S – KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan KARA

Danışman
Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$s-$KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

Hasan KARA

Danışman
Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Hasan KARA tarafından hazırlanan "s-Konveks Fonksiyonlar için Bazı Yeni Eşitsizlikler Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 27/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman :Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

		İmza
Başkan	:Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi	....
Üye	:Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin BUDAK Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi	....
Üye	:Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi	....

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/06/2018

Hasan KARA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$S-$KONEVKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

Hasan KARA
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Bu tez Analiz ve Fonksiyonlar teorisi ile Uygulamalı Matematik anabilim dallarında sıklıkla kullanılan konveks fonksiyonlar ve uygulama alanının genişliği itibarı ile İntegral Eşitsizlikleri üzerine kurulmuştur. Giriş bölümünde konveks fonksiyonlar ve eşitsizliklerin önemi vurgulanmıştır. İkinci bölümde; matematiksel programlamada, mühendisliğin çeşitli alanları ile optimizasyon teorilerinde kullanılan, oldukça yaygın biçimde çalışılan konveks küme ve konveks fonksiyon kavramları tanıtılarak, genelleştirilmiş konvekslik kavramlarından olan $\varphi-$konvekslik ve $s-$konvekslikten bahsedilmiştir. Ayrıca bu bölümünde geçen kavramlar hakkında yapılan çalışmaların tarihsel sürecinden bahsedilmektedir. Üçüncü bölüme geçtiğimizde ise temel olarak literatürde sık kullanılan ve iyi bilinen, hazırlanan bu teze de temel oluşturan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin sağ ve sol tarafıyla ilgili $s-$konvekslik için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Sonuçlar bölümünde de ilk dört bölümün değerlendirilmesi gerçekleştirilmiştir.

2018, v + 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, $s-$konvekslik, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Jensen eşitsizliği, Hölder eşitsizliği

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON SOME NEW INEQUALITIES FOR S – CONVEX FUNCTIONS

Hasan KARA

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Eyüp KİRİŞ

This thesis is based on Integral Inequalities with the convex functions and application of convex functions which is frequently used in the Applied Mathematics and theory of Functional Analysis. At the introduction, it is emphasizes the importance of convex functions and inequalities. In the second chapter; Convex set and convex function are introduced which are using in the mathematical programming, various fields of engineering and optimization theories and generalized convexity concepts are mentioned that is well known as a φ - convexity and s - convexity. It also mentions the historical process of the studies on the concepts that are in this section. When we go through the third section, the basic definitions and theorems which are used in the literature and which are well known and prepared are included. In the fourth part, new results are obtained for the convexity of the Hermite-Hadamard type inequalities on the right and left sides. Suggestions for evaluations of the results found in the results section and suggestions for the work that can be done to the reader are presented.

2018, v + 44 pages

Keywords: Convexity, s – convexity, Hermite-Hadamard inequality, Jensen inequality, Hölder inequality.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ’ e, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA’ ya, desteklerinden dolayı Mehmet KAYA ve Menekşe KAYA’ ya, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı fedakâr aileme teşekkür ederim.

Hasan KARA
AFYONKARAHİSAR, 2018

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$L[\mathrm{a},\mathrm{b}]$	$[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\int_a^b$	Belirli integral
$\in$	Elemanıdır
f'	f Fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	f Fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
I	$\mathbb{R}$ içinde bir aralık
I^o	I nın içi
$\int$	İntegral operatörü
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$\sum$	Toplam Operatörü

1. GİRİŞ

Analiz ilk olarak matematikçilerin temelde mekanikteki gereksinimlerini karşılamak üzere icat edilmiştir. Analiz, eğrilerin eğimlerini tanımlamasını, hareket eden cisimlerin hızlarını ve ivmelerini hesaplamasını, toplara en fazla erişimi sağlayacak ateşleme açılarını bulmasını ve gezegenlerin ne zaman birbirine en yakın veya en uzak konumda olacaklarını tahmin etmelerini sağladı. Kısaca analiz insanın evrende olup biten olayların hangi kurallarla olduğunu, belki de bir anlamda olayların şifrelerini insanların açıklamalarını sağladı. Buna göre, matematiğin dolayısıyla analizin evrende olmadığı veya kullanılmadığı yer yoktur. Analiz, günümüzde Fizik, Mühendislik, Astronomi, Kimya, Tıp, Ulaşım, Gıda gibi hemen her alanda kullanılmaktadır.

Modern matematik tarihinin ilk zamanlarında "Sonsuz Küçükler Hesabı" olarak bilinen matematik disiplini kabaca limit, türev ve integral kavramlarından oluşmaktadır. Limit, bir fonksiyonun tanım kümesinin belirli bir noktasının civarında bulunan tüm elemanlarının görüntülerinin de değer kümesinin belirli bir noktasının civarında olması durumudur. Gerçekte limit bir yaklaşımdır. Süreklilik, fonksiyonun bu yaklaşım anında kesintiye uğramamasıdır. Türev bir eğrinin teğetlerinin eğimlerinin yaklaştığı değer, integral ise bir eğrinin altında kalan alandır. Türev bir nokta için bilgi verir yani yereldir. İntegral ise türevin tersine bir noktada değil bir bölgedeki değişim hakkında bize bilgi verir. Buna göre, teğet demek türev, alan demek ise integraldir. İntegral teorisinden bahsederken bu alanların kıyası için eşitsizlikleri ele almadan geçmek mümkün değildir. Eşitsizlikler konusunda yapılan çalışmaların temelinde, pratik açıdan bakıldığında birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak yatmaktadır. Bu bağlamda literatürde çok kullanılan Hölder, Power-Mean, Üçgen vb. eşitsizlikleri gibi klasik eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir.

Eşitsizliğin uğraştığı spesifik konulardan biri de konveksliktir. Zaten konvekslik tanımı da temelde bir eşitsizliktir. Bu tezde son yıllarda çok kullanılan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol ve sağ tarafları ile ilgili yeni eşitsizlikler elde edildi. Bunu yaparken konvekslik kavramlarından $s-$ konvekslik kullanıldı.

2. LİTERATÜR BİLGİLERİ

Eşitsizlikler teorisi için çalışırken ilk başvurulması gereken eser "Inequalities" adlı kaynaktır (Hardy *et al.* 1934). Okuyucu bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini ve sonuçlarını bulabilir. Buna ek olarak yine adı "Inequalities" olan diğer temel kaynakçamız bu konuya devam etmektedir (Beckenbach and Bellman 1970). Mitronovic (1970)'in eşitsizliklerin analitik olarak incelendiği "Analytic Inequalities" adlı eseri de bu temel kaynakçaların içine dahil edebiliriz. Bu kaynaklar eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen okuyucu için el altında bulunması gereken kaynaklardır.

Eşitsizliklerin uğraştığı spesifik konulardan biri de giriş bölümünde bahsettiğimiz gibi konveks fonksiyonlardır. Konveks fonksiyonların daha kapsamlı bir şekilde araştırması "Convex Functions" adlı eserde kaleme alındı (Roberts and Varbeg 1976). Ayrıca sadece konveks fonksiyonlar içeren genel eşitsizlikler ile ilgili "Convex Functions Inequalities" adlı eser litaratürde mevcuttur (Pecaric 1987). Konveks fonksiyonların Analiz, Uygulamalı Matematik, Olasılık teorisi ve matematiğin diğer birçok alanında uygulamaları vardır. Ayrıca konveks fonksiyonlar, eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonların uygulamasının bir sonucu olan birçok eşitsizlik ile bağlantısı vardır. Örneğin Hölder ve Minkovski gibi genel eşitsizlikler konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliğinin bir sonucudur. Bu bağlamda konveks fonksiyonun tanımı da aslında bir eşitsizliktir. Dolayısıyla konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisinde çok önemli bir role sahiptir. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır.

Son yıllarda klasik konvekslik tanımından daha genel konveks fonksiyon çeşitleri oluşturulmaktadır. Bunlardan birisini de "Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen" adlı çalışmasında tanıtılan $s-$konveks fonksiyonlardır (Breckner 1978).

$s-$konvekslik ile ilgili bazı özelliklere "Some remarks on s-convex functions" adlı çalışmada yer verilmiştir (Hudzig and Maligranda 1994). Yaptığımız tezde ise bize asıl motivasyon sağlayan $\varphi-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ile ilgili 'On some generalized integral inequalities for $\varphi-$convex functions' adlı makaledir (Sarıkaya *et al.* 2015). Bu tezde ise türevlerinin mutlak değeri ve kuvvetleri ikinci anlamda $s-$konveks olan fonksiyonlar sınıfı için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin sol tarafıyla ilişkili yeni sonuçlar elde edilmiştir.

3. MATERYAL ve METOT

3.1 Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 3.1.1 $\forall x, y \in K$, $t \in [0,1]$ için $(1-t)x+ty \in K$ ise $K \subseteq \mathbb{R}$ kümesine klasik anlamda konveks küme denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 3.1.2 $\forall x, y \in K$, $t \in [0,1]$ için

$$f\left((1-t)x+ty\right) \le (1-t)f(x)+tf(y)$$

ise $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 3.1.3 $0 < s \le 1$ olsun. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu birinci anlamda s-konveks fonksiyonu ise $\forall x, y \ge 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$f(\alpha x+\beta y) \le \alpha^s f(x)+\beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu s-konveks fonksiyon sınıfı genellikle K_S^1 olarak bilinir (Matuszewska and Orlicz 1961).

Tanım 3.1.4 $0 < s \le 1$ olsun. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci anlamda s-konveks fonksiyonu ise $\forall x, y \ge 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için

$$f(\alpha x+\beta y) \le \alpha^s f(x)+\beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu s-konveks fonksiyon sınıfı genellikle K_S^2 olarak bilinir.

Açıkça görülüyor ki $s=1$ için klasik konvekslik elde edilir (Maden *et al.* 2014).

Teorem 3.1.5 (Hölder Eşitsizliği) $x_1,...,x_n$ **,** $y_1,...,y_n>0$ ve $p,q>1$ olmak üzere, ayrıca $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olduğu durumda,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i|\right)\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir (Bayraktar 2006).

İspat: Yukarıdaki x_i ve y_i lerden en az birinin sıfırdan farklı olduğunu düşünebiliriz. O halde $u=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ve $v=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ her ikisi de pozitiftir, Young eşitsizliğinde $x=x_i/u$ ve $y=y_i/v$ seçersek,

$$\frac{x_i}{u}\cdot\frac{y_i}{v}\leq\frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{x_i}{v}\right)^q$$

elde edilip taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{uv}\leq\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

olur. Bu da Hölder eşitsizliğini verir.

Teorem 3.1.6 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Bayraktar 2006).

Tanım 3.1.7 (Beta Fonksiyonu) $\mathrm{Re}(x), \mathrm{Re}(y) > 0$ ise

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

Bu eşitlik litaratürde Beta fonksiyonu olarak bilinir (Balcı 2010).

Teorem 3.1.8 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli fonksiyon ve f konveks bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

dır (Pecaric *et al.* 1992). Özellikle son otuz yıl içinde, bu türden eşitsizliklerin değişik varyanslar elde edilmiştir (Bakula *et al.* 2004, Set *et al.* 2010).

Teorem 3.1.9 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $I \in [0,1]$ üzerinde s- konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

Bu eşitsizlik s - konvekslik için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Dragomir *et al.* 1998).

Tanım 3.1.10 φ fonksiyonu $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olacak şekilde her $x,y\in[a,b]$ için $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f\left(t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)\right)\leq tf\left(\varphi(x)\right)+(1-t)f\left(\varphi(y)\right)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna $\varphi-$ konveks fonksiyon denir (Youness 1998).

Açıkça görülüyor ki φ fonksiyonu özdeşlik fonksiyonu ise bu tanımdan klasik konvekslik elde edilir. Böylece $\varphi-$ konveks fonksiyonun birçok özelliği kurulabilir.

Teorem 3.1.11 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli fonksiyon ve $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ için $\varphi-$ konveks fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\leq\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx\leq\frac{f\left(\varphi(a)\right)+f\left(\varphi(b)\right)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Cristescu 2004).

3.2 φ-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hamarad Tipindeki Eşitsizlik Üzerine

Teorem 3.2.1 J reel sayılarda bir aralık; $a,b \in J$ olacak şekilde $a<b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f\ : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde $\varphi-$konveks fonksiyon ise

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right) d\varphi(x) \leq \frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2} \qquad (1.1)$$

eşitsizliği sağlanır (Sarıkaya *et al.* 2015).

İspat: φ-konveks fonksiyon tanımından

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) & \\ &= \int_0^1 f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) dt \\ &= \int_0^1 f\left(\frac{(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)+t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)}{2}\right) dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)+f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)\right] dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Son integralde değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right) d\varphi(x)$$

olur. Benzer şekilde,

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)$$

$$\begin{aligned}
&=\int_0^1 f\left(\left(1-t\right)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)dt \\
&\leq\int_0^1 \left[\left(1-t\right) f\left(\varphi(a)\right)+tf\left(\varphi(b)\right)\right]dt \\
&=\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece eşitsizliğin iki tarafı da elde edilmiş olur.

Uyarı 3.2.2 (1.1) ifadesinde her $x\in[a,b]$ için $\varphi(x)=x$ alınırsa klasik Hermite-Hadamard eşitislizliğini oluşturur.

Teorem 3.2.3 J reel sayılarda bir aralık; $a,b\in J$ olacak şekilde $a<b$ ve $\varphi: J\to\mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f : I\subseteq \mathrm{R}\to \mathrm{R}$ fonksiyonu $I=[a,b]$ üzerinde $\varphi-$konveks fonksiyon ve $w : [\varphi(a),\varphi(b)]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$ e göre simetrik olsun. Bu durumda,

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} w\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)$$

$$\begin{aligned}
&\leq\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right)w\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x) \\
&\leq\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} w\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

eşitsiziliği elde edilir (Sarıkaya *et al.* 2015).

İspat: f fonksiyonu $\varphi-$konveks fonksiyon ve $w:[\varphi(a),\varphi(b)]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$ e göre simetrik ise,

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} w(\varphi(x))\,d\varphi(x)
&=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) w(\varphi(x))\,d\varphi(x)\\
&\le\frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\left[f(\varphi(a)+\varphi(b)-\varphi(x))+f(\varphi(x))\right]w(\varphi(x))\,d\varphi(x)\\
&=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,w(\varphi(x))\,d\varphi(x)\\
&=\frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\left[f(\varphi(a)+\varphi(b)-\varphi(x))\right]w(\varphi(x))\,d\varphi(x)\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,w(\varphi(x))\,d\varphi(x)\\
&\le\frac{1}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\left[f(\varphi(a))+f(\varphi(b))\right]w(\varphi(x))\,d\varphi(x)\\
&=\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} w(\varphi(x))\,d\varphi(x)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.4 (1.2) ifadesinde her $x\in[a,b]$ için $\varphi(x)=x$ alınırsa klasik konvekslik için ağırlıklı Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \le \int_a^b f(x)w(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx$$

elde edilir (Sarikaya *et al.* 2015).

Teorem 3.2.5 J reel sayılarda bir aralık; $a,b \in J$ olacak şekilde $a<b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f,w : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar $I=\left[\varphi(a),\varphi(b)\right]$ üzerinde negatif olmayan $\varphi-$ konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} M\left(\varphi(a),\varphi(b)\right) &= f\left(\varphi(a)\right)w\left(\varphi(a)\right)+f\left(\varphi(b)\right)w\left(\varphi(b)\right) \\ N\left(\varphi(a),\varphi(b)\right) &= f\left(\varphi(a)\right)w\left(\varphi(b)\right)+f\left(\varphi(b)\right)w\left(\varphi(a)\right) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} &2f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)w\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \\ &\qquad \le \frac{1}{\varphi(a)-\varphi(b)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right)w\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x) \\ &\qquad +\frac{1}{6}M\left(\varphi(a),\varphi(b)\right)+\frac{1}{3}N\left(\varphi(a),\varphi(b)\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya et al. 2015).

İspat: f ve w, $\varphi-$konveks fonksiyonlar olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)w\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\\
&\qquad = f\left(\frac{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)}{2}\right)\\
&\qquad \times w\left(\frac{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)}{2}\right)\\
&\qquad \le \frac{1}{2}\Big[f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)+f\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)\Big]\\
&\qquad \times \frac{1}{2}\Big[w\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)+w\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)\Big]\\
&\qquad = \frac{1}{4}\Big\{f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)w\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)\\
&\qquad + f\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)w\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)\Big\}\\
&\qquad + \frac{1}{4}\Big\{f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)w\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)\\
&\qquad + f\left((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)\right)w\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)\Big\}\\
&\qquad \le \frac{1}{4}\Big\{2t(1-t)\,f(\varphi(a)w(\varphi(a))+2t(1-t)\,f(\varphi(b))w(\varphi(b))\\
&\qquad + \left(t^2+(1-t)^2\right)\left[f(\varphi(a))w(\varphi(b))+f(\varphi(b))w(\varphi(a)\right]\Big\}
\end{aligned}
$$

olur. $[0,1]$ üzerinde t ye göre integral alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)w\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\\
&\qquad \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\left(\varphi(x)\right)w(\varphi(x))\,d\varphi(x)\right]\\
&\qquad + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}M\left(\varphi(a),\varphi(b)\right)+\frac{1}{3}N\left(\varphi(a),\varphi(b)\right)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda da ispat tamamlanır.

Uyarı 3.2.6 (1.3) ifadesinde her $x \in [a,b]$ için $\varphi(x) = x$ alınırsa

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)w\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{1}{6}M(a,b) + \frac{1}{3}N(a,b)$$

eşitsizliği elde edilir (Pachpatte 2003).

Teorem 3.2.7 J reel sayılarda bir aralık; $a,b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f, w : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar $I = [\varphi(a), \varphi(b)]$ üzerinde negatif olmayan $\varphi -$ konveks fonksiyonlar olsun. Buradan her $t \in [0,1]$ için

$$M(\varphi(a), \varphi(b)) = f(\varphi(a))w(\varphi(a)) + f(\varphi(b))w(\varphi(b))$$
$$N(\varphi(a), \varphi(b)) = f(\varphi(a))w(\varphi(b)) + f(\varphi(b))w(\varphi(a))$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))w(\varphi(x))d\varphi(x) \leq \frac{1}{6}M(\varphi(a), \varphi(b)) + \frac{1}{3}N(\varphi(a), \varphi(b)) \quad (1.4)$$

eşitsizliği sağlanır (Sarıkaya *et al.* 2015).

İspat: f ve w, φ- konveks fonksiyon olduklarından,

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))w(\varphi(x))d\varphi(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right) w\left(\varphi(a)+\varphi(b)-\varphi(x)\right) d\varphi(x) \\
&= \int_0^1 f(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)) w((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)) dt \\
&\leq \int_0^1 \left[tf(\varphi(a))+(1-t)\, f(\varphi(b)) \right] \left[(1-t)\, w(\varphi(a))+tw(\varphi(b)) \right] dt \\
&= \int_0^1 \left\{ t(1-t)\left[f(\varphi(a))w(\varphi(a))+f(\varphi(b))w(\varphi(b)) \right] \right. \\
&\quad \left. +t^2 f(\varphi(a))w(\varphi(b))+(1-t)^2 f(\varphi(b))w(\varphi(a) \right\} dt \\
&= \frac{1}{6} M\left(\varphi(a),\varphi(b)\right)+\frac{1}{3} N\left(\varphi(a),\varphi(b)\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Uyarı 3.2.8 (1.4) ifadesinde her $x \in [a,b]$ için $\varphi(x) = x$ alınırsa klasik konvekslik için,

$$
\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{1}{6} M(a,b) + \frac{1}{3} N(a,b)
$$

eşitsizliği elde edilir (Pachpatte 2003).

3.3 Hermite-Hadamard Tipindeki Eşitsizliklerin Sağ ve Sol taraflarına Üzerine

Lemma 3.3.1 J reel sayılarda bir aralık; $a,b \in J$ olacak şekilde $a < b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $\varphi(a), \varphi(b) \in I$ için $f' \in L_1\left[\varphi(a), \varphi(b)\right]$ ise

$$p(t)=\begin{cases} t, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \\ t-1, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\left(\varphi(x)\right)d\phi(x)-f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)$$
$$=\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)\int_0^1 p(t)\,f'\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)dt$$

eşitliği sağlanır (Sarikaya *et al.* 2015).

İspat: Kısmi integrasyon formülü yardımıyla,

$$\int_0^1 p(t)\,f'\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} tf'\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)\,f'\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)dt$$
$$=-\left.\frac{tf\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\right|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_0^{\frac{1}{2}} f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)dt$$
$$-\left.\frac{(t-1)\,f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}+\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_0^{\frac{1}{2}} f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)dt$$
$$=-\frac{f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)}{\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)}+\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_0^1 f\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)dt$$

özdeşliği elde edilir. İntegrasyonda değişken değiştirmesi yapılırsa istenen özdeşlik elde edilir.

Teorem 3.3.2 J reel sayılarda bir aralık, $a,b \in J$ olacak şekilde $a<b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli artan fonksiyon olsun. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir ve $\varphi(a), \varphi(b) \in I$ için $f' \in L_1[\varphi(a), \varphi(b)]$ olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[\varphi(a), \varphi(b)]$ üzerinde $\varphi-$konveks ise,

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(a)} f(\varphi(x))d\varphi(x) - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(\varphi(b)-\varphi(a))}{8}\left[|f'(\varphi(a))| + |f'(\varphi(b))|\right] \tag{1.5}$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya *et al.* 2015).

İspat: Lemma 3.3.1 kullanılarak ve $|f'|$ fonksiyonu φ-konveks olduğundan aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))d\varphi(x) - f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\phi(b)-\phi(a)}{2}\int_0^1 |p(t)|\left|f'(t\phi(a)+(1-t)\phi(b))\right|dt$$

$$= \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left|f'(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\right|dt\right\}$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[t\left|f'(\varphi(a))\right|+(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left[t\left|f'(\phi(a))\right|+(1-t)\left|f'(\phi(b))\right|\right]dt\right\}$$

$$=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left[\left|f'(\varphi(a))\right|+\left|f'(\varphi(b))\right|\right]$$

burada,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^2 dt = \frac{1}{24}$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t(1-t)dt = \frac{1}{12}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 3.3.3 (1.5) ifadesinde her $x \in [a,b]$ için $\varphi(x)=x$ alınırsa Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir (Kırmacı 2004).

Teorem 3.3.4 J reel sayılarda bir aralık; $a,b \in J$ olacak şekilde $a<b$ ve $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığı) üzerinde

diferansiyellenebilir ve $\varphi(a),\varphi(b)\in I$ için $f'\in L_1\left[\varphi(a),\varphi(b)\right]$ olsun. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $q>1$ olmak üzere $|f'|^q$ fonksiyonu $\left[\varphi(a),\varphi(b)\right]$, üzerinde $\varphi-$ konveks ise:

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)-f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{\left(g(b)-g(a)\right)}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{\left|f'\left(\varphi(a)\right)\right|^q+3\left|f'(\varphi(b))\right|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3\left|f'\left(\varphi(a)\right)\right|^q+\left|f'(\varphi(b))\right|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{1.6}$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\varphi(a)\right)\right|+\left|f'(\varphi(b))\right|\right)$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya *et al.* 2015).

İspat: Lemma 3.3.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak $|f'|^q$ fonksiyonunun $\varphi-$ konveksliğinden,

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)-f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^p\,dt\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f'\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq \frac{(\varphi(b)-\varphi(a))}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[t\left|f'(\varphi(a))\right|^q+(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t\left|f'(\varphi(a))\right|^q+(1-t)\left|f'(\varphi(b))\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{\left|f'(\varphi(a))\right|^q+3\left|f'(\varphi(b))\right|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\left|f'(\varphi(a))\right|^q+\left|f'(\varphi(b))\right|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $a_1=\left|f'(a)\right|^q$, $b_1=3\left|f'(b)\right|^q$, $a_2=3\left|f'(a)\right|^q$, $b_2=\left|f'(b)\right|^q$ olsun. Bu durumda $q>1$ için $0<\frac{1}{q}<1$ dır. O halde,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n}a_k^s+\sum_{k=1}^{n}b_k^s$$

eşitsizliği kullanılırsa, $(0\leq s\leq 1)$, $a_1,a_2,...,a_n\geq 0$, $b_1,b_2,...,b_n\geq 0$, için

$$\left|\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(\varphi(x))\,d\varphi(x)-f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\left(\left|f'(\varphi(a))\right|+3^{\frac{1}{q}}\left|f'(\varphi(b))\right|\right)+\left(3^{\frac{1}{q}}\left|f'(\varphi(a))\right|+\left|f'(\varphi(b))\right|\right)\right]$$

$$=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(1+3^{\frac{1}{q}}\right)\left(\left|f'(\varphi(a))\right|+\left|f'(\varphi(b))\right|\right)\right]$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'(\varphi(a))\right|+\left|f'(\varphi(b))\right|\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3.3.5 (1.6) ifadesinde her $x\in[a,b]$ için $\varphi(x)=x$ alınırsa Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir (Kırmacı 2004).

Lemma 3.3.6 J reel sayılarda bir aralık, $a,b\in J$ olacak şekilde $a<b$ ve $\varphi : J\to\mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir ve $\varphi(a),\varphi(b)\in I$ olsun. Eğer $f'\in L_1[\varphi(a),\varphi(b)]$ ise aşağıdaki özdeşlik elde edilir: (Sarıkaya *et al.* 2015).

$$\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{(\varphi(b)-\varphi(a))}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(\varphi(x))\,d\varphi(x)$$

$$=\frac{(\varphi(b)-\varphi(a))}{2}\int_0^1(2t-1)\left[f'\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi a)\right)\right]dt.$$

İspat: Kısmi integrasyon formülü yardımıyla,

$$I=\int_0^1(2t-1)\left[f'\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)\right)\right]dt$$

$$=(2t-1)\frac{f\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)\right)}{(\varphi(b)-\varphi(a))}\Big|_0^1-\frac{2}{(\varphi(b)-\varphi(a))}\int_0^1 f\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)\right)dt$$

$$=\frac{f\left(\varphi(b)\right)+f\left(\varphi(a)\right)}{(\varphi(b)-\varphi(a))}-\frac{2}{(\varphi(b)-\varphi(a))}\int_0^1 f\left(t\varphi(b)+\left(1-t\right)\varphi(a)\right)dt$$

eşitsizliği belirtilebilir. $t\in\left[0,1\right]$ için $\varphi(x)=t\varphi(b)+\left(1-t\right)\varphi(a)$ denirse,

$$I=\frac{f\left(\varphi(b)\right)+f\left(\varphi(a)\right)}{(\varphi(b)-\varphi(a))}-\frac{2}{(\varphi(b)-\varphi(a))^2}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)$$

olur. Bu denklemin her iki tarafını $\dfrac{(\varphi(b)-\varphi(a))}{2}$ ile çarparak,

$$\frac{(\varphi(b)-\varphi(a))}{2}I=\frac{f\left(\varphi(b)\right)+f\left(\varphi(a)\right)}{2}-\frac{1}{(\varphi(b)-\varphi(a))}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.3.7 J reel sayılarda bir aralık; $a,b\in J$ olacak şekilde $a<b$ ve $\varphi\,:\,J\to\mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f\,:\,I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $\left|f'\right|$ fonksiyonu $\left[\varphi(a),\varphi(b)\right]$ üzerinde $\varphi-$konveks ise,

$$\left|\frac{f\left(\varphi(a)\right)+f\left(\varphi(b)\right)}{2}-\frac{1}{(\varphi(b)-\varphi(a))}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)\right|$$

$$\leq\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{4}\left(\frac{\left|f'(\varphi(b))\right|+\left|f'(\varphi(a))\right|}{2}\right)\tag{1.7}$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya *et al.* 2015).

İspat: Lemma 3.3.6. ve $|f'|$ fonksiyonunun $\varphi-$ konveksliklįğinden,

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,d\varphi(x)\right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\int_0^1 |2t-1|\left|f'\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)\right)\right|dt$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\int_0^1 |2t-1|\left[t\,|f'(\varphi(b))|+(1-t)\,|f'(\varphi(a))|\right]dt$$

$$=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left[\frac{|f'(\varphi(b))|+|f'(\varphi(a))|}{4}\right]$$

elde edilir. Bu da ispat tamamlar.

Uyarı 3.3.8 (1.7) ifadesinde $x\in[a,b]$ için $\varphi(x)=x$ alınırsa Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını sağladığı görülür (Dragomir and Agarwal 1998).

Teorem 3.3.9 J reel sayılarda bir aralık; $a,b\in J$ olacak şekilde $a<b$ ve $\varphi : J\to\mathbb{R}$ sürekli, artan fonksiyon olsun. $f : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $q>1$ olacak şekilde $|f'|^q$ fonksiyonu $[\varphi(a),\varphi(b)]$ üzerinde $\varphi-$ konveks ise,

$$\left|\frac{f(\varphi(a))+f(\varphi(b))}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x))\,d\varphi(x)\right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(\varphi(b))|^q+|f'(\varphi(a))|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.8}$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya *et al.* 2015).

İspat: Lemma 3.3.6. ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|\frac{f\left(\varphi(a)\right)+f\left(\varphi(b)\right)}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)\right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\int_0^1 |2t-1|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1 \left|f'\left(t\varphi(b)+\left(1-t\right)\varphi(a)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $\varphi-$konveks olduğundan,

$$\left|\frac{f\left(\varphi(a)\right)+f\left(\varphi(b)\right)}{2}-\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x)\right|$$

$$\leq \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[t|f'(\varphi(b))|^q+(1-t)|f'(\varphi(a))|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 3.3.10 (1.8) ifadesinde her $x \in [a,b]$ için $\varphi(x) = x$ alınırsa Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını sağladığı görülür. (Dragomir and Agarwal 1998).

Teorem 3.3.11 f 2. anlamda s- konveks $I = [a,b]$ aralığı üzerinde ve $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olsun. Böylece,

$$
\begin{aligned}
&2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \\
&\le \int_a^b f(x)w(x)dx \\
&\le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^s + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\right] w(x)dx
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur (Tseng *et al.* 2017).

Teorem 3.3.12 $f, w : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2. anlamda s- konveks ve $I = [a,b]$ aralığı üzerinde negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Buradan her $t \in [0,1]$ için

$M(a,b) = f(a)w(a) + f(b)w(b)$ ve $N(a,b) = f(a)w(b) + f(b)w(a)$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
2f\left(\frac{a+b}{2}\right)w\left(\frac{a+b}{2}\right) &\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx \\
&+ \frac{1}{(s+1)(s+2)} M(a,b) + \frac{1}{(s+2)} N(a,b)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur (Kırmacı *et al.* 2007).

4. BULGULAR

Teorem 4.1.1 $f,w : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ikinci anlamda s- konveks ve $I=[a,b]$ aralığı üzerinde negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer w $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ise ve her $t\in[0,1]$ için

$$M(a,b)=f(a)w(a)+f(b)w(b)$$
$$N(a,b)=f(a)w(b)+f(b)w(a)$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx\le\frac{s!s!}{(2s+1)!}M(a,b)+\frac{1}{2s+1}N(a,b) \qquad (2.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: w fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olsun. f ve w 2. anlamda s- konveks olmak üzere $\frac{a+b}{2}=x\Leftrightarrow a+b-x=x$ olmak üzere,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(a+b-x)dx$$

yazılabilir. Burada, $x=ta+(1-t)b$ ve $dx=(a-b)dt$ buradan $dt=\frac{dx}{a-b}$ dır. Sınırlar da $x\to a$ iken $t\to 1$ ve $x\to b$ iken $t\to 0$ dır. Buradan

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(a+b-x)dx=\int_0^1 f(ta+(1-t)b)w(a+b-(ta+(1-t)b))dt$$

$$=\int_0^1 f(ta+(1-t)b)w((1-t)a+tb)dt$$

olur. f ve w fonksiyonlarının ikinci anlamda s - konveksliğinden yararlanılarak,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)w((1-t)a+tb)dt$$

$$\leq\int_0^1\left[t^s f(a)+(1-t)^s f(b)\right]\left[(1-t)^s w(a)+t^s w(b)\right]dt$$

$$=\int_0^1\left[t^s(1-t)^s f(a)w(a)+t^{2s}f(a)w(b)+(1-t)^{2s}f(b)w(a)+t^s(1-t)^s f(b)w(b)\right]dt$$

$$=\int_0^1 t^s(1-t)^s\left[f(a)w(a)+f(b)w(b)\right]dt+\int_0^1 t^{2s}f(a)w(b)dt+(1-t)^{2s}f(b)w(a)dt$$

olup buradan da

$$\int_0^1 t^s(1-t)^s dt=\beta(s+1,s+1)=\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(2s+2)}=\frac{s!s!}{(2s+1)!}$$

olduğundan

$$\int_0^1 t^s(1-t)^s\left[f(a)w(a)+f(b)w(b)\right]dt+\int_0^1 t^{2s}f(a)w(b)dt+(1-t)^{2s}f(b)w(a)dt$$

$$=\beta(s+1,s+1)\left[f(a)w(a)+f(b)w(b)\right]+\left.\frac{t^{2s+1}}{2s+1}\right|_0^1 f(a)w(b)+-\left.\frac{(1-t)^{2s+1}}{2s+1}\right|_0^1 f(b)w(a)$$
$$=\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(2s+2)}\left[f(a)w(a)+f(b)w(b)\right]+\frac{1}{2s+1}f(a)w(b)+\frac{1}{2s+1}f(b)w(a)$$
$$=\frac{s!s!}{(2s+1)!}\left[f(a)w(a)+f(b)w(b)\right]+\frac{1}{2s+1}\left[f(a)w(b)+f(b)w(a)\right]$$
$$=\frac{s!s!}{(2s+1)!}M(a,b)+\frac{1}{2s+1}N(a,b)$$

elde edilir.

Açıklama 4.1.2 (2.1) ifadesinde $s=1$ için her $x\in[a,b]$ olmak üzere, klasik konvekslik için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx\le\frac{1}{6}M(a,b)+\frac{1}{3}N(a,b)$$

eşitsizliği sağlar (Pachpatte 2003).

Lemma 4.1.3 $f\ :\ I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $a,b\in I$ için $f'\in L_1\left[a,b\right]$ ise,

$$p(t)=\begin{cases} t, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \\ t-1, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(b-a\right)\int_0^1 p(t)f'\left(ta+(1-t)b\right)dt$$

özdeşliği sağlanır (Noor *et al.* 2014).

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\int_0^1 p(t)\, f'\big(ta+(1-t)b\big)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} t f'\big(ta+(1-t)b\big)\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)\, f'\big(ta+(1-t)b\big)\, dt$$

$$= \left\{ -\frac{tf\left(ta+(1-t)b\right)}{b-a}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{b-a}\int_0^{\frac{1}{2}} f\left(ta+(1-t)b\right) dt \right.$$

$$\left. + \frac{(1-t)\, f\left(ta+(1-t)b\right)}{\left(b-a\right)}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{b-a}\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(ta+(1-t)b\right) dt \right\}$$

$$= -\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(b-a\right)} + \frac{1}{b-a}\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right) dt$$

olup her iki tarafı $(b-a)$ çarparsak,

$$\left(b-a\right)\int_0^1 p(t)\, f'\big(ta+(1-t)b\big)\, dt = -f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right) dx$$

eşitliği elde edilir. İntegrasyonda değişken değiştirmesi yapılırsa istenen ifade elde edilir.

Teorem 4.1.4 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir ve $a,b \in I$ için $f' \in L_1[a,b]$ olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde s - konveks ise:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le (b-a)\left\{\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\left[\frac{2^{s+1}-1}{(s+1)(s+2)2^{s+1}}\right]\right\} \tag{2.2}$$

eşitsizliği elde edilir (Set *et al.* 2012).

İspat. Lemma 4.1.3 kullanılarak ve $|f'|$ fonksiyonu s - konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,d(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| &\le (b-a)\int_0^1 |p(t)|\left|f'\left(ta+(1-t)b\right)\right| dt \\
&= (b-a)\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|f'\left(ta+(1-t)b\right)\right| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |t-1|\left|f'ta+(1-t)b\right| dt\right\} \\
&\le (b-a)\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[|t|^s f'(a)| + (1-t)^s |f'(b)|\right] dt\right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\left[t^s |f'(a)| + (1-t)^s |f'(b)|\right] dt\right\} \\
&= (b-a)\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{tt^s |f'(a)| + t(1-t)^s |f'(b)|\right\} dt\right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{(1-t)t^s |f'(a)| + (1-t)(1-t)^s |f'(b)|\right\}\right\} dt
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan da $t \to 0$ iken $u \to 1$ ve $t \to \frac{1}{2}$ iken $u \to \frac{1}{2}$ (Ayrıca $1-t = u$ dersek

$-t=u-1$ ve $t=1-u$ olacaktır. Burada $-dt=du$ olduğu da açıktır.)

$$(b-a)\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left[tt^s\left|f'(a)\right|+t(1-t)^s\left|f'(b)\right|\right]dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\left\{(1-t)t^s\left|f'(a)\right|+(1-t)(1-t)^s\left|f'(b)\right|\right\}\right]dt\right\}$$

$$=(b-a)\left\{\left|f'(a)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}t^{s+1}dt-\left|f'(b)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-u)u^s du+\left|f'(a)\right|\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)t^s+\left|f'(b)\right|\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{s+1}dt\right\}$$

$$=(b-a)\left\{\left|f'(a)\right|\left|\left(\frac{t^{s+2}}{s+2}\right)_0^{\frac{1}{2}}-\left|f'(b)\right|\right|\left(\frac{u^{s+1}}{s+1}-\frac{u^{s+2}}{s+2}\right)_1^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left|f'(a)\right|\left|\left(-\frac{t^{s+2}}{s+2}+\frac{t^{s+1}}{s+1}\right)_{\frac{1}{2}}^{1}+\left|f'(b)\right|\right|\left(-\frac{(1-t)^{s+2}}{s+2}\right)_{\frac{1}{2}}^{1}\right\}$$

$$=(b-a)\left\{\left|f'(a)\right|\left(\frac{2}{2^{s+2}(s+2)}+\frac{-s-1+s+2}{(s+1)(s+2)}-\frac{1}{2^{s+1}(s+1)}\right)\right.$$

$$\left.+\left|f'(b)\right|\left(\frac{2}{2^{s+2}(s+2)}+\frac{s+2-s-1}{(s+1)(s+2)}-\frac{1}{2^{s+1}(s+1)}\right)\right\}$$

$$=(b-a)\left\{\left|f'(a)\right|\frac{1}{2^{s+2}(s+2)}-\left|f'(b)\right|\left(\frac{1}{2^{s+1}(s+1)}-\frac{1}{2^{s+2}(s+2)}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}\right)\right.$$

$$\left.+\left|f'(a)\right|\left(-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2^{s+2}(s+2)}-\frac{1}{2^{s+1}(s+1)}\right)+\left|f'(b)\right|\left(\frac{1}{2^{s+2}(s+2)}\right)\right\}$$

$$=(b-a)\left\{\left|f'(a)\right|\left(\frac{1}{2^{s+2}(s+2)}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2^{s+2}(s+2)}-\frac{1}{2^{s+1}(s+1)}\right)\right.$$

$$\left.+\left|f'(b)\right|\left(-\frac{1}{2^{s+1}(s+1)}+\frac{1}{2^{s+2}(s+2)}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2^{s+2}(s+2)}\right)\right\}$$

$$=(b-a)\left\{\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]\left[\frac{2^{-(s+1)}2^{s+1}(s+1)}{(s+1)(s+2)2^{s+1}}+\frac{2^{s+1}}{(s+1)(s+2)2^{s+1}}+\frac{-s-2}{(s+1)(s+2)2^{s+1}}\right]\right\}$$

$$=(b-a)\left\{\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]\left[\frac{2^{s+1}-1}{(s+1)(s+2)2^{s+1}}\right]\right\}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 4.1.5 (2.2) ifadesinde her $x \in [a,b]$ için $s=1$ alınırsa Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı;

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{(b-a)}{8} \left\{ |f'(a)| + |f'(b)| \right\}$$

olarak elde edilir (Kırmacı 2004).

Teorem 4.1.6 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir ve $a,b \in I$ için $f' \in L_1[a,b]$ olsun. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $q>1$ olmak üzere $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$, üzerinde s - konveks ise:

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le (b-a) \left(\frac{2^{-p-1}}{(p+1)} \right)^{1/p} \left(\frac{1}{sq+1} \right)^{1/q} \left\{ \left[|f'(a)| \right] + \left[|f'(b)| \right] \right\} \qquad (2.3)$$

İspat: Lemma 4.1.3 den ve Hölder eşitsizliği kullanılarak $|f'|^q$ nun ikinci anlamda s - konveksliği kullanılarak,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$= \left| (b-a) \int_0^1 p(t) f'\left(ta+(1-t)b\right) dt \right|$$

$$= \left| (b-a) \left\{ \int_0^{1/2} t f'\left(ta+(1-t)b\right) dt + \int_{1/2}^1 (t-1) f'\left(ta+(1-t)b\right) dt \right\} \right|$$

$$\leq \left|(b-a)\right|\left\{\int_0^{1/2}\left|tf'\left(ta+(1-t)b\right)\right|dt+\int_{1/2}^{1}\left|\left(t-1\right)f'\left(ta+(1-t)b\right)\right|dt\right\}$$

yazılır. Buradan da Hölder eşitsizliği yardımıyla;

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| &\leq \left|(b-a)\right| \left\{\int_0^{1/2}\left|tf'\left(ta+(1-t)b\right)\right|dt\right.\\ &\quad \left.+\int_{1/2}^{1}\left|\left(t-1\right)f'\left(ta+(1-t)b\right)\right|dt\right\}\\ &\leq \left(b-a\right)\left\{\left(\int_0^{1/2}t^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{1/2}\left|f'\left(ta+(1-t)b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\right.\\ &\quad \left.+\left(\int_{1/2}^{1}\left|t-1\right|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{1/2}^{1}\left|f'\left(ta+(1-t)b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\right\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece,

$$I_1=\left(\int_0^{1/2}\left|f'\left(ta+(1-t)b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$I_2=\left(\int_{1/2}^{1}\left|f'\left(ta+(1-t)b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

denilirse s - konvekslik ve $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r \leq \sum_{k=1}^{n}a_k{}^r+\sum_{k=1}^{n}b_k{}^r$ yardımıyla,

$$I_1=\left(\int_0^{1/2}\left|f'\left(ta+(1-t)b\right)\right|^q dt\right)^{1/q} \leq \left(\int_0^{1/2}\left[t^s\left|f'(a)\right|+(1-t)^s\left|f'(b)\right|\right]^q dt\right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\int_0^{1/2} \left[t^s \, | f'(a) | \right]^q dt + \int_0^{1/2} \left[(1-t)^s \, | f'(b) | \right]^q dt \right)^{1/q}$$

$$= \left(| f'(a) |^q \int_0^{1/2} \left[t^{sq} \right] dt + | f'(b) |^q \int_0^{1/2} \left[(1-t)^{sq} \right] dt \right)^{1/q}$$

$$= \left(| f'(a) |^q \left. \frac{t^{sq+1}}{sq+1} \right|_0^{1/2} + | f'(b) |^q - \left. \frac{(1-t)^{sq+1}}{sq+1} \right|_0^{1/2} \right)^{1/q}$$

$$= \left(\frac{1}{sq+1} \right)^{1/q} \left(\left[2^{-sq-1} | f'(a) |^q \right] + \left[\left(1 - 2^{-sq-1} \right) | f'(b) | \right] \right)^{1/q}$$

ve benzer şekilde,

$$I_2 = \left(\int_{1/2}^{1} | f'\left(ta + (1-t)b \right) |^q dt \right)^{1/q} \leq \left(\int_{1/2}^{1} \left[t^s \, | f'(a) | + (1-t)^s \, | f'(b) | \right]^q dt \right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\int_{1/2}^{1} \left[t^s \, | f'(a) | \right]^q dt + \int_{1/2}^{1} \left[(1-t)^s \, | f'(b) | \right]^q dt \right)^{1/q}$$

$$= \left(| f'(a) |^q \int_{1/2}^{1} \left[t^{sq} \right] dt + | f'(b) |^q \int_{1/2}^{1} \left[(1-t)^{sq} \right] dt \right)^{1/q}$$

$$= \left(| f'(a) |^q \left(\left. \frac{t^{sq+1}}{sq+1} \right|_{1/2}^{1} \right) + | f'(b) |^q \left(- \left. \frac{(1-t)^{sq+1}}{sq+1} \right|_{1/2}^{1} \right) \right)^{1/q}$$

$$= \left(\frac{1}{sq+1} \right)^{1/q} \left(\left[\left(1 - 2^{-sq-1} \right) | f'(a) |^q \right] + \left[\left(2^{-sq-1} \right) | f'(b) |^q \right] \right)^{1/q}$$

İkisinin toplamını da alırsak,

$$\left[I_1 + I_2 \right] = \left(\frac{1}{sq+1} \right)^{1/q} \left(\left[2^{-sq-1} | f'(a) |^q \right] + \left[\left(1 - 2^{-sq-1} \right) | f'(b) | \right] \right)^{1/q}$$
$$+ \left(\frac{1}{sq+1} \right)^{1/q} \left(\left[\left(1 - 2^{-sq-1} \right) | f'(a) |^q \right] + \left[\left(2^{-sq-1} \right) | f'(b) |^q \right] \right)^{1/q}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\frac{1}{sq+1}\right)^{1/q}\left\{\left(\left[2^{-sq-1}\left|f'(a)\right|^{q}\right]+\left[\left(1-2^{-sq-1}\right)\left|f'(b)\right|\right]\right)^{1/q}\right.\\
&\left.+\left(\left[\left(1-2^{-sq-1}\right)\left|f'(a)\right|^{q}\right]+\left[\left(2^{-sq-1}\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right]\right)^{1/q}\right\}\\
&\le\left(\frac{1}{sq+1}\right)^{1/q}\left\{\left(\left[2^{-sq-1}\left|f'(a)\right|^{q}\right]^{1/q}+\left[\left(1-2^{-sq-1}\right)\left|f'(b)\right|\right]^{1/q}\right)\right.\\
&\left.+\left(\left[\left(1-2^{-sq-1}\right)\left|f'(a)\right|^{q}\right]^{1/q}+\left[\left(2^{-sq-1}\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{1/q}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

olup aynı zamanda,

$$
\left(\int_0^{1/2} t^p dt\right)^{1/p}=\left(\frac{2^{-p-1}}{(p+1)}\right)^{1/p},
$$

$$
\left(\int_{1/2}^{1}\left|t-1\right|^p dt\right)^{1/p}=\left(\int_{1/2}^{1}\left(1-t\right)^p dt\right)^{1/p}=\left(\frac{2^{-p-1}}{(p+1)}\right)^{1/p}
$$

olarak hesaplanabileceğinden,

$$
\begin{aligned}
&\left(b-a\right)\left\{\left(\int_0^{1/2} t^p dt\right)^{1/p} I_1+\left(\int_{1/2}^{1}\left|t-1\right|^p dt\right)^{1/p} I_2\right\}\\
&\qquad=\left(b-a\right)\left\{\left(\frac{2^{-p-1}}{(p+1)}\right)^{1/p} I_1+\left(\frac{2^{-p-1}}{(p+1)}\right)^{1/p} I_2\right\}\\
&\qquad=\left(b-a\right)\left\{\left(\frac{2^{-p-1}}{(p+1)}\right)^{1/p}\left[I_1+I_2\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{2^{-p-1}}{(p+1)}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{sq+1}\right)^{1/q}\left\{\left(\left[2^{-sq-1}|f'(a)|^{q}\right]^{1/q}+\left[\left(1-2^{-sq-1}\right)|f'(b)|\right]^{1/q}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\left[\left(1-2^{-sq-1}\right)|f'(a)|^{q}\right]^{1/q}+\left[\left(2^{-sq-1}\right)|f'(b)|^{q}\right]^{1/q}\right)\right\}$$

$$=(b-a)\left(\frac{2^{-p-1}}{(p+1)}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{sq+1}\right)^{1/q}\left\{\left[|f'(a)|\right]+\left[|f'(b)|\right]\right\}$$

eşitsizliğini elde ederiz ve böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 4.1.7 (2.3) ifadesinde her $x\in[a,b]$ için $s=1$ alınırsa Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı gösterilir (Kırmacı 2004).

Lemma 4.1.8 $f\ :\ I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $a,b\in I$ için $f'\in L_1[a,b]$ ise,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1(2t-1)\left[f'\left(tb+(1-t)a\right)\right]dt.$$

eşitliği elde edilir (Dragomir and Agarwal 1998).

İspat: Kısmi integrasyon formülü yardımıyla,

$$I=\int_0^1(2t-1)\left[f'\left(tb+(1-t)a\right)\right]dt$$

$$=(2t-1)\frac{f\left(tb+(1-t)a\right)}{(b-a)}\Big|_0^1-\frac{2}{(b-a)}\int_0^1 f\left(tb+(1-t)a\right)dt$$

$$=\frac{f(b)+f(a)}{(b-a)}-\frac{2}{(b-a)}\int_0^1 f\big(tb+(1-t)a\big)dt$$

eşitsizliği belirtilebilir. $t\in[0,1]$ için $x=tb+(1-t)a$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$I=\frac{f(b)+f(a)}{(b-a)}-\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını $\frac{(b-a)}{2}$ ile çarparsak

$$\frac{(b-a)}{2}I=\frac{f(b)+f(a)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$$

eşitliğini elde edilir.

Teorem 4.1.9 $f : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I aralığı) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s - konveks ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{b-a}{2}\left(\frac{2^{-s}+s}{s^2+3s+2}\right)\big[s|f'(b)|+s|f'(a)|\big] \tag{2.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.1.8. ve $|f'|$ fonksiyonunun s - konveksliğinden,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
&\le \frac{b-a}{2}\int_0^1 |2t-1|\left|f'\left(tb+(1-t)a\right)\right|dt \\
&\le \frac{b-a}{2}\int_0^1 |2t-1|\left[t^s\,|f'(b)|+(1-t)^s\,|f'(a)|\right]dt \\
&= \frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} -(2t-1)\left[t^s\,|f'(b)|+(1-t)^s\,|f'(a)|\right]dt\right. \\
&\qquad \left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)\left[t^s\,|f'(b)|+(1-t)^s\,|f'(a)|\right]dt\right] \\
&= \frac{b-a}{2}\left[-\left(|f'(b)|\frac{2^{-(s+1)}}{s^2+3s+2}-|f'(a)|\frac{2^{-(s+1)}+s}{s^2+3s+2}\right)\right. \\
&\qquad \left.+\left(|f'(b)|\frac{2^{-(s+1)}+s}{s^2+3s+2}+|f'(a)|\frac{2^{-(s+1)}}{s^2+3s+2}\right)\right] \\
&= \frac{b-a}{2}\left[|f'(b)|\left(\frac{2^{-(s+1)}}{s^2+3s+2}+\frac{2^{-(s+1)}+s}{s^2+3s+2}\right)\right. \\
&\qquad \left.+|f'(a)|\left(\frac{2^{-(s+1)}+s}{s^2+3s+2}+\frac{2^{-(s+1)}}{s^2+3s+2}\right)\right] \\
&= \frac{b-a}{2}\left(\frac{2^{-s}+s}{s^2+3s+2}\right)\left[s\,|f'(b)|+s\,|f'(a)|\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 4.1.10 (2.4) ifadesinde her $x\in[a,b]$ için ve $s=1$ için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafın sağladığı elde edilir (Dragomir and Agarwal 1998).

Teorem 4.1.11 $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $q>1$ olacak şekilde $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde s - konveks ise :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.1.8 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\le \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |2t-1|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(tb+(1-t)a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde s - konveks olduğundan,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\le \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[t^s|f'(b)|^q+(1-t)^s|f'(a)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left.\frac{t^{s+1}}{s+1}\right|_0^1 |f'(b)|^q-\left.\frac{(1-t)^{s+1}}{s+1}\right|_0^1 |f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(b)|^q + |f'(a)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.1.12 (2.5) ifadesinde $x \in [a,b]$ için ve $s = 1$ için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafın sağladığı elde edilir (Dragomir and Agarwal 1998).

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Son bölümde ikinci anlamda s - konveks fonksiyonlar kullanılarak birçok yeni integral eşitsizlikleri elde edildi. Benzer düşünceler altında literatürde verilmiş olan diğer birçok konveks fonksiyonlar için de yeni sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca elde etmiş olduğumuz bu sonuçlar kesirli integraller yardımıyla daha da genelleştirilebilir. Dolayısıyla bunları açık problemler olarak bırakıyoruz.

6. KAYNAKLAR

Balcı, M. (2010). Analiz 1. Balcı Yayınevi, Ankara.

Bayraktar, M. (2006). Fonksiyonel Analiz. Gazi Kitabevi, Ankara.

Beckenbach, E. F. and Bellman, R. (1970). Inequalities. *Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer*.

Breckner W.W. (1978). Stetigkeit Aussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen, *Puplications Plnstitut Mathematique*, **23**:13-20.

Bakula M. K. and Pečarić J. **(**2004**)**. Note on some Hadamard-type inequalities, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **5**(3): article 74.

Cristescu, G. and Lupsa, L. (2002). Non-connected conxexities and applications. *Kluwer Academic Publishers*.

Cristescu G. (2004). Hadamard Type Inequalities for φ - Convex Functions, *Annals of the University of Oradea*, Fascicle of Management and Technological Engineering, CD-Rom Edition, **III**(XIII).

Dragomir S. S. and Agarwal R.P. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, *Appl. Math. lett.*, **11**(5), 91-95.

Dragomir S.S. and Fitzpatrick S. (1999). The Hadamard's inequality for s-konveks functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica*, **32**(4): 687-696.

Dragomir S. S. and Pearce C. E. M. (2000). Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, *RGMIA Monographs*, Victoria University.

Dragomir S. S., Pečarić J. and Persson L. E. (1995). Some inequalities of Hadamard type, *Soochow J. Math*. **21**, 335-241.

Hardy, G., Littlewood, J. and Polya, G. (1934). Inequalities. *London: Cambridge at the University Press*.

Hudzig, H. and Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes Mathematicae*, 100- 111.

Kırmacı U.S. (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, *Appl. Math. Comp.*, **147**, 137-146.

Kırmacı U.S., Bakula M.K. and Ozdemir M.E (2007). Pecaric J., *Applied Mathematics and Computation*, **193**, 26--35.

Maden, S., Tomar, M. and Set, E. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the first sense, *Pure and Applied Mathematics Letters*, s. 1-7.

Matuszewska, W. and Orlicz, W. (1961). A note of the theory of s-normed spaces of fi-integrable functions. *Studia Math.*, **21**, s. 107-115.

Mitronovic, D. S. (1970). Analytic Inequalities, Verlag Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Noor, M.A., Noor, K.I., Awan, M.U. (2014). Hermite-Hadamard inequalities for relative semi-convex functions and applications, *Filomat*, **28**, no. 2,51-55.

M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan (2015). S. Costache, Some integral inequalities for harmonically h-convex functions, *U. P. B. Sci. Bull.*, Series A., **77**(1)**:** 5-16.

Pecaric, J. E., Proschan, F., & Tong, Y. L. (1992). Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. *Academic Press*.

Pachpatte, B. G., (1992). On Some Inequalities for Convex Functions, *RGMIA Res. Rep. Coll.6*, suplement.

Pearce C.E.M. and Pečarić J. (2000). Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae, *Appl. Math. Lett.*, **13**(2), 51--55.

Roberts, A. W. and Varbeg, D. E. (1976). Convex Functions.*Academic Press*, 1-299.

Sarıkaya, M. Z., Büyükeken, M. and Kiriş, M. E. (2015). On some generalized integral inequalities for φ- convex functions. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, **60**(3), 367-377.

Sarikaya M. Z. (2013). On Hermite Hadamard-type inequalities for strongly φ- convex functions, *Southeast Asian Bull. Math*., in press.

Sarikaya M. Z. **(**2014**)**. On Hermite Hadamard-type inequalities for φ_h- convex functions, *Kochi J. of Math*., **9**, 83-90.

Set E., Özdemir M. E., and Dragomir S. S. (2010). On Hadamard-Type inequalities involving several kinds of convexity, *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 286845, 12 pages.

Tseng, K., Hwang, S. and Dragomir, S. (2017). On Some New Inequalities of Hetmite-Hadamard-Fejer Type Involving Convex Functions, *Demonstratio Mathematica*, **40**(1), pp. 51-64. Retrieved 28 Apr. 2018, from doi:10.1515/dema-2007-0108

Youness E. A. (1999). E- Convex Sets, E- Convex Functions and E- Convex Programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **102**, 2, 439-450.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hasan KARA
Doğum Yeri ve Tarihi : Sivaslı, 01.01.1994
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta) :0 (506) 9249920 / hasan64kara@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Eşme Ş.C.A Anadolu Lisesi, (2007-2011)
Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, (2011-2015)
Pedagojik Formasyon : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2014-2015)

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl : Afyon Lisesi Stajyer Matematik Öğretmeni, (2014-2015)
Küçükçobanlı Ortaokulu Matematik Öğretmeni, (2016-2017)

Sempozyum : ICMRS 2018 International Conference on Mathematics and Related Sciences, On Some New Inequalities for *s*- Convex Functions, 30 April-4 May 2018, Antalya / TURKEY.