MİNKOWSKİ UZAYINDA NULL MANNHEİM EĞRİLERi ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nilüfer UMURHAN

Danışman

Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİNKOWSKİ UZAYINDA NULL MANNHEİM EĞRİLERİ ÜZERİNE

Nilüfer UMURHAN

Danışman
Doç. Dr. Özgür KALKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Nilüfer UMURHAN tarafından hazırlanan "Minkowski Uzayında Null Mannheim Eğrileri Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 28/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Özgür KALKAN

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KOCAYİĞİT
Manisa Celal Bayar Üni., Fen Edebiyat Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üni., Afyon M. Y. O.

Üye : Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üni., Afyon M. Y. O.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

30/06/2018

Nilüfer UMURHAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MİNKOWSKİ UZAYINDA NULL MANNHEİM EĞRİLERİ ÜZERİNE

Nilüfer UMURHAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özgür KALKAN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, Mannheim eğrileri üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler incelenmiştir.

İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Mannheim eğrilerinin tanımı verilerek null Mannheim eğrileri ve psudo null Mannheim eğrileri ile ilgili bazı karakterizasyonlar elde edilmiş ve bu eğriler ile ilgili örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, 4-boyutlu Minkowski uzayında Mannheim eğrilerinin tanımı verilerek null Mannheim eğrileri için bazı karakterizasyonlar incelenmiştir. Genelleştirilmiş null Mannheim eğrileri ile bu eğrilerin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrilerinin eğrilik fonksiyonları ve çatıları arasındaki ilişkiler elde edilmiş ve bu eğriler ile ilgili örnekler verilmiştir.

2018, v + 68 sayfa

Anahtar Kelimeler: Minkowski uzayı, null eğriler, Mannheim partner eğrileri.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON NULL MANNHEIM CURVES IN MINKOWSKI SPACE

Nilüfer UMURHAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Özgür KALKAN

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction section, the literature information about the studies on the Mannheim curves are given.

In the second chapter, basic definitions and concepts have been given.

In the third chapter, the definition of Mannheim curves in 3-dimensional Minkowski space is given and some characterizations of null Mannheim curves and pseudo null Mannheim curves are obtained and the examples of such curves are given.

In the fourth chapter, the definition of Mannheim curves in 4-dimensional Minkowski space is given and some characterizations of null Mannheim curves is studied. The relations between the curvature functions and the frames of the generalized null Mannheim curves and generalized Mannheim partner curves of theirs are obtained and the examples of such curves are given.

2018, v + 68 pages

Keywords: Minkowski space, null curves, Mannheim partner curves.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan tez danışmanım değerli hocam Sayın Doç. Dr. Özgür KALKAN, araştırma ve yazım sürecinde yardımlarını esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hakan ÖZTÜRK hocama teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu tez çalışması boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve eşime teşekkür ederim.

Nilüfer UMURHAN

AFYONKARAHİSAR, 2018

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

R	Reel Sayılar Kümesi
R_1^3	3-boyutlu Minkowski Uzayı
R_1^4	4-boyutlu Minkowski Uzayı (Minkowski uzay-zaman)
S_1^{n-1}	R_1^n Minkowski uzayında pseudo küre
H_0^{n-1}	R_1^n Minkowski uzayında pseudo hiperbolik uzay
Q_q^{n-1}	R_1^n Minkowski uzayında lightlike koni (null koni)
g	Minkowski (lorentz) metriği
$\Vert\,,\Vert$	Norm fonksiyonu
T	R_1^n Minkowski uzayında bir eğrinin teğet vektör alanı
N	R_1^n Minkowski uzayında bir eğrinin normal vektör alanı
B_i	R_1^n Minkowski uzayında bir eğrinin i-ynci binormal vektör alanı
k_i	Bir eğrinin i-ynci eğrilik fonksiyonu

1. GİRİŞ

Eğriler kavramı diferensiyel geometrinin temel konularından biridir. Bağlantılı eğriler, karşılıklı noktalarında bir eğrinin Frenet vektörlerinden biri ile diğer eğrinin Frenet vektörlerinden birinin denk olduğu eğrilerdir ve bağlantılı eğriler, uzay eğrilerinin temel eğri teorisi ve uzay eğrilerinin karakterizasyonları için önemli bir problemdir (Fenchel 1951, Sabuncuoğlu 2006, Woestijne 1990). Bu özellikteki eğri çiftlerinden en iyi bilinenler Bertrand eğrileri ve İnvolüt-Evolüt eğrileridir (Blaschke 1945, Burke 1960, Görgülü ve Özdamar 1986, Izumiya and Takeuchi 2003). Bilindiği gibi Bertrand eğrilerinde, bir eğrinin asli normali diğer eğrinin asli normalidir. Yani Bertrand eğrisi başka bir eğriyle normal çizgisini paylaşan bir eğridir. Birçok matematikçi yıllarca farklı uzaylarda Bertrand eğrilerini çalıştılar ve bu eğrinin özelliklerini düşündüler. Ravani ve Ku, regle yüzeyleri için Bertrand eğriler kavramını verdiler ve regle yüzeyler için offsetleri tanımladılar (Ravani and Ku 1991). Bu eğriler, farklı uzaylarda da ele alınarak incelenmiş ve birçok karakterizasyonlar elde edilmiştir. Son yıllarda bu eğrilerden biri olan Mannheim eğriler çalışılmaya başlanmıştır.

Mannheim eğrisi ilk olarak 1878 yılında A. Mannheim tarafından tanımlanmıştır. Herhangi bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şartın

$$\kappa = \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right), \qquad \lambda \neq 0 = sabit$$

olduğu gösterilmiştir. Burada κ eğrinin eğriliği, τ eğrinin torsiyonudur (burulma).

Son yıllarda, Mannheim eğrisi Liu ve Wang tarafından yeniden tanımlanmıştır. Verilen bu yeni tanım şu şekildedir: α ve α^*, R^3 Öklid uzayında iki eğri olsun. Bu eğrilerin karşılıklı noktalarında α eğrisinin asli normal vektörü ile α^* eğrisinin binormal vektörü lineer bağımlı olduğunda α eğrisine Mannheim eğrisi, α^* eğrisine de Mannheim partner eğrisi adı verilmiştir. $\left\{\alpha, \alpha^*\right\}$ çifti de bir Mannheim eğri çifti olarak adlandırılmıştır (Wang and Liu 2007, Liu and Wang 2008). 2007 yılında Liu ve Wang yaptığı çalışmada bir Mannheim eğrisinin genelleştirilmiş helis olması durumunda Mannheim partner eğrisinin bir doğru olduğunu; Mannheim partner eğrisinin bir genelleştirilmiş helis olması durumunda ise Mannheim eğrisinin eğrilik ve burulması arasındaki oranı bulmuşlardır.

Bu eğri çiftleri için önemli bir karakterizasyon şu şekilde verilmiştir: α^* eğrisinin, α eğrisinin bir Mannheim partner eğrisi olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin burulması τ, α^* eğrisinin eğriliği κ_1 ve burulması τ_1 olmak üzere sıfırdan farklı bir λ sabiti için

$$\tau' = \frac{d\tau}{ds^*} = \frac{\kappa_1}{\lambda}\left(1+\lambda^2\tau_1^2\right)$$

denkleminin sağlanmasıdır. Liu ve Wang'ın Mannheim eğrileri için vermiş olduğu bu tanımdan sonra bu eğriler üzerinde birçok yeni çalışma yapılmıştır (Azak 2009, Karacan 2011, Orbay ve Kasap 2009, Şenyurt ve Bektaş 2012). Orbay ve Kasap, 2009 yılında yaptıkları çalışmada Öklid uzayında Mannheim eğrisinin eğrilik ve burulması arasında sabit katsayılı lineer bir ilişki olduğunu, Mannheim eğri çiftlerinin ilgili noktalarındaki τ ve τ_1 burulmalarının çarpımının sabit olmadığını ve farklı işaretli olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca α ve α^* eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları ile ilgili eşitlikleri elde etmişlerdir (Şenyurt ve Bektaş 2012). 3-boyutlu Minkowski uzayında asli normal vektörü spacelike veya timelike olan null olmayan Mannheim eğriler için karakterizasyonlar Akyiğit vd. (2011), Liu ve Wang (2008) tarafından verilmiştir. 3-boyutlu Minkowski uzayında null Mannheim eğrileri Öztekin ve Ergut (2011), Lee (2011) tarafından incelenmiştir.

4-boyutlu Öklid uzayında Matsuda ve Yorozu (2009) da Mannheim eğri tanımı şu şekilde genelleştirilmiştir: $\alpha : \mathrm{I} \to R^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun. Eğer $\phi : \alpha \to \alpha^*$ 1:1, örten dönüşümü altında α nın her bir noktasındaki asli normal doğrusu α^* ın birinci ve ikinci binormal doğrusu tarafından gerilen düzlemde yatacak şekilde bir $\alpha^* : \mathrm{I}^* \to R^4$ Frenet eğrisi bulunuyorsa $\alpha : \mathrm{I} \to R^4$ eğrisine genelleştirilmiş Mannheim eğrisi denir. α^* eğrisine ise α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi ve $\{\alpha, \alpha^*\}$ ikilisine genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti denir. 4-boyutlu Minkowski uzayında, genelleştirilmiş spacelike Mannheim eğrilerinin karakterizasyonları Akyiğit vd. (2011) tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada 3-boyutlu Minkowski uzayında null Mannheim eğrileri ve pseudo null Mannheim eğrileri ele alınmıştır. 3-boyutlu Minkowski uzayında null Mannheim eğrinin bulunmadığı ifade ve ispat edilmiştir. 3-boyutlu Minkowski uzayında pseudo null doğruların ve pseudo null çemberlerin Mannheim partner eğrilerinin sadece pseudo null doğrular olduğu gösterilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu Minkowski uzayında pseudo null Mannheim eğrilerine örnekler verilmiştir. 4-boyutlu Minkowski uzayı R_1^4 de ise null Mannheim eğrileri için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. Genelleştirilmiş null Mannheim eğrileri ile bu eğrilerin geneleştirilmiş Mannheim partner eğrilerinin eğrilik fonksiyonları ve çatıları arasındaki ilişkiler ve-rilmiştir. $k_2 \neq 0$ olmak üzere α null Mannheim Cartan eğrisi için $\alpha^* = \alpha + \left(1/2k_2\right)N$ ile verilen eğrinin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi olması için gerekli koşullar ifade edilmiştir. Genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi partially null veya pseudo null olan genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi bulunmadığı ispatlanmıştır. Son olarak null Mannheim eğrilerine bazı örnekler verilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1 (Simetrik Bilineer Form)
Bir reel vektör uzayı V için

$$g : V \times V \to R$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

- **i.** $g(u,v) = g(v,u)$,
- **ii.** $g(au+bv, w) = ag(u,w) + bg(v,w)$,
- **iii.** $g(u, av+bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$

şartları sağlanıyorsa g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

- **i.** $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,
- **ii.** $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,
- **iii.** $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna yarı- pozitif tanımlı,
- **iv.** $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna yarı- negatif tanımlı,
- **v.** $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,w) = 0 \Rightarrow w = 0$ ise g simetrik bilineer formuna non-dejeneredir denir,
- **vi.** $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,w) = 0$ ise ise g simetrik bilineer formuna dejeneredir denir,
- **vii.** $g(v,v) > 0$ ve $g(w,w) < 0$ olacak şekilde $v, w \in V$ mevcut ise g ye indefinit denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3 V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to R$$

dönüşümü simetrik, bilineer ve non-dejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, V vektör uzayına da skalar çarpım uzayı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.4 (İndeks) V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda

$$g_w : W \times W \to R$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g nin indeksi denir ve q ile gösterilir. g skaler çarpımının indeksi, q ise $0 < q < boyV$ dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.5 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. V nin

$$RadV = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına g ye göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir. $RadV$ nin boyutuna g nin nulluk derecesi denir ve $nullV$ ile gösterilir.

Eğer $nullV > 0$ ise g dejeneredir, eğer $nullV = 0$ ise non-dejeneredir (O'neill 1983).

Tanım 2.6 V skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi q olmak üzere $q = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Minkowski (Lorentz) uzayı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.7 R^n , R üzerinde n-boyutlu standart vektör uzayı olsun.
$X = (x_1, x_2, ...x_n), Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ için

$$g : R^n \times R^n \to R$$

$$(X, Y) \to g(X, Y) = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir skalar çarpım fonksiyonudur ve bu fonksiyona Minkowski (Lorentz) metriği denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.8 R^n üzerinde tanımlı Minkowski metriği ile birlikte $\{R^n, g\}$ ikilisine n-boyutlu Minkowski (Lorentz) uzayı veya kısaca Minkowski (Lorentz) uzayı denir ve R_1^n ile gösterilir (O'Neill 1983).

Özel olarak $n=4$ ise R_1^n n-boyutlu Minkowski uzayına Minkowski uzay-zaman denir ve R_1^4 ile gösterilir.

Tanım 2.9 R_1^n n-boyutlu Minkowski uzayı olsun. $\forall X, Y \in R_1^n$ için

$$g(X,Y)=0$$

ise X ve Y vektörleri Lorentz anlamında diktirler denir.

Örnek 2.1 $n=2$ için $X=(1,-1)$ ve $Y=(1,1)$ vektörleri verilsin. Bu vektörler Öklid anlamında dik olmasına rağmen Lorentz anlamında dik değildir. Yine $X=(1,-1)$ ve $Y=(1,1)$ vektörleri de Lorentz anlamında dik iken Öklid anlamında dik değildir.

NOT: Null vektörlerin dikliği, vektörlerin lineer bağımlılığı ile açıklanır.

Tanım 2.10 $\vec{x} \in R_1^n$ için $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{\left|g\left(\vec{x},\vec{x}\right)\right|}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.11 $\forall \vec{x} \in R_1^n$ olmak üzere

i. $g\left(\vec{x},\vec{x}\right)>0$ veya $\vec{x}=0$ ise, $\vec{x}$ vektörüne spacelike vektör (uzay benzeri)

ii. $g\left(\vec{x},\vec{x}\right)<0$ ise $\vec{x}$ vektörüne timelike vektör (zaman benzeri)

iii. $g\left(\vec{x},\vec{x}\right)=0$ veya $\vec{x}\neq 0$ ise, $\vec{x}$ vektörüne lightlike veya null vektör (ışık benzeri)

denir. $\vec{x} \in R_1^n$ vektörünün bu üç tipine v nin casual karakteri denir (O'neill 1983).

Tanım 2.12 $\forall \vec{x} \in R_1^n$ olmak üzere

i. $\left\|\vec{x}\right\| = -1$ ise $\vec{x}$ e birim timelike vektör,

ii. $\left\|\vec{x}\right\| = 1$ ise $\vec{x}$ e birim spacelike vektör

denir. (O'Neill 1983).

Teorem 2.1 $\vec{x} \in R_1^n$ olsun. Bu taktirde

i. $\left\|\vec{x}\right\| > 0$ dır.

ii. $\left\|\vec{x}\right\| = 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür.

iii. $\vec{x}$ bir timelike vektör ise $\left\|\vec{x}\right\|^2 = -g\left(\vec{x}, \vec{x}\right)$ dir.

iv. $\vec{x}$ bir spacelike vektör ise, $\left\|\vec{x}\right\|^2 = g\left(\vec{x}, \vec{x}\right)$ dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.13 R_1^n n-boyutlu Minkowski uzayı olsun. I, R de açık aralık olmak üzere

$$\alpha : I \to R_1^n$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna R_1^n, n-boyutlu Minkowski uzayında bir eğri adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.14 $\alpha \in R_1^n$ Minkowski uzayında bir eğri olsun. Böylece α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere

i. $g\left(\alpha', \alpha'\right) > 0$ ise α spacelike eğri,

ii. $g\left(\alpha', \alpha'\right) < 0$ ise α timelike eğri,

iii. $g\left(\alpha', \alpha'\right) = 0$ ise α null eğri

olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Tanım 2.15 R_1^n Minkowski uzayında

$$S_1^{n-1} = \left\{ x \in R_1^n : g\left(x,x\right) = r^2 \right\}$$

kümesine orjin merkezli pseudo küre,

$$H_0^{n-1} = \left\{ x \in R_1^n : g\left(x,x\right) = -r^2 \right\}$$

kümesine orjin merkezli pseudo hiperbolik uzay,

$$Q_q^{n-1}\left(c,r\right) = \left\{ x \in R_q^n : g\left(x-c, x-c\right) = 0 \right\}$$

kümesine de lightlike koni (veya null koni) denir (O'Neill 1983).

2.1. R_1^3 3-Boyutlu Minkowski Uzayı

Tanım 2.1.1 R_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayı, R_1^3 in bir dik koordinat sistemi (x_1, x_2, x_3) olmak üzere

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

olarak tanımlanan non-dejenere metrik ile donatılmış 3-boyutlu Öklid uzayıdır (Lopez 2014).

Tanım 2.1.2 R_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olsun. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$(\, x_2 y_3 - x_3 x_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_2 y_1 - x_1 y_2 \,)$$

vektörüne $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ nin vektörel çarpımı (dış çarpımı) denir ve $\vec{x} \wedge \vec{y}$ veya $\vec{x} \times \vec{y}$ ile gösterilir,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad ve \;\; e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$X \wedge Y = -\det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$X \wedge Y = \det \begin{bmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Burada

$$e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = -e_2, \quad e_1 \times e_2 = -e_3$$

dir. Burada saat yönünün tersi pozitif yön olarak alınmıştır. Eğer saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilirse

$$e_2 \times e_3 = -e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2, \quad e_1 \times e_2 = e_3$$

olur. Bu durumda

$$X \wedge Y = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

olur (Akutagawa and Nishikawa 1990).

Teorem 2.1.1 R_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayında üç vektör $\vec{X}, \vec{Y}$ ve $\vec{Z}$ olsun. $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\vec{Z} = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Bu durumda

i. $g(X \wedge Y, Z) = -\det(X, Y, Z)$,

ii. $(X \wedge Y) \wedge Z = -g(X, Z)Y + g(Y, Z)X$,

iii. $g(X \wedge Y, X) = 0$ *ve* $g(X \wedge Y, Y) = 0$,

iv. $g(X \wedge Y, X \wedge Y) = -g(X, X)g(Y, Y) + g(X, Y)^2$ dir (Turgut 1995).

R_1^3 Minkowski uzayında α eğrisi üzerinde hareketli Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve α eğrisinin eğrilik fonksiyonları $\{k_1, k_2\}$ olsun. Burada T, N, B sırasıyla α eğrisinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı, binormal vektör alanıdır.

Tanım 2.1.3 $\alpha(s)$, R_1^3 üzerinde birim hızlı bir null (yani $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = \pm 1$) eğri olsun. Eğrinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ ve eğrilikleri $k_1(s), k_2(s)$ ise Frenet denklemleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

olur. Burada α eğrisi doğru ise birinci eğrilik $k_1 = 0$ dır, diğer tüm durumlar için $k_1 = 1$ dir. Ayrıca

$$g(T,T) = g(B,B) = g(T,N) = g(N,B) = 0,$$
$$g(N,N) = g(T,B) = 1 \tag{2.2}$$

koşulları sağlanır (Walrave 1995).

Tanım 2.1.4 $\alpha(s)$, pseudo null eğri ise Frenet denklemleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

şeklindedir. Burada α eğrisi doğru ise birinci eğrilik $k_1 = 0$ dır, diğer tüm durumlar için $k_1 = 1$ dir. Bu durumda

$$g(T,T) = g(N,B) = 1,$$
$$g(N,N) = g(B,B) = g(T,N) = g(T,B) = 0 \tag{2.4}$$

koşulları sağlanır (Walrave 1995).

Tanım 2.1.5 α eğrisi, B binormal vektör alanı spacelike olan null olmayan bir eğri ise Frenet denklemleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_0 k_1 & 0 \\ -\varepsilon_0 k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & \varepsilon_0 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

olur. Burada k_1 ve k_2 sırasıyla eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleridir. Bu durumda

$$g(T,T) = -g(N,N) = \varepsilon_0 = \pm 1,\ g(B,B) = 1,$$
$$g(T,N) = g(T,B) = g(N,B) = 0 \tag{2.6}$$

koşulları sağlanır (Kühnel 1999).

2.2 R_1^4 4-Boyutlu Minkowski Uzay-Zaman

Tanım 2.2.1 R_1^4 Minkowski uzayı, R_1^4 in bir dik koordinat sistemi $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ olmak üzere

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

olarak tanımlanan non-dejenere metrik ile donatılmış 4-boyutlu Öklid uzayıdır (O'neill 1983).

Tanım 2.2.2 $v, w \in R_1^4$ olmak üzere, v ve w vektörlerinin dik olması için gerek ve yeter şart $g(v, w) = 0$ olmasıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.3 R_1^4, 4-boyutlu Minkowski uzayında üç vektör $\vec{X}$, $\vec{Y}$ ve $\vec{Z}$ olsun. $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\vec{Z} = (z_1, z_2, z_3)$ olmak üzere

$$(X \wedge Y) \wedge Z = -\det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

vektörüne $\vec{X}$, $\vec{Y}$ ve $\vec{Z}$ nin vektörel çarpımı (dış çarpımı) denir (Tozak 2010).

Teorem 2.2.1 $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z} \in R_1^4$ ise bu durumda

i. $(X \wedge Y) \wedge Z = -Z \wedge (X \wedge Y)$,

ii. $g(X \wedge Y \wedge Z, W) = -\det(X, Y, Z, W)$

dir (Tozak 2010).

Minkowski uzay-zaman R_1^4 de, α eğrisi üzerinde hareketli Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve α eğrisinin eğrilik fonksiyonları $\{k_1, k_2, k_3\}$ olsun. Burada T, N, B_1, B_2 sırasıyla α eğrisinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı, birinci binormal vektör alanı ve ikinci binormal vektör alanıdır.

Tanım 2.2.4 $\alpha : \mathrm{I} \subset R \to R_1^4$ eğrisi spacelike veya timelike eğri ise Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 k_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 k_1 & 0 & \varepsilon_3 k_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 k_2 & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 k_3 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

şeklindedir. Burada $\forall s \in \mathrm{I}\ (\mathrm{I} \subset R)$ için eğer $k_3 \neq 0$ ise α eğrisi tamamıyla R_1^4 de yatar. Ayrıca $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{-1,1\}$ olmak üzere

$$\begin{gathered} g(T,T) = \varepsilon_1, g(N,N) = \varepsilon_2, g(B_1,B_1) = \varepsilon_3, g(B_2,B_2) = \varepsilon_4, \\ g(T,N) = g(T,B_1) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = g(B_1,B_2) = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

koşulları sağlanır (Kühnel 1999).

Tanım 2.2.5 Eğer α eğrisi partially null ise Frenet denklemleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

şeklindedir. Burada her s için üçüncü eğrilik olan $k_3(s) = 0$ dır. Bu şartları sağlayan $k_1(s), k_2(s)$ eğriliklerine sahip α eğrisi R_1^4 lightlike hiper düzleminde yatar ve Frenet vektörleri;

$$\begin{gathered} g(T,T) = g(N,N) = 1, \quad g(B_1,B_1) = g(B_2,B_2) = 0, \\ g(T,N) = g(T,B_1) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = 0, \ g(B_1,B_2) = 1 \end{gathered} \tag{2.10}$$

koşullarını sağlar (Walrave 1995).

Tanım 2.2.6 $\alpha : \mathrm{I} \subset R \to R_1^4$ eğrisi spacelike bir eğri olmak üzere eğer α eğrisinin asli normal vektör alanı bir null vektör ise özel olarak α eğrisi pseudo null eğri olarak adlandırılır. Eğer α eğrisi pseudo null bir eğri ise

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

ile verilir. Burada α eğrisi doğru ise $k_1(s)=0$, diğer tüm durumlarda $k_1(s)=1$ dir. $k_2(s), k_3(s)$ eğriliklerine sahip α eğrisinin Frenet vektörleri;

$$\begin{gathered} g(T,T)=g(B_1,B_1)=1, \quad g(N,N)=g(B_2,B_2)=0, \\ g(T,N)=g(T,B_1)=g(T,B_2)=g(N,B_1)=g(B_1,B_2)=0, \ g(N,B_2)=1 \end{gathered} \tag{2.12}$$

koşullarını sağlar (Walrave 1995).

Tanım 2.2.7 $\alpha : \mathrm{I} \subset R \to R_1^4$, R_1^4 de birim hızlı (yani $g(\alpha''(s),\alpha''(s))=1$) bir null eğri ise α eğrisine ait Frenet denklemleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_3 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

şeklindedir. Burada α bir doğru ise $k_1(s)=0$ dır, diğer tüm durumlar için $k_1(s)=1$ dir. α eğrisinin Frenet vektörleri;

$$\begin{gathered} g(T,T)=g(B_1,B_1)=g(T,N)=g(T,B_2)=0, \\ g(N,B_1)=g(N,B_2)=g(B_1,B_2)=0, \\ g(N,N)=g(B_2,B_2)=g(T,B_1)=1. \end{gathered} \tag{2.14}$$

koşullarını sağlar (Duggal and Jin 2007).

Tanım 2.2.8 $\alpha : \mathrm{I} \subset R \to R_1^4$ bir eğri olsun.

i. α null bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in \mathrm{I}$ için $g(\alpha''(s),\alpha''(s))=1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiştir denir.

ii. α null olmayan bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in \mathrm{I}$ için $g(\alpha''(s),\alpha''(s))=\pm 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiştir denir (Bonnor 1969).

Tanım 2.2.9 P, R_1^4 uzayının bir alt uzayı olsun. Eğer

i. P üzerinde sıfırdan farklı her vektör spacelike vektör ise P ye spacelike alt uzay,

ii. P üzerinde en az bir timelike vektör var ise P ye timelike altuzay,

iii. Diğer durumlarda P ye lightlike altuzay denir (Lopez 2014).

3. R_1^3 DE NULL ve PSEUDO NULL MANNHEİM EĞRİLERİ

Bu bölümde, Minkowski 3-uzayında null Mannheim eğrilerin olmadığı ispatlanmıştır. Ayrıca 3-boyutlu Minkowski uzayında bir pseudo null Mannheim partner eğrisi sadece pseudo null doğrulardan oluşan pseudo null doğru veya pseudo null çember olduğu ispatlanmıştır. Bu bölümde referansımız Grbović vd. (2014) tarafından yapılan çalışmadır.

Notasyon $\alpha : \mathrm{I} \subset R \to R_1^3$ ve $\alpha^* : \mathrm{I}^* \subset R \to R_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı iki eğri olsun. Bu bölümde $\{T, N, B\}$ ve $\{k_1, k_2\}$, sırasıyla α eğrisinin Frenet çatısı ve eğrilik fonksiyonları, s de α eğrisinin yay uzunluğu parametresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi olarak alınacaktır. Benzer şekilde, $\{T^*, N^*, B^*\}$ ve $\{k_1^*, k_2^*\}$ sırasıyla α^* eğrisinin Frenet çatısı ve eğrilik fonksiyonları, s^* da α^* eğrisinin yay uzunluğu parametresi veya pseudo yay uzunluğu parametresidir. 3-boyutlu Minkowski uzayında Mannheim eğrileri, 3-boyutlu Öklid uzayındakine benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 3.1 α ve α^*, R_1^3 Minkowski uzayında birim hızlı iki eğri olsun. α eğrisinin yay uzunluğu parametresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi s olmak üzere α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$, ve α^* eğrisinin yay uzunluğu parametresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi s^* olmak üzere α^* eğrisinin, $\alpha^*(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. α eğrisinin asli normali ile α^* eğrisinin binormali çakışık ise α eğrisine Mannheim eğrisi, α^* eğrisine α eğrisinin Mannheim partner eğrisi ve $\{\alpha, \alpha^*\}$ ikilisine Mannheim eğri çifti denir (Özdamar 2012). Bu tanıma göre, Mannheim eğrisinin denklemi;

$$\alpha^*(s^*) = \alpha(s) + \lambda(s) N(s)$$

veya

$$\alpha(s) = \alpha^*(s^*) + \lambda(s^*) B^*(s^*)$$

şeklindedir.

Teorem 3.1 R_1^3 Minkowski uzayında null Mannheim eğri yoktur.

İspat: α, R_1^3 de null eğri olsun. Kabul edelim ki α^* eğrisi, α eğrisinin Mannheim partner eğrisi olsun. Bu taktirde bu eğrilerin karşılık gelen noktalarında, α nın asli normali N ile α^* ın binormali B^* lineerdir. O halde B^* spacelike vektördür. Dolayısıyla α^* eğrisi timelike ya da spacelike eğridir ve (2.5) Frenet denklemlerini sağlar. $\{\alpha, \alpha^*\}$ Mannheim eğri çifti olduğundan

$$\alpha(s^*) = \alpha^*(s^*) + \lambda(s^*) B^*(s^*) \tag{3.1}$$

denklemini sağlar. Şimdi $k_2^*(s^*) = 0$ ve $k_2^*(s^*) \neq 0$ durumlarını inceleyeceğiz.

(1) Eğer $k_2^*(s^*) = 0$ ise (3.1) eşitliğinin s^* a göre türevi alınarak (2.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \alpha^{*\prime} + \lambda' B^* + \lambda B^{*\prime}$$

$$T\frac{ds}{ds^*} = T^* + \lambda' B^* + \lambda \varepsilon_0^* k_2^* N^*$$

Burada $k_2^*(s^*) = 0$ olduğundan

$$T\frac{ds}{ds^*} = T^* + \lambda' B^* \tag{3.2}$$

elde edilir. N, B^* vektörü ile çakışık olduğundan $N \perp N^*$ dır. Bu denklemin her iki tarafının N ile skalar çarpımı alınarak (2.2) ve (2.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(T^*, N) + \lambda' g(B^*, N) = 0$$

ifadesinden $\lambda' = 0$ olduğu bulunur. Bu durumda (3.2) eşitliğinden T ile T^* vektörleri lineer bağımlıdır. Ancak T null vektör ve T^* null olmayan bir vektör olduğundan bu bir çelişkidir.

(2) $k_2^*\left(s^*\right)\neq 0$ ise (3.1) ifadesinin s ye göre türevi alınıp (2.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T\frac{ds}{ds^*}=T^*+\lambda' B^*+\lambda\varepsilon_0^* k_2^* N^* \tag{3.3}$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının N ile skaler çarpımı alınarak (2.2) ve (2.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(T^*,N)+\lambda' g(B^*,N)+\lambda\varepsilon_0^* k_2^* g(N^*,N)=0$$

olduğundan $\lambda'=0$ dır. Dolayısıyla $\lambda=sabit\neq 0$ demektir. $\lambda=sabit\neq 0$, (3.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T\frac{ds}{ds^*}=T^*+\lambda\varepsilon_0^* k_2^* N^* \tag{3.4}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinden (2.2) ve (2.6) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(T\frac{ds}{ds^*},T\frac{ds}{ds^*}) &= g(T^*+\lambda\varepsilon_0^* k_2^* N^*,T^*+\lambda\varepsilon_0^* k_2^* N^*)\\
0 &= g(T^*,T^*)+2\lambda\varepsilon_0^* k_2^* g(T^*,N^*)+\lambda^2\varepsilon_0^{*2}k_2^{*2}g(N^*,N^*)\\
0 &= \varepsilon_0^*-\varepsilon_0^*\lambda^2 k_2^{*2}
\end{aligned}$$

bulunur. $\varepsilon_0^*-\varepsilon_0^*\lambda^2 k_2^{*2}=0$ denkleminden

$$k_2^*=\pm\frac{1}{\lambda}=sabit\neq 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. α null eğri olduğundan $k_1\left(s\right)=0$ ve $k_1\left(s\right)=1$ durumlarını ele alacağız.

(2.a) Eğer $k_1\left(s\right)=0$ ise (2.1) Frenet denklemlerinden

$$T'=0\Rightarrow T\left(s\right)=sabit$$

elde edilir. (3.4) denkleminin s^* a göre türevi alınarak (2.5) Frenet denklemlerinden ve (3.5) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
T\frac{d^2s}{ds^{*2}} &= T^{*\prime}+\lambda\varepsilon_0^* k_2^* N^{*\prime}\\
T\frac{d^2s}{ds^{*2}} &= -\varepsilon_0^* k_1^* N^*+\lambda\varepsilon_0^* k_2^*\left(-\varepsilon_0^* k_1^* T^*+k_2^* B^*\right)\\
T\frac{d^2s}{ds^{*2}} &= -\varepsilon_0^* k_1^* N^*\pm k_1^* T^*\pm\varepsilon_0^* k_2^* B^*
\end{aligned} \tag{3.6}$$

bulunur. (3.6), (2.2) ve (2.6) eşitlikleri kullanılarak

$$g\left(T\frac{d^2s}{ds^{*2}},T\frac{d^2s}{ds^{*2}}\right)=g\left(-\varepsilon_0^*k_1^*N^*\pm k_1^*T^*\pm\varepsilon_0^*k_2^*B^*,-\varepsilon_0^*k_1^*N^*\pm k_1^*T^*\pm\varepsilon_0^*k_2^*B^*\right)$$

$$\begin{aligned}0&=\varepsilon_0^{*2}k_1^{*2}g\left(N^*,N\right)\pm 2\varepsilon_0^*k_1^{*2}g\left(N^*,T^*\right)\\&\quad\pm 2\varepsilon_0^{*2}k_1^*k_2^*g\left(N^*,B^*\right)+2\varepsilon_0^*k_1^*k_2^*g\left(T^*,B^*\right)\\&\quad+k_1^{*2}g\left(T^*,T^*\right)+\varepsilon_0^{*2}k_2^{*2}g\left(B^*,B^*\right)\\0&=-\varepsilon_0^*k_1^{*2}+\varepsilon_0^*k_1^{*2}+k_2^{*2}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $k_2^*=0$ olduğu görülür. Bu ise (3.5) eşitliğiyle çelişir.

(2.b) Eğer $k_1\left(s\right)=1$ ise (3.5) eşitliği, (3.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T\frac{ds}{ds^*}=T^*\pm\varepsilon_0N^*$$

elde edilir. Bu denklemin s^* a göre türevi alınarak (2.1) ve (2.5) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T'\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2+T\frac{d^2s}{ds^{*2}}=T^{*\prime}\pm\varepsilon_0^*N^{*\prime}$$

$$N\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2+T\frac{d^2s}{ds^{*2}}=-\varepsilon_0^*k_1^*N^*\pm k_1^*T^*\pm\varepsilon_0^*k_2^*B^* \tag{3.7}$$

bulunur. Son olarak

$$g\left(N\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2+T\frac{d^2s}{ds^{*2}},N\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2+T\frac{d^2s}{ds^{*2}}\right)=g\left(\begin{array}{r}-\varepsilon_0^*k_1^*N^*\pm k_1^*T^*\pm\varepsilon_0^*k_2^*B^*,-\varepsilon_0^*k_1^*N^*\\ \pm k_1^*T^*\pm\varepsilon_0^*k_2^*B^*\end{array}\right)$$

ve buradan (2.2), (2.3), (3.5) ve (3.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^4g(N,N)+2\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2\frac{d^2s}{ds^{*2}}g(T,N)+\left(\frac{d^2s}{ds^{*2}}\right)^2g(T,T)&=\varepsilon_0^{*2}k_1^{*2}g(N^*,N^*)\\&\quad\pm 2\varepsilon_0^*k_1^{*2}g(N^*,T^*)\pm 2\varepsilon_0^{*2}k_1^*k_2^*g(N^*,B^*)\\&\quad+2\varepsilon_0^*k_1^*k_2^*g(T^*,B^*)+k_1^{*2}g(T^*,T^*)+\varepsilon_0^{*2}k_2^{*2}g(B^*,B^*)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^4=k_2^{*2}=sabit\neq 0 \tag{3.8}$$

olur.

(3.7) denkleminin N^* ile skalar çarpımı alınarak (2.6) ve (3.8) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 g(N,N^*)+\frac{d^2s}{ds^{*2}}g(T,N^*)=-\varepsilon_0^* k_1^* g(N^*,N^*)\pm k_1^* g(T^*,N^*)\pm\varepsilon_0^* k_2^* g(B^*,N^*)$$

Burada $N\perp N^*$ olduğundan $k_1^*=0$ bulunur. Dolayısıyla $k_2^*=0$ olur. Bu ise (3.5) eşitliği ile çelişir ki teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2 R_1^3 de α pseudo null bir eğri ve α^* keyfi bir eğri olsun. Eğer $\{\alpha,\alpha^*\}$ bir Mannheim eğri çifti ise;

i. α^* eğrisi pseudo null doğru ise α ve α^* eğrileri paralel pseudo null doğrulardır,

ii. α eğrisi pseudo null bir çember ise α^* eğrisi de pseudo null bir doğrudur

önermeleri geçerlidir.

İspat: α, R_1^3 de pseudo null bir eğri olsun. Kabul edelim ki α^* eğrisi α eğrisinin Mannheim partner eğrisi olsun. Bu taktirde bu eğrilerin karşılık gelen noktalarında, α nın asli normali N ile α^* ın binormali B^* lineer bağımlıdır. Bu durumda B^* null vektör olacağından α^* pseudo null veya null bir eğridir.

(1) Kabul edelim ki α^* pseudo null eğri olsun. $\{\alpha,\alpha^*\}$ Mannheim eğri çifti olduğundan

$$\alpha^*(s)=\alpha(s)+\mu(s)N(s) \tag{3.9}$$

dir. (3.9) eşitliğinin s ye göre türevi alınırsa

$$\alpha^{*\prime}=T+(\mu'+k_2\mu)N \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10) ve (2.3) eşitlikleri kullanılarak

$$g(\alpha^{*\prime},\alpha^{*\prime})=g(T,T)+2(\mu'+k_2\mu)g(T,N)+(\mu'+k_2\mu)^2 g(N,N)$$
$$g(\alpha^{*\prime},\alpha^{*\prime})=1$$

bulunur. Dolayısıyla $\alpha^{*\prime}=T^*$ dır. (3.10) eşitliğinden

$$T^*=T+\left(\mu'+k_2\mu\right)N \tag{3.11}$$

elde edilir. Şimdi $k_2(s)=0$ ve $k_2(s)\neq 0$ durumlarını inceleyelim.

(1.a) Eğer $k_2(s)=0$ ise (3.11) eşitliğinden $T^*=T+\mu' N$ olur. Bu denklemin T ile skalar çarpımı alınarak (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(T,T^*)=g(T,T+\mu' N)$$

eşitliğinden

$$g(T,T^*)=1 \tag{3.12}$$

bulunur. α pseudo null eğri olduğundan $k_1(s)=0$ ve $k_1(s)=1$ durumlarını ele alacağız.

(1.a.1) Eğer $k_1(s)=0$ ise N ile B^* lineer bağımlı olduğundan $T\perp B^*$ dır. Dolayısıyla $g(T,B^*)=0$ eşitliğinin türevi alınarak (2.3) ile verilen eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}g(T',B^*)+g(T,B^{*'})&=0\\ -k_1^*g(T,T^*)-k_2^*g(T,B^*)&=0\end{aligned}$$

elde edilir. (3.12) kullanılırsa $k_1^*=0$ olur, bu ise α^* ın doğru olması anlamına gelir. N^* ve B^* lineer bağımsız null vektörler ve $N=\pm B^*$ olduğundan $B=\pm N^*$ olacaktır. Bu nedenle $T=\pm T^*$ olur ki bu durum da α ve α^* paralel doğrulardır. Dolayısıyla (i) ifadesi ispatlanmış olur.

(1.a.2) Eğer $k_1(s)=1$ ise α eğrisi, R_1^3 ün lightlike düzleminde yatan pseudo null bir çemberdir. $g(T,B^*)$ denkleminin türevi alınarak (2.3) ile verilen eşitlikler kullanılırsa

$$g(N,B^*)+g(T,-k_1^*T^*-k_2^*B^*)=0 \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) eşitliğinde (2.4) ve (3.12) eşitlikleri kullanılırsa $k_1^*=0$ olur, bu ise α^* ın pseudo null bir doğru olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla (ii) ifadesi ispatlanmış olur.

(1.b) Eğer $k_2(s)\neq 0$ ise (3.11) eşitliğinin her iki tarafının T ile skaler çarpımı alınarak (2.4) eşitlikleri kullanılırsa $g(T,T^*)=1$ elde edilir. $g(T,B^*)=0$ eşitliğinin türevi alınarak (2.4) ve (3.12) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}g(T',B^*)+g(T,B^{*\prime})&=0\\ -k_1^*g(T,T^*)-k_2^*g(T,B^*)&=0\\ k_1^*&=0\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle $B^* = sabit$ ve $N' = 0$ dır. O halde (2.3) Frenet denklemlerinden $k_2\left(s\right)=0$ olur, bu ise bir çelişkidir.

(2) Kabul edelim ki α^* null bir eğri olsun. $\{\alpha, \alpha^*\}$ Mannheim eğri çifti olduğundan

$$\alpha\left(s^*\right)=\alpha^*\left(s^*\right)+\mu\left(s^*\right)B^*\left(s\right) \tag{3.14}$$

eşitliği sağlanır. **(1)** durumunda incelediğimiz gibi $k_1^*\left(s^*\right)=0$ ve $k_1^*\left(s^*\right)=1$ koşullarını inceleyelim.

(2.a) Eğer $k_1^*\left(s^*\right)=0$ ise (3.14) eşitliğinin s^* a göre türevi alınarak (2.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds^*}=T^*+\mu' B^*$$

$$T\frac{ds}{ds^*}=T^*+\mu' B^*$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının N ile skaler çarpımı alınarak (2.2) ve (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(T\frac{ds}{ds^*},N)=g(T^*,N)+\mu' g(B^*,N)$$

elde edilir. Buradan $g(T^*,B^*)=0$ olduğu görülür ki, bu ise α^* eğrisinin null bir eğri olması ile çelişir.

(2.b) Eğer $k_1^*\left(s^*\right)=1$ ise (3.14) ün s^* a göre türevi alınarak (2.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$T\frac{ds}{ds^*}=T^*+\mu' B^*-\mu k_2^* N^* \tag{3.15}$$

bulunur. (3.15) denkleminin her iki tarafının N ile skalar çarpımı alınarak (2.2) ve (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(T\frac{ds}{ds^*},N)=g(T^*,N)+\mu' g(B^*,N)-\mu k_2^* g(N^*,N)$$

eşitliğinden $g(T^*,N)=g(T^*,B^*)=0$ olur, bu ise α^* eğrisinin null bir eğri olması ile çelişir. Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Örnek 3.1 R_1^3 de $\alpha(s)=(1,1,s)$ ve $\alpha^*(s)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},s\right)$ parametrik denklemleri ile verilen pseudo null doğruları ele alalım. Bu eğrilerin Frenet çatısı $T=T^*=(0,0,1)$, $N=B^*=(1,1,0)$ ve $B=N^*=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ şeklinde alınabilir. Bu taktirde $\alpha^*=\alpha-\frac{1}{2}N$ dir. Dolayısıyla $\{\alpha,\alpha^*\}$ bir Mannheim eğri çiftidir.

Örnek 3.2 R_1^3 de $\alpha(s)=\left(\frac{s^2}{2},\frac{s^2}{2},s\right)$ ve $\alpha^*(s)=(c,c,s)$, $c\in R$ ile verilen pseudo null çemberleri ele alalım. Bu eğrilerin Frenet çatısı $T=(s,s,1)$, $T^*=(0,0,1)$, $N=B^*=(1,1,0)$ ve $B=N^*=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ şeklinde olacaktır. Bu taktirde $\alpha^*=\alpha-\left(c-\frac{s^2}{2}\right)N$ dir. Dolayısıyla $\{\alpha,\alpha^*\}$ bir Mannheim eğri çiftidir.

4. R_1^4 DE GENELLEŞTİRİLMİŞ NULL MANNHEİM EĞRİLERİ

Bu bölümde, R_1^4 deki null Mannheim eğrileri tanımlanmıştır. R_1^4 deki bir null Mannheim eğrisinin eğrilikleri ve Frenet çatısı ile bu eğrinin Mannheim partner eğrisinin eğrilikleri ve Frenet çatısı arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Bu bölüm için ana kaynağımız Grbović vd. (2016) olacaktır.

Notasyon $\alpha : \mathrm{I} \subset R \to R_1^4$ ve $\alpha^* : \mathrm{I} \subset R \to R_1^4$ Minkowski uzay-zamanda eğriler olsun. Bu bölümde $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve $\{k_1, k_2, k_3\}$, α eğrisinin sırasıyla Frenet çatısı ve eğrilik fonksiyonları s de yay uzunluğu parametresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi olarak alınacaktır. Benzer şekilde $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ ve $\{k_1^*, k_2^*, k_3^*\}$ α^* eğrisinin sırasıyla Frenet çatısı ve eğrilik fonksiyonları s^* da yay uzunluğu parametresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi olarak alınacaktır.

α Cartan null eğrisinin üçüncü eğriliği $k_3(s) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda α nın ikinci eğriliği $k_2(s) = 0$ (α null kübik) veya $k_2(s) \neq 0$ olabilir. Genelleştirilmiş null Mannheim eğrisinin tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir:

Tanım 4.1 $\alpha : I \subset R \to R_1^4$ Minkowski uzay-zamanda Cartan null bir eğri olsun. Eğer $\phi : \alpha \to \alpha^*$ 1:1, örten dönüşümü altında α nın her bir noktasındaki asli normal doğrusu α^* ın birinci ve ikinci binormal doğrusu tarafından gerilen düzlemde yatacak şekilde bir $\alpha^* : \mathrm{I}^* \to R_1^4$ Cartan null eğrisi veya Frenet eğrisi bulunuyorsa, $\alpha : \mathrm{I} \to R_1^4$ Cartan null eğrisine genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi denir. α^* eğrisine ise α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi ve $\{\alpha, \alpha^*\}$ ikilisine genelleştirilmiş Mannheim eğri çifti denir.

Bu tanımda asli normal (binormal) doğrusu, asli normal (binormal) vektör alanı yönündeki doğru anlamındadır.

Uyarı R_1^4 de genelleştirilmiş spacelike Mannheim eğrinin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi Ersoy vd. (2012) tarafından bir spacelike Frenet eğrisi olarak verilmiştir. Fakat genel olarak partner eğrisi herhangi bir keyfi casual karaktere sahip olabilir.

Daha önce verdiğimiz notasyona göre α genelleştirilmiş null Mannheim eğrisinin Cartan çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi α^* eğrisinin Cartan ya da Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$ olsun. $a(s)$ ve $b(s)$diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere α nın asli normal vektörü $N(s)$, $\{B_1^*, B_2^*\}$ düzle-minde yattığından $N(s) = a(s)B_1^*(s) + b(s)B_2^*(s)$ denklemi sağlanır. B_1^* ve B_2^* vektörleri tarafından gerilen düzlem causal karaktere bağlı olarak üçe ayrılır:

(1) $\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzlem

(2) $\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzlem

(3) $\{B_1^*, B_2^*\}$ lightlike düzlem

(1) $\{B_1^*, B_2^*\}$ **spacelike düzlem**

Teorem 4.1 $\alpha : \mathrm{I} \to R_1^4$ genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi ve α eğrisinin asli normal doğrusu N, B_1^* ve B_2^* vektörlerinin gerdiği $\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzleminde bu-lunmak üzere α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi $\alpha^* : \mathrm{I}^* \to R_1^4$ olsun. Bu taktirde α^* bir timelike eğridir. α ve α^* eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$k_1 = 1,\ k_2 = \frac{1}{2\lambda},\ |k_1^*| = |k_2^*| = |k_3| \neq 0,\ |k_3^*| = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \in R^+ \setminus \{0\}. \tag{4.1}$$

α ile α^* eğrilerinin çatıları arasında ise

$$
\begin{aligned}
T^* &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(T-2\lambda B_1\right),\\
N^* &= -\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_3\right)B_2,\\
B_1^* &= \operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(T+2\lambda B_1\right),\\
B_2^* &= \operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_3\right)N
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

ilişkileri vardır.

İspat: α nın asli normal doğrusu N, B_1^* ve B_2^* vektörlerinin gerdiği $\left\{B_1^*, B_2^*\right\}$ space-like düzleminde yattığından α^* spacelike veya timelike eğridir. $\varepsilon_1^* = -\varepsilon_2^*$, $\varepsilon_3^* = \varepsilon_4^* = 1$ olmak üzere (2.7) Frenet denklemleri sağlanır. $f : \mathrm{I} \subset R \to \mathrm{I}^* \subset R$, f ve λ düzgün fonksiyonlar, $s^* = f(s) = \int_0^s \left\|\alpha^{*\prime}(t)\right\| dt$ olmak üzere α^* eğrisinin parametrik denklemi

$$
\alpha^*\left(f(s)\right) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{4.3}
$$

şeklindedir. $k_2 = 0$ ve $k_2 \neq 0$ durumlarını inceleyeceğiz.

(1.a) $k_2 = 0$ ise (4.3) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\alpha^{*\prime} f' &= \alpha' + \lambda' N + \lambda N'\\
T^* f' &= T + \lambda' N - \lambda B_1
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

bulunur. (4.4) eşitliğinin her iki tarafının $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$
\begin{aligned}
g\left(T^* f', N\right) &= g\left(T + \lambda' N - \lambda B_1, N\right)\\
af' g\left(T^*, B_1^*\right) + bf' g\left(T^*, B_2^*\right) &= g\left(T, N\right) + \lambda' g\left(N, N\right) - \lambda g\left(B_1, N\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. (2.8) ve (2.14) eşitliklerinden $\lambda' = 0$ bulunur. Bu eşitliği (4.4) ifadesinde yerine yazarsak

$$
T^* f' = T - \lambda B_1, \qquad \lambda \in R^+ \setminus \{0\} \tag{4.5}
$$

elde edilir. (4.5) eşitliği kullanılarak (2.8) ve (2.14) eşitliklerinden

$$g\left(T^* f',T^* f'\right)=g\left(T-\lambda B_1,T-\lambda B_1\right)$$
$$f'^2 g\left(T^*,T^*\right)=g\left(T,T\right)-2\lambda g\left(T,B_1\right)+\lambda^2 g\left(B_1,B_1\right)$$
$$g\left(T^* f',T^* f'\right)=\varepsilon_1^* f'^2=-2\lambda$$

bulunur. Dolayısıyla

$$f'^2=-2\varepsilon_1^*\lambda=sabit\neq 0 \tag{4.6}$$

olur. (4.5) eşitliğinin türevi alınarak (2.7), (2.13) Frenet denklemleri ve (4.6) eşitliği kullanılırsa

$$T^{*\prime} f'^2+T^* f''=T'+\lambda' B_1+\lambda B_1'$$
$$\varepsilon_2^* k_1^* N^* f'^2=N-\lambda k_3 B_2$$

bulunur. Elde edilen son eşitliğin her iki tarafının $N=aB_1^*+bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$g\left(\varepsilon_2^* k_1^* N^* f'^2,N\right)=g\left(N-\lambda k_3 B_2,N\right)$$
$$a\varepsilon_2^* k_1^* f'^2 g\left(N^*,B_1^*\right)+b\varepsilon_2^* k_1^* f'^2 g\left(N^*,B_2^*\right)=g\left(N,N\right)-\lambda k_3 g\left(B_2,N\right)$$

elde edilir. Bu işlemin sonucundan bir çelişki elde edilir.

(1.b) $k_2\neq 0$ olsun. (4.3) eşitliğinin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f'=\left(1-\lambda k_2\right)T+\lambda' N-\lambda B_1 \tag{4.7}$$

(4.7) denkleminin her iki tarafının $N=aB_1^*+bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$g\left(T^* f',N\right)=\left(1-\lambda k_2\right)g\left(T,N\right)+\lambda' g\left(N,N\right)-\lambda g\left(B_1,N\right)$$

eşitliğinden

$$\lambda'=0 \tag{4.8}$$

bulunur. (4.8) eşitliği (4.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T^* f'=\left(1-\lambda k_2\right)T-\lambda B_1 \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\varepsilon_2^* k_1^* N^* f'^2+T^* f''=\left(1-\lambda k_2\right)' T+\left(1-2\lambda k_2\right)N-\lambda k_3 B_2 \tag{4.10}$$

bulunur. (4.10) eşitliğinin her iki tarafının $N=aB_1^*+bB_2^*$ skaler çarpımı alınarak (4.8) eşitliği kullanılırsa

$$\varepsilon_2^* k_1^* f'^2 g\left(N^*, N\right) + f'' g\left(T^*, N\right) = \left(1 - \lambda k_2\right)' g\left(T, N\right) + \left(1 - 2\lambda k_2\right) g\left(N, N\right) - \lambda k_3 g\left(B_2, N\right)$$

$$\varepsilon_2^* k_1^* f'^2 g\left(N^*, aB_1^* + bB_2^*\right) + f'' g\left(T^*, aB_1^* + bB_2^*\right) = \left(1 - \lambda k_2\right)' g\left(T, N\right) + \left(1 - 2\lambda k_2\right) g\left(N, N\right) - \lambda k_3 g\left(B_2, N\right)$$

$$0 = \left(1 - 2\lambda k_2\right)$$

eşitliğinden

$$k_2 = \frac{1}{2\lambda} = sabit, \qquad \lambda \in R \setminus \{0\}, \tag{4.11}$$

bulunur. Ayrıca (4.9) kullanılırsa

$$g\left(T^* f', T^* f'\right) = \left(1 - \lambda k_2\right)^2 g\left(T, T\right) - 2\left(1 - \lambda k_2\right)\lambda g\left(T, B_1\right) + \lambda^2 g\left(B_1, B_1\right)$$

$$f'^2 g\left(T^*, T^*\right) = -2\left(1 - \lambda k_2\right)\lambda$$

eşitliğinden

$$\varepsilon_1^* f'^2 = -2\left(1 - \lambda k_2\right)\lambda \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.11) eşitliği (4.12) de yerine yazılırsa

$$f'^2 = -\varepsilon_1^* \lambda = sabit \neq 0 \tag{4.13}$$

(4.10), (4.11) ve (4.12) eşitliklerinden

$$\varepsilon_2^* k_1^* N^* f'^2 = -\lambda k_3 B_2 \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) eşitliğinden N^* ve B_2 vektörlerinin lineer bağımlı oldukları görülmektedir. α null eğri olduğundan $g\left(B_2, B_2\right) = 1$ dir. Dolayısıyla B_2 spacelike bir vektör ayrıca N^* vektörü ile lineer bağımlı olduğundan N^* vektörü de spacelike vektör ve T^* timelike vektör olacaktır. Bu taktirde α^* timelike bir eğridir. $g\left(T^*, T^*\right) = \varepsilon_1^* = -1 = -\varepsilon_2^*$ eşitliği (4.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$f'^2 = \lambda, \qquad \lambda \in R^+ \setminus \{0\} \tag{4.15}$$

eşitliğinden

$$f'(s) = \left\| \alpha^{*\prime}(s) \right\| = \sqrt{\lambda} \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.11) ve (4.16) eşitlikleri (4.9) ifadesinde yerine yazıldığında

$$T^* f' = \left(1 - \lambda k_2\right) T - \lambda B_1$$

eşitliğinden

$$T^* = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(T - 2\lambda B_1\right) \tag{4.17}$$

elde edilir. $\varepsilon_2^* = 1$ ve (4.15) eşitlikleri (4.14) ifadesinde yerine yazılırsa $k_1^* N^* = -k_3 B_2$ bulunur. Bu durumda

$$k_1^* = -k_3, \quad N^* = B_2, \tag{4.18}$$

veya

$$k_1^* = k_3, \quad N^* = -B_2, \tag{4.19}$$

bulunur. Kabul edelim ki α ile α^* eğrilerinin eğrilikleri ve Frenet vektörleri arasında (4.18) bağıntısı bulunsun. $N^* = B_2$ eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (2.7) ve (2.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left(k_1^* T^* + k_2^* B_1^*\right) f' = -k_3 T \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.20) eşitliğinin her iki tarafının $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$g\left(\left(k_1^* T^* + k_2^* B_1^*\right) f', N\right) = -k_3 g\left(T, N\right)$$
$$ak_1^* f' g\left(T^*, B_1^*\right) + bk_1^* f' g\left(T^*, B_2^*\right) + ak_2^* f' g\left(B_1^*, B_1^*\right) + bk_2^* f' g\left(B_1^*, B_2^*\right) = 0$$

işlemlerinden $ak_2^* f' = 0$ bulunur. Eğer $k_2^* = 0$ ise (4.20) eşitliğine bakılırsa timelike vektör T^* ile null vektör T lineer bağımlı olur ki bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $a = 0$ ve $N = bB_2^*$ olacaktır. $g\left(N, N\right) = 1$ olduğundan $b^2 = 1$ dir. Bu durumda

$$N = B_2^* \tag{4.21}$$

veya

$$N = -B_2^* \tag{4.22}$$

eşitlikleri vardır. Kabul edelim ki α ile α^* eğrilerinin Frenet vektörleri arasında (4.21) bağıntısı bulunsun. (4.21) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-k_2 T - B_1 = -k_3^* f' B_1^*$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.11) ve (4.15) yerine yazılırsa

$$B_1^* = \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}k_3^*}\left(\frac{1}{2}T + \lambda B_1\right) \tag{4.23}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.16), (4.17) ve (4.18) eşitlikleri (4.20) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\sqrt{\lambda}k_2^* B_1^* = \frac{1}{2}k_1^* T + k_1^* \lambda B_1$$

eşitliğinden

$$B_1^* = \frac{k_1^*}{\sqrt{\lambda}k_2^*}\left(\frac{1}{2}T + \lambda B_1\right) \tag{4.24}$$

elde edilir. $\lambda > 0$ olduğundan (4.23) ve (4.24) eşitliklerinden

$$\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}k_3^*} = \frac{k_1^*}{\sqrt{\lambda}k_2^*}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right) = \operatorname{sgn}\left(k_3^*\right)$$

olur. $\det\left(T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\right) = 1$ eşitliğinde (4.17), (4.18), (4.21) ve (4.24) kullanılırsa

$$k_1^* = -k_2^* \tag{4.25}$$

bulunur. Dolayısıyla $\operatorname{sgn}\left(k_3^*\right) = -1$ dir. (4.23) ifadesi ve $g\left(B_1^*, B_1^*\right) = 1$ eşitliğinden

$$\frac{1}{4\lambda^3 k_3^{*2}} g\left(T, T\right) + \frac{1}{\lambda^2 k_3^{*2}} g\left(T, B_1\right) + \frac{1}{\lambda k_3^{*2}} g\left(B_1, B_1\right) = 1$$

$$k_3^{*2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$k_3^* = -\frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda \in R^+ \setminus \{0\} \tag{4.26}$$

bulunur. (4.25) eşitliği (4.24) ifadesinde yerine yazılırsa

$$B_1^* = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(T + 2\lambda B_1\right) \tag{4.27}$$

elde edilir. $k_1^* = -k_2^* = -k_3$ olmak üzere (4.11), (4.18), (4.25) ve (4.26) ifadelerinden (4.1) eşitliğinin sağlandığı görülür. (4.17), (4.18), (4.21) ve (4.27) bağıntıları kullanı-larak (4.2) eşitliğinin sağlandığı görülür. Benzer şekilde, (4.19) ve (4.21) veya (4.18) ve (4.22) veya (4.19) ve (4.22) bağıntıları sağlandığında (4.1) ve (4.2) elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Aşağıdaki teoremde sırasıyla α Cartan null eğrisinin genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi ve $\alpha^* = \alpha(s) + (1/2k_2)N$ eğrisinin ise genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi olması için gerek ve yeter koşulları vereceğiz.

Teorem 4.2 $\alpha : \mathrm{I} \to R_1^4$ Cartan null eğri ve ikinci eğriliği $k_2 = sabit \neq 0 \in R^+ \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $\alpha^* = \alpha + (1/2k_2)N$ olacak şekilde bir $\alpha^* : \mathrm{I}^* \to R_1^4$ Frenet eğrisi varsa α genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi ve α^* ise α eğrisinin genelleştirilmiş timelike Mannheim partner eğrisidir.

İspat: Kabul edelim ki $f : \mathrm{I} \subset R \to \mathrm{I}^* \subset R$, f ve $s^* = f(s) = \int_0^s \left\| \alpha^{*\prime}(t) \right\| dt$ olmak üzere α^* eğrisi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \frac{1}{2k_2} N(s), \qquad k_2 \in R^+ \setminus \{0\}, \tag{4.28}$$

olarak tanımlansın. $\lambda = 1/2k_2$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} g\left(\alpha^{*\prime}(s), \alpha^{*\prime}(s)\right) &= g\left(\alpha'(s) + \lambda' N + \lambda N', \alpha'(s) + \lambda' N + \lambda N'\right) \\ f'^2 &= -2\lambda(1 - \lambda k_2) \\ f'^2 &= -\lambda \end{aligned}$$

eşitliğinden $g\left(\alpha^{*\prime}(s), \alpha^{*\prime}(s)\right) = -\lambda$ olduğu görülür. Bu durumda $k_2 \in R^+ \setminus \{0\}$ olduğundan α^* timelike bir eğridir. Dolayısıyla $f(s) = \sqrt{\lambda} s$ olur. (4.28) ifadesinin s ye göre türevi alınıp (2.13) Frenet denklemleri ve $f' = \sqrt{\lambda}$ kullanılırsa

$$T^* = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(T - 2\lambda B_1) \tag{4.29}$$

bulunur. (4.29) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^{*\prime} f' = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(T' - 2\lambda B_1'\right)$$

$$k_1^* N^* f' = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(N - 2\lambda k_2 N - 2\lambda k_3 B_2\right)$$

$$k_1^* N^* = -k_3 B_2$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$k_1^* = -k_3, \qquad N^* = B_2, \tag{4.30}$$

veya

$$k_1^* = k_3, \qquad N^* = -B_2, \tag{4.31}$$

olur. Kabul edelim ki α ile α^* eğrilerinin eğrilikleri ve Frenet vektörleri arasında (4.30) bağıntısı bulunsun $N^* = B_2$ ifadesinin s ye göre türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\left(k_1^* T^* + k_2^* B_1^*\right) f' = -k_3 T \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.32) ifadesi kullanılarak

$$g\left(\left(k_1^* T^* + k_2^* B_1^*\right) f', \left(k_1^* T^* + k_2^* B_1^*\right) f'\right) = g\left(-k_3 T, -k_3 T\right)$$

$$\left(k_1^{*2} g\left(T^*, T^*\right) + 2k_1^* k_2^* g\left(T^*, B_1^*\right) + k_2^{*2} g\left(B_1^*, B_1^*\right)\right) f'^2 = k_3^{\,2} g\left(T, T\right)$$

eşitliğinden

$$\left(-k_1^{*2} + k_2^{*2}\right) f'^2 = 0$$

bulunur. Bu durumda

$$\left|k_1^*\right| = \left|k_2^*\right| \tag{4.33}$$

olduğu görülür. (4.29) ifadesi (4.32) eşitliğinde yerine yazılırsa ve (4.30), (4.33) ve $f' = \sqrt{\lambda}$ ifadeleri kullanılırsa

$$B_1^* = \frac{\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)}{2\sqrt{\lambda}}\left(T + 2\lambda B_1\right) \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.34) ifadesinin s ye göre türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri ile (4.30) ve $\lambda = 1/2k_2$ ifadeleri kullanılırsa

$$B_1^{*\prime} f' = \frac{\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)}{2\sqrt{\lambda}}\left(T' + 2\lambda B_1'\right)$$

eşitliğinden

$$B_2^* = \frac{\operatorname{sgn}(k_1^*)\operatorname{sgn}(k_2^*)}{\lambda k_3^*} N \tag{4.35}$$

bulunur. (4.29), (4.30), (4.34), (4.35) ve $\det(T^*, N^*, B_1^*, B_2^*) = 1$ eşitliklerinden

$$k_3^* = -\frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda \in R^+ \setminus \{0\}$$

elde edilir. Bu ifade (4.35) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$B_2^* = -\operatorname{sgn}(k_1^*)\operatorname{sgn}(k_2^*) N \tag{4.36}$$

bulunur. Ayrıca $\operatorname{sgn}(k_1^*) = -\operatorname{sgn}(k_3)$ olduğundan $B_2^* = \operatorname{sgn}(k_1^*)\operatorname{sgn}(k_2^*) N$ elde edilir.

(4.29), (4.30), (4.34) ve (4.36) ifadelerinden α eğrisinin çatısı ile α^* eğrisinin çatısı arasında

$$T^* = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(T - 2\lambda B_1)$$

$$N^* = B_2$$

$$B_1^* = \frac{\operatorname{sgn}(k_1^*)\operatorname{sgn}(k_2^*)}{2\sqrt{\lambda}}(T + 2\lambda B_1)$$

$$B_2^* = -\operatorname{sgn}(k_1^*)\operatorname{sgn}(k_2^*) N$$

bağıntılarının olduğu görülür.

Kabul edelim ki α ile α^* eğrilerinin eğrilikleri ve Frenet vektörleri arasında (4.31) bağıntısı bulunsun. Benzer şekilde α nın asli normali N nin B_1^* ve B_2^* vektörlerinin gerdiği $\{B_1^*, B_2^*\}$ düzleminde yattığı bulunur. O halde teoremin ispatı tamamlanmış olur.

(2) $\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzlem

Bu kısımda, $\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzlemini geren B_1^* ve B_2^* vektörlerinin causal karakterine bağlı olarak iki teorem vereceğiz. Bilindiği gibi bir düzlemin timelike olabilmesi için spacelike ve timelike ortogonal birim vektörler veya lineer bağımsız null vektörler tarafından gerilmelidir.

Teorem 4.3 $\alpha : \mathrm{I} \to R_1^4$ genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi ve α eğrisinin asli normal doğrusu N, null olmayan B_1^* ve B_2^* vektörlerinin gerdiği $\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzleminde bulunmak üzere $\alpha^* : \mathrm{I}^* \to R_1^4$, α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi olsun. Bu taktirde α ve α^* eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1/2\lambda, \quad |k_1^*| = |k_2^*| = |k_3|, \quad |k_3^*| = -\frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda \in R^- \setminus \{0\}$$

α ve α^* eğrilerinin çatıları arasında ise

$$T^* = \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}(T - 2\lambda B_1)$$

$$N^* = \operatorname{sgn}(k_1^*)\operatorname{sgn}(k_3)B_2$$

$$B_1^* = \operatorname{sgn}(k_1^*)\operatorname{sgn}(k_2^*)\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}(T + 2\lambda B_1)$$

$$B_2^* = \operatorname{sgn}(k_2^*)\operatorname{sgn}(k_3)N$$

bağıntıları vardır.

İspat: α eğrisinin asli normal doğrusu N null olmayan B_1^* ve B_2^* vektörlerinin gerdiği $\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzleminde yattığından α^* spacelike bir eğridir. Dolayısıyla $\varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = 1, \varepsilon_3^* = -\varepsilon_4^*$ olmak üzere (2.7) Frenet denklemleri sağlanır. $f : \mathrm{I} \subset R \to \mathrm{I}^* \subset R$, f ve λ düzgün fonksiyonlar, $s^* = f(s) = \int_0^s \left\| \alpha^{*\prime}(t) \right\| dt$ olmak üzere α^* eğrisinin parametrik denklemi

$$\alpha^*(f(s)) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{4.37}$$

şeklindedir. Şimdi $k_2 = 0$ ve $k_2 \neq 0$ durumlarını inceleyelim.

(2.a) $k_2 = 0$ olsun. (4.37) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = T + \lambda' N + \lambda N'$$

eşitliğinden

$$T^* f' = T + \lambda' N - \lambda B_1 \tag{4.38}$$

bulunur. (4.38) denkleminin her iki tarafının $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa $\lambda' = 0$ bulunur. Bu eşitlik (4.38) ifadesinde yerine yazıldığında

$$T^* f' = T - \lambda B_1, \qquad \lambda \in R^- \setminus \{0\} \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.39) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g\left(T^* f', T^* f'\right) &= g\left(T, T\right) - 2\lambda g\left(T, B_1\right) + \lambda^2 g\left(B_1, B_1\right) \\ f'^2 g\left(T^*, T^*\right) &= -2\lambda \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$f'^2 = -2\varepsilon_1^* \lambda = sabit \neq 0 \tag{4.40}$$

bulunur. (4.39) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri ile (4.40) eşitlikliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} T^{*\prime} f'^2 + T^* f'' &= T' - \lambda' B_1 - \lambda B_1' \\ \varepsilon_2^* k_1^* N^* f'^2 &= N - \lambda k_3 B_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$g\left(\varepsilon_2^* k_1^* N^* f'^2, N\right) = g\left(N, N\right) - g\left(\lambda k_3 B_2, N\right)$$

işlemlerinden çelişki elde edilir.

(2.b) $k_2 \neq 0$ olsun. (4.37) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = T + \lambda' N + \lambda N'$$

eşitliğinden

$$T^* f' = \left(1 - \lambda k_2\right) T + \lambda' N + \lambda k_1 B_1 \tag{4.41}$$

elde edilir. (4.41) denkleminin her iki tarafının $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\lambda' = 0 \tag{4.42}$$

bulunur. (4.42) ifadesi (4.41) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T^* f' = \left(1 - \lambda k_2\right) T - \lambda B_1 \tag{4.43}$$

elde edilir. (4.43) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri ile (4.42) eşitliği kullanılırsa

$$T^* f'' + T^{*\prime} f'^2 = \left(1-\lambda k_2\right)' T + \left(1-\lambda k_2\right) T' - \lambda' B_1 - \lambda B_1'$$

eşitliğinden

$$T^* f'' + \varepsilon_2^* k_1^* N^* f'^2 = \left(1-\lambda k_2\right)' T + \left(1-2\lambda k_2\right) N - \lambda k_3 B_2 \tag{4.44}$$

bulunur. (4.44) ifadesinin her iki tarafının $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$g\left(T^* f'', N\right) + g\left(\varepsilon_2^* k_1^* N^* f'^2, N\right) = g\left(\left(1-\lambda k_2\right)' T, N\right) + g\left(\left(1-2\lambda k_2\right) N, N\right) - g\left(\lambda k_3 B_2, N\right)$$

eşitliğinden

$$k_2 = \frac{1}{2\lambda} = sabit, \qquad \lambda \in R^- \setminus \{0\} \tag{4.45}$$

elde edilir. Ayrıca (4.43) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} g\left(T^* f', T^* f'\right) &= g\left(\left(1-\lambda k_2\right) T - \lambda B_1, \left(1-\lambda k_2\right) T - \lambda B_1\right) \\ f'^2 g\left(T^*, T^*\right) &= \left(1-\lambda k_2\right)^2 g\left(T, T\right) - 2\left(1-\lambda k_2\right) \lambda g\left(T, B_1\right) \\ &\quad + \lambda^2 g\left(B_1, B_1\right) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\varepsilon_1^* f'^2 = -2\lambda\left(1-\lambda k_2\right) \tag{4.46}$$

elde edilir. (4.45) eşitliği (4.46) ifadesinde yerine yazıldığında

$$f'^2 = -\varepsilon_1^* \lambda = sabit \neq 0 \tag{4.47}$$

bulunur. (4.45) ve (4.47) eşitlikleri (4.44) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\varepsilon_2^* k_1^* N^* f'^2 = -\lambda k_3 B_2 \tag{4.48}$$

olur. α^* spacelike bir eğri olduğundan ve (4.47) eşitliğinden

$$f'^2 = -\lambda = |\lambda|, \qquad \lambda \in R^- \setminus \{0\} \tag{4.49}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$f'(s)^2 = \left\|\alpha^{*\prime}(s)\right\|^2 = |\lambda|$$

$$f'(s) = \left\|\alpha^{*\prime}(s)\right\| = \sqrt{|\lambda|} \tag{4.50}$$

elde edilir. (4.43) denkleminde (4.45) ve (4.50) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$T^*\sqrt{|\lambda|}=\frac{1}{2}T-\lambda B_1$$

eşitliğinden

$$T^*=\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}\left(T-2\lambda B_1\right) \tag{4.51}$$

elde edilir. $\varepsilon_2^*=1$ ve (4.49) eşitlikleri (4.48) ifadesinde yerine yazıldığında

$$k_1^*N^*|\lambda|=-\lambda k_3B_2$$
$$k_1^*N^*=k_3B_2$$

bulunur. Bu taktirde

$$k_1^*=k_3, \qquad N^*=B_2 \tag{4.52}$$

dir. $N^*=B_2$ denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\left(-k_1^*T^*+\varepsilon_3^*k_2^*B_1^*\right)f'=-k_3T \tag{4.53}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının $N=aB_1^*+bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa,

$$g\left(-k_1^*T^*f',N\right)+g\left(\varepsilon_3^*k_2^*B_1^*f',N\right)=g\left(-k_3T,N\right)$$
$$-k_1^*f'g\left(T^*,N\right)+\varepsilon_3^*k_2^*f'g\left(B_1^*,N\right)=-k_3g\left(T,N\right)$$

eşitliğinden

$$ak_2^*f'=0 \tag{4.54}$$

bulunur. $f'\neq 0$ olduğundan $k_2^*=0$ olsun. (4.53) eşitliğinden

$$-k_1^*T^*f'=-k_3T$$

olur ki bu ifadeye göre T^* ve T lineer bağımlı olur. Ancak T^* spacelike vektör, T ise null vektör olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $k_2^*\neq 0$ ve (4.54) eşitliğinde $a=0$ olmalıdır. Bu durumda $N=aB_1^*+bB_2^*$ eşitliğinden $N=bB_2^*$ bulunur. $g\left(N,N\right)=1$ olduğundan $b^2=1$ dir. Bu taktirde

$$N=B_2^* \tag{4.55}$$

veya

$$N=-B_2^* \tag{4.56}$$

olur. Kabul edelim ki α ile α^* eğrilerinin eğrilikleri ve Frenet vektörleri arasında (4.55) bağıntısı bulunsun. (4.55) eşitliğinin türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$N' = B_2^{*\prime} f'$$
$$-\frac{1}{2\lambda}T - B_1 = k_3^* B_1^* \sqrt{|\lambda|}$$

eşitliğinden

$$B_1^* = \frac{-1}{\lambda\sqrt{|\lambda|}k_3^*}\left(\frac{1}{2}T + \lambda B_1\right) \tag{4.57}$$

bulunur. (4.50), (4.51), (4.52) eşitlikleri (4.53) ifadesinde yerine yazılırsa

$$B_1^* = \frac{k_1^*}{k_2^*\sqrt{|\lambda|}}\left(\frac{1}{2}T + \lambda B_1\right) \tag{4.58}$$

elde edilir. $\lambda < 0$ olduğundan (4.57) ve (4.58) eşitliklerinden

$$-\frac{1}{\lambda\sqrt{|\lambda|}k_3^*}\left(\frac{1}{2}T + \lambda B_1\right) = \frac{k_1^*}{k_2^*}\left(\frac{1}{2}T + \lambda B_1\right)$$
$$-\frac{1}{\lambda k_3^*} = \frac{k_1^*}{k_2^*}$$

olduğundan

$$\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right) = \operatorname{sgn}\left(k_3^*\right)$$

olacaktır. $\det\left(T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\right) = 1$ eşitliğinde (4.51), (4.52), (4.55) ve (4.58) eşitlikleri kullanılırsa

$$k_1^* = k_2^* \tag{4.59}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\operatorname{sgn}\left(k_3^*\right) = 1$ bulunur. $g\left(B_1^*, B_1^*\right) = \varepsilon_3^* = -1$ de (4.57) eşitliği yerine yazılırsa

$$g\left(B_1^*, B_1^*\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\lambda\sqrt{|\lambda|}k_3^*}\right)^2 g\left(T,T\right) + 2\left(\frac{-1}{\lambda\sqrt{|\lambda|}k_3^*}\right)^2 \frac{\lambda}{2} g\left(T, B_1\right) + \lambda^2\left(\frac{-1}{\lambda\sqrt{|\lambda|}k_3^*}\right)^2 g\left(B_1, B_1\right)$$
$$k_3^{*2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

eşitliğinden

$$\left|k_3^*\right| = -\frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda \in R^- \setminus \{0\} \tag{4.60}$$

bulunur. (4.59) eşitliği (4.58) ifadesinde yerine yazılırsa

$$B_1^* = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\left(\frac{1}{2}T + \lambda B_1\right) \tag{4.61}$$

elde edilir. (4.45), (4.52), (4.59) ve (4.60) eşitliklerinden $k_1^* = k_2^* = k_3$ bulunur. (4.51), (4.52), (4.55) ve (4.61) eşitliklerinden

$$T^* = \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}\left(T - 2\lambda B_1\right)$$

$$N^* = \operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_3\right)B_2$$

$$B_1^* = \operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}\left(T + 2\lambda B_1\right)$$

$$B_2^* = \operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_3\right)N$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.4 $\alpha : \mathrm{I} \to R_1^4$ Cartan null eğri olsun. α eğrisinin ikinci eğriliği $k_2 = sabit \neq 0 \in R^- \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $\alpha^* = \alpha + \left(1 \setminus 2k_2\right)N$ olacak şekilde bir $\alpha^* : \mathrm{I}^* \to R_1^4$ Frenet eğrisi varsa α genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi ve α^* ise α eğrisinin genelleştirilmiş spacelike Mannheim partner eğrisidir.

İspat: Kabul edelim ki $f : \mathrm{I} \subset R \to \mathrm{I}^* \subset R$ ve $s^* = f(s) = \int_0^s \left\|\alpha^{*\prime}(t)\right\| dt$ olmak üzere α^* eğrisi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \frac{1}{2k_2}N(s), \qquad k_2 \in R^- \setminus \{0\} \tag{4.62}$$

olarak tanımlansın. $\lambda = \dfrac{1}{2k_2}$ olarak alınırsa

$$g\left(\alpha^{*\prime}(s),\alpha^{*\prime}(s)\right)=g\left(\alpha'(s)+\lambda' N+\lambda N',\alpha'(s)+\lambda' N+\lambda N'\right)$$
$$f'^2 g\left(T^*,T^*\right)=\left(1-\lambda k_2\right)^2 g\left(T,T\right)-2\lambda\left(1-\lambda k_2\right)g\left(T,B_1\right)$$
$$+\lambda^2 g\left(B_1,B_1\right)$$
$$f'^2=-2\lambda\left(1-\lambda k_2\right)$$
$$f'^2=-\lambda$$

eşitliğinden $g\left(\alpha^{*\prime}(s),\alpha^{*\prime}(s)\right)=-\lambda$ olduğu görülür. Bu durumda $k_2\in R^-\setminus\{0\}$ olduğundan α^* spacelike bir eğridir. Dolayısıyla $f'=\sqrt{|\lambda|}$ olur. (4.62) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (2.13) ve $f'=\sqrt{|\lambda|}$ kullanılırsa

$$T^*=\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}\left(T-2\lambda B_1\right) \tag{4.63}$$

bulunur. (4.63) eşitliğinin türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^{*\prime} f'=\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}\left(T'-2\lambda' B_1-2\lambda B_1'\right)$$
$$k_1 N^*=k_3 B_2$$

elde edilir. Bu durumda

$$k_1^*=k_3 \quad \text{ve} \quad N^*=B_2 \tag{4.64}$$

bulunur. $N^*=B_2$ eşitliğinin türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\left(k_1^* T^*+k_2^* B_1^*\right)f'=k_3 T \tag{4.65}$$

elde edilir. (4.65) denklemi kullanılarak

$$g\left(\left(k_1^* T^*+k_2^* B_1^*\right)f',\left(k_1^* T^*+k_2^* B_1^*\right)f'\right)=g\left(k_3 T,k_3 T\right)$$
$$\left(k_1^{*2}-k_2^{*2}\right)f'^2=0$$

bulunur. Burada $f'\neq 0$ olduğundan $k_1^{*2}-k_2^{*2}=0$ dır. Dolayısıyla

$$\left|k_1^*\right|=\left|k_2^*\right| \tag{4.66}$$

olur. Dolayısıyla $\left|k_1^*\right|=\left|k_2^*\right|=\left|k_3\right|$ olacaktır. (4.63) eşitliği (4.65) de yerine yazılırsa ve (4.64), (4.66) ve $f'=\sqrt{|\lambda|}$ ifadeleri kullanılırsa

$$\left[k_1^*\left(\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}\left(T-2\lambda B_1\right)\right)+k_2^*B_1^*\right]\sqrt{|\lambda|}=k_1^*T$$

$$B_1^*=\frac{k_1^*}{k_2^*2\sqrt{|\lambda|}}\left(T+2\lambda B_1\right)$$

bulunur. Bu taktirde

$$B_1^*=\frac{\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)}{2\sqrt{|\lambda|}}\left(T+2\lambda B_1\right) \tag{4.67}$$

yazılabilir. (4.67) ifadesinin türevi alınarak (2.7) ve (2.13) Frenet denklemleri ile (4.64) ve $\lambda=1/2k_2$ eşitliklerinden

$$B_1^{*\prime}f'=\frac{\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)}{2\sqrt{|\lambda|}}\left(T'+2\lambda B_1'\right)$$

$$B_2^*=-\frac{\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)}{\lambda k_3^*}N \tag{4.68}$$

elde edilir. $\det\left(T^*,N^*,B_1^*,B_2^*\right)=1$ eşitliğinde (4.63), (4.64), (4.67) ve (4.68) kullanılırsa

$k_3^*=\frac{1}{|\lambda|},\ \lambda\in R^-\setminus\{0\}$ bulunur. Bu eşitlik (4.68) ifadesinde yerine yazılırsa

$$B_2^*=\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)N \tag{4.69}$$

elde edilir. $\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)=\operatorname{sgn}\left(k_3\right)$ olduğundan $B_2^*=\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)N$ elde edilir. Dolayısıyla (4.63), (4.64), (4.67) ve (4.69) eşitliklerinden α eğrisinin çatısı ile α^* eğrisinin çatısı arasında

$$T^*=\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}\left(T-2\lambda B_1\right)$$

$$N^*=\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_3\right)B_2$$

$$B_1^*=\operatorname{sgn}\left(k_1^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)\frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}}\left(T+2\lambda B_1\right)$$

$$B_2^*=\operatorname{sgn}\left(k_2^*\right)\operatorname{sgn}\left(k_3\right)N$$

elde edilir.

α eğrisinin asli normal doğrusu N, B_1^* ve B_2^* vektörlerinin gerdiği $\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzleminde bulunduğundan α genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi ve α^* ise α eğrisinin genelleştirilmiş spacelike Mannheim partner eğrisidir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

$\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzlemini geren B_1^* ve B_2^* vektörleri lineer bağımsız null vektörler ise aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5 R_1^4 de, genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi partially null eğri olan genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat: Kabul edelim ki $\alpha : \mathrm{I} \to R_1^4$, genelleştirilmiş null Mannheim eğri olsun. $\alpha^* : \mathrm{I}^* \to R_1^4$ ise α nın partially null bir eğri olan genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi olsun. $f : \mathrm{I} \subset R \to \mathrm{I}^* \subset R$, f ve λ düzgün fonksiyonlar, $s^* = f(s) = \int_0^s \left\| \alpha^{*\prime}(t) \right\| dt$ olmak üzere α^* eğrisi

$$\alpha^*\left(f(s)\right) = \alpha(s) + \lambda(s) N(s) \tag{4.70}$$

olarak tanımlansın. Şimdi $k_2 = 0$ ve $k_2 \neq 0$ durumlarını inceleyelim.

(1) $k_2 = 0$ olsun. (4.70) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = T + \lambda' N - \lambda B_1 \tag{4.71}$$

elde edilir. (4.71) denkleminin her iki tarafının $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa $\lambda' = 0$ bulunur. $\lambda' = 0$ (4.71) denkleminde yerine yazılırsa

$$T^* f' = T - \lambda B_1, \qquad \lambda \in R \setminus \{0\} \tag{4.72}$$

bulunur. (4.72) ifadesi kullanılarak

$$g\left(T^* f', T^* f'\right) = g\left(T - \lambda B_1, T - \lambda B_1\right)$$

$$f'^2 g\left(T^*, T^*\right) = g(T, T) - 2\lambda g(T, B_1) + \lambda^2 g(B_1, B_1)$$

eşitliğinden

$$f'^2 = -2\lambda = sabit \neq 0 \tag{4.73}$$

elde edilir. (4.72) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.9) ve (2.13) Frenet denklemeleri ile (4.73) ifadesi kullanılırsa

$$k_1^* N^* f'^2 = N - \lambda k_3 B_2 \tag{4.74}$$

bulunur. (4.74) denkleminin her iki tarafının $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$ak_1^* f'^2 g\left(N^*, B_1^*\right) + bk_1^* f'^2 g\left(N^*, B_2^*\right) = g\left(N, N\right) - \lambda k_3 g\left(B_2, N\right)$$

işleminden bir çelişki elde edilir.

(2) $k_2 \neq 0$ olsun. (4.70) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = T + \lambda' N + \lambda N'$$

eşitliğinden

$$T^* f' = \left(1 - \lambda k_2\right) T + \lambda' N - \lambda B_1 \tag{4.75}$$

bulunur. (4.75) denkleminin her iki tarafının $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$af' g\left(T^*, B_1^*\right) + bf' g\left(T^*, B_2^*\right) = \left(1 - \lambda k_2\right) g\left(T, N\right) + \lambda' g\left(N, N\right) - \lambda g\left(B_1, N\right)$$

eşitliğinden

$$\lambda' = 0 \tag{4.76}$$

olur. (4.76), (4.75) ifadesinde yerine yazılırsa

$$T^* f' = \left(1 - \lambda k_2\right) T - \lambda B_1, \quad \lambda \in R \setminus \{0\} \tag{4.77}$$

elde edilir. (4.77) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.9) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f'' + T^{*\prime} f'^2 = \left(1 - \lambda k_2\right)' T + \left(1 - \lambda k_2\right) T' - \lambda B_1'$$

eşitliğinden

$$T^* f'' + k_1^* N^* f'^2 = \left(1 - \lambda k_2\right)' T + \left(1 - 2\lambda k_2\right) N - \lambda k_3 B_2 \tag{4.78}$$

bulunur. (4.78) denkleminin her iki tarafının $N = aB_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$f''g\left(T^*,N\right)+k_1^* f'^2 g\left(N^*,N\right)=\left(1-\lambda k_2\right)' g\left(T,N\right)+\left(1-2\lambda k_2\right)g\left(N,N\right)-\lambda k_3 g\left(B_2,N\right)$$
$$0=\left(1-2\lambda k_2\right)$$

olduğundan

$$k_2=\frac{1}{2\lambda},\qquad \lambda\in R\setminus\{0\} \tag{4.79}$$

elde edilir.(4.77) eşitliği kullanılarak

$$g\left(T^* f',T^* f'\right)=\left(1-\lambda k_2\right)^2 g\left(T,T\right)-2\left(1-\lambda k_2\right)\lambda g\left(T,B_1\right)+\lambda^2 g\left(B_1,B_2\right)$$
$$f'^2=-2\lambda\left(1-\lambda k_2\right) \tag{4.80}$$

bulunur. (4.79) eşitliği (4.80) de yerine yazılırsa

$$f'^2=-\lambda=sabit\neq 0 \qquad \lambda\in R^-\setminus\{0\} \tag{4.81}$$

elde edilir. (4.78), (4.79) ve (4.81) eşitliklerinden

$$k_1^* N^*=k_3 B_1 \tag{4.82}$$

bulunur. (4.82) eşitliğinden

$$k_1^*=k_3,\qquad N^*=B_2$$

veya

$$k_1^*=-k_3,\qquad N^*=-B_2$$

olur. $N^*=\pm B_2$ eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (2.9) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'\left(-k_1^* T^*+k_2^* B_1^*\right)=\pm k_3 T \tag{4.83}$$

bulunur. (4.83) denkleminin her iki tarafının $N=aB_1^*+bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$g\left(f'\left(-k_1^* T^*+k_2^* B_1^*\right),N\right)=g\left(\pm k_3 T,N\right)$$
$$-k_1^* f' g\left(T^*,N\right)+k_2^* f' g\left(B_1^*,N\right)=\pm k_3 g\left(T,N\right)$$
$$bk_2^* f'=0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte de $k_2^*=0$ olsaydı, (4.83) eşitliğinden T^* spacelike vektörü ile T null vektörü lineer bağımlı olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $b=0$ ve $N=aB_1^*$ olmalıdır. $N=aB_1^*$ eşitliği spacelike N vektörü ile null B_1^* vektörünün lineer bağımlı olması anlamına gelir ki bu ise imkansızdır. Teorem ispatlanmış olur.

(3) $\left\{B_1^*, B_2^*\right\}$ lightlike düzlem

Bu kısımda $\left\{B_1^*, B_2^*\right\}$ lightlike düzlemini geren vektörlerin causal karakterine bağlı olarak iki teoerem vereceğiz. Eğer B_1^* null vektör ise B_2^* spacelike vektör veya B_1^* spacelike vektör ise B_2^* null vektör olacaktır.

Teorem 4.6 $\alpha : \mathrm{I} \to R_1^4$ genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi olsun. $\alpha^* : \mathrm{I}^* \to R_1^4$ ise α eğrisinin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi olsun. α eğrisinin asli normali N, B_1^* null vektörü ile B_2^* spacelike vektörü tarafından gerilen lightlike düzlemde yatsın. Bu taktirde α^* Cartan null eğridir ve aşağıda verilen bağıntılardan biri sağlanır:

i. α ve α^* eğrilerinin eğrilikleri

$$k_2 = \frac{1-\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}, \qquad k_2^* = 0,$$
$$|k_3| = \cosh^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \qquad |k_3^*| = \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)} \tag{4.85}$$

şeklindedir. α ile α^* eğrilerinin Cartan çatıları arasında ise

$$
\begin{aligned}
T^* &= \frac{\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}T + \frac{\sqrt{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}N - \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}B_1 \\
N^* &= -\operatorname{sgn}\left(k_3^*\right)B_2 \\
B_1^* &= -\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)T \\
B_2^* &= -\operatorname{sgn}\left(k_3^*\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}T + N\right)
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

bağıntıları vardır.

ii. $X(s) = \lambda\lambda'' - \lambda'^2 - \lambda, \qquad f' = e^{\int \frac{\lambda\lambda'' + \lambda'^2 - \lambda}{\lambda\lambda'} ds}\;, \; \lambda(s) \neq sabit$

fonksiyonları aşağıda verilen diferansiyel denklemi sağladığına göre

$$
\frac{X^2\left[\lambda^2 f'^4 + \lambda\lambda' X' - \left(3\lambda\lambda'' + 2\lambda'^2 - 3\lambda\right)X\right]^2}{\lambda^4\lambda'^2 f''^4\left(\lambda^2 f'^4 - X^2\right)}
+2\left[\left(\frac{\lambda' X}{2\lambda^2 f'^2}\right)' + \frac{2\left(\lambda^2 f'^4 - X^2\right) - \lambda X}{2\lambda^3 f'^2}\right]\left[\left(\frac{X}{\lambda' f'^2}\right)' + \frac{X}{\lambda'^2 f'^2}\right] = 0
$$

α ve α^* eğrilerinin eğrilikleri

$$
\begin{aligned}
&k_2 = \frac{2\lambda - \lambda'^2}{2\lambda^2} \neq 0, \;\; k_2^* = \frac{X}{\lambda\lambda'^2 f'^2} \neq 0, \;\; |k_3| = \frac{\sqrt{\lambda^2 f'^4 - X^2}}{\lambda^2}, \\
&\left|k_3^*\right| = \frac{\left(\frac{\lambda' X}{2\lambda^2 f'^2}\right)' + \frac{2\left(\lambda^2 f'^4 - X^2\right) - \lambda X}{2\lambda^3 f'^2} + \left(\left(\frac{X}{\lambda' f'^2}\right)' + \frac{X}{\lambda'^2 f'^2}\right)\left(\frac{2\lambda - \lambda'^2}{2\lambda^2}\right)}{f'^2}
\end{aligned}
\tag{4.87}
$$

şeklindedir. α ve α^* eğrilerinin Cartan çatıları arasında

$$
x = -\frac{1}{f'}\left(\left(\frac{\lambda' X}{2\lambda^2 f'^2}\right)' + \frac{2\left(\lambda^2 f'^4 - X^2\right) - \lambda X}{2\lambda^3 f'^2}\right),
$$

$$y=-\frac{1}{f'}\left(\left(\frac{X}{\lambda' f'^2}\right)'+\frac{X}{\lambda'^2 f'^2}\right),$$

$$z=-\frac{1}{f'}\left(\frac{X\left[\lambda^2 f'^4+\lambda\lambda' X'-\left(3\lambda\lambda''+2\lambda'^2-3\lambda\right)X\right]}{\lambda^2\lambda' f'^2\sqrt{\lambda^2 f'^4-X^2}}\right)$$

olmak üzere

$$T^*=\frac{\lambda'^2}{2\lambda f'}T+\frac{\lambda'}{f'}N-\frac{\lambda}{f'}B_1$$

$$N^*=-\operatorname{sgn}\left(k_3^*\right)\left(\frac{\lambda'\left(\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda\right)}{2\lambda^2 f'^2}\right)T+\left(\frac{\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda}{\lambda' f'^2}\right)B_1$$
$$-\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 f'^4-\left(\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda\right)^2}}{\lambda f'^2}\right)B_2 \tag{4.88}$$

$$B_1^*=xT+yB_1+zB_2$$

$$B_2^*=-\frac{\operatorname{sgn}\left(k_3^*\right)}{k_3^* f'}\left[\begin{array}{c}\left(x'-zk_3-k_2^* mf'\right)T+\left(x+yk_2\right)N+\left(y'-k_2^* nf'\right)B_1\\ +\left(yk_3+z'-k_2^* pf'\right)B_2\end{array}\right]$$

denklemleri mevcuttur.

İspat: $f:\mathrm{I}\subset R\rightarrow \mathrm{I}^*\subset R$, f ve λ düzgün fonksiyonlar olmak üzere α eğrisinin asli normali N, null B_1^* vektörü ile spacelike B_2^* vektörünün gerdiği lightlike düzlemde bulunduğundan α^* Cartan null eğrisinin Cartan çatısı (2.13) ile verilen Frenet denklemlerini sağlar. α^* eğrisinin parametrik denklemi ise

$$\alpha^*\left(f\left(s\right)\right)=\alpha\left(s\right)+\lambda\left(s\right)N\left(s\right) \tag{4.89}$$

şeklindedir. Şimdi $k_2=0$ ve $k_2\neq 0$ durumlarını araştıralım.

(1) $k_2=0$ olsun. (4.89) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f'=T+\lambda' N-\lambda B_1 \tag{4.90}$$

elde edilir. (4.90) kullanılarak

$$g\left(T^* f',T^* f'\right)=g\left(T+\lambda' N-\lambda B_1,T+\lambda' N-\lambda B_1\right)$$

eşitliğinden $g\left(T^{*}f',T^{*}f'\right)=\lambda'^{2}-2\lambda=0$ bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$\lambda(s)=\frac{(s+c)^{2}}{2},\quad c\in R \tag{4.91}$$

bulunur. (4.90) eşitliğinin s ye göre türevi alınıp (2.13) Frenet denklemi ve (4.91) ifadesi kullanılırsa

$$T^{*\prime}f'^{2}+T^{*}f''=T'+\lambda''N+\lambda'N'-\lambda'B_{1}-\lambda B_{1}'$$

eşitliğinden

$$N^{*}f'^{2}+T^{*}f''=2N-2(s+c)B_{1}-\frac{(s+c)^{2}}{2}k_{3}B_{2} \tag{4.92}$$

elde edilir. α ve α^{*} null eğriler olduğundan $N=aB_{1}^{*}+bB_{2}^{*}$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}g(N,N)&=g(aB_{1}^{*}+bB_{2}^{*},aB_{1}^{*}+bB_{2}^{*})\\1&=b^{2}\end{aligned}$$

$b=\pm1$ bulunur. Dolayısıyla $N=aB_{1}^{*}\pm B_{2}^{*}$ dir. (4.90) ve (4.92) denkleminin her iki tarafının $N=aB_{1}^{*}\pm B_{2}^{*}$ ile skaler çarpımı alınırsa sırasıyla

$$af'=s+c,\qquad c\in R \tag{4.93}$$

$$af''=2 \tag{4.94}$$

bulunur. (4.93) ve (4.94) eşitliklerinden

$$a=\frac{1}{c_{1}(s+c)},\; f'=c_{1}(s+c)^{2},\quad c_{1}\in R^{+}\setminus\{0\},\, c\in R \tag{4.95}$$

elde edilir.

(4.91) ve (4.95) eşitliklerini (4.90) denkleminde yerine yazarsak

$$T^{*}=\frac{1}{c_{1}(s+c)^{2}}T+\frac{1}{c_{1}(s+c)}N-\frac{1}{2c_{1}}B_{1} \tag{4.96}$$

bulunur. (4.95) eşitliğini (4.92) da yerine yazarsak ve (4.96) kullanılırsa

$$N^{*}c_{1}^{2}(s+c)^{4}=-\frac{2}{(s+c)}T-(s+c)B_{1}-\frac{1}{2}(s+c)^{2}k_{3}B_{2}$$

eşitliğinden

$$N^{*}=-\frac{2}{c_1^2\left(s+c\right)^5}T-\frac{1}{c_1^2\left(s+c\right)^3}B_1-\frac{k_3}{2c_1^2\left(s+c\right)^2}B_2 \tag{4.97}$$

elde edilir. Ayrıca $k_2^*=0$ ve $k_2^*\neq 0$ durumlarını araştıralım.

(1.a) $k_2^*=0$ olsun. (4.92) eşitliğinin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}N^{*\prime}f'^3+2N^*f'\,f''+T^{*\prime}f'\,f''+T^*f'''&=2N'-2B_1-2\left(s+c\right)B_1'-\left(s+c\right)k_3B_2\\&\quad-\frac{1}{2}\left(s+c\right)^2\left[k_3'B_2+k_3B_2'\right]\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$T^*f'''+3N^*f'\,f''-B_1^*f'^3=\frac{k_3^2\left(s+c\right)^2}{2}T-4B_1-\left(3k_3+\frac{\left(s+c\right)}{2}k_3'\right)B_2$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının $N=aB_1^*\pm B_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned}af'''g\left(T^*,B_1^*\right)&=0\\af'''&=0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $a=0$ veya $f'''=0$ olmalıdır. Bu ise (4.95) eşitliği ile çelişir.

(1.b) $k_2^*\neq 0$ olsun. (4.97) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left(-k_2^*T^*-B_1^*\right)&=\frac{20+k_3^2\left(s+c\right)^4}{2c_1^2\left(s+c\right)^6}T-\frac{2}{c_1^2\left(s+c\right)^5}N\\&\quad+\frac{3}{c_1^2\left(s+c\right)^4}B_1-\frac{k_3'}{2c_1^2\left(s+c\right)^2}B_2\end{aligned} \tag{4.98}$$

bulunur. (4.98) eşitliğinin her iki tarafının $N=aB_1^*\pm B_2^*$ ile skaler çarpımı alınarak (4.95) kullanılırsa

$$\begin{aligned}-ak_2^*f'g\left(T^*,B_1^*\right)\pm k_2^*f'g\left(T^*,B_2^*\right)&=-\frac{2}{c_1^2\left(s+c\right)^5}g\left(N,N\right)\\k_2^*\frac{1}{c_1\left(s+c\right)}c_1\left(s+c\right)^2&=-\frac{2}{c_1^2\left(s+c\right)^5}\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$k_2^* = \frac{2}{c_1^2(s+c)^6}, \quad c_1 \in R^+ \setminus \{0\}, \quad c \in R \tag{4.99}$$

elde edilir. (4.96) ve (4.99) eşitlikleri (4.98) ifadesinde yerine yazılırsa

$$-\frac{2}{c_1^2(s+c)^6}\left[\frac{1}{c_1(s+c)^2}T + \frac{1}{c_1(s+c)}N - \frac{1}{2c_1}B_1\right]c_1(s+c)^2 - B_1^* f'$$

$$= \frac{20 + k_3^2(s+c)^4}{2c_1^2(s+c)^6}T - \frac{2}{c_1^2(s+c)^5}N + \frac{3}{c_1^2(s+c)^4}B_1 - \frac{k_3'}{2c_1^2(s+c)^2}B_2$$

$$-B_1^* f' = \frac{24 + k_3^2(s+c)^4}{2c_1^2(s+c)^6}T + \frac{2}{c_1^2(s+c)^4}B_1 - \frac{k_3'}{2c_1^2(s+c)^2}B_2$$

bulunur. $g\left(B_1^*, B_1^*\right) = 0$ olduğundan

$$\frac{2\left(24 + k_3^2(s+c)^4\right)}{c^4(s+c)^{10}} + \frac{k_3'^2}{4c_1^4(s+c)^4} = 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(2) $k_2 \neq 0$ olsun. (4.89) denkleminin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = T + \lambda' N + \lambda N'$$

eşitliğinden

$$T^* = \left(\frac{1 - \lambda k_2}{f'}\right)T + \left(\frac{\lambda'}{f'}\right)N - \left(\frac{\lambda}{f'}\right)B_1 \tag{4.100}$$

bulunur. $g\left(T^*, T^*\right) = 0$ olduğundan

$$\frac{\lambda'^2}{f'^2} - 2\frac{\lambda(1 - \lambda k_2)}{f'^2} = 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$k_2 = \frac{2\lambda - \lambda'^2}{2\lambda^2} \tag{4.101}$$

bulunur. Bu ise λ'nın sabit olmadığını gösterir. Eğer $\lambda = sabit \neq 0$ ise (4.101) eşitliğinden $k_2 = \frac{1}{\lambda}$ elde edilir. $k_2 = \frac{1}{\lambda}$, (4.100) eşitliğinde yerine yazılırsa $T^* f' = -\lambda B_1$ bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının $N = aB_1^* \pm B_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$af'g\left(T^*,B_1^*\right)\pm f'g\left(T^*,B^*\right)=0$$
$$af'=0$$

elde edilir. Bu nedenle $a=0$ ve $N=\pm B_2^*$ olur. $N=\pm B_2^*$ denkleminin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$N'=\pm B_2^{*\prime}f'$$

bulunur. Bu ifadeyi kullanarak

$$g\left(-k_2T-B_1,-k_2T-B_1\right)=f'^2k_3^{*2}g\left(T^*,T^*\right)$$
$$k_2=0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\lambda\neq sabit$ dir.

$$u=\frac{1-\lambda k_2}{f'},\quad v=\frac{\lambda'}{f'},\quad w=-\frac{\lambda}{f'} \tag{4.102}$$

eşitlikleri (4.100) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$T^*=uT+vN+wB_1 \tag{4.103}$$

olur. (4.103) denkleminin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$N^*=\left(\frac{u'-k_2v}{f'}\right)T+\left(\frac{u+v'+wk_2}{f'}\right)N+\left(\frac{w'-v}{f'}\right)B_1+\left(\frac{wk_3}{f'}\right)B_2 \tag{4.104}$$

bulunur. (4.104) denkleminin $N=aB_1^*\pm B_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$g\left(N^*,N\right)=\left(\frac{u'-k_2v}{f'}\right)g\left(T,N\right)+\left(\frac{u+v'+wk_2}{f'}\right)g\left(N,N\right)$$
$$+\left(\frac{w'-v}{f'}\right)g\left(B_1,N\right)+\left(\frac{wk_3}{f'}\right)g\left(B_2,N\right)$$

eşitliğinden

$$u+v'+wk_2=0 \tag{4.105}$$

elde edilir. (4.101) ve (4.102) eşitlikleri (4.105) ifadesinde yerine yazılarak gerekli işlemler yapıldığında

$$\left(\frac{1-\lambda k_2}{f'}\right)+\left(\frac{\lambda''f'-\lambda'f''}{f'^2}\right)-\frac{\lambda}{f'}k_2=0$$
$$\left(\lambda'^2-\lambda+\lambda\lambda''\right)f'=\lambda\lambda'f''$$

olacaktır. Bu taktirde son eşitlikten

$$\frac{f''}{f'}=\frac{\lambda'^2-\lambda+\lambda\lambda''}{\lambda\lambda'} \tag{4.106}$$

bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$\ln f'=\int\frac{\lambda'^2-\lambda+\lambda\lambda''}{\lambda\lambda'}ds+\ln c$$

$$f'=c\,e^{\int\frac{\lambda'^2-\lambda+\lambda\lambda''}{\lambda\lambda'}ds}\,, \qquad c\in R^+\setminus\{0\}$$

elde edilir. $c=1$ alınırsa

$$f'=c\,e^{\int\frac{\lambda'^2-\lambda+\lambda\lambda''}{\lambda\lambda'}ds} \tag{4.107}$$

bulunur. (4.105) eşitliğini (4.104) ifadesinde yerine yazarsak

$$N^*=\left(\frac{u'-k_2v}{f'}\right)T+\left(\frac{w'-v}{f'}\right)B_1+\left(\frac{wk_3}{f'}\right)B_2 \tag{4.108}$$

elde edilir. $g\left(N^*,N^*\right)=1$ olduğundan (4.108) eşitliği kullanılarak

$$k_3^2=\frac{f'^2-2\left(u'-vk_2\right)\left(w'-v\right)}{w^2}$$

elde edilir. (4.101) ve (4.102) eşitlikleri son denklemde yerine yazılırsa

$$k_3^2=\frac{f'^2-2\left(\frac{\lambda'\left(\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda\right)}{2\lambda^2f'}\right)\left(\frac{\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda}{\lambda'f'}\right)}{\left(-\frac{\lambda}{f'}\right)^2}$$

$$k_3^2=\frac{f'^4\lambda^2-\left(\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda\right)^2}{\lambda^4}$$

eşitliğinden

$$\left|k_3\right|=\frac{\sqrt{f'^4\lambda^2-\left(\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda\right)^2}}{\lambda^2} \tag{4.109}$$

bulunur.

$$m=\frac{u'-vk_2}{f'},\quad n=\frac{w'-v}{f'},\quad p=\frac{wk_3}{f'}$$

olmak üzere

$$m=\frac{\dfrac{\lambda'(\lambda\lambda''-2\lambda'^2+\lambda)}{2\lambda^2 f'}-\dfrac{\lambda'(2\lambda-\lambda'^2)}{2\lambda^2 f'}}{f'}=\frac{\lambda'(\lambda\lambda''-\lambda'^2+\lambda)}{2\lambda^2 f'}$$

$$n=\frac{-\dfrac{\lambda\lambda''-\lambda}{\lambda' f'}-\dfrac{\lambda'}{f'}}{f'}=\frac{\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda}{\lambda' f'^2} \tag{4.110}$$

$$p=\frac{\dfrac{\sqrt{\lambda^2 f'^2-(\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda)^2}}{\lambda f'}}{f'}=\frac{\sqrt{\lambda^2 f'^2-(\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda)^2}}{\lambda f'^2}$$

olarak alınırsa (4.108) eşitliğinden

$$N^*=mT+nB_1+pB_2 \tag{4.111}$$

olur. Bu denklemin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$N^{*\prime} f'=m'T+mT'+n'B_1+nB_1'+p'B_2+pB_2'$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}\left(-k_2^*T^*-B_1^*\right)f'&=(m'-pk_3)T+(m+nk_2)N+n'B_1\\&+(nk_3+p')B_2\end{aligned} \tag{4.112}$$

bulunur. Şimdi $k_2^*=0$ ve $k_2^*\neq 0$ durumlarını inceleyelim.

(2.a) $k_2^*=0$ olsun. (4.112) denkleminden

$$B_1^*=-\frac{1}{f'}\left[(m'-pk_3)T+(m+nk_2)N+n'B_1+(nk_3+p')B_2\right] \tag{4.113}$$

elde edilir. (4.113) eşitliğinin her iki tarafının $N=aB_1^*\pm B_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$-\frac{1}{f'}(m+nk_2)=0$$

$$m+nk_2=0$$

bulunur. Bu denklemde (4.110) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\frac{u'-vk_2}{f'}+\left(\frac{w'-v}{f'}\right)k_2=0$$

$$u'-2vk_2-w'k_2=0$$

elde edilir. Son denklemde (4.101), (4.102) ve (4.106) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left(u'-vk_2\right)+\left(w'-v\right)k_2=0$$
$$\frac{\left(\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda\right)\left(\lambda'^2+2\lambda-\lambda'^2\right)}{2\lambda'\lambda^2 f'}=0$$
$$2\lambda\left(\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda\right)=0$$

elde edilir. Burada $\lambda\neq 0$ olduğundan $\lambda\lambda''-\lambda'^2-\lambda=0$ olur. Bu denklemin çözümünden

$$\lambda=\left(\frac{2}{c_1}\right)\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c_1}}{2}\left(s+c_2\right)\right),\qquad c_1,c_2\in R,\qquad c_1\neq 0$$

bulunur. $c_1=2$ ve $c_2=0$ alınırsa

$$\lambda=\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\tag{4.114}$$

olur. (4.114) eşitliği (4.101) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_2=\frac{1-\sinh^2\frac{\sqrt{2}}{2}s}{\cosh^2\frac{\sqrt{2}}{2}s}\tag{4.115}$$

bulunur. (4.114) eşitliği (4.107) ifadesinde yerine yazılırsa

$$f'=\cosh^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\tag{4.116}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.114) eşitliği (4.109) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left|k_3\right|=\cosh^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\tag{4.117}$$

bulunur.

(4.114), (4.115), (4.116) ve (4.117) eşitlikleri (4.100) de yerine yazılırsa

$$T^*=\frac{\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}T+\frac{\sqrt{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}N-\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}B_1\tag{4.118}$$

olur. (4.118) denkleminin s ye göre türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri ve (4.116) eşitliği kullanılırsa

$$N^* = -\frac{k_3}{\cosh^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}B_2$$

bulunur. Burada

$$N = B_2, \quad k_3 = -\cosh^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) \tag{4.119}$$

veya

$$N = -B_2, \quad k_3 = \cosh^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) \tag{4.120}$$

olmalıdır. Kabul edelim ki α eğrisinin Frenet vektörleri arasındaki bağıntı ve üçüncü eğriliği (4.119) şeklinde olsun. $N = B_2$ denkleminin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri ile (4.116) ve (4.119) eşitlikleri kullanılırsa

$$B_1^* = -\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)T \tag{4.121}$$

bulunur. (4.121) eşitliğinin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri ve (4.116) eşitliği kullanılırsa

$$k_3^* B_2^* = \frac{-\sqrt{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}T - \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}N \tag{4.122}$$

bulunur. $g\left(B_2^*, B_2^*\right) = 1$ olduğundan (4.122) kullanılarak

$$\left|k_3^*\right| = \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)} \tag{4.123}$$

elde edilir.

(4.118), (4.119), (4.121) ve (4.123) eşitlikleri $\det\left(T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\right) = 1$ ifadesinde kullanıldığında

$$k_3^* = -\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)} \tag{4.124}$$

bulunur. (4.124) eşitliği (4.122) ifadesinde yerine yazılırsa

$$B_2^* = \frac{\sqrt{2}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)}T + N \tag{4.125}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.115), (4.117) ve (4.123) eşitliklerinden (4.87) sağlanır. (4.118), (4.119), (4.121) ve (4.125) eşitliklerinden ise (4.88) sağlanır. (4.120) eşitliğinin sağlandığı kabul edilirse benzer şekilde (4.85) ve (4.86) ifadelerinin sağlandığı görülür. Bu taktirde (i) ifadesi ispatlanmış olur.

(2.b) $k_2^* \neq 0$ olsun. (4.107) eşitliği sağladığından, k_2 ve k_3 eğrilikleri λ ya bağlı olarak (4.101) ve (4.109) eşitliğinde ifade edilmiştir. Şimdi $\lambda \neq sabit$ olmak üzere k_2^* ve k_3^* eğrilikleri λ ya bağlı olarak ifade edilecektir. (4.103) eşitliğini (4.112) ifadesinde yerine yazarsak

$$B_1^* = -\frac{1}{f'}\left[\begin{array}{l}\left(m' - pk_3 + uk_2^* f'\right)T + \left(m + nk_2 + vk_2^* f'\right)N \\ +\left(n' + wk_2^* f'\right)B_1 + \left(nk_3 + p'\right)B_2\end{array}\right] \tag{4.126}$$

(4.126) eşitliğinin her iki tarafının $N = aB_1^* \pm B_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$k_2^* = -\frac{m + nk_2}{vf'} \tag{4.127}$$

bulunur. (4.101), (4.102), (4.107) ve (4.110) eşitlikleri (4.127) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_2^* = -\frac{\left(\frac{\lambda'\left(\lambda\lambda'' - \lambda'^2 - \lambda\right)}{2\lambda^2 f'}\right) + \left(\frac{\lambda\lambda'' - \lambda'^2 - \lambda}{\lambda' f'}\right)\left(\frac{2\lambda - \lambda'^2}{2\lambda^2}\right)}{\lambda' f'}$$

$$k_2^* = -\frac{\lambda\lambda'' - \lambda'^2 - \lambda}{\lambda\lambda'^2 f'^2}$$

eşitliğinden

$$k_2^* = -\frac{\lambda\lambda'' + \lambda'^2 - \lambda}{\lambda\lambda'^2 e^{2\int \frac{\lambda\lambda'' + \lambda'^2 - \lambda}{\lambda\lambda'} ds}} \tag{4.128}$$

elde edilir. (4.127) eşitliği (4.126) ifadesinde yerine yazılırsa

$$B_1^* = -\frac{1}{f'}\left[\left(m' - pk_3 + uk_2^* f'\right)T + \left(n' + wk_2^* f'\right)B_1 + \left(nk_3 + p'\right)B_2\right] \tag{4.129}$$

bulunur. $g\left(B_1^*, B_1^*\right) = 0$ olduğundan (4.129) kullanılarak

$$\left(nk_3 + p'\right)^2 + 2\left(m' - pk_3 + uk_2^* f'\right)\left(n' + wk_2^* f'\right) = 0 \tag{4.130}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\operatorname{sgn}\left(k_3\right) = 1$ ve

$$X = \lambda\lambda'' - \lambda'^2 - \lambda \tag{4.131}$$

olsun. Bu eşitlikler (4.109) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$k_3 = \frac{\sqrt{\lambda^2 f'^2 - X}}{\lambda^2}$$

bulunur. Bulduğumuz bu eşitlik (4.102), (4.103), (4.110) ve (4.128) eşitlikleri kullanılarak

$$nk_3 + p' = \left(\frac{w' - v}{f'}\right)k_3 + \left(\frac{wk_3}{f'}\right)' = \frac{X\lambda^2 f'^4 - X^2\left(3\lambda\lambda'' + 2\lambda'^2 - 3\lambda\right) + XX'\lambda\lambda'}{\lambda^2\lambda' f'^2\sqrt{\lambda^2 f'^4 - X^2}}$$

eşitliğinden

$$nk_3 + p' = \frac{X\left[\lambda^2 f'^4 + \lambda\lambda' X' - \left(3\lambda\lambda'' + 2\lambda'^2 - 3\lambda\right)X\right]}{\lambda^2\lambda' f'^2\sqrt{\lambda^2 f'^4 - X^2}} \tag{4.132}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} m' - pk_3 + uk_2^* f' &= \left(\frac{u' - vk_2}{f'}\right)' - \left(\frac{wk_3}{f'}\right)k_3 + uk_2^* f' \\ &= \left(\frac{\lambda' X}{2\lambda^2 f'^2}\right)' + \frac{\lambda^2 f'^4 - X^2}{\lambda^3 f'^2} - \frac{X}{2\lambda^2 f'^2} \end{aligned} \tag{4.133}$$

eşitliğinden

$$m' - pk_3 + uk_2^* f' = \left[\frac{\lambda' X}{2\lambda^2 f'^2}\right]' + \frac{2\left(\lambda^2 f'^4 - X^2\right) - \lambda X}{2\lambda^3 f'^2} \tag{4.134}$$

bulunur. f'' ve X sırasıyla (4.107) ve (4.131) eşitliklerinde verilmek üzere

$$n' + wk_2^* f' = \left(\frac{X}{\lambda' f'^2} \right)' + \frac{X}{\lambda'^2 f'^2} \tag{4.135}$$

olacaktır. (4.132), (4.133) ve (4.135) eşitlikleri (4.130) ifadesinde yerine yazıldığında üçüncü dereceden sadece λ ya bağlı bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem

$$\frac{X\left[\lambda^2 f'^4 + \lambda\lambda' X' - \left(3\lambda\lambda'' + 2\lambda'^2 - 3\lambda\right)X\right]}{\lambda^2 \lambda' f'^2 \sqrt{\lambda^2 f'^4 - X^2}}$$

$$+2\left[\left[\frac{\lambda' X}{2\lambda^2 f'^2}\right]' + \frac{2\left(\lambda^2 f'^4 - X^2\right) - \lambda X}{2\lambda^3 f'^2}\right]\left[\left(\frac{X}{\lambda' f'^2}\right)' + \frac{X}{\lambda'^2 f'^2}\right] = 0$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} x &= -\frac{m' - pk_3 + uk_2^* f'}{f'} \\ y &= -\frac{n' + wk_2^* f'}{f'} \\ z &= -\frac{nk_3 + p'}{f'} \end{aligned} \tag{4.136}$$

eşitlikleri (4.129) da kullanılırsa

$$B_1^* = xT + yB_1 + zB_2 \tag{4.137}$$

şeklinde olacaktır. (4.137) denkleminin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$B_1^{*\prime} f' = x'T + xT' + y'B_1 + yB_1' + z'B_2 + zB_2'$$

eşitliğinden

$$f'\left(k_2^* N^* + k_3^* B_2^*\right) = \left(x' - zk_3\right)T + \left(x + yk_2\right)N + y'B_1 + \left(yk_3 + z'\right)B_2 \tag{4.138}$$

elde edilir.

(4.111) eşitliği (4.138) ifadesinde yerine yazılırsa

$$f' k_3^* B_2^* = \left(x' - zk_3 - mk_2^* f'\right)T + \left(x + yk_2\right)N + \left(y' - k_2^* nf'\right)B_1 + \left(yk_3 + z' - k_2^* pf'\right)B_2$$

eşitliğinden

$$B_2^* = \frac{1}{k_3^* f'}\left[\begin{array}{l} \left(x' - zk_3 - mk_2^* f'\right)T + \left(x + yk_2\right)N \\ +\left(y' - k_2^* nf'\right)B_1 + \left(yk_3 + z' - k_2^* pf'\right)B_2 \end{array}\right] \tag{4.139}$$

bulunur.

(4.139) eşitliğinin her iki tarafının $N = aB_1^* \pm B_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$ag\left(B_2^*, B_1^*\right) \pm g\left(B_2^*, B_2^*\right) = \frac{1}{k_3^* f'}\left(x + yk_2\right)$$

eşitliğinden

$$\left|k_3^*\right| = \frac{x + yk_2}{f'}$$

olur. (4.103), (4.111), (4.137) ve (4.139) eşitlikleri kullanılarak $\det\left(T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\right) = 1$ eşitliğinden

$$k_3^* = \frac{x + yk_2}{f'} \tag{4.140}$$

bulunur. (4.101) ve (4.136) eşitlikleri (4.140) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_3^* = -\frac{\left(\dfrac{\lambda' X}{2\lambda^2 f'^2}\right)' + \dfrac{2\left(\lambda^2 f'^4 - X^2\right) - \lambda X}{2\lambda^3 f'^2} + \left(\left(\dfrac{X}{\lambda' f'^2}\right)' + \dfrac{X}{\lambda'^2 f'^2}\right)\left(\dfrac{2\lambda - \lambda'^2}{2\lambda^2}\right)}{f'^2} \tag{4.141}$$

elde edilir.

(4.101), (4.109), (4.128) ve (4.141) eşitliklerinden (4.87) elde edilir. (4.101), (4.102), (4.103), (4.110), (4.111), (4.137) ve (4.139) eşitlikleri kullanılırsa α ve α^* eğrilerinin Cartan çatıları arasında (4.88) eşitliğinde verilen bağıntılar elde edilir. Ayrıca $N = aB_1^* \pm B_2^*$ ifadesi ile $T^* f' = \left(1 - \lambda k_2\right)T + \lambda' N - \lambda B_1$ denkleminin skaler çarpımı alınırsa $a = \dfrac{\lambda'}{f'}$ bulunur. Bu taktirde $N = \left(\lambda' / f'\right)B_1^* \pm B_2^*$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $\operatorname{sgn}\left(k_3\right) = -1$ olduğu kabul edilirse (3.87) ve (3.88) eşitliklerinin sağlandığı görülür. Teoremin (ii) ifadesi ispatlanmış olur.

Sonuç 4.1 Teorem 4.6 da verilen (i) ifadesi, (ii) ifadesinin $X = 0$ için özel durumudur.

B_1^* spacelike vektörü ve B_2^* null vektörlerinin gerdiği $\left\{B_1^*, B_2^*\right\}$ lightlike uzayı için aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.7 R_1^4 de, Mannheim partner eğrisi pseudo null eğri olan genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi yoktur.

İspat: Kabul edelim ki α, R_1^4 de genelleştirilmiş null Mannheim eğri olsun. $\alpha^* : \mathrm{I}^* \to R_1^4$, α eğrisinin pseudo null bir eğri olan genelleştirilmiş Mannheim partner eğrisi olsun. $f : \mathrm{I} \subset R \to \mathrm{I}^* \subset R$, f ve λ düzgün fonksiyonlar, $s^* = f(s) = \int_0^s \left\| \alpha^{*\prime}(t) \right\| dt$ olmak üzere α^* eğrisi

$$\alpha^*\left(f(s)\right) = \alpha(s) + \lambda(s) N(s) \tag{4.142}$$

olarak tanımlansın. Şimdi $k_2 = 0$ ve $k_2 \neq 0$ durumlarını inceleyelim.

(1) $k_2 = 0$ olsun. (4.142) eşitliğinin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = T + \lambda' N - \lambda B_1 \tag{4.143}$$

elde edilir. (4.143) eşitliğinin her iki tarafının $N = \pm B_1^* + b B_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$\pm f' g\left(T^*, B_1^*\right) + b g\left(T^*, B_2^*\right) = \lambda' \Rightarrow \lambda' = 0$$

bulunur. Bu ifadeyi (4.143) eşitliğinde yerine yazarsak

$$T^* f' = T - \lambda B_1, \qquad \lambda \in R \setminus \{0\} \tag{4.144}$$

elde edilir. (4.144) eşitliği kullanılarak

$$g\left(T^* f', T^* f'\right) = g(T, T) - 2\lambda g(T, B_1) + \lambda^2 g(B_1, B_1)$$

eşitliğinden

$$f'^2 = -2\lambda = sabit \tag{4.145}$$

bulunur. (4.144) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (2.11) ve (2.13) Frenet denklemleri ile (4.145) eşitliği kullanılırsa

$$N^* f'^2 = N - \lambda k_3 B_2$$

elde edilir. Bu denklem kullanılarak

$$g\left(N^* f'^2, N^* f'^2\right) = g(N, N) - 2\lambda k_3 g(N, B_2) + \lambda^2 k_3^2 g(B_2, B_2)$$
$$1 + \lambda^2 k_3^2 = 0$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

(2) $k_2 \neq 0$ olsun. (4.142) denkleminin türevi alınarak (2.13) Frenet denklemi kullanılırsa

$$T^* f' = (1-\lambda k_2)T + \lambda' N - \lambda B_1$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının $N = \pm B_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$\pm f' g(T^*, B_1^*) + bg(T^*, B_2^*) = \lambda'$$
$$\lambda' = 0 \Rightarrow \lambda = sabit$$

bulunur. Dolayısıyla

$$T^* = \left(\frac{1-\lambda k_2}{f'}\right)T - \frac{\lambda}{f'}B_1, \qquad \lambda \in R \setminus \{0\} \tag{4.146}$$

dır. $g(T^*, T^*) = 1$ olduğundan (4.146) eşitliği kullanılarak

$$g(T^*, T^*) = \left(\frac{1-\lambda k_2}{f'}\right)^2 g(T,T) - 2\left(\frac{1-\lambda k_2}{f'}\right)\left(\frac{\lambda}{f'}\right) g(T, B_1) + \lambda^2 g(B_1, B_1)$$

eşitliğinden

$$f'^2 = -2\lambda(1-\lambda k_2) \tag{4.147}$$

elde edilir. (4.146) denkleminin türevi alınarak (2.11) ve (2.13) Frenet denklemleri ile (4.147) eşitliği kullanılırsa

$$T^{*\prime} f' = \left(\frac{1-\lambda k_2}{f'}\right)' T + \left(\frac{1-\lambda k_2}{f'}\right)T' - \left(\frac{\lambda' f' - \lambda f''}{f'^2}\right)B_1 - \frac{\lambda}{f'}B_1'$$

eşitliğinden

$$N^* = -\frac{\lambda k_2'}{2f'^2}T + \left(\frac{1-2\lambda k_2}{f'^2}\right)N + \frac{\lambda^3 k_2'}{f'^4}B_1 - \frac{\lambda k_3}{f'^2}B_2 \tag{4.148}$$

elde edilir. $k_2 = sabit \neq 0$ olduğundan (4.148) ifadesinde N^* null vektörü, spacelike iki ortogonal vektörün lineer birleşimi olur ki bu ise imkansızdır. Bu nedenle k_2 sabit değildir.

$$k_2 \neq sabit \tag{4.149}$$

$g(N^*, N^*) = 0$ olduğundan (4.148) eşitliği kullanılarak

$$\left[\frac{1-2\lambda k_2}{f'^2}\right]^2 + \left[\frac{\lambda k_3}{f'^2}\right]^2 + 2\left[-\frac{\lambda k_2'}{2f'^2}\right]\left[\frac{\lambda^3 k_2'}{f'^4}\right] = 0$$

eşitliğinden

$$k_3^2 = \frac{\lambda^4 k_2'^2 - f'^2 \left(1-2\lambda k_2\right)^2}{\lambda^2 f'^2} \tag{4.150}$$

bulunur. (4.147) eşitliğini (4.150) ifadesinde yerine yazarsak

$$k_3^2 = \frac{\lambda^4 k_2'^2 + 2\left(1-\lambda k_2\right)\left(1-2\lambda k_2\right)^2}{-2\lambda^2\left(1-\lambda k_2\right)} \tag{4.151}$$

elde edilir.

$$m = -\frac{\lambda k_2'}{2f'^2},\ n = \frac{1-2\lambda k_2}{f'^2},\ p = \frac{\lambda^3 k_2'}{f'^4},\ q = -\frac{\lambda k_3}{f'^2} \tag{4.152}$$

olsun. (4.148) eşitliğinde (4.152) eşitliğini yerine yazarsak $N^* = mT + nN + pB_1 + qB_2$ olur. Bu denklemin s ye göre türevi alınıp (2.11) ve (2.13) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$k_2^* B_1^* f' = \left(m' - nk_2 - qk_3\right)T + \left(m + n' + pk_2\right)N + \left(p' - n\right)B_1 + \left(pk_3 + q'\right)B_2$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının $N = \pm B_1^* + bB_2^*$ ile skaler çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} k_2^* f' g\left(B_1^*, N\right) = {} & \left(m' - nk_2 - qk_3\right) g\left(T, N\right) + \left(m + n' + pk_2\right) g\left(N, N\right) \\ & + \left(p' - n\right) g\left(B_1, N\right) + \left(pk_3 + q'\right) g\left(B_2, N\right) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\pm k_2^* f' = m + n' + pk_2$$

elde edilir. Kabul edelim ki $k_2^* f' = m + n' + pk_2$ olsun. Bu taktirde

$$B_1^* = \left(\frac{m' - nk_2 - qk_3}{k_2^* f'}\right)T + N + \left(\frac{p' - n}{k_2^* f'}\right)B_1 + \left(\frac{pk_3 + q'}{k_2^* f'}\right)B_2 \tag{4.153}$$

elde edilir. (4.153) ve $g\left(B_1^*, B_1^*\right) = 1$ olduğundan (4.153) kullanılırsa

$$2\left(\frac{m' - nk_2 - qk_3}{k_2^* f'}\right)\left(\frac{p' - n}{k_2^* f'}\right) + 1 + \left(\frac{pk_3 + q'}{k_2^* f'}\right)^2 = 1$$

eşitliğinden

$$2\left(m' - nk_2 - qk_3\right)\left(p' - n\right)\left(pk_3 + q'\right)^2 = 0 \tag{4.154}$$

bulunur. (4.151) ve (4.152) eşitliklerinden

$$m' - nk_2 - qk_3 = \left[-\frac{\lambda k_2'}{2 f'^2} \right]' - \left[\frac{1 - 2\lambda k_2}{f'^2} \right] k_2 - \left[-\frac{\lambda k_3}{f'^2} \right] k_3$$

$$= \frac{\lambda^2 k_2''(1 - \lambda k_2) + 2\lambda^3 k_2'^2 + (1 - 2\lambda k_2)(1 - \lambda k_2)\left[2\lambda k_2 + 2(1 - 2\lambda k_2)\right]}{4\lambda^2 (1 - \lambda k_2)^2}$$

$$m' - nk_2 - qk_3 = \frac{k_2''\lambda^2 (1 - \lambda k_2) + 2\lambda^3 k_2'^2 + 2(1 - \lambda k_2)^2 (1 - 2\lambda k_2)}{4\lambda^2 (1 - \lambda k_2)^2}$$

elde edilir.

$$p' - n = \left[\frac{\lambda' k_2'}{f'^4} \right]' - \left[\frac{1 - 2\lambda k_2}{f'^2} \right]$$

$$p' - n = \frac{k_2''\lambda^2 (1 - \lambda k_2) + 2\lambda^3 k_2'^2 + 2(1 - \lambda k_2)^2 (1 - 2\lambda k_2)}{4\lambda (1 - \lambda k_2)^3}$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} m' - nk_2 - qk_3 &= \frac{k_2''\lambda^2 (1 - \lambda k_2) + 2\lambda^3 k_2'^2 + 2(1 - \lambda k_2)^2 (1 - 2\lambda k_2)}{4\lambda^2 (1 - \lambda k_2)^2} \\ p' - n &= \frac{k_2''\lambda^2 (1 - \lambda k_2) + 2\lambda^3 k_2'^2 + 2(1 - \lambda k_2)^2 (1 - 2\lambda k_2)}{4\lambda (1 - \lambda k_2)^3} \end{aligned} \tag{4.155}$$

olur. (4.155) eşitliğindeki iki denklemden

$$m' - nk_2 - qk_3 = \frac{(1 - \lambda k_2)}{\lambda} (p' - n) \tag{4.156}$$

elde edilir. (4.156) eşitliği (4.154) ifadesinde yerine yazılırsa

$$2\left(\frac{1 - \lambda k_2}{\lambda} \right) (p' - n)^2 + (pk_3 + q')^2 = 0 \tag{4.157}$$

bulunur. (4.149) eşitliği sağlandığından

$$p' - n = 0 \tag{4.158}$$

$$pk_3 + q' = 0 \tag{4.159}$$

dır. (4.150) ve (4.152) eşitliklerikullanılarak

$$pk_3 + q' = \frac{\lambda^3 k_2'}{f'^4} k_3 + \left(-\frac{\lambda k_3}{f'^2} \right)'$$

$$pk_3 + q' = \frac{\lambda^3 k_2'}{f'^4} k_3 + \frac{-\lambda k_3' f'^2 + 2\lambda^3 k_2' k_3}{f'^4}$$

eşitliğinden

$$pk_3+q'=\frac{k_2'\left[k_2''\lambda^2\left(1-\lambda k_2\right)+2\lambda^3k_2'^2-\left(1-\lambda k_2\right)\left(1-2\lambda k_2\right)\left(1+2\lambda k_2\right)\right]}{-4\lambda k_3\left(1-\lambda k_2\right)^3} \tag{4.160}$$

olur. (4.155) ve (4.158) ifadelerinden

$$k_2''\lambda^2\left(1-\lambda k_2\right)+2\lambda^3k_2'^2+2\left(1-\lambda k_2\right)^2\left(1-2\lambda k_2\right)=0 \tag{4.161}$$

dir. Benzer şekilde (4.159) ve (4.160) eşitliklerinden

$$k_2''\lambda^2\left(1-\lambda k_2\right)+2\lambda^3k_2'^2+\left(1-\lambda k_2\right)\left(1-2\lambda k_2\right)\left(-1-2\lambda k_2\right)=0 \tag{4.162}$$

bulunur. Dolayısıyla (4.161) ve (4.162) eşitliklerinden

$$3\left(1-\lambda k_2\right)\left(1-2\lambda k_2\right)=0$$

elde edilir. Bu durumda $\left(1-\lambda k_2\right)=0$ veya $\left(1-2\lambda k_2\right)=0$ olacağından $k_2=\dfrac{1}{\lambda}=sabit$ veya $k_2=\dfrac{1}{2\lambda}=sabit$ bulunur. Bu ise (4.149) eşitliği ile çelişir.

Örnek 4.1 R_1^4 de

$$\alpha(s)=\left(\int e^s\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)ds,-\int e^s\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)ds,-\int e^s\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)ds,-\int e^s\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)ds\right)$$

parametrik denklemi ile verilen null Cartan eğrisini alalım. Bu eğrinin Frenet çatısı

$$T(s)=\alpha'(s)=\left(e^s\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-e^s\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-e^s\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),e^s\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}N(s)=\alpha''(s)=e^s&\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)\\&+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_1(s)=\frac{e^{-s}}{2}&\left(-\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)\\&+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)\end{aligned}$$

$$B_2(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)$$

şeklindedir. $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilikleri ise $k_1(s)=1$, $k_2(s)=-\frac{1}{2}$ ve $k_3(s)=\frac{1}{2}e^{2s}$ dir. $\alpha(s)$ eğrisinin Mannheim partner eğrisi $\alpha^*: \mathrm{I}^* \to R_1^4$, $\alpha^*(s)=\alpha(s)+\frac{1}{2k_2}N(s)$ eşitliğinden $\alpha^*(s)=\alpha(s)-N(s)$ şeklinde tanımlanır. $g\left(\alpha^{*\prime}(s),\alpha^{*\prime}(s)\right)=1$ olduğundan α^* birim hızlı bir spacelike eğridir. Eğrilikleri ise $k_1^*(s)=k_2^*(s)=\frac{1}{2}e^{2s}$ ve $k_3^*(s)=1$ dir. α^* eğrisinin Frenet çatısı ise

$$
\begin{aligned}
T^*(s)=&\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)\\
&-\frac{e^{-s}}{2}\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
N^*(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)
$$

$$
\begin{aligned}
B_1^*(s)=&-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)\\
&+\frac{e^{-s}}{2}\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)\\
&+e^s\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2^*(s)=&e^s\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right),\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^s}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Teorem 4.4'e göre α eğrisi genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi ve α^* ise genelleştirilmiş spacelike Mannheim partner eğrisidir. $N(s)=B_2^*(s)$ olduğundan $N(s)$ vektörü $\{B_1^*, B_2^*\}$ timelike düzleminde yatmaktadır.

Örnek 4.2 R_1^4 de $\alpha(s)=\left(\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right)$

parametrik denklemi ile verilen null Cartan eğrisini alalım. Bu eğrinin Frenet çatısı

$$T(s)=\alpha'(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$N(s)=\alpha''(s)=\frac{1}{2}\left(\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\sqrt{3}\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\sqrt{3}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$B_1(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),-\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$B_2(s)=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),-\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

şeklindedir. $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilikleri ise $k_1(s)=1$, $k_2(s)=\frac{1}{2}$ ve $k_3(s)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ dir. $\alpha(s)$ eğrisinin Mannheim partner eğrisi $\alpha^*:\mathrm{I}^*\to R_1^4$, $\alpha^*(s)=\alpha(s)+\frac{1}{2k_2}N(s)$ eşitliğinden $\alpha^*(s)=\alpha(s)+N$ şeklinde tanımlanır. $g\left(\alpha^{*\prime}(s),\alpha^{*\prime}(s)\right)=-1$ olduğundan α^* eğrisi bir timelike helistir. Eğrilikleri ise $k_1^*(s)=k_2^*(s)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $k_3^*(s)=1$ dir. Ayrıca α^* eğrisinin Frenet çatısı ise

$$T^*(s)=\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),\frac{3}{2\sqrt{2}}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$N^*(s)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{2}\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$B_1^*(s)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\frac{3}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\frac{3}{2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$B_2^*(s)=\left(\frac{1}{2}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Teorem 4.2'ye göre α eğrisi genelleştirilmiş null Mannheim eğrisi ve α^* ise α eğrisinin genelleştirilmiş timelike Mannheim partner eğrisidir. $N(s) = B_2^*(s)$ olduğundan $N(s)$ vektörü $\{B_1^*, B_2^*\}$ spacelike düzleminde yatar.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında null Mannheim eğrileri ele alınmıştır. R_1^3 Minkowski uzayında null Mannheim eğrisinin bulunmadığı ispat edilmiştir. Ayrıca, R_1^3 Minkowski uzayında pseudo null doğruların ve pseudo null çemberlerin Mannheim partner eğrilerinin pseudo null doğrular olduğu gösterilmiştir. R_1^4 Minkowski uzayında ise genelleştirilmiş null Mannheim eğrileri ile bu eğrilerin genelleştirilmiş Mannheim partner eğrilerinin eğrilik fonksiyonları ve Frenet çatıları arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Ayrıca, Mannheim partner eğrisi partially null veya pseudo null olan genelleştirilmiş null Mannheim eğri bulunmadığı gösterilmiştir. Benzer şekilde, $\{\alpha, \alpha^*\}$ Mannheim eğri çifti R_2^4 Minkowski uzayında incelenebilir. R_2^4 Minkowski uzayında genelleştirilmiş null Mannheim eğrileri için bazı karakterizasyonlar elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

Akutagawa K. and Nishikawa S. (1990). The Gauss Map and Spacelike Surface with Pres cribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space. *Töhoko Mathematical, Journal,* **42:** 67-82.

Azak, A. Z. (2009). Üç Boyutlu Lorentz uzayında Timelike Mannheim Eğri Çifti Üzerine. Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, **11:** 35-45.

Akyiğit, M., Ersoy, S., Özgür, I. and Tosun, M. (2011). Generalized Timelike Mannheim Curves in Minkowski space-time. *Mathematical Problems in Engineering,* **1:** 1-19.

Blaschke, W. (1945). Differential Geometrie and Geometrischke. Grundlagen ven Einstains Relativitasttheorie Dower, New York.

Bonnor, W. B. (1969). Null Curves in a Minkowski space-time. *Tensor,* **20**: 229-242.

Burke, J. F. (1960). Bertrand Curves Associated with a Pair of Curves. *Mathematics Magazine,* **34(1):** 60-62.

Choi, J. H., Kang, T. H. and Kim, Y. H. (2013). Mannheim Curves in 3-dimensional space forms. *Bulletin of Korean Mathematical Society*, **50(4):** 1099-1108.

Duggal, K. L. and Jin, D. H. (2007). Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds. World Scientific, Singapore.

Eisenhart, L. P. (1960). A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Edition, Dover Publication, New York.

Ersoy, S., Tosun, M. and Matsuda, H. (2012). Generalized Mannheim Curves in Minkowski space-time E_1^4. *Hokkaido Mathematical J*ournal, **41(3):** 441-461.

Fenchel, W. (1951). On the Differential Geometry of Closed Space Curves. *Bulletin of American Mathematical Society*, **57**: 44-54.

Görgülü, E. and Özdamar, E. (1986). A Generalizations of the Bertrand Curves as General Inclined Curves in E^n. Communications de la Faculty of Sciences of University of Ankara, *Series A1*, **35:** 53-60.

Grbović, M., İlarslan, K. and Nešović, E. (2014). On Null and Pseudo Null Mannheim in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry,* **105**: 177-183.

Grbović, M., İlarslan, K. and Nešović, E. (2016). On Generalized Null Mannheim in Minkowski space-time. *Publication of Institue Mathematica, Nouvelle Ser*ies, **99(113):** 77-98.

Hsiung, C. C. (1997). A first Course in Differential Geometry. International Press, Somerville.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. (2003). Special Curves and Ruled Surfaces. *Beitrage zur Algebra und Geometrie Contrributions to Algebra and Geeometry*, **44(1):** 202-212.

İlarslan, K. and Nešović, E. (2009). Spacelike and timelike normal curves in Minkowski space-time. *Publication of Institue Mathematica*, *Nouvelle Ser*ies, **85(99):** 111-118.

İlarslan, K. and Nešović, E. (2014). Some relations between normal and rectifying curves in Minkowski space-time. *International Electronic Journal of Geom*etry, **7(1):** 26-35.

Karacan, M. K. (2011). Weakend Mannheim curves. *International Journal of Physical Sciences*, **6**: 4700-4705.

Kühnel, W. (1999). Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds. Vieweg, Wiesbaden.

Lee, J. W. (2011) No Null-Helix Mannheim curves in the Minkowski space E_1^3. *International Journal of Mathematical Sciences*, **2011:** 1-7.

Liu, H. and Wang, F. (2008). Mannheim Partner Curves in 3-space. *Journal of Geom*etry, **88**: 120-126.

Lopez, R. (2014). Diferential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International Electronic Journal of Geom*etry, **7(1):** 44-107.

Matsuda, H. and Yorozu, S. (2009). On generalized Mannheim Curves in Euclidean 4-space. *Nihonkai Mathematical. Journal*, **20**: 33-56.

O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, New York.

Orbay, K. and Kasap, E. (2009). On Mannheim Partner Curves in E^3. *International Journal of Physical Sciences*, **4(5):** 261-264.

Özdamar, D. (2012). Üç Boyutlu Uzayda Mannheim Eğri Çifti, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Öztekin, H. B. and Ergut, M. (2011). Null Mannheim Curves in the Minkowski 3-space E_1^3. *Turkish Journal of Math*ematics, **35**: 107-114.

Ravani, B. and Ku, T. S. (1991). Bertrand Offsets of Ruled and Developable Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **23(2):** 145-152.

Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferansiyel Geometry. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Şenyurt, S. and Bektaş, Ö. (2012). Timelike-Spacelike Mannheim Partner Curves in E_1^3. *International Journal of the Physical Sciences*, **7(1):** 100-106.

Tozak, H. (2010). Minkowski 4-uzayında Eğriler ve Hareketlerin Geometrisi. Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Turgut, A. (1995). 3-boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 96s., 45768.

Walrave, J. (1995). Curves and Surfaces in Minkowski space. Doctoral thesis, K. U. Leuven, Faculty of Science, Leuven.

Wang, F. and Liu, H. (2007). Mannheim Partner Curves in 3-space. *Proceedings of the Eleventh International Workshop on Differantial Geometry*, **2:** 25-31.

Woestijne, V. D. I. (1990). Minimal Surfaces of the 3-diemensional Minkowski space. *Geometry and Topology of submanifolds*, *Wold Scientific Publishing*, Singapore, **2:** 344-369.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Nilüfer UMURHAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Denizli, 03/08/1988
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: nilüfer.keskiner@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Kazım Kaynak Lisesi, (2002-2006)
Lisans	:	Pamukkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, (2006-2010)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Dazkırı Mesleki Teknik Anadolu Lisesi, (2015-...)