4.26)\end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. O halde, (4.26) denkleminin her iki tarafına uygun bir kontraksiyon yapalım. Bunun için öncelikle tanjant uzayın keyfi bir noktasındaki bir ortonormal baz olarak $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, 2n+1$ cümlesini düşünelim. Böylece uygun kontraksiyondan sonra (4.26) denklemi

$$\begin{aligned} P(U,V,Z,lX) &= -g(lU,X)g(lV,Z) - \frac{1}{2n}g(lX,U)S(V,Z) \\ &\quad + g(lU,Z)g(lV,X) + \frac{1}{2n}g(lX,V)S(U,Z) \end{aligned} \tag{4.27}$$

haline dönüşür. Burada simetri işlemleri ve özel olarak keyfi U vektör alanı yerine V vektör alanı seçilerek projektif eğrilik tensör alanının özdeş olarak sıfır olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.8 M^{2n+1} $(n > 0)$, bir ϕh tensör alanına göre eta-paralel olan konformal yarı-simetrik hemen hemen alfa-kosimplektik manifold olsun. O zaman manifold ya konformal flat ya da konformal eğrilik tensör alanı ξ vektör alanına dik olacak şekilde bir tensör alanıdır. Eğer bu şartlar altında ξ vektör alanına dik olan konformal eğrilik tensör alanı varsa konformal flat manifold mevcut değildir.

İspat: Öncelikle (2.3) ve (3.8) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \eta(C(X,Y)Z) &= -g(R(X,Y)\xi,Z) - \frac{1}{2n-1}[g(Y,Z)S(X,\xi) \\ &\quad - g(X,Z)S(Y,\xi) + \eta(X)S(Y,Z) - \eta(Y)S(X,Z)] \\ &\quad + \frac{r}{(2n)(2n-1)}\left[\eta(X)g(Y,Z) - \eta(Y)g(X,Z)\right] \end{aligned} \tag{4.28}$$

yazılır. (4.28) eşitliğinde Z yerine ξ vektör alanı alınırsa

$$\eta(C(X,Y)\xi) = 0 \tag{4.29}$$

bulunur. Burada tekrar (4.28) eşitliğinde X yerine ξ vektör alanı alınırsa

$$\begin{aligned} \eta(C(\xi,Y)Z) &= g(R(\xi,Y)Z,\xi) - \frac{1}{2n-1}[g(Y,Z)S(\xi,\xi) \\ &\quad - \eta(Z)g(QY,\xi) + S(Y,Z) - \eta(Y)S(Z,\xi)] \\ &\quad + \frac{r}{(2n)(2n-1)}\left[g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\right] \end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edilir. (2.3) denklemi yardımıyla $R(X,Y)\cdot C$ tensör çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\cdot C)(U,V)Z &= R(X,Y)C(U,V)Z - C(R(X,Y)U,V)Z \\ &\quad -C(U,R(X,Y)V)Z - C(U,V)R(X,Y)Z. \qquad (4.31)\end{aligned}$$

Hipotez yardımıyla manifoldun konformal yarı-simetrik olduğunu kabul edelim. Yani; $R(X,Y)\cdot C = 0$ olsun. (4.31) denklemini takiben her keyfi vektör alanı için,

$$\begin{aligned}0 &= -C(U,V,Z,Y) + \eta(Y)\eta(C(U,V)Z) - \eta(U)\eta(C(Y,V)Z) \\ &\quad +g(Y,U)\eta(C(\xi,V)Z) - \eta(V)\eta(C(U,Y)Z) \\ &\quad +g(Y,V)\eta(C(U,\xi)Z) - \eta(Z)\eta(C(U,V)Y) \qquad (4.32)\end{aligned}$$

yazılır. Burada $C(U,V,Z,Y) = g(C(U,V)Z,Y)$ şeklinde tanımlanmıştır. (2.24) ve (2.25) denklemleri birlikte hesaba katıldığında her X vektör alanı için $S(X,\xi) = \eta(X)\dot{I}z(l)$ olduğunu biliyoruz. Burada $l = R(.,\xi)\xi$ ile tanımlanan Jakobi operatörüdür. Bundan başka, (4.28) denkleminden

$$\eta(C(\xi,Y)Z) = 0 \qquad (4.33)$$

eşitliği de yazılabilir. (4.32) denklemi düzenlenip sadeleştirilirse

$$\begin{aligned}0 &= \eta(R(\xi,Y)C(U,V)Z) - \eta(C(R(\xi,Y)U,V)Z) \qquad (4.34) \\ &\quad -\eta(C(R(\xi,Y)V,Z)U) - \eta(C(U,V)R(\xi,Y)Z)\end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. Bu hesaplamaları takiben (2.3), (2.25), (4.24) ve $Z = \xi$ denklemleri birlikte ele alındığında (4.34) eşitliği aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$-g(lU,Y)\eta(V)(A+B) + C(U,V,lY,\xi) = 0, \qquad (4.35)$$

burada A ve B ifadelerinin değerleri sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$A = \frac{r}{2n(2n-1)} - \frac{\dot{I}z(l)}{2n-1} \qquad (4.36)$$

ve

$$B = \frac{\dot{I}z(l)}{2n-1} - \frac{r}{2n(2n-1)}. \qquad (4.37)$$

Başka bir deyişle, (4.36) ve (4.37) denklemlerinden $A+B=0$ elde edilir. Böylece (4.35) denklemi

$$\eta(C(U,V)lY)=0 \tag{4.38}$$

şeklinde yazılabilir. Burada yukarıdaki eşitliğin sağlaması için ya konformal tensör alanı özdeş olarak sıfır olmalı (konformal flat) ya da konformal eğrilik tensör alanı ξ vektör alanına ortogonal olacak şekilde seçilmelidir. Bu nedenle eğer tüm bu şartlar altında ikinci durum söz konusu olursa hiçbir konformal flat hemen hemen alfa-kosimplektik manifold mevcut değildir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5 3-BOYUTLU PSÖDO-SİMETRİK ALFA-KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu bölümde, bazı psödo-simetrik koşulları sağlayan üç boyutlu alfa-Kenmotsu manifoldlar incelenmiştir. Hesaplamalarda alfa hem sıfırdan farklı sabit bir reel sayı hem de $d\alpha \wedge \eta = 0$ ile tanımlanan sıfırdan farklı düzgün bir pozitif fonksiyon olarak alınmıştır. Özellikle, psödo-simetrik, psödo-Ricci simetrik, genelleştirilmiş psödo-Ricci simetrik gibi bazı psödo-simetrik özellikleri sağlayan alfa-Kenmotsu manifoldlar ele alınmıştır.

Önerme 5.1 M^n bir alfa-Kenmotsu manifold olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler sağlanır:

$$(\nabla_X \phi) Y = -\alpha \left[g(X, \phi Y)\xi + \eta(Y)\phi X \right], \tag{5.1}$$

$$\nabla_X \xi = -\alpha(-X + \eta(X)\xi), \tag{5.2}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = -\alpha \left[-g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y) \right], \tag{5.3}$$

burada alfa C^∞ sınıfından kesinlikle pozitif ve $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan düzgün bir fonksiyondur. Eğer alfa sıfır ise o zaman manifold kosimplektik yapıdadır. Eğer $\xi(\alpha) = \nabla_\xi \alpha$ olacak şekilde $\alpha^2 + \xi(\alpha) \neq 0$ ise alfa-Kenmotsu manifoldu regülerdir denir (Janssens and Vanhecke 1981). Buradaki $d\alpha \wedge \eta = 0$ koşulu boy$(M^n) \geq 5$ için sağlar. Fakat boy$(M^n) = 3$ için geçerli değildir (Olszak and Rosca 1991). Buna göre üç boyutlu uzayda konformal eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır olacağından Riemann egrilik tensör hesaplamalarını konformal eğrilik tensörü üzerinden de yapabiliriz.

(2.11) ve (2.3) göz önüne alındığında üç boyutlu bir Riemann manifoldu için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= S(Y,Z)X - S(Z,X)Y + g(Y,Z)QX \\ &\quad - g(Z,X)QY - \tfrac{r}{2}\left[(X \wedge Y)Z\right] \end{aligned} \tag{5.4}$$

geçerlidir.

Önerme 5.2 Bir 3-boyutlu alfa-Kenmotsu manifoldu için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= 2(\alpha^2 + \xi(\alpha) + \frac{r}{4})((X \wedge Y)Z) \\ &\quad - 3(\alpha^2 + \xi(\alpha) + \frac{r}{6})\left[\eta(X)(\xi \wedge Y)Z + \eta(Y)(X \wedge \xi)Z\right] \end{aligned} \tag{5.5}$$

ve

$$S(X,Y)Z = (\alpha^2 + \xi(\alpha) + \frac{r}{2})g(X,Y) - 3(\alpha^2 + \xi(\alpha) + \frac{r}{6})\eta(X)\eta(Y), \tag{5.6}$$

burada alfa pozitif ve $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan düzgün bir fonksiyondur. Ayrıca, R, S, Q, r sırasıyla, Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü, Ricci operatörü ve skalar eğriliktir.

Önerme 5.3 Bir 3-boyutlu alfa-Kenmotsu manifoldu (5.5) ve (5.6) denklemleri yardımıyla aşağıdaki eğrilik özelliklerini sağlar:

$$R(X,Y)\xi = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\left[\eta(X)Y - \eta(Y)X\right], \tag{5.7}$$

$$R(\xi,X)Y = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\left[-g(X,Y)\xi + \eta(Y)X\right], \tag{5.8}$$

$$g(R(X,Y)Z,\xi) = (\alpha^2 + \xi(\alpha))\left[g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X)\right], \tag{5.9}$$

$$S(Y,\xi) = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(Y), \tag{5.10}$$

$$Q\xi = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))\xi. \tag{5.11}$$

Teorem 5.1 M^3 bir alfa-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M^3 psödo-simetrik ise o zaman manifold ya $H^3(-\alpha^2)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometrik ya da $L_R = -\alpha^2$ dir. Burada alfa, pozitif bir sabit olarak alınmıştır.

İspat: Eğer M^3 yarı-simetrik ise o zaman aşikar olarak psödo-simetriktir. Ayrıca, bir yarı-simetrik alfa-Kenmotsu manifoldu $H^3(-\alpha^2)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir (Kenmotsu 1972). O halde, M^3 manifoldunun yarı-simetrik olmadığını kabul edelim. Yani, bir psödo-simetrik alfa-Kenmotsu manifoldu olsun. (2.11) ve (5.8) denklemlerinden

$$R(\xi,X)Y = \alpha^2(X \wedge \xi)Z \tag{5.12}$$

yazılır. Psödo-simetrik manifold tanımından

$$R(X,Y)\cdot R = L_R\left[(X \wedge Y)\cdot R\right]$$

göz önüne alınıp her keyfi vektör alanları için,

$$(R(X,Y)\cdot R)(U,V)Z = L_R Q(g,R)(U,V,Z;X,Y) \tag{5.13}$$

şeklindedir. Buradaki tensör çarpımı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{aligned} & R(X,Y)R(U,V)Z - R(R(X,Y)U,V)Z - R(U,R(X,Y)V)Z \\ & -R(U,V)R(X,Y)Z = L_R\left[(X\wedge Y)R(U,V)Z - R((X\wedge Y)U,V)Z\right. \\ & \left.-R(U,(X\wedge Y)V)Z - R(U,V)(X\wedge Y)Z\right]. \end{aligned} \tag{5.14}$$

(5.14) denkleminde X yerine ξ alınarak (5.8) yardımıyla

$$R(\xi,X)\cdot R = \alpha^2\left[(X\wedge\xi)\cdot R\right] \tag{5.15}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten $L_R = -\alpha^2$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2 M^3 bir alfa-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M^3 psödo-simetrik ise o zaman manifold ya $H^3(-\alpha^2)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometrik ya da $L_R = (-\alpha^2 + \xi(\alpha))$ dir. Burada alfa pozitif düzgün bir fonksiyon olarak alınmıştır.

İspat: Öncelikle M^3 manifoldunun yarı-simetrik olduğunu kabul edersek manifold aynı zamanda psödo-simetriktir ve Kenmotsu (1972) den dolayı $H^3(-\alpha^2)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir. Dolayısıyla M^3 manifoldunun yarı-simetrik olmadığını kabul edelim. Teorem 5.1 de kullanılan metodoloji ile (2.11), (5.8) ve (5.14) yardımıyla

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \left[L_R + (\alpha^2+\xi(\alpha))\right]\left[R(U,V,Z,Y) - (\alpha^2+\xi(\alpha))\left[-g(V,Z)\eta(U)\eta(Y)\right.\right. \\ & +g(U,Z)\eta(V)\eta(Y) - g(U,Y)g(V,Z) + g(U,Y)\eta(V)\eta(Z) \\ & +g(V,Z)\eta(Y)\eta(U) - g(Y,Z)\eta(V)\eta(U) - g(V,Y)\eta(U)\eta(Z) \\ & +g(V,Y)g(Z,U) + g(Y,Z)\eta(U)\eta(V) - g(Z,U)\eta(V)\eta(Y) \\ & \left.\left.+g(Y,V)\eta(U)\eta(Z) - g(Y,U)\eta(Z)\eta(V)\right]\right] \end{aligned} \tag{5.16}$$

bulunur. Yukarıdaki denkleme uygun kontraksiyon yapılırsa yani, tanjant uzayın keyfi bir noktasındaki bir ortonormal baz olarak $\{e_i\}$, $i = 1,2,3$ cümlesini düşünelim. O zaman $1 \le i \le 3$ için $U = Y = e_i$ olmak üzere, (5.16) denkleminin her iki tarafına Y ve U ya göre kontraksiyon uygulanırsa

$$0 = \left[L_R + (\alpha^2+\xi(\alpha))\right]\left(S(V,Z) + 2(\alpha^2+\xi(\alpha))g(V,Z)\right) \tag{5.17}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte Z yerine ξ vektör alanı alınırsa

$$0 = \left[L_R + (\alpha^2+\xi(\alpha))\right] \tag{5.18}$$

denklemine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1 Her M^3 alfa-Kenmotsu manifoldu

$$R \cdot R = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))Q(g, R) \tag{5.19}$$

formuna sahip bir psödo-simetrik manifolddur. Özel olarak, alfa pozitif bir sabit ise

$$R \cdot R = -\alpha^2 Q(g, R) \tag{5.20}$$

formundadır.

Teorem 5.3 Bir M^3 psödo-simetrik alfa-Kenmotsu manifoldu

$$-L_R = (\alpha^2 + \xi(\alpha))$$

olacak şekilde asla özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyona sahipse o zaman $\lambda = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))$ ile belirli bir Einstein manifoldudur.

İspat: Farz edelim ki, M^3 bir psödo-simetrik alfa-Kenmotsu manifold olsun. O zaman her keyfi vektör alanları için

$$R \cdot R = L_R Q(g, R)(U, V, Z; X, Y)$$

denklemi sağlanır. Bu son eşitlik, (2.11), (5.14) ve $X = \xi$ birlikte hesaba katılırsa

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \left[L_R + (\alpha^2 + \xi(\alpha))\right] [g(R(U,V)Z,Y)\xi - g(R(U,V)Z), \xi Y \\ & -g(U,Y)R(\xi,V)Z + \eta(U)R(Y,V)Z - g(V,Y)R(U,\xi)Z \\ & +\eta(V)R(U,Y)Z - g(Z,Y)R(U,V)\xi + \eta(Z)R(U,V)Y] \end{aligned} \tag{5.21}$$

bulunur. (5.21) denkleminin her iki tarafının ξ vektör alanına göre iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \left[L_R + (\alpha^2 + \xi(\alpha))\right] [R(U,V)Z, Y - \eta(Y)g(R(U,V)Z,\xi) \\ & -g(U,Y)g(R(\xi,V)Z,\xi) + \eta(U)g(R(Y,V)Z,\xi) \\ & -g(V,Y)g(R(U,\xi)Z,\xi) + \eta(V)g(R(U,Y)Z,\xi) \\ & -g(Z,Y)g(R(U,V)\xi,\xi) + \eta(Z)g(R(U,V)Y,\xi)] \end{aligned} \tag{5.22}$$

elde edilir. (5.9) denklemi (5.22) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \left[L_R + (\alpha^2 + \xi(\alpha))\right] [R(U,V,Z,Y) - (\alpha^2 + \xi(\alpha)) [-g(Z,V)\eta(U)\eta(Y) \\ &\quad + g(Z,U)\eta(V)\eta(Y) - g(Y,U)g(Z,V) + g(U,Y)\eta(V)\eta(Z) \\ &\quad + g(V,Z)\eta(Y)\eta(U) - g(Y,Z)\eta(V)\eta(U) - g(V,Y)\eta(U)\eta(Z) \\ &\quad + g(V,Y)g(Z,U) + g(Y,Z)\eta(U)\eta(V) - g(Z,U)\eta(V)\eta(Y) \\ &\quad + g(Y,V)\eta(U)\eta(Z) - g(Y,U)\eta(Z)\eta(V)]] \end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. Bu yukarıdaki denklem uygun bir kontraksiyonla

$$0 = \left[L_R + (\alpha^2 + \xi(\alpha))\right] [S(V,Z) + 2(\alpha^2 + \xi(\alpha))g(V,Z)]$$

haline dönüşür. Bu son denklem yardımıyla iki durum ortaya çıkar. Yukarıdaki denklem sadece ya

$$-L_R = (\alpha^2 + \xi(\alpha))$$

ya da

$$S(V,Z) = \lambda g(V,Z), \ \lambda = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))$$

durumlarında sağlanır. Böylece bu iki durum bizi teoremin ispatına ulaştırır.

Teorem 5.4 Bir M^3 psödo-simetrik alfa-Kenmotsu manifoldu $\lambda = -2\alpha^2$ ile belirli bir Einstein manifoldudur. Burada alfa, pozitif bir sabit ve $L_R \neq -\alpha^2$ dır.

İspat: Hipotez gereğince Teorem 5.3 göz önüne alındığında bir alfa pozitif sabit için

$$0 = \left[L_R + \alpha^2\right] [S(V,Z) + 2\alpha^2 g(V,Z)] \tag{5.23}$$

elde edilir. Burada $L_R \neq -\alpha^2$ ise

$$S(V,Z) = -2\alpha^2 g(V,Z) \tag{5.24}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.5 Eğer M^3 bir alfa-Kenmotsu manifoldu genelleştirilmiş psödo-Ricci simetrik ise o zaman $(3\alpha - 1)(\alpha^2 + \xi(\alpha)) \neq 0$ olmak üzere, M^3 bir Einstein manifoldudur.

İspat: Kabul edelim ki, M^3 bir genelleştirilmiş psödo-Ricci simetrik alfa-Kenmotsu manifoldu olsun. Bu takdirde, (2.18) ve (2.19) yardımıyla her keyfi vektör alanı için,

$$(R(X,Y)\cdot R)(U,V)Z=\alpha((X\wedge_S Y)\cdot R)(U,V)Z$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)R(U,V)Z-R(R(X,Y)U,V)Z-R(U,R(X,Y)V)Z\\
&-R(U,V)R(X,Y)Z=\alpha[S(Y,R(U,V)Z)X-S(X,R(U,V)Z)Y\\
&-S(Y,U)R(X,V)Z+S(X,U)R(Y,V)Z-S(Y,V)R(U,X)Z\\
&+S(X,V)R(U,Y)Z-S(Y,Z)R(U,V)X+S(X,Z)R(U,V)Y]
\end{aligned}\tag{5.25}$$

yazılır. (5.8) ve (5.10) kullanılarak U ve Y yerine ξ vektör alanı alınırsa

$$\begin{aligned}
&-(\alpha^2+\xi(\alpha))[(\alpha^2+\xi(\alpha))g(V,Z)Y+R(Y,V)Z-(\alpha^2+\xi(\alpha))g(Y,Z)V]\\
=\;&\alpha[(\alpha^2+\xi(\alpha))\eta(Z)S(Y,V)\xi-2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2g(V,Z)Y\\
&-2(\alpha^2+\xi(\alpha))R(Y,V)Z+2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2\eta(V)g(Y,Z)\xi\\
&+(\alpha^2+\xi(\alpha))\eta(V)S(Y,Z)\xi-(\alpha^2+\xi(\alpha))S(Y,Z)V\\
&+2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2\eta(Z)g(Y,V)\xi],
\end{aligned}\tag{5.26}$$

dır. Bu son eşitliğin her iki tarafının K vektör alanına göre iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
&-(\alpha^2+\xi(\alpha))[(\alpha^2+\xi(\alpha))g(V,Z)g(Y,K)+g(R(Y,V)Z,K)\\
&-(\alpha^2+\xi(\alpha))g(Y,Z)g(V,K)]\\
=\;&\alpha[(\alpha^2+\xi(\alpha))\eta(Z)\eta(K)S(Y,V)-2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2g(V,Z)g(Y,K)\\
&-2(\alpha^2+\xi(\alpha))g(R(Y,V)Z,K)+2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2\eta(V)\eta(K)g(Y,Z)\\
&+(\alpha^2+\xi(\alpha))\eta(V)\eta(K)S(Y,Z)-(\alpha^2+\xi(\alpha))S(Y,Z)g(V,K)\\
&+2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2\eta(Z)\eta(K)g(Y,V)\xi]
\end{aligned}\tag{5.27}$$

bulunur. Burada V ve Z vektör alanlarına göre kontraksiyon yapılırsa

$$0=(3\alpha-1)(\alpha^2+\xi(\alpha))\left[S(Y,K)+2(\alpha^2+\xi(\alpha))g(Y,K)\right]\tag{5.28}$$

yazılır. (5.28) denklemi ya $(3\alpha-1)(\alpha^2+\xi(\alpha))=0$ ya da $\lambda=-2(\alpha^2+\xi(\alpha))$ olmak üzere, $S(Y,K)=\lambda g(Y,K)$ dır. Bundan dolayı $(3\alpha-1)(\alpha^2+\xi(\alpha))\neq 0$ seçilirse istenen sonuca ulaşılır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.6 Eğer M^3 bir alfa-Kenmotsu manifoldu genelleştirilmiş psödo-Ricci simetrik ise o zaman $(3\alpha-1)\alpha^2 \neq 0$ olmak üzere, M^3 bir Einstein manifoldudur. Burada alfa, pozitif bir sabittir.

İspat: Hipoteze göre Teorem 5.5 gereğince alfa pozitif sabiti için,

$$\begin{aligned} & -\alpha^2[\alpha^2 g(V,Z)g(Y,K)+g(R(Y,V)Z,K)-\alpha^2 g(Y,Z)g(V,K) \\ = \; & \alpha[\alpha^2\eta(Z)\eta(K)S(Y,V)-2\alpha^4 g(V,Z)g(Y,K)-2\alpha^2 g(R(Y,V)Z,K) \\ & +2\alpha^4\eta(V)\eta(K)g(Y,Z)+\alpha^2\eta(V)\eta(K)S(Y,Z)-\alpha^2 S(Y,Z)g(V,K) \\ & +2\alpha^4\eta(Z)\eta(K)g(Y,V)\xi] \end{aligned} \tag{5.29}$$

yazılır. Buradan kontraksiyondan sonra

$$0=\alpha^2(3\alpha-1)\left[S(Y,K)+2\alpha^2 g(Y,K)\right] \tag{5.30}$$

bulunur. O halde, $\alpha^2(3\alpha-1)\neq 0$ olmak üzere,

$$S(Y,K)=-2\alpha^2 g(Y,K) \tag{5.31}$$

dır. Burada $\lambda=-2\alpha^2$ dır. Böylece ispata ulaşılır.

Teorem 5.7 M^3 bir alfa-Kenmotsu manifoldu olsun. O zaman (2.18) koşulunun M^3 üzerinde sağlanması için gerek ve yeter şart manifoldun $H^3(-\alpha^2)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometrik olmasıdır. Burada $(3\alpha-1)(\alpha^2+\xi(\alpha))\neq 0$ dır.

İspat: Farz edelim ki, M^3 manifoldu $H^3(-\alpha^2)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometrik olsun. Bu durumda,

$$R\cdot R=LQ(S,R)=0 \tag{5.32}$$

denklemi aşikar olark sağlanır (Kenmotsu 1972, Vanhecke 1981). Öyleyse, şimdi (2.18) ve (2.19) denklemleri yardımıyla Teorem 5.5 gereğince

$$\begin{aligned} & -(\alpha^2+\xi(\alpha))[R(Y,V,Z,K)+(\alpha^2+\xi(\alpha))g(V,Z)g(Y,K) \qquad (5.33) \\ & -(\alpha^2+\xi(\alpha))g(Y,Z)g(V,K)] \\ = \; & \alpha[(\alpha^2+\xi(\alpha))\eta(Z)\eta(K)S(Y,V)-2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2 g(V,Z)g(Y,K) \\ & -2(\alpha^2+\xi(\alpha))g(R(Y,V)Z,K)+2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2\eta(V)\eta(K)g(Y,Z) \\ & +(\alpha^2+\xi(\alpha))\eta(V)\eta(K)S(Y,Z)-(\alpha^2+\xi(\alpha))S(Y,Z)g(V,K) \\ & +2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2\eta(Z)\eta(K)g(Y,V)\xi] \end{aligned}$$

yazılır. Buradan $(3\alpha - 1)(\alpha^2 + \xi(\alpha)) \neq 0$ için,

$$S(Y, K) = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))g(Y, K) \tag{5.34}$$

ve

$$r = S(e_i, e_i) = -6(\alpha^2 + \xi(\alpha)) \tag{5.35}$$

bulunur. (5.34) denklemi (2.18) eşitliğinde yerine koyulursa

$$R \cdot R = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))Q(g, R) \tag{5.36}$$

elde edilir. Fakat Sonuç 5.1 gereğince

$$R \cdot R = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))Q(g, R)$$

olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $R \cdot R = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, manifold yarı-simetrik olduğundan M^3 manifoldu $H^3(-\alpha^2)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir (Kenmotsu 1972, Vanhecke 1981). Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.8 M^3 bir alfa-Kenmotsu manifoldu olsun. O zaman (2.18) koşulunun M^3 üzerinde sağlanması için gerek ve yeter şart manifoldun $H^3(-\alpha^2)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometrik olmasıdır. Burada alfa, pozitif bir sabit ve $\alpha^2(3\alpha - 1) \neq 0$ dır.

İspat: Pozitif bir alfa sabiti için Teorem 5.7 göz önüne alınırsa benzer işlemlerden sonra $\alpha^2(3\alpha - 1) \neq 0$ olmak üzere,

$$S(Y, K) = -2\alpha^2 g(Y, K)$$

ve

$$r = S(e_i, e_i) = -6\alpha^2 \tag{5.37}$$

bulunur. Burada (5.31) denklemi (2.18) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$R \cdot R = -2\alpha^2 Q(g, R)$$

ve Sonuç 5.1 yardımıyla

$$R \cdot R = -\alpha^2 Q(g, R)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Benzer mantıkla ispata ulaşılır.

Teorem 5.9 M^3 bir genelleştirilmiş psödo-Ricci simetrik alfa-Kenmotsu manifold olsun. M^3 yarı-simetrik değilse o zaman $(3\alpha-1)(\alpha^2+\xi(\alpha))\neq 0$ olmak üzere, M^3 manifoldu $r=-6(\alpha^2+\xi(\alpha))$ ve $L=\frac{1}{2}$ ile verilen bir Einstein manifoldudur.

İspat: Kabul edelim ki, M^3 bir genelleştirilmiş psödo-Ricci simetrik alfa-Kenmotsu manifold olsun. Teorem 5.5 de kullanılan ispat yöntemiyle

$$\begin{aligned}
&-(\alpha^2+\xi(\alpha))R(Y,V,Z,K)-(\alpha^2+\xi(\alpha))^2g(V,Z)g(Y,K)\\
&+(\alpha^2+\xi(\alpha))^2g(Y,Z)g(V,K) \qquad (5.38)\\
=\;& L\left\{\alpha[(\alpha^2+\xi(\alpha))\eta(Z)\eta(K)S(Y,V)-2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2g(V,Z)g(Y,K)\right.\\
&-2(\alpha^2+\xi(\alpha))g(R(Y,V)Z,K)+2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2\eta(V)\eta(K)g(Y,Z)\\
&+(\alpha^2+\xi(\alpha))\eta(V)\eta(K)S(Y,Z)-(\alpha^2+\xi(\alpha))S(Y,Z)g(V,K)\\
&\left.+2(\alpha^2+\xi(\alpha))^2\eta(Z)\eta(K)g(Y,V)\xi]\right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$0=(3\alpha-1)(\alpha^2+\xi(\alpha))L\left[S(Y,K)+2(\alpha^2+\xi(\alpha))g(Y,K)\right] \qquad (5.39)$$

denklemine ulaşılır. M^3 yarı-simetrik olmadığından $L\neq 0$ dır. Böylece (5.39) denklemi $(3\alpha-1)(\alpha^2+\xi(\alpha))\neq 0$ olmak üzere,

$$S(Y,K)=-2(\alpha^2+\xi(\alpha))g(Y,K)$$

formundadır. O halde, M^3 manifoldu $r=-6(\alpha^2+\xi(\alpha))$ skalar eğrilikle verilen bir Einstein manifoldudur. Burada (2.18) ve yukarıdaki denklem birlikte düşünülürse

$$R\cdot R=-2(\alpha^2+\xi(\alpha))LQ(g,R) \qquad (5.40)$$

elde edilir. Fakat Sonuç 5.1 gereğince

$$-2(\alpha^2+\xi(\alpha))L=-(\alpha^2+\xi(\alpha))$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $L=\frac{1}{2}$ sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.10 M^3 bir genelleştirilmiş psödo-Ricci simetrik alfa-Kenmotsu manifold olsun. M^3 yarı-simetrik değilse o zaman $(3\alpha-1)\alpha^2\neq 0$ olmak üzere, M^3 manifoldu

$r = -6\alpha^2$ ve $L = \frac{1}{2}$ ile verilen bir Einstein manifoldudur. Burada alfa, pozitif bir sabittir.

İspat: Kabul edelim ki, M^3 bir genelleştirilmiş psödo-Ricci simetrik alfa-Kenmotsu manifold olsun. O halde, alfa pozitif bir sabit olmak üzere, Teorem 5.5 gereğince

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 R(Y,V,Z,K) - \alpha^4 g(V,Z)g(Y,K) + \alpha^4 g(Y,Z)g(V,K) \\ = \;& L\left\{\alpha[\alpha^2\eta(Z)\eta(K)S(Y,V) - 2\alpha^4 g(V,Z)g(Y,K)\right. \\ & -2\alpha^2 g(R(Y,V)Z,K) + 2\alpha^4\eta(V)\eta(K)g(Y,Z) \\ & +\alpha^2\eta(V)\eta(K)S(Y,Z) - \alpha^2 S(Y,Z)g(V,K) \\ & \left.+2\alpha^4\eta(Z)\eta(K)g(Y,V)\xi]\right\} \end{aligned} \tag{5.41}$$

bulunur. Buradan

$$0 = (3\alpha - 1)\alpha^2 L\left[S(Y,K) + 2\alpha^2 g(Y,K)\right] \tag{5.42}$$

yazılır. M^3 yarı-simetrik olmadığından $L \neq 0$ dır. Böylece (5.42) den $\alpha^2(3\alpha - 1) \neq 0$ olmak üzere,

$$S(Y,K) = -2\alpha^2 g(Y,K)$$

dır. Bu son denklemden $r = -6\alpha^2$ elde edilir. Benzer şekilde, Teorem 5.5 ve (2.18) yardımıyla

$$-2\alpha^2 L = -\alpha^2 \tag{5.43}$$

denklemine ulaşılır. Böylece istenen sonuç elde edilir.

Teorem 5.11 Eğer M^3 bir psödo-Ricci simetrik alfa-Kenmotsu manifoldu ise o zaman seçilen keyfi vektör alanlarından birincisi ve üçüncüsü ξ vektör alanına kısıtlandığında $L_S \neq -(\alpha^2 + \xi(\alpha))$ olmak üzere, M^3 manifoldu $r = -6(\alpha^2 + \xi(\alpha))$ ile verilen bir Einstein manifoldudur.

İspat: Varsayalım ki, M^3 bir psödo-Ricci simetrik alfa-Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda keyfi vektör alanları için,

$$(R(X,Y) \cdot S)(U,W) = L_S Q(g,S)(U,W;X,Y) \tag{5.44}$$

ile tanımlıdır. Yukarıdaki denklem

$$(R(X,Y) \cdot S)(U,W) = L_S((X \wedge_g Y) \cdot S)(U,W) \tag{5.45}$$

veya

$$\begin{aligned} &L_S[-g(U,Y)S(X,W)+g(X,U)S(Y,W)-g(Y,W)S(U,X) \\ &+g(X,W)S(U,Y)]=-S(R(X,Y)U,W)-S(U,R(X,Y)W) \end{aligned} \tag{5.46}$$

biçimlerinde de yazılabilir. Burada özel olarak, seçilen X, Y, U, W vektör alanlarından birinci ve üçüncü olanlarını ξ vektör alanı olarak seçtiğimizde yani, $X = U = \xi$ ise o zaman (5.46) denklemi (5.8) ve (5.10) yardımıyla

$$\begin{aligned} &L_S[-\eta(Y)S(\xi,W)+S(Y,W)-g(Y,W)S(\xi,X) \\ &+\eta(W)S(U,Y)]=-S(R(\xi,Y)\xi,W)-S(\xi,R(\xi,Y)W) \end{aligned} \tag{5.47}$$

haline dönüşür. Burada $K = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))$ alınırsa

$$KS(Y,W)-2K^2g(Y,W)=L_S\left[S(Y,W)-2Kg(Y,W)\right]$$

bulunur. Bu son eşitlik düzenlenirse

$$0=\left[K-L_S\right]\left[S(Y,W)-2Kg(Y,W)\right] \tag{5.48}$$

şeklinde yazılabilir. Burada K yerine yazılırsa

$$0=\left[L_S+(\alpha^2+\xi(\alpha))\right]\left[S(Y,W)+2(\alpha^2+\xi(\alpha))g(Y,W)\right] \tag{5.49}$$

elde edilir. Böylece bu kısıtlama altında $L_S \neq -(\alpha^2 + \xi(\alpha))$ için $\lambda = -2(\alpha^2 + \xi(\alpha))$ ile verilen

$$S(Y,W)=\lambda g(Y,W)$$

denklemine ulaşılır ki bu da ispatı tamamlar. Burada $r = -6(\alpha^2 + \xi(\alpha))$ olduğu kolayca görülür.

Sonuç 5.2 M^3 bir alfa-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M^3 psödo-Ricci simetrik ise o zaman seçilen keyfi vektör alanlarından birincisi ve üçüncüsü ξ vektör alanına kısıtlanmak üzere, manifold ya $L_S = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))$ şartını sağlar ya da $r = -6(\alpha^2 + \xi(\alpha))$ ile verilen bir Einstein manifoldudur.

Sonuç 5.3 M^3 bir alfa-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M^3 psödo-Ricci simetrik ise o zaman seçilen keyfi vektör alanlarından birincisi ve üçüncüsü ξ vektör alanına kısıtlanmak üzere, manifold ya $L_S = -\alpha^2$ şartını sağlar ya da $r = -6\alpha^2$ ile verilen bir Einstein manifoldudur. Burada alfa pozitif bir sabittir.

6 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında hemen hemen alfa-kosimplektik manifoldlar üzerinde bazı tensör şartlarını sağlayan yarı-simetrik ve psödo-simetrik koşullar ele alınmıştır. Bu çalışmada amacımız bazı özel şartları kullanarak belli bazı yarı-simetrik ve psödo-simetrik uzaylar üzerinde sınıflandırma yapmaktır. Bulduğumuz sonuçlar bazı özel kısıtlamalar veya özel şartlar altında geçerlidir. Burada alfa sıfırdan farklı pozitif düzgün bir fonksiyon seçilmiştir. Ayrıca, üç boyutlu alfa-Kenmotsu manifoldları özellikle psödo-simetrik koşullar üzerinde incelenmiştir.

Gelecek çalışmalarımızda özellikle bu çalışmada kullandığımız tensör koşulları hemen hemen alfa-kosimplektik veya hemen hemen alfa-Kenmotsu manifoldları üzerinde daha genel manada irdelenecek ve psödo-simetrik ve psödo yarı-simetrik gibi özel tensör şartları altında hemen hemen alfa-kosimplektik yapılar (k, μ, ν)-uzaylarında incelenecektir.

7 KAYNAKLAR

Aktan N., Yıldırım M. and Murathan, C. (2013). Almost f-cosymplectic manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **11:** 775-787.

Bagewadi, S.C. and Venkatesha, K.T. (2007). Some curvature tensors on a trans-Sasakian manifold. *Turkish Journal of Mathematics*, **31:** 111-121.

Bagewadi, S.C. and Kumar, G.E. (2005). On irrotational D-conformal curvature tensor. *Novi Sad Journal of Mathematics*, **35:** 85-92.

Bang-Yen, C. (1973). Geometry of submanifolds. M. Dekker Inc., New York.

Blair, D. E. (1970). Geometry of manifolds with structural group $U(n)\times O(s)$. *Journal of Differential Geometry*, **4:** 155-167.

Blair, D. E. (1976). Contact manifolds in Riemannian geometry. Springer-Verlag, New York.

Blair. D. E. (1977). Two remarks on contact metric structures. *Tôhoku Mathematical Journal,* **29:** 319-324.

Blair, D. E. (2002). Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Progress in Mathematics, Birkhâuser Series, Berlin.

Boeckx, E. and Cho, J.T. (2005). η-parallel contact metric spaces. *Differential Geometry and its Applications,* **22:** 275-285.

Boeckx, E. and Cho, J.T. (2006). Locally symmetric contact metric manifolds. *Monatsh Mathematics,* **148:** 269-281.

Cahen, M. and Parker, M. (1970). Sur des classes d'espaces pseudo-Riemanniens symetriques. *Bull. Soc. Math.Belg.,* **22:** 339-354.

Cahen, M. and Parker, M. (1980). Pseudo-Riemannian symmetric sapaces. *Mem. Amer. Math. Soc.,* **24**(229)**:** 1-108.

Calvaruso, G. and Perrone, D. (2001). Semi-symmetric contact metric three-manifolds. *Yokohama Mathematical Journal,* **49:** 149-161.

Cartan, E. (1926). Sur une classe remarquable d'espaces de Riemannian. *Bull. Soc. Math. France,* **54:** 214-264.

Chaki, M.C. (1987). On pseudosymmetric manifolds. *An. Ştiint Univ. Al. Cuza din Iaşi I-a Math. N.S.,* **33**(1)**:** 53-58.

Chaki, M.C. and Chaki, B. (1987). On pseudo-symmetric manifolds admitting a type of semi symmetric connection. *Schoow Journal of Mathematics,* **13**(1)**:** 1-7.

Chaki, M.C. (1988). On pseudo Ricci symmetric manifolds. *Bulg. J. Phys.,* **15:** 525-531.

Chinea, D. and Gonzalez, C. (1990). A classification of almost contact metric manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **156:** 15-36.

Cho, J.T. and Inoguchi, J.I. (2005). Pseudo-symmetric contact 3-manifolds. *J. Korean Math. Soc.,* **42**(5)**:** 913-932.

Dacko, P. and Olszak, Z. (1998). On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves. *Rend. del Sem. Matematico Univ. Politec. di Torino,* **56:** 89-103.

De, U.C., Yıldız, A. and Çetinkaya, A. (2015). Certain results on a type of contact metric manifold. *Afr. Math.,* **26:** 1229-1236.

Deszcz, R. (1992). On pseudosymmetric spaces. *Bull. Belg. Math. Soc. Ser. A,* **44:** 1-34.

Deszcz,(2004). Classification of space-times satisfying some pseudo-symmetry type conditions. *Soochow Journal of Mathematics,* **30**(3)**:** 339-349.

Dileo G. and Pastore M. (2007). Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, **14:** 343-354.

Dubey, R.S.D. (1979). Generalized recurrent spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.,* **10:** 1508-1513.

Goldberg, S. I. and Yano, K. (1969). Integrability of almost cosymplectic structure, *Pacific J. Math.,* **31:** 373-382.

Goldberg, S. I. (1969). Integrability of almost Kaehler manifolds, *Proceedings of the Amer. Math. Soc.,* **21**(1): 96-100.

Hacısalihoğlu, H. H. (1993). Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.

Hacısalihoğlu, H. H. ve Ekmekçi N. (2003). Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.

Hashimoto, N. and Sekizawa, M. (2000). Three dimensional conformally flat pseudo-symmetric spaces of constant type. *Arch. Math. (Brno),* **36:** 279-286.

Janssens, D. and Vanhecke, L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal,* **4:** 1-27.

Jun, J., De, U.C and Pathak, G. (2005). On Kenmotsu manifolds. *Journal of the Korean Math. Soc.,* **42:** 435-445.

Kenmotsu, K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tôhoku Mathematical Journal,* **24:** 93-103.

Kim, T.W. and Pak, H.K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Mathematica Sinica,* **21:** 841-846.

Kim, T.W. and Pak, H.K. (2007). Criticality of characteristic vector fields on almost cosymplectic manifolds. *Journal of the Korean Math. Soc.,* **44**(3)**:** 605-613.

Kowalski, O. and Sekizawa, M. (1997). Pseudo-symmetric spaces of constant type in dimension three-elliptic spaces. *Rend. Mat. Appl.,* **17:** 477-512.

Mantica, C.A. and Molinari, L.G. (2011). A second order identity for the Riemann tensor and applications. *Colloq. Math.,* **122:** 69-82.

Nomizu, K. (1968). On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor. *Tôhoku Math. Journal,* **20:** 46-69.

Ogawa, Y. (1977). A condition for a compact Kaehlerian space to be locally symmetric. *Natural Science Report. Ochanomizu University*, **28:** 21-23.

O'neill, B. (1983). Semi Riemannian Geometry, Academic Press, London.

Olszak, Z. (1981). On almost cosymplectic manifolds. *Kodai Math. Journal,* **4:**239-250.

Özgür, C. (2006). On Kenmotsu manifolds satisfying certain pseudosymmety conditions. *World App. Sci. J.,* **1**(2)**:** 144-149.

Öztürk, H. (2009). Hemen Hemen α-Kosimplektik (κ, μ, ν)-Uzayları, Doktora Tezi, AKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Öztürk H., Aktan N. and Murathan C. (2010). On α-Kenmotsu manifolds satisfying certain conditions. *Applied Sci.,* **12:** 115-126.

Öztürk, H., Aktan, N., Murathan, C. and Vanlı, A.T. (2014). Almost α-cosymplectic f-Manifolds. *The Journal of Al. Ioan Cuza University*, **60:** 211-226.

Öztürk, H. (2015). On α-Kenmotsu manifolds satisfying flatness conditions. *Journal of Advances in Mathematics,* **11**(8)**:** 5598-5608.

Öztürk, H. (2016). On invariant submanifolds of almost α-Kenmotsu manifolds. *Comptes rendus de l'Acad emie bulgare des Sciences,* **69**(3)**:** 247-258.

Öztürk, H. (2016). Some notes on almost α-cosymplectic manifolds. *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra,* **25**(1)**:** 1-12.

Öztürk, H. (2016). On almost α-Kenmotsu manifolds with some tensor fields. *AKU J. Sci. Eng.* **16:** 256-264.

Öztürk, H. (2017). On α-Kenmotsu manifolds satisfying semi-symmetric conditions. *Konuralp Journal of Mathematics,* **5**(2)**:** 192-206.

Öztürk, H. and Öztürk, S., (2018). A note on almost alpha-cosymplectic manifolds. *Int. Journal of Engineering, Science and Maths.,* **7**(12)**:** 76-83.

Öztürk, H. and Öztürk, S., (2018). On 3-dimensional almost alpha Kenmotsu manifolds. *Int. Journal of Engineering, Science and Maths.,* **7**(12)**:** 130-137.

Öztürk, H., Öztürk, S. and Taş, E. (2018). Some remarks on almost alpha cosymplectic manifolds. *Int. Journal of Arts and Sci.,* **11**(1)**:** 397-404.

Öztürk, H., Öztürk, S. and Yadav, S.K. (2018). A note on almost alpha Kenmotsu manifolds. *Academic Journal of Sci.,* **8**(2)**:** 225-232.

Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım.

Shaikh, A.A. and Roy, I. (2010). On quasi generalized recurrent manifolds. *Math. Pannonica,* **21**(2)**:** 251-263.

Shaikh, A.A., Deszcz, R., Hotlos, M., Jelowicki, J. and Kundu, H. (2015). On pseudo-symmetric manifolds. Arxiv:1405.2181v2, Math.Dg., Doi: 10.5486/PMD.2015.7057.

Sharpe, R.W. (1997). Differential Geometry, Graduate Texts in Math., Springer.

Szabó, Z. I. (1982). Structure theorem on Riemannian spaces satisfying $R.R = 0$. *Journal of Diff. Geo.,* **17:** 531-582.

Tanno, S. (1969). The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds. *Tôhoku Math. J.,* **21:** 21-38.

Tanno, S. (1969). Isometric immersion of Sasakian manifolds in spheres. *Kodai Math. J.,* **21:** 448-458.

Walker, A.G. (1950). On Ruse's spaces of recurrent curvature. *Proc. London Math. Soc.,* **52:** 36-64.

Vaisman, I. (1980). Conformal changes of almost contact metric manifolds. *Lecture Notes in Maths.,* **792:** 435-443.

Venkatesha, K.T. and Divyashree, G. (2017). Three Dimesional f-Kenmotsu manifold satisfying certain curvature conditions. *Cubo A Math. Journal,* **19**(1)**:** 79-87.

Yano, K. and Kon, M. (1984). Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3.World Sci. Publ. Corp., Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Esra TAŞ (ULUKAVAK)
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Doğanhisar / 08.02.1992
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	:	0553-0125841/esratas.4242@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Akşehir Lisesi, (2006-2010)
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, (2010-2014)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Gençlik ve Spor Bakanlığı Kredi Yurtlar Kurumu, 2017-

Yayınları (SCI ve Diğer):

1. Öztürk, H., Öztürk, S. and Taş, E. (2018). Some remarks on almost alpha cosymplectic manifolds. *Int. Journal of Arts and Sci.,* **11**(1)**:** 397-404.

16.FEN.BİL.16 numaralı Proje Kapsamındaki Etkinlikler**:**

1. Öztürk, H., Öztürk, S. and Taş, E. (2017). On three dimensional almost α-cosymplectic manifolds. Uluslararası 15. Geometri Sempozyumu, Poster bildiri, Amasya, Türkiye.
2. Öztürk, H., Öztürk, S. and Taş, E. (2017). On 3-dimensional almost alpha-cosymplectic manifolds. ICAAMM 2017, Poster bildiri, İstanbul, Türkiye.
3. Öztürk, H., Öztürk, S. and Taş, E. (2018). Some remarks on almost alpha cosymplectic manifolds. IJAS International Conference for Academic Disciplines, Sözlü bildiri, Paris, Fransa.