KÜME DİZİLERİNİN

QUASI-İNVARYANT YAKINSAKLIĞI

DOKTORA TEZİ

Esra GÜLLE

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz, 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KÜME DİZİLERİNİN QUASI-İNVARYANT YAKINSAKLIĞI

Esra GÜLLE

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Esra GÜLLE tarafından hazırlanan "Küme Dizilerinin Quasi-İnvaryant Yakınsaklığı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 05/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Uğur ULUSU

Başkan : Prof. Dr. Fatih NURAY
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Üye : Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ
Konya Necmettin Erbakan Üniv. Ereğli Eğitim Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2018 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

05/07/2018

Esra GÜLLE

ÖZET

Doktora Tezi

KÜME DİZİLERİNİN
QUASI-İNVARYANT YAKINSAKLIĞI

Esra GÜLLE

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Uğur ULUSU

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalıştığımız tez konusu ile ilgili kavramların tarihsel gelişiminden bahsedildi. İkinci bölümde, çalışmamız için temel teşkil eden tanım, notasyon ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaklık, Wijsman kuvvetli quasi-hemen hemen yakınsaklık ve Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanıp bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizisi kavramı tanımlanmış ve tanımlanan bu kavram ile Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Wijsman kuvvetli quasi-invaryant yakınsaklık ve Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanmıştır. Beşinci bölümde, Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen yakınsaklık ve Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanıp bu kavramlar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Son bölümde ise, Wijsman quasi-lacunary invaryant yakınsaklık ve Wijsman kuvvetli quasi-lacunary invaryant yakınsaklık kavramları tanımlanıp, önceki bölümlerde tanımlanan yakınsaklık kavramları ile ilişkileri incelenmiştir.

2018, v+53 sayfa

Anahtar Kelimeler : Hemen hemen yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, quasi-invaryant yakınsaklık, lacunary dizisi, küme dizisi, Wijsman yakınsaklık.

ABSTRACT
Ph.D. Thesis

QUASI-INVARIANT CONVERGENCE OF
SEQUENCES OF SETS

Esra GÜLLE
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Uğur ULUSU

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, historical development of related notions of the thesis subject was mentioned. In the second chapter, some basic definitions, notions and theorems related to study were given. In the third chapter, the concepts of Wijsman quasi-almost convergence, Wijsman strongly quasi-almost convergence and Wijsman quasi-almost statistically convergence were given and the relationships between them were examined. Also, the concept of Wijsman quasi-almost statistically Cauchy sequence was defined and the relationship between this concept and Wijsman quasi-almost statistically convergence was studied. In the fourth chapter, concepts of Wijsman strongly quasi-invariant convergence and Wijsman quasi-invariant statistically convergence were defined. In the fifth chapter, the relationship between Wijsman strongly q-quasi lacunary almost convergence and Wijsman quasi-lacunary almost statistically convergence was analysed. In the final chapter, the concepts of Wijsman quasi-lacunary invariant convergence and Wijsman strongly quasi-lacunary invariant convergence were defined, also the relationships between these concepts and notions which given in previous chapter were examined.

2018, v+53 pages

Key Words : Almost convergence, statistically convergence, quasi-invariant convergence, lacunary sequence, sequence of sets, Wijsman convergence.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda yol gösteren saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Uğur ULUSU' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Engin bilgi ve tecrübesiyle her zaman yanımda olan ve beni destekleyen Prof. Dr. Fatih NURAY' a teşekkür ederim.

Tezimi yazdığım süreç boyunca destek ve yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR ve Doç. Dr. Yurdal SEVER' e de teşekkür ederim.

Doktora çalışmalarım boyunca bana maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurulumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Esra GÜLLE

AFYONKARAHİSAR, 2018

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
(x_k)	Reel sayı dizisi
$st-\lim x$	$x=(x_k)$ dizisinin istatistiksel limiti
$\theta=\{k_r\}$	Lacunary dizisi
$S_\theta-\lim x$	$x=(x_k)$ dizisinin lacunary istatistiksel limiti
l_∞	Tüm sınırlı reel sayı dizileri sınıfı
(X,ρ)	Metrik uzay
$\{A_k\}$	Küme dizisi
L_∞	Tüm sınırlı küme dizileri sınıfı
$W-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman limiti
$st-\lim_W A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman istatistiksel limiti
$WV_\sigma-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman invaryant limiti
$S_\sigma-\lim{}_W A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman invaryant istatistiksel limiti
$WQF-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman quasi-hemen hemen limiti
$WQFS-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel limiti
$WQS_\sigma-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman quasi-invaryant istatistiksel limiti
$[WQV_\sigma]-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman kuvvetli quasi-invaryant limiti
$(WQFS)_\theta$	Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak küme dizileri uzayı
$[WQF]_\theta^q-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen limiti
$WQV_{\sigma\theta}-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman quasi-lacunary invaryant limiti
$[WQV_{\sigma\theta}]-\lim A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman kuvvetli quasi-lacunary invaryant limiti

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, analiz ve fonksiyonel analiz alanının temelini oluşturan en önemli kavramdır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde büyük öneme sahiptir. İstatistiksel yakınsaklık konusu sayılar teorisi, trigonometrik seriler, toplanabilme ve son yıllarda lokal konveks uzaylar ve kuvvetli integral toplanabilme gibi birçok alanda farklı adlar altında çalışılmıştır. 1951 de Fast in istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamasından bu yana bu kavramın uygulamaları ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramları gibi birkaç genelleştirmesi ile ilgili çalışmalar Buck (1953), Schoenberg (1959), Maddox (1970), Šalát (1980), Fridy (1985, 1993), Connor (1989), Fridy ve Orhan (1997), Nuray ve Ruckle (2000) ve daha birçok araştırmacı tarafından yapılmıştır.

Freedman, Sember ve Raphael (1978) yaptıkları bir çalışmada θ lacunary dizisi yardımıyla tanımlanan N_θ kuvvetli lacunary toplanabilir dizi uzayı ile $|AC|$ kuvvetli hemen hemen yakınsak dizi uzayı arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ile Cesàro toplanabilirlik, kuvvetli Cesàro toplanabilirlik ve kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişkileri Connor 1988 de yaptığı bir çalışmada vermiştir.

Toplanabilme alanında önemli yer tutan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı Fridy ve Orhan tarafından 1993 te tanımlanmıştır. Fridy ve Orhan (1993) bu çalışmalarında; başta istatistiksel yakınsaklık kavramı olmak üzere diğer toplanabilme metodları ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Hemen hemen yakınsaklık kavramı Banach limitleri yardımıyla Lorentz tarafından 1948 te verilmiştir. Maddox (1978) yaptığı bir çalışmada ise kuvvetli hemen-hemen yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Daha sonra bu kavramın diğer toplanabilme metodlarına genişletilmesi King (1966), Das ve Mishra (1983) ve daha bir çok araştırmacı tarafından verilmiştir.

İnvaryant yakınsaklık son altmış yılda birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. 1932 de Banach tarafından yapılan çalışmada bu konunun temelleri verilmiştir. Iraksak seriler üzerine çalışırken Lorentz (1948) ve Hardy (1949) tarafından da invaryant yakınsaklık kavramı üzerine çalışmalar yapılmıştır. İnvaryant yakınsaklık üzerine Raimi (1963), Bell (1929), Schaefer (1972), Savaş (1989), Savaş ve Nuray (1993), Mursaleen (1979, 1983), Ahmad, Mursaleen ve Khan (1994), Boss ve Seydell (1999), Mursaleen ve Edely (2009) ve daha birçok araştırmacı çalışmalar yapmıştır.

Hajduković 2002 de normlu bir uzayda Banach limitleri yardımıyla quasi-hemen hemen yakınsaklık kavramını tanımlamış ve bu kavram ile bazı toplanabilme metodları arasındaki ilişkileri incelemiştir. Normlu uzaylarda quasi-invaryant ve quasi-invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları Nuray (2014) tarafından tanımlanmıştır.

Küme dizileri için yakınsaklık kavramı ise daha çok 1980 li yıllarda araştırmalara konu olmaya başlamış ve bu konudaki çalışmalar başta Beer (1985, 1989, 1994) olmak üzere; Wijsman (1964,1966), Lucchetti (1985), Baronti ve Papini (1986) ve diğer birçok araştırmacı tarafından yapılmıştır. Araştırmacılar tarafından yapılan bu çalışmalarda küme dizileri için verilen yakınsaklık kavramlarından en yaygın olarak kullanılanlardan birkaç tanesi; ”Hausdorff yakınsaklık (H)”, ”Kuratowski yakınsaklık (K)” ve ”Wijsman yakınsaklık (W)” tır. Bu yakınsaklık tiplerinden (K) ve (H) uzun zaman önce araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. (W) yakınsaklık için Wijsman (1964,1966), Lechicki ve Levi (1987) ve Beer (1994) bazı çalışmalar yapmışlardır. Baronti ve Papini (1986) yaptıkları bir çalışma ile küme dizileri için (K), (H) ve (W) yakınsaklık arasındaki ilişkileri göstermişlerdir.

Küme dizileri için Wijsman istatistiksel yakınsaklık, Kuratowski istatistiksel yakınsaklık ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık kavramları 2012 de Nuray ve Rhoades tarafından yapılan bir çalışmada tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Ayrıca Nuray ve Rhoades (2012) bu çalışmalarında küme dizilerinin toplanabilirliğini de incelemişlerdir.

Bu çalışmadaki temel amacımız, daha önce sayı dizileri için çalışılmış olan quasi-hemen hemen ve quasi-invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramlarını küme dizilerine genelleştirmektir. Bu bağlamda, küme dizileri için daha önce verilmiş olan yakınsaklık tanımlarını, bu yakınsaklıkların kendilerine özgü özelliklerini ve bunlar arasındaki ilişkileri yeniden ele alarak, küme dizileri için Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaklık, Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsaklık, Wijsman kuvvetli quasi-lacunary hemen hemen yakınsaklık ve Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanıtmak ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri veren teoremleri ispatlamak amaçlanmaktadır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde (temel kavramlar kısmında), matematik alanında önemli ve bu çalışma için gerekli olan bazı temel kavramlara, teoremlere ve bunlarla ilgili bazı özelliklere yer verildi.

Üçüncü bölümde, küme dizileri için Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaklık kavramları tanımlanarak örneklendirildi. Daha sonra tanımlanan bu kavramlar ile temel kavramlar bölümünde verilen bazı kavramlar arasındaki ilişkileri gösteren teoremler ve Wijsman kuvvetli q-quasi hemen hemen yakınsaklık ile Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi gösteren teorem ispat edildi. Ayrıca Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizisi kavramı tanımlanıp, bu kavram ile yeni tanımlanan kavramlar arasındaki ilişkiyi gösteren teorem verildi.

Dördüncü bölümde, küme dizilerinin (Wijsman anlamında) quasi-invaryant yakınsaklık kavramları ve quasi-invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlandı. Daha sonra tanımlanan bu kavramlar ile temel kavramlar bölümünde verilen bazı kavramlar arasındaki ilişkileri gösteren teoremler ve Wijsman kuvvetli q-quasi invaryant yakınsaklık ile Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi gösteren teorem ispat edildi.

Beşinci bölümde, küme dizileri için Wijsman quasi-lacunary hemen hemen yakınsaklık kavramları tanımlanarak örneklendirildi.

Daha sonra tanımlanan bu kavramlar ile temel kavramlar bölümünde tanıtılan bazı kavramlar arasındaki ilişkileri gösteren teoremler ve Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen yakınsaklık ile Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi gösteren teorem incelendi. Aynı zamanda tanımlanan bu kavramlar ile önceki bölümlerde tanıtılan bazı kavramlar arasındaki ilişkileri gösteren teoremler verildi.

Altıncı bölümde ise, küme dizileri için Wijsman quasi-lacunary invaryant yakınsaklık kavramları ve Wijsman quasi-lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak bu kavramlar ile önceki bölümlerde tanıtılan bazı kavramlar arasındaki ilişkileri gösteren teoremler ispat edildi. Daha sonra tanımlanan bu kavramlar ile temel kavramlar bölümünde tanıtılan bazı kavramlar arasındaki ilişkileri gösteren teoremler ve Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen yakınsaklık ile Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi gösteren teorem incelendi.

Son olarak, tez için temel kaynak olarak kullandığımız kitap, makale ve tezler kaynaklar kısmında verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı bilgiler verilmiştir.

2.1 Yakınsaklık

Tanım 2.1.1 Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir (Balcı 2006).

Tanım 2.1.2 Her $n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (s_n) dizisine sınırlı dizi denir (Balcı 2006).

Tanım 2.1.3 (s_n) bir reel sayı dizisi ve $s \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|s_n - s| < \varepsilon$ olacak şekilde ε na bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (s_n) dizisi s ye yakınsaktır denir (Balcı 2006).

Tanım 2.1.4 (x_k) bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\big\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\big\}\Big| = 0$$

ise, (x_k) dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st - \lim x = L$$

biçiminde gösterilir (Fast 1951).

Tanım 2.1.5 (x_k) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - L) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına Cesàro toplanabilirdir denir (Volkov 2001).

Tanım 2.1.6 (x_k) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir (Freedman *et al.* 1978).

Tanım 2.1.7 (x_k) bir dizi ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir denir (Connor 1988).

Tanım 2.1.8 (x_k) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k+i} = L \qquad (i = 1, 2, 3, ... \text{ e göre düzgün})$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına hemen hemen yakınsaktır denir (Lorentz 1948).

Tanım 2.1.9 (x_k) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+i} - L| = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, ... \text{ e göre düzgün})$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir (Freedman *et al.* 1978).

Tanım 2.1.10 (x_k) dizisi için, $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+i} - L|^p = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, ... \text{ e göre düzgün})$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli p-hemen hemen yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.11 (x_k) dizisi için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_{k+i} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına hemen hemen istatistiksel yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.12 $\theta = \{k_r\}$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak biçimde negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi ise, $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizisi denir. Ayrıca

$$I_r = (k_{r-1}, k_r] \quad \text{ve} \quad q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$$

olarak belirtilir (Freedman *et al.* 1978).

Tanım 2.1.13 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere, (x_k) dizisi için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına lacunary toplanabilirdir denir (Mursaleen and Alotaibi 2011).

Tanım 2.1.14 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere, (x_k) dizisi için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli lacunary toplanabilirdir denir (Freedman *et al.* 1978).

Tanım 2.1.15 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere, (x_k) dizisi için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli p-lacunary toplanabilirdir denir (Freedman *et al.* 1978).

Tanım 2.1.16 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. (x_k) dizisi için, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \big|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\big| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$S_\theta - limx = L \quad \text{veya} \quad x_k \to L(S_\theta)$$

biçiminde gösterilir (Fridy and Orhan 1993).

Tanım 2.1.17 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. (x_k) dizisi için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} x_{k+i} = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına lacunary hemen hemen yakınsaktır denir (Nuray 1997).

Tanım 2.1.18 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. (x_k) dizisi için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_{k+i} - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına lacunary kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir (Das and Mishra 1983).

Tanım 2.1.19 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < p < \infty$ olsun. (x_k) dizisi için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_{k+i} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına lacunary kuvvetli p-hemen hemen yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.20 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. (x_k) dizisi için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |x_{k+i} - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.21 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dönüşümü her m, n pozitif tam sayıları için $\sigma^n(m) \neq m$ olacak şekilde birebir bir dönüşüm olsun. Sürekli bir $\phi : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneline aşağıdaki özellikleri sağlaması halinde invaryant limit veya σ-limit denir.

(I1) Her n için $(x_n) \geq 0$ şartını sağlayan (x_n) dizisi için $\phi(x) \geq 0$,

(I2) $e = (1, 1, \ldots)$ olmak üzere, $\phi(e) = 1$,

(I3) Her $x \in \ell_\infty$ için $\phi(x_{\sigma(m)}) = \phi(x)$ (Schaefer 1972).

σ dönüşümü, $\sigma(m) = m+1$ olarak alındığında σ-limit genellikle Banach limiti olarak adlandırılır. Ayrıca σ-yakınsak diziler uzayı c üzerindeki limit fonksiyonelinin bir genişlemesidir, yani $x \in c$ için $\phi(x) = \lim x$ olur.

Tanım 2.1.22 (x_k) dizisi için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{\sigma^k(m)}=L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına invaryant yakınsaktır denir (Schaefer 1972).

Tanım 2.1.23 (x_k) dizisi için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_{\sigma^k(m)}-L|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli invaryant yakınsaktır denir (Mursaleen 1983).

Tanım 2.1.24 (x_k) bir dizi ve $0<p<\infty$ olsun. Eğer m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_{\sigma^k(m)}-L|^p=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli p-invaryant yakınsaktır denir (Mursaleen and Edely 2009).

Tanım 2.1.25 (x_k) bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n}\frac{1}{n}|\{k\le n:|x_{\sigma^k(m)}-L|\ge\varepsilon\}|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına invaryant istatistiksel yakınsaktır denir (Savaş and Nuray 1993).

Tanım 2.1.26 $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. (x_k) dizisi için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_{\sigma^k(m)}=L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına lacunary invaryant yakınsaktır denir (Nuray 1997).

Tanım 2.1.27 $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. (x_k) dizisi için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_{\sigma^k(m)}-L|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli lacunary invaryant yakınsaktır denir (Savaş 1990).

Tanım 2.1.28 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < p < \infty$ olsun. (x_k) dizisi için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_{\sigma^k(m)} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli p-lacunary invaryant yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.29 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. (x_k) dizisi ve $\varepsilon > 0$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \{k \in I_r : |x_{\sigma^k(m)} - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır denir (Savaş and Nuray 1993).

Tanım 2.1.30 Herhangi bir (x_k) dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve $h.h.k$ biçiminde gösterilir.

2.2 Küme Dizileri

Tanım 2.2.1 X boştan farklı bir küme ve

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(M1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(M3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

şartları sağlanırsa, ρ fonksiyonuna X üzerinde metrik fonksiyonu ve (X, ρ) ikilisine de metrik uzay denir (Maddox 1970).

Tanım 2.2.2 X boştan farklı bir küme olmak üzere, $f : \mathbb{N} \to P(X)$ şeklinde tanımlı fonksiyon $\forall k \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$$f(k) = A_k \in P(X)$$

kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun değer kümesini oluşturan $A_1, A_2, A_3, \ldots$ kümelerinin oluşturduğu diziye küme dizisi denir.

Tanım 2.2.3 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve boştan farklı herhangi bir $A \subset X$ kümesi için, x noktası ile A kümesi arasındaki uzaklık

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} \rho(x,a)$$

biçiminde tanımlanır (Nuray and Rhoades 2012).

Tanım 2.2.4 (X,ρ) bir metrik uzay ve A_k kümeleri X in boştan farklı altkümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için

$$\sup_k \left\{ d(x,A_k) \right\} < \infty$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi sınırlıdır denir (Nuray and Rhoades 2012).

Tüm sınırlı küme dizilerinin sınıfı L_∞ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için

$$\lim_{k \to \infty} d(x,A_k) = d(x,A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman yakınsaktır denir ve $A_k \stackrel{W}{\to} A$ veya $W - \lim A_k = A$ ile gösterilir (Baronti and Papini 1986).

Tanım 2.2.6 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_W A_k = A$ ile gösterilir (Nuray and Rhoades 2012).

Tanım 2.2.7 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x,A_k) = d(x,A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman Cesàro toplanabilirdir denir (Nuray and Rhoades 2012).

Tanım 2.2.8 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir (Nuray and Rhoades 2012).

Tanım 2.2.9 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere, her bir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir denir (Nuray and Rhoades 2012).

Tanım 2.2.10 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_{k+i}) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman hemen hemen yakınsaktır denir (Nuray and Rhoades 2012).

Tanım 2.2.11 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir (Nuray and Rhoades 2012).

Tanım 2.2.12 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere her bir $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, ... \text{ e göre düzgün})$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-hemen hemen yakınsaktır denir (Nuray and Rhoades 2012).

Tanım 2.2.13 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsaktır denir (Nuray and Rhoades 2012).

Tanım 2.2.14 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere, her bir $x \in X$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary toplanabilirdir denir (Ulusu and Nuray 2012).

Tanım 2.2.15 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere, her bir $x \in X$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilirdir denir (Ulusu and Nuray 2012).

Tanım 2.2.16 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < p < \infty$ olmak üzere, her bir $x \in X$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-lacunary toplanabilirdir denir (Ulusu 2013).

Tanım 2.2.17 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere, her bir $x \in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d(x, A_{k+i}) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen yakınsaktır denir (Ulusu 2013).

Tanım 2.2.18 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere, her bir $x\in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_{k+i})-d(x,A)|=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir (Ulusu 2013).

Tanım 2.2.19 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0<p<\infty$ olmak üzere, her bir $x\in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_{k+i})-d(x,A)|^p=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary kuvvetli p-hemen hemen yakınsaktır denir (Ulusu 2013).

Tanım 2.2.20 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, her $\varepsilon>0$ ve her bir $x\in X$ için, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\Big|\Big\{k\in I_r:|d(x,A_{k+i})-d(x,A)|\geq\varepsilon\Big\}\Big|=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaktır denir (Ulusu and Nuray 2012).

Tanım 2.2.21 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Her bir $x\in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}d(x,A_{\sigma^k(m)})=d(x,A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman invaryant yakınsaktır denir ve $A_k\xrightarrow{WV_\sigma}A$ veya $WV_\sigma-\lim A_k=A$ biçiminde gösterilir (Pancaroğlu and Nuray 2013).

Tanım 2.2.22 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Her bir $x\in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli invaryant yakınsaktır denir ve $A_k \xrightarrow{[WV_\sigma]} A$ veya $[WV_\sigma] - \lim A_k = A$ biçiminde gösterilir (Pancaroğlu and Nuray 2013).

Tanım 2.2.23 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere, her bir $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-invaryant yakınsaktır denir ve $A_k \xrightarrow{[WV_\sigma]_p} A$ veya $[WV_\sigma]_p - \lim A_k = A$ biçiminde gösterilir (Pancaroğlu 2014).

Tanım 2.2.24 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman invaryant istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\sigma - \lim_W A_k = A$ veya $A_k \longrightarrow A(WS_\sigma)$ biçiminde gösterilir (Pancaroğlu and Nuray 2013).

Tanım 2.2.25 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere, her bir $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d(x, A_{\sigma^k(m)}) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary invaryant yakınsaktır denir (Pancaroğlu 2014).

Tanım 2.2.26 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere, her bir $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsaktır denir (Pancaroğlu 2014).

Tanım 2.2.27 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0<p<\infty$ olmak üzere, her bir $x\in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|^p=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli lacunary p-invaryant yakınsaktır denir (Pancaroğlu 2014).

Tanım 2.2.28 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, her $\varepsilon>0$ ve her bir $x\in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\Big|\big\{k\in I_r:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon\big\}\Big|=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır denir (Pancaroğlu 2014).

3. KÜME DİZİLERİNİN QUASI-HEMEN HEMEN YAKINSAKLIĞI

Tanım 3.1 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty}\left|\frac{1}{p}\sum_{k=np}^{np+p-1} d_x(A_k) - d_x(A)\right| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaktır denir ve

$$WQF - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \stackrel{WQF}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Burada, $d_x(A_k) = d(x, A_k)$ ve $d_x(A) = d(x, A)$ olarak kullanılmıştır ve bundan sonrada bu gösterimler kullanılacaktır.

Örnek 3.2 $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $\{A_k\}$ dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$A_k := \begin{cases} \{1\} & , \quad k \geq 1 \text{ ve } k \text{ tam kare ise,} \\ \\ \{0\} & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Burada, her $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty}\left|\frac{1}{p}\sum_{k=np}^{np+p-1} d_x(A_k) - d_x(\{0\})\right| = 0$$

olduğundan $\{A_k\}$ dizisi $A = \{0\}$ kümesine Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaktır. Ancak bu dizi Wijsman yakınsak değildir.

Teorem 3.3 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman hemen hemen yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaktır.

İspat: $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman hemen hemen yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $p_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $p > p_0$ ve her m için

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} d_x(A_{k+m}) - d_x(A) \right| < \varepsilon$$

dur. Burada $m = np$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} d_x(A_{k+np}) - d_x(A) \right| = \left| \frac{1}{p} \sum_{k=np}^{np+p-1} d_x(A_k) - d_x(A) \right| < \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $p \to \infty$ için limit alınırsa, n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \left| \frac{1}{p} \sum_{k=np}^{np+p-1} d_x(A_k) - d_x(A) \right| = 0$$

bulunur. O halde $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen yakınsaktır.

■

Teorem 3.4 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman Cesàro toplanabilirdir.

İspat: $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $p_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $p > p_0$ ve her n için

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=np}^{np+p-1} d_x(A_k) - d_x(A) \right| < \varepsilon$$

dur. Özel olarak $n = 0$ için de bu eşitsizlik geçerli olacağından

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} d_x(A_k) - d_x(A) \right| < \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $p \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} d_x(A_k) = d_x(A)$$

elde edilir. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman Cesàro toplanabilir olduğunu gösterir. ■

Tanım 3.5 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\Big|\big\{k \le p : \big|d_x(A_{k+np}) - d_x(A)\big| \ge \varepsilon\big\}\Big| = 0,$$

yani, her n ve hemen hemen her k için

$$|d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| < \varepsilon$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$WQFS - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \overset{WQFS}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsak küme dizilerinin uzayı,

$$WQFS = \left\{\{A_k\} : \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\Big|\big\{k \le p : \big|d_x(A_{k+np}) - d_x(A)\big| \ge \varepsilon\big\}\Big| = 0\right\}$$

ile gösterilecektir.

Teorem 3.6 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda, $\delta > 0$ verildiğinde her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $p_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $p > p_0$ ve her i için

$$\frac{1}{p}\Big|\big\{k \le p : |d_x(A_{k+i}) - d_x(A)| \ge \varepsilon\big\}\Big| < \delta$$

dır. Burada $i = np$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{p}\Big|\big\{k \le p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| \ge \varepsilon\big\}\Big| < \delta$$

elde edilir. $\delta > 0$ keyfi olduğundan, n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\Big|\big\{k \le p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| \ge \epsilon\big\}\Big| = 0$$

dır. Bu ise $A_k \overset{WQFS}{\longrightarrow} A$ olduğunu gösterir. ■

Tanım 3.7 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=np}^{np+p-1} \big|d_x(A_k) - d_x(A)\big| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli quasi-hemen hemen yakınsaktır denir ve

$$[WQF] - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \overset{[WQF]}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 3.8 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $0 < q < \infty$ olmak üzere, eğer her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=np}^{np+p-1} \big|d_x(A_k) - d_x(A)\big|^q = 0 \tag{3.1}$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi hemen hemen yakınsaktır denir ve

$$[WQF]^q - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \overset{[WQF]^q}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 3.9 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri ve $0 < q < \infty$ olmak üzere her bir $x \in X$ için aşağıdaki önermeler sağlanır:

i. $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi hemen hemen yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

ii. $\{A_k\} \in L_\infty$ ve A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi hemen hemen yakınsaktır.

İspat: i. $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi hemen hemen yakınsak olduğunu kabul edelim. Her bir $x \in X$, her $\varepsilon > 0$ ve her n için

$$\sum_{k=np}^{np+p-1} |d_x(A_k) - d_x(A)|^q \geq \varepsilon^q \Big|\big\{k \leq p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

(3.2) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{p}$ ile çarpılır ve $p \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=np}^{np+p-1} \left| d_x(A_k) - d_x(A) \right|^q \geq \varepsilon^q \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left| \left\{ k \leq p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$0 \geq \varepsilon^q \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left| \left\{ k \leq p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

elde edilir. O halde n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left| \left\{ k \leq p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

dır. Bu ise $A_k \stackrel{WQFS}{\longrightarrow} A$ olduğunu gösterir.

ii. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsak olsun. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı olduğundan her bir $x \in X$ için

$$\sup_k \left\{ d_x(A_k) \right\} + d_x(A) = M$$

olacak şekilde bir $0 < M < \infty$ sayısı vardır. Ayrıca, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğundan, her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $p > N_\varepsilon$ ve her n için

$$\frac{1}{p} \left| \left\{ k \leq p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/q} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2M^q}$$

dur. Şimdi

$$T_p := \left\{ k \leq p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/q} \right\}$$

kümesini alalım. Bu durumda her bir $x \in X$ ve her n için

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{k=np}^{np+p-1} \left| d_x(A_k) - d_x(A) \right|^q &= \frac{1}{p} \Bigg(\sum_{\substack{k \leq p \\ k \in T_p}} |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)|^q \\ &\quad + \sum_{\substack{k \leq p \\ k \notin T_p}} |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)|^q \Bigg) \\ &< \frac{1}{p} p \frac{\varepsilon}{2M^q} M^q + \frac{1}{p} p \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $A_k \stackrel{[WQF]^q}{\longrightarrow} A$ dır. ■

Teorem 3.10 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi hemen hemen yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-Cesàro toplanabilirdir.

İspat: $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi hemen hemen yakınsak olsun. Bu durumda (3.1) ifadesi özel olarak $n = 0$ için de geçerli olacağından, her bir $x \in X$ için

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left| d_x(A_k) - d_x(A) \right|^q = 0$$

elde edilir. Böylece $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-Cesàro toplanabilirdir. ■

Teorem 3.11 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi hemen hemen yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi hemen hemen yakınsak olsun. Bu durumda Teorem 3.10 gereğince $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-Cesàro toplanabilirdir. Her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left| d_x(A_k) - d_x(A) \right|^q \geq \varepsilon^q \left| \left\{ k \leq p : |d_x(A_k) - d_x(A)| \geq \varepsilon \right\} \right| \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.3) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{p}$ ile çarpılır ve $p \to \infty$ için limit alındığında eşitsizliğin sol tarafı kabulümüzden dolayı 0 a eşit olacaktır. Dolayısıyla

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left| \left\{ k \leq p : |d_x(A_k) - d_x(A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olup istenilen elde edilir. ■

3.1 Quasi-Hemen Hemen İstatistiksel Cauchy Dizisi

Tanım 3.1.1 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\Big|\big\{k \leq p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(A_N)| \geq \varepsilon\big\}\Big| = 0,$$

yani, her n ve hemen hemen her k için

$$|d_x(A_{k+np}) - d_x(A_N)| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı varsa, $\{A_k\}$ dizisine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.1.2 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $\{A_k\}$ dizisi Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizisidir.

(iii) $\{A_k\}$ öyle bir dizidir ki hemen hemen her k için $A_k = B_k$ olacak şekilde Wijsman quasi-hemen hemen yakınsak bir $\{B_k\}$ dizisi vardır.

İspat: (i)⇒(ii): Kabul edelim ki $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsak ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda, her n ve hemen hemen her k için

$$|d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Bir $N > 0$ sayısı

$$|d_x(A_N) - d_x(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde seçilirse, bu taktirde her n ve hemen hemen her k için

$$\begin{aligned} |d_x(A_{k+np}) - d_x(A_N)| &\leq |d_x(A_{k+np}) - d_x(A)| + |d_x(A_N) - d_x(A)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

(ii)⇒(iii): $\{A_k\}$ dizisi Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bir N sayısı,

$$J = [d_x(A_N) - 1, d_x(A_N) + 1]$$

aralığı her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np})$ reel sayısını içerecek biçimde seçilsin. Şimdi (ii) yi uygulayabilmek için N_2 sayısı da,

$$J' = \left[d_x(A_{N_2}) - \frac{1}{2}, d_x(A_{N_2}) + \frac{1}{2}\right]$$

aralığı her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np})$ reel sayısını içerecek biçimde seçilsin. O halde

$$\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J \cap J'\} = \{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J\} \cup \{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J'\}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\big|\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J \cap J'\}\big| &\leq \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\big|\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J\}\big| \\ &\quad + \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\big|\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J'\}\big| \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her n ve hemen hemen her k için

$$d_x(A_{k+np}) \in J_1 = J \cap J'$$

olacak biçimde J_1 aralığı vardır. Bu nedenle J_1, her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np})$ yi ihtiva eden ve aralığın uzunluğu 1 den küçük eşit olan kapalı bir aralıktır. Şimdi N_3 sayısı,

$$J'' = \left[d_x(A_{N_3}) - \frac{1}{4}, d_x(A_{N_3}) + \frac{1}{4}\right]$$

aralığı her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np})$ reel sayısını içerecek biçimde seçilsin. Benzer düşünceyle her n ve hemen hemen her k için

$$d_x(A_{k+np}) \in J_2 = J_1 \cap J''$$

olacak biçimde bir J_2 aralığı vardır ve J_2, aralığın uzunluğu $\frac{1}{2}$ den küçük eşit olan kapalı bir aralıktır.

Bu şekilde devam edilirse, her bir m için J_m aralıklarının uzunlukları 2^{1-m} den büyük olmayan, her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np}) \in J_m$ ve $J_{m+1} \subseteq J_m$ olacak biçimde kapalı aralıkların bir (J_m) dizisi oluşturulabilir. (Nested İntervals) İç İçe Aralıklar Teoremi gereğince

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} J_m = \mu$$

olacak biçimde bir μ sayısı vardır. Her n ve hemen hemen her k için $d_x(A_{k+np}) \in J_m$ olduğu göz önünde bulundurularak $p > T_m$ için

$$\frac{1}{p}\left|\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J_m\}\right| < \frac{1}{m} \tag{3.4}$$

olacak biçimde pozitif tamsayıların artan bir $\{T_m\}$ dizisi seçilsin. Şimdi $\{A_k\}$ dizisinin bir $C = \{C_k\}$ altdizisi, elemanları $T_m < k+np \leq T_{m+1}$ iken $d_x(A_{k+np}) \notin J_m$ ve $k + np > T_1$ şartlarını sağlayacak biçimde tanımlansın. Daha sonra

$$B_k = \begin{cases} \{\mu\}, & A_k,\ C \text{ nin bir terimi ise} \\ A_k, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak biçimde $\{B_k\}$ dizisini tanımlayalım. Bu durumda $WQF - \lim B_k = \{\mu\}$ dür. Çünkü $\varepsilon > \dfrac{1}{m} > 0$ ve $k + np > T_m$ ise A_k, C nin bir terimidir ki bu $B_k = \{\mu\}$ anlamına gelir ya da $B_k = A_k \in J_m$ ve

$$\left|d_x(B_k) - d_x(\{\mu\})\right| \leq J_m \text{ aralığının uzunluğu} \leq 2^{1-m}$$

dir. Ayrıca hemen hemen her k için $B_k = A_k$ dır. Şimdi bunu ispat edelim: $T_m < k + np \leq T_{m+1}$ iken

$$\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \neq d_x(B_{k+np})\} \subseteq \{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J_m\}$$

dir. Böylece (3.4) gereğince

$$\frac{1}{p}\left|\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \neq d_x(B_{k+np})\}\right| \leq \frac{1}{p}\left|\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \notin J_m\}\right| < \frac{1}{m}$$

dir. O halde $p \to \infty$ için limit alınırsa, eşitsizliğin sağ tarafındaki ifade 0 a eşit olduğundan hemen hemen her k için $A_k = B_k$ elde edilir.

(iii)⇒(i): Kabul edelim ki (iii) sağlansın. Bu durumda hemen hemen her k için $A_k = B_k$ ve $WQF - \lim B_k = B$ dir. Her $\varepsilon > 0$ ve her bir p için

$$\begin{aligned}\{k \leq p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(B)| \geq \varepsilon\} \subseteq &\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \neq d_x(B_{k+np})\} \\ &\cup \{k \leq p : |d_x(B_{k+np}) - d_x(B)| \geq \varepsilon\}\end{aligned}$$

yazılabilir. $WQF - \lim B_k = B$ olduğundan kapsam ifadesinin sağ tarafındaki ikinci küme sabit sayıda eleman ihtiva eder. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\big|\{k \leq p : |d_x(A_{k+np}) - d_x(B)| \geq \varepsilon\}\big| \leq &\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\big|\{k \leq p : d_x(A_{k+np}) \neq d_x(B_{k+np})\}\big| \\ &+ \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\big|\{k \leq p : |d_x(B_{k+np}) - d_x(B)| \geq \varepsilon\}\big| \\ &\to 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin B kümesine Wijsman quasi-hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. ■

4. KÜME DİZİLERİNİN QUASI-İNVARYANT YAKINSAKLIĞI

Tanım 4.1 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \to \infty} \left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A) \right| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-invaryant yakınsaktır denir ve

$$WQV_\sigma - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \stackrel{WQV_\sigma}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Burada, $d_x(A_{\sigma^k(np)}) = d(x, A_{\sigma^k(np)})$ ve $d_x(A) = d(x, A)$ olarak kullanılmıştır ve bundan sonrada bu gösterimler kullanılacaktır.

Teorem 4.2 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman invaryant yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-invaryant yakınsaktır.

İspat: $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman invaryant yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $p_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $p > p_0$ ve her m için

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} d_x(A_{\sigma^k(m)}) - d_x(A) \right| < \varepsilon$$

dur. Burada $m = np$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A) \right| < \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $p \to \infty$ için limit alınırsa, n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p \to \infty} \left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A) \right| = 0$$

bulunur. O halde $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-invaryant yakınsaktır. ∎

Tanım 4.3 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\Big|\big\{k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$WQS_\sigma - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \stackrel{WQS_\sigma}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 4.4 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman invaryant istatistiksel yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman invaryant istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\delta > 0$ verildiğinde her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $p_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $p > p_0$ ve her m için

$$\frac{1}{p}\Big|\big\{k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(m)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| < \delta$$

dır. Burada $m = np$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{p}\Big|\big\{k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| < \delta$$

elde edilir. $\delta > 0$ keyfi olduğundan, n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\Big|\big\{k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| = 0$$

dır. Bu ise $A_k \stackrel{WQS_\sigma}{\longrightarrow} A$ olduğunu gösterir. ■

Tanım 4.5 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \big|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\big| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli quasi-invaryant yakınsaktır denir ve

$$[WQV_\sigma] - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \stackrel{[WQV_\sigma]}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 4.6 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left| d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A) \right|^q = 0 \tag{4.1}$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi invaryant yakınsaktır denir ve

$$[WQV_\sigma]^q - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \overset{[WQV_\sigma]^q}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 4.7 (X,ρ) bir metrik uzay ve $0 < q < \infty$ olsun. Bu durumda, boştan farklı $A, A_k \subset X$ kapalı altkümeleri için aşağıdaki önermeler sağlanır:

i. $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi invaryant yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsaktır.

ii. $\{A_k\} \in L_\infty$ ve A kümesine Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi invaryant yakınsaktır.

İspat: i. $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi invaryant yakınsak olduğunu kabul edelim. Her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left| d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A) \right|^q \geq \varepsilon^q \left| \left\{ k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \right\} \right| \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.2) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{p}$ ile çarpılır ve $p \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left| d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A) \right|^q \geq & \ \varepsilon^q \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left| \left\{ k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
0 \geq & \ \varepsilon^q \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left| \left\{ k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \right\} \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \left| \left\{ k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

dır. Bu ise $A_k \overset{WQS_\sigma}{\longrightarrow} A$ olduğunu gösterir.

ii. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve A kümesine Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsak olsun. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı olduğundan her bir $x \in X$ için

$$\sup_k \{d_x(A_{\sigma^k(np)})\} + d_x(A) = T$$

olacak şekilde bir $0 < T < \infty$ sayısı vardır. Ayrıca, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsak olduğundan, her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $p > N_\varepsilon$ ve her n için

$$\frac{1}{p}\left|\left\{k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/q}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2T^q}$$

dur. Şimdi

$$G_p := \left\{k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/q}\right\}$$

kümesini alalım. Bu durumda her bir $x \in X$ ve her n için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right|^q &= \frac{1}{p}\Bigg(\sum_{\substack{k\leq p\\ k\in G_p}} |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)|^q \\
&\quad + \sum_{\substack{k\leq p\\ k\notin G_p}} |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)|^q\Bigg) \\
&< \frac{1}{p}p\frac{\varepsilon}{2T^q}T^q + \frac{1}{p}p\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $A_k \overset{[WQV_\sigma]^q}{\longrightarrow} A$ dır. ■

Lemma 4.8 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$, her $\varepsilon > 0$ için her $p \geq p_0$ ve $n \geq n_0$ olduğunda

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde p_0 ve n_0 sayıları varsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli quasi-invaryant yakınsak, yani $A_k \overset{[WQV_\sigma]}{\longrightarrow} A$ dır.

İspat: $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Kabulümüzden dolayı her bir $x \in X$, her $p \geq p'_0$ ve her $n \geq n_0$ için

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.3}$$

olacak biçimde p'_0 ve n_0 sayıları seçilebilir. Bu durumda, her $p \geq p''_0$ ve $0 \leq n \leq n_0$ için

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir p''_0 sayısının var olduğunu göstermek ispat için yeterli olacaktır. p_0 sayısı

$$p_0 = \max\{p'_0, p''_0\}$$

olarak alınırsa, $p \geq p_0$ ve her n için

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. n_0 sayısı seçilişinden dolayı bir sabittir. Bu durumda

$$K := \sum_{k=0}^{n_0-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right|$$

olarak alınabilir. Şimdi $0 \leq n \leq n_0$ ve $p \geq n_0$ için (4.3) ifadesi de göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right| &= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n_0-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right| \\
&\quad + \frac{1}{p}\sum_{k=n_0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right| \\
&\leq \frac{K}{p} + \frac{1}{p}\sum_{k=n_0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right| \\
&\leq \frac{K}{p} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. p yeterince büyük seçilerek

$$\frac{K}{p} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

yazılabilir. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman kuvvetli quasi-invaryant yakınsak olduğunu gösterir. ■

Lemma 4.9 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon, \delta > 0$ için her $p \geq p_0$ ve $n \geq n_0$ olduğunda

$$\frac{1}{p}\Big|\{0 \leq k \leq p-1 : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\}\Big| \leq \delta$$

olacak şekilde p_0 ve n_0 sayıları varsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsak, yani $A_k \overset{WQS_\sigma}{\longrightarrow} A$ dır.

İspat: $\varepsilon, \delta > 0$ verilmiş olsun. Kabulümüzden dolayı her bir $x \in X$, her $p \geq p_0'$ ve her $n \geq n_0$ için

$$\frac{1}{p}\Big|\{0 \leq k \leq p-1 : \big|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\big| \geq \varepsilon\}\Big| < \frac{\delta}{2} \tag{4.4}$$

olacak biçimde p_0' ve n_0 sayıları seçilebilir. Bu durumda, her $p \geq p_0''$ ve $0 \leq n \leq n_0$ için

$$\frac{1}{p}\Big|\{0 \leq k \leq p-1 : \big|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\big| \geq \varepsilon\}\Big| < \delta$$

olacak şekilde bir p_0'' sayısının var olduğunu göstermek ispat için yeterli olacaktır. p_0 sayısı

$$p_0 = \max\{p_0', p_0''\}$$

olarak alınırsa, $p \geq p_0$ ve her n için

$$\frac{1}{p}\Big|\{0 \leq k \leq p-1 : \big|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\big| \geq \varepsilon\}\Big| < \delta$$

eşitsizliği sağlanır. n_0 sayısı seçilişinden dolayı bir sabittir. Bu durumda

$$H := \Big|\{0 \leq k \leq n_0 - 1 : \big|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\big| \geq \varepsilon\}\Big|$$

olarak alınabilir.

Böylece, $0 \leq n \leq n_0$ ve $p \geq n_0$ için (4.4) ifadesi de göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\Big|\{0 \leq k \leq p-1 : \big|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\big| \geq \varepsilon\}\Big| &\leq \frac{1}{p}\Big|\{0 \leq k \leq n_0-1 : \big|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\big| \geq \varepsilon\}\Big| \\
&\quad + \frac{1}{p}\Big|\{n_0 \leq k \leq p-1 : \big|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\big| \geq \varepsilon\}\Big| \\
&\leq \frac{H}{p} \\
&\quad + \frac{1}{p}\Big|\{n_0 \leq k \leq p-1 : \big|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\big| \geq \varepsilon\}\Big| \\
&\leq \frac{H}{p} + \frac{\delta}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. p yeterince büyük seçilerek

$$\frac{H}{p} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

yazılabilir. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman quasi-invaryant istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. ■

5. KÜME DİZİLERİNİN QUASI-LACUNARY HEMEN HEMEN YAKINSAKLIĞI

Tanım 5.1 (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d_x(A_{k+nr}) - d_x(A) \right| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen yakınsaktır denir ve

$$(WQF)_\theta - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \stackrel{(WQF)_\theta}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Örnek 5.2 $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $\{A_k\}$ dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$A_k := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq k_r - k_{r-1}\} & , \quad k \geq 2 \text{ ve } k \text{ tam kare ise,} \\ \\ \{1\} & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Burada, her $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d_x(A_{k+nr}) - d_x(\{1\}) \right| = 0$$

olduğundan $\{A_k\}$ dizisi $A = \{1\}$ kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen yakınsaktır. Ancak bu dizi Wijsman lacunary hemen hemen yakınsak değildir.

Teorem 5.3 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen yakınsaktır.

İspat: $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $r > r_0$ ve her i için

$$\left| \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d_x(A_{k+i}) - d_x(A) \right| < \varepsilon$$

dur.

Burada $i = nr$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d_x(A_{k+nr}) - d_x(A) \right| < \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $r \to \infty$ için limit alınırsa, n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d_x(A_{k+nr}) - d_x(A) \right| = 0$$

bulunur. O halde $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen yakınsaktır. ■

Teorem 5.4 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary toplanabilirdir.

İspat: $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda her bir $x \in X$ için, n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d_x(A_{k+nr}) - d_x(A) \right| = 0$$

dır. Özel olarak $n = 0$ için de bu eşitsizlik geçerli olacağından

$$\lim_{r\to\infty} \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d_x(A_k) - d_x(A) \right| = 0$$

elde edilir. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman lacunary toplanabilir olduğunu gösterir. ■

Tanım 5.5 (X, ρ) bir metrik uzay, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |d_x(A_{k+nr}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$(WQFS)_\theta - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \overset{(WQFS)_\theta}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak küme dizilerinin uzayı,

$$(WQFS)_\theta = \left\{ \{A_k\} : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \Big| \big\{ k \in I_r : |d_x(A_{k+nr}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \big\} \Big| = 0 \right\}$$

ile gösterilecektir.

Teorem 5.6 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\delta > 0$ verildiğinde her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $r > r_0$ ve her i için

$$\frac{1}{h_r} \Big| \big\{ k \in I_r : |d_x(A_{k+i}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \big\} \Big| < \delta$$

dır. Burada, $i = nr$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{h_r} \Big| \big\{ k \in I_r : |d_x(A_{k+nr}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \big\} \Big| < \delta$$

elde edilir. $\delta > 0$ keyfi olduğundan, n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \Big| \big\{ k \in I_r : |d_x(A_{k+nr}) - d_x(A)| \geq \varepsilon \big\} \Big| = 0$$

dır. Bu ise $A_k \stackrel{(WQFS)_\theta}{\longrightarrow} A$ olduğunu gösterir. ■

Teorem 5.7 Her $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için $\liminf_r q_r > 1$ ise, bu durumda $WQFS \subset (WQFS)_\theta$ dır.

İspat: $\liminf_r q_r > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $r \geq 1$ için $q_r \geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta \geq 0$ sayısı vardır.

$$q_r \geq 1+\delta \;\text{ ve }\; h_r = k_r - k_{r-1}$$

olduğundan

$$q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1+\delta \;\Rightarrow\; \frac{k_{r-1}}{k_r} \leq \frac{1}{1+\delta}$$

$$\Rightarrow\; 1-\frac{k_{r-1}}{k_r} \geq 1-\frac{1}{1+\delta}$$

$$\Rightarrow\; \frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$$

dır. $A_k \overset{WQFS}{\longrightarrow} A$ olduğunu kabul edelim. Her bir $x \in X$, her $\varepsilon > 0$ ve her n için

$$\frac{1}{k_r}\Big|\big\{k \leq k_r : |d_x(A_{k+nk_r}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \frac{1}{k_r}\Big|\big\{k \in I_r : |d_x(A_{k+nk_r}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big|$$

$$= \frac{h_r}{k_r}\left(\frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |d_x(A_{k+nk_r}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big|\right)$$

$$\geq \frac{\delta}{1+\delta}\left(\frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |d_x(A_{k+nk_r}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big|\right)$$

yani,

$$\frac{1}{k_r}\Big|\big\{k \leq k_r : |d_x(A_{k+nk_r}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| \geq \frac{\delta}{1+\delta}\left(\frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |d_x(A_{k+nk_r}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big|\right) \tag{5.1}$$

bulunur. (5.1) eşitsizliğinin her iki tarafının $r \to \infty$ için limiti alınırsa, $A_k \overset{WQFS}{\longrightarrow} A$ olduğundan

$$0 \geq \frac{\delta}{1+\delta} \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |d_x(A_{k+nk_r}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big|$$

elde edilir. Lacunary dizi tanımı gereğince k_r yerine r yazılabileceğinden, her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |d_x(A_{k+nr}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| = 0$$

dır. Buradan da $A_k \overset{(WQFS)_\theta}{\longrightarrow} A$ olduğu sonucuna varılır. ■

Tanım 5.8 (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x\in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d_x(A_{k+nr})-d_x(A)|=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli quasi-lacunary hemen hemen yakınsaktır denir ve

$$[WQF]_\theta-\lim A_k=A \text{ veya } A_k \overset{[WQF]_\theta}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 5.9 Her $\theta=\{k_r\}$ lacunary dizisi için $\liminf_r q_r>1$ ise, bu durumda

$$A_k \overset{[WQF]}{\longrightarrow} A \Rightarrow A_k \overset{[WQF]_\theta}{\longrightarrow} A$$

dır.

İspat: $\liminf_r q_r>1$ olsun. Bu durumda, her $r\geq 1$ için $q_r\geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta\geq 0$ sayısı vardır.

$$q_r\geq 1+\delta \text{ ve } h_r=k_r-k_{r-1}$$

olduğundan

$$\frac{k_r}{h_r}\leq\frac{1+\delta}{\delta} \quad \text{ve} \quad \frac{k_{r-1}}{h_r}\leq\frac{1}{\delta} \tag{5.2}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. $A_k \overset{[WQF]}{\longrightarrow} A$ olduğunu kabul edelim. Her bir $x\in X$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d_x\left(A_{k+nr}\right)-d_x\left(A\right)| &= \frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{k_r}|d_x\left(A_{i+nr}\right)-d_x\left(A\right)| \\ &\quad -\frac{1}{h_r}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}|d_x\left(A_{i+nr}\right)-d_x\left(A\right)| \\ \\ &= \frac{k_r}{h_r}\left(\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r}|d_x\left(A_{i+nr}\right)-d_x\left(A\right)|\right) \\ &\quad -\frac{k_{r-1}}{h_r}\left(\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}|d_x\left(A_{i+nr}\right)-d_x\left(A\right)|\right)\end{aligned}$$

yani,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x\left(A_{k+nr}\right)-d_x\left(A\right)\right| = \frac{k_r}{h_r}\left(\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r}\left|d_x\left(A_{i+nr}\right)-d_x\left(A\right)\right|\right) \tag{5.3}$$

$$-\frac{k_{r-1}}{h_r}\left(\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}\left|d_x\left(A_{i+nr}\right)-d_x\left(A\right)\right|\right)$$

bulunur. (5.3) eşitsizliğinin her iki tarafının $r \to \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x\left(A_{k+nr}\right)-d_x\left(A\right)\right| = \lim_{r\to\infty}\frac{k_r}{h_r}\left(\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r}\left|d_x\left(A_{i+nr}\right)-d_x\left(A\right)\right|\right)$$

$$-\lim_{r\to\infty}\frac{k_{r-1}}{h_r}\left(\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}\left|d_x\left(A_{i+nr}\right)-d_x\left(A\right)\right|\right)$$

olur. $A_k \overset{[WQF]}{\longrightarrow} A$ olduğundan, her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{k_r}\left|d_x\left(A_{i+nr}\right)-d_x\left(A\right)\right| = 0 \ \text{ ve } \lim_{r\to\infty}\frac{1}{k_{r-1}}\sum_{i=1}^{k_{r-1}}\left|d_x\left(A_{i+nr}\right)-d_x\left(A\right)\right| = 0 \tag{5.4}$$

dır. (5.2) eşitsizlikleri ve (5.4) limitleri birlikte düşünüldüğünde

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x\left(A_{k+nr}\right)-d_x\left(A\right)\right| = 0,$$

yani,

$$A_k \overset{[WQF]_\theta}{\longrightarrow} A$$

elde edilir. ■

Tanım 5.10 (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $0 < q < \infty$ olmak üzere eğer her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x(A_{k+nr})-d_x(A)\right|^q = 0 \tag{5.5}$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen yakınsaktır denir ve

$$[WQF]_\theta^q - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \overset{[WQF]_\theta^q}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 5.11 (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. $0<q<\infty$ olmak üzere eğer her bir $x\in X$ için aşağıdaki önermeler sağlanır:

i. $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

ii. $\{A_k\}\in L_\infty$ ve A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen yakınsaktır.

İspat: i. $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen yakınsak olduğunu kabul edelim. Her bir $x\in X$, her $\varepsilon>0$ ve her n için

$$\sum_{k\in I_r}|d_x(A_{k+nr})-d_x(A)|^q\geq\varepsilon^q\Big|\big\{k\in I_r:|d_x(A_{k+nr})-d_x(A)|\geq\varepsilon\big\}\Big| \tag{5.6}$$

eşitsizliği sağlanır. (5.6) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{h_r}$ ile çarpılır ve $r\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d_x(A_{k+nr})-d_x(A)|^q\geq\varepsilon^q\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\Big|\big\{k\in I_r:|d_x(A_{k+nr})-d_x(A)|\geq\varepsilon\big\}\Big| \tag{5.7}$$

elde edilir. $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen yakınsak olduğundan (5.7) eşitsizliğinin sol tarafı sıfıra eşittir. Böylece, n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\Big|\big\{k\in I_r:|d_x(A_{k+nr})-d_x(A)|\geq\varepsilon\big\}\Big|=0$$

dır. Bu ise $A_k\stackrel{(WQFS)_\theta}{\longrightarrow}A$ olduğunu gösterir.

ii. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak olsun.

$\{A_k\}$ dizisi sınırlı olduğundan her bir $x \in X$ için

$$\sup_k \{d_x(A_k)\} + d_x(A) = M$$

olacak şekilde bir $0 < M < \infty$ sayısı vardır. Ayrıca, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğundan, her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $r > N_\varepsilon$ ve her n için

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |d_x(A_{k+nr}) - d_x(A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/q}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2M^q}$$

dır. Şimdi L_r kümesini

$$L_r := \left\{k \in I_r : |d_x(A_{k+nr}) - d_x(A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/q}\right\}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda her bir $x \in X$ ve her n için

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x(A_{k+nr}) - d_x(A)\right|^q &= \frac{1}{h_r}\left(\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\in L_r}}|d_x(A_{k+nr}) - d_x(A)|^q\right.\\ &\left.+\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\notin L_r}}|d_x(A_{k+nr}) - d_x(A)|^q\right)\\ &< \frac{1}{h_r}h_r\frac{\varepsilon}{2M^q}M^q + \frac{1}{h_r}h_r\frac{\varepsilon}{2}\\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $A_k \stackrel{[WQF]_\theta^q}{\longrightarrow} A$ dır. ■

Teorem 5.12 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen yakınsak ise bu durumda $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-lacunary toplanabilirdir.

İspat: $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary hemen hemen yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda (5.5) eşitliği $n = 0$ için de geçerli olacağından her bir $x \in X$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d_x(A_k) - d_x(A)|^q = 0$$

elde edilir. Bu ise $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman kuvvetli q-lacunary toplanabilir olduğunu gösterir. ■

6. KÜME DİZİLERİNİN QUASI-LACUNARY İNVARYANT YAKINSAKLIĞI

Tanım 6.1 (X, ρ) bir metrik uzay, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A) \right| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary invaryant yakınsaktır denir ve

$$WQV_{\sigma\theta} - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \overset{WQV_{\sigma\theta}}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 6.2 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary invaryant yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary invaryant yakınsaktır.

İspat: $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman lacunary invaryant yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $r_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $r > r_0$ ve her m için

$$\left| \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d_x(A_{\sigma^k(m)}) - d_x(A) \right| < \varepsilon$$

dur. Burada $m = nr$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A) \right| < \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $r \to \infty$ için limit alınırsa, n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \left| \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A) \right| = 0$$

bulunur. O halde $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary invaryant yakınsaktır. ■

Tanım 6.3 (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x\in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$WQS_{\sigma\theta}-\lim A_k=A \text{ veya } A_k\overset{WQS_{\sigma\theta}}{\longrightarrow}A$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 6.4 $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman lacunary invaryant istatistiksel yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman lacunary invaryant istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\delta>0$ verildiğinde her bir $x\in X$ ve her $\varepsilon>0$ için bir $r_0>0$ sayısı vardır öyle ki her $r>r_0$ ve her m için

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(m)})-d_x(A)|\geq\varepsilon\right\}\right|<\delta$$

dır. Burada $m=nr$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)|\geq\varepsilon\right\}\right|<\delta$$

elde edilir. $\delta>0$ keyfi olduğundan, n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

dır. Bu ise $A_k\overset{WQS_{\sigma\theta}}{\longrightarrow}A$ olduğunu gösterir. ■

Tanım 6.5 (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x\in X$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)\right|=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli quasi-lacunary invaryant yakınsaktır denir ve

$$[WQV_{\sigma\theta}]-\lim A_k=A \text{ veya } A_k \overset{[WQV_{\sigma\theta}]}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 6.6 (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Bu durumda,

$$A_k \overset{[WQV_{\sigma\theta}]}{\longrightarrow} A \Leftrightarrow A_k \overset{[WQV_{\sigma}]}{\longrightarrow} A$$

dır.

İspat: $A_k \overset{[WQV_{\sigma\theta}]}{\longrightarrow} A$ ve $\varepsilon>0$ verilmiş olsun. Bu durumda, her bir $x\in X$, $r\geq r_0$ ve $w\geq 0$ olmak üzere $nr=k_{r-1}+1+w$ için

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k=0}^{h_r-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde r_0 sayısı vardır. $p\geq h_r$ olsun. Böylece, $0\leq\theta\leq h_r$ ve α bir tamsayı olmak üzere $p=\alpha.h_r+\theta$ olarak yazılabilir. $p\geq h_r$ olduğundan $\alpha\geq 1$ dir. O halde

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)})-d_x(A)\right| &\leq \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{(\alpha+1)h_r-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)\right|\\ &= \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{\alpha}\sum_{k=jh_r}^{(j+1)h_r-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)\right|\\ &\leq \frac{1}{p}\,\varepsilon\, h_r\,(\alpha+1)\\ &\leq \frac{2\alpha h_r\varepsilon}{p}\qquad(\alpha\geq 1)\end{aligned}$$

elde edilir.

$\frac{h_r}{p} \leq 1$ için ve $\frac{\alpha h_r}{p} \leq 1$ olduğundan

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right| \leq 2\varepsilon$$

olup, sonuç olarak $A_k \overset{[WQV_\sigma]}{\longrightarrow} A$ dır.

$A_k \overset{[WQV_\sigma]}{\longrightarrow} A$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, her bir $x \in X$ ve $p > P$ için

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $P > 0$ sayısı vardır. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olduğundan $r \geq R$ iken $h_r > P$ olacak şekilde bir $R > 0$ sayısı seçilebilir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right| < \varepsilon$$

yazılabilir. Bu ise $A_k \overset{[WQV_{\sigma\theta}]}{\longrightarrow} A$ olduğunu gösterir. ■

Tanım 6.7 (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer her bir $x \in X$ ve $0 < q < \infty$ için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary invaryant yakınsaktır denir ve

$$[WQV_{\sigma\theta}]^q - \lim A_k = A \text{ veya } A_k \overset{[WQV_{\sigma\theta}]^q}{\longrightarrow} A$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 6.8 (X,ρ) bir metrik uzay ve $0 < q < \infty$ olsun. Bu durumda, boştan farklı $A, A_k \subset X$ kapalı altkümeleri için aşağıdaki önermeler sağlanır:

i. $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary invaryant yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman quasi-lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır.

ii. $\{A_k\} \in L_\infty$ ve A kümesine Wijsman quasi-lacunary invaryant istatistiksel yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary invaryant yakınsaktır.

İspat: i. $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman kuvvetli q-quasi lacunary invaryant yakınsak olduğunu kabul edelim. Her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in I_r} \left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q &= \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)|\geq\varepsilon}} \left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q \\
&\quad + \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)|<\varepsilon}} \left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q \\
&\geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)|\geq\varepsilon}} \left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q \\
&\geq \varepsilon^q \left|\left\{k \in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\right\}\right|
\end{aligned}$$

yani,

$$\sum_{k\in I_r} \left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q \geq \varepsilon^q \left|\left\{k \in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\right\}\right| \tag{6.1}$$

eşitsizliği sağlanır. (6.1) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{h_r}$ ile çarpılır ve $r \to \infty$ için limit alınırsa, kabulümüzden dolayı

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q &\geq \varepsilon^q \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
0 &\geq \varepsilon^q \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\right\}\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

dır. Bu ise $A_k \overset{WQS_{\sigma\theta}}{\longrightarrow} A$ olduğunu gösterir.

ii. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve A kümesine Wijsman quasi-lacunary invaryant istatistiksel yakınsak olsun.

$\{A_k\}$ dizisi sınırlı olduğundan her bir $x \in X$ için

$$\left|d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)\right|^q < T$$

olacak şekilde bir $0 < T < \infty$ sayısı vardır. Buradan her bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q &= \frac{1}{h_r}\Bigg(\sum_{\substack{k\in I_r\\ |d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)|\geq\varepsilon}}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q \\
&\quad + \sum_{\substack{k\in I_r\\ |d_x(A_{\sigma^k(nr)})-d_x(A)|<\varepsilon}}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q\Bigg) \\
&\leq \frac{1}{h_r}T\left|\left\{k\in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\quad + \frac{1}{h_r}\varepsilon^q\left|\left\{k\in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| < \varepsilon\right\}\right| \\
&= \frac{T}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\right\}\right| + \varepsilon^q
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yani,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q \leq \frac{T}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\right\}\right| + \varepsilon^q$$

dur. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $r \to \infty$ için limiti alınırsa

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q \\
&\qquad \leq \lim_{r\to\infty}\left(\frac{T}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\right\}\right| + \varepsilon^q\right) \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. $A_k \overset{WQS_{\sigma\theta}}{\longrightarrow} A$ olduğundan (6.2) eşitsiziğinin sağ tarafı ε^q ya eşittir. Dolayısıyla

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)\right|^q = 0$$

olup ispat tamamlanır. ■

Teorem 6.9 (X, ρ) bir metrik uzay, $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boştan farklı kapalı altkümeleri olsun. Bu durumda,

$$A_k \overset{WQS_{\sigma\theta}}{\longrightarrow} A \Leftrightarrow A_k \overset{WQS_{\sigma}}{\longrightarrow} A$$

dır.

İspat: $A_k \overset{WQS_{\sigma\theta}}{\longrightarrow} A$ ve $\delta > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda, her bir $x \in X$, $r \geq r_0$ ve $w \geq 0$ olmak üzere $nr = k_{r-1} + 1 + w$ için

$$\frac{1}{h_r}\Big|\big\{0 \leq k \leq h_r - 1 : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| \leq \delta$$

olacak şekilde r_0 sayısı vardır. $p \geq h_r$ olsun. Böylece α bir tamsayı ve t, $0 \leq t \leq h_r$ aralığında olmak üzere $p = \alpha h_r + t$ yazılabilir. $p \geq h_r$ olduğundan $\alpha \geq 1$ dir. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\Big|\big\{k \leq p-1 \quad &: \quad |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\
&\leq \frac{1}{p}\Big|\big\{k \leq (\alpha+1)h_r - 1 : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\
&= \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{\alpha}\Big|\big\{jh_r \leq k \leq (j+1)h_r - 1 : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| \\
&\leq \frac{1}{p}\,\delta\, h_r\,(\alpha+1) \\
&\leq \frac{2\alpha h_r \delta}{p}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\dfrac{\alpha h_r}{p} \leq 1$ olduğundan

$$\frac{1}{p}\Big|\big\{0 \leq k \leq p-1 : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| \leq 2\delta$$

olup, sonuç olarak $A_k \overset{WQS_{\sigma}}{\longrightarrow} A$ dır.

$A_k \overset{WQS_{\sigma}}{\longrightarrow} A$ ve $\zeta > 0$ olsun. Bu durumda, her bir $x \in X$ ve $p > P$ için

$$\frac{1}{p}\Big|\big\{k \leq p : |d_x(A_{\sigma^k(np)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| < \zeta$$

olacak şekilde bir $P > 0$ sayısı vardır. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olduğundan, $r \geq R$ iken $h_r > P$ olacak şekilde bir $R > 0$ sayısı seçilebilir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{h_r}\Big|\big\{k \in I_r : |d_x(A_{\sigma^k(nr)}) - d_x(A)| \geq \varepsilon\big\}\Big| < \zeta$$

yazılabilir. Bu ise $A_k \overset{WQS_{\sigma\theta}}{\longrightarrow} A$ olduğunu gösterir. ■

7. KAYNAKLAR

Ahmad, Z. U., Mursaleen, M. and Khan, Q. A. (1994). Invariant means and some matrix transformations. *Indian Journal of Pure Applied Mathematics*, **25:** 353-359.

Balcı, M. (2006). Analiz II. Balcı Yayınları, Ankara, Türkiye.

Banach, S. (1932). Theorie des operations linearies. Warswaza.

Baronti, M. and Papini, P. (1986). Convergence of sequences of sets, In: Methods of functional analysis in approximation theory, ISNM 76, Birkhauser, Basel 133-155.

Beer, G. (1985). On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **31:** 421–432.

Beer, G. (1989). Support and distance functionals for convex sets. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **10:** 15-36.

Beer, G. (1994). Wijsman convergence: A survey. *Set-Valued Analysis*, **2:** 77–94.

Bell, E. T. (1929). Certain invariant sequences of polinamials. *Transactions of the American Mathematical Society*, **31:** 405-421.

Boss, J. and Seydell, D. (1999). Some remarks an invariant means and almost convergence. *The Journal of Analysis*, **7:** 21-30.

Buck, R. C. (1953). Generalized asymptotic density. *American Journal of Mathematics*, **75:** 335–346.

Connor, J. S. (1988). The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences. *Analysis*, **8:** 46–63.

Das, G. and Mishra, S. K. (1983). Banach limits and lacunary strongly almost convergence. *Journal of the Orissa Mathematical Society*, **2:** 61-70.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2:** 241–244.

Freedman, A. R., Sember, J. J. and Raphael, M. (1978). Some Cesàro-type summability spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **37**(3)**:** 508–520.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5:** 301–313.

Fridy, J. A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, **160**(1)**:** 43–53.

Hardy, G. H. (1949). Divergent series. Clarendon Press, Oxford.

Hajduković, D. (2002). Quasi-almost convergence in a normed space. *Univerzitet u Beogradu. Publikacije Elektrotehničkog Fakulteta. Serija Matematika*, **13:** 36–41.

King, J. P. (1966). Almost summable sequences. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **17**(6)**:** 1219–1225.

Lechicki, A. and Levi, S. (1987). Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, **7:** 439-451.

Lucchetti, R. (1985). Convergence of sets and of projections. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, **4:** 477-483.

Lorentz, G. G. (1948). A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Mathematica*, **80:** 167–190.

Maddox, I. J. (1970). Elements of functional analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

Maddox, I. J. (1978). A new type of convergence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **83:** 61–64.

Mursaleen, M. (1979). On infinite matrices and invariant means. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **10:** 457-460.

Mursaleen, M. (1983). On some new invariant matrix methods of summability. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **34**(1)**:** 77–86.

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H. (2009). On invariant mean and statistical convergence. *Applied Mathematics Letters*, **22:** 1700–1704.

Mursaleen, M. and Alotaibi, A. (2011). Statistical lacunary summability and a Korovkin type approximation theorem. *Annali dell'Universitá di Ferrara*, **57:** 373-381.

Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H. L. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons, Inc., Fifth edition, New York.

Nuray, F. (1997). θ-almost summable sequences. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **20:** 741-744.

Nuray, F. and Rhoades, B. E. (2012). Statistical convergence of sequences of sets. *Fasciculi Mathematici*, **49:** 87–99.

Nuray, F. (2014). Quasi-invariant convergence in a normed space. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, **41**(1)**:** 1–5.

Pancaroğlu, N. and Nuray, F. (2013). On invariant statistically convergence and lacunary invariant statistical convergence of sequences of sets. *Progress in Applied Mathematics*, **5**(2)**:** 23–29.

Pancaroğlu, N. (2014). Küme dizilerinin invaryant istatistiksel ve lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklığı. Doktora Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Raimi, R. A. (1963). Invariant means and invariant matrix methods of summability. *Duke Mathematical Journal*, **30:** 81-94.

Salinetti, G. and Wets, R. J.-B. (1979). On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, **21:** 18-33.

Savaş, E. (1989). Some sequence space involving invariant means. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **31:** 1-8.

Savaş, E. (1990). On lacunary strong σ-convergence. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **21:** 359-365.

Savaş, E. and Nuray, F. (1993). On σ-statistically convergence and lacunary σ-statistically convergence. *Mathematica Slovaca*, **43:** 309–315.

Schaefer, P. (1972). Infinite matrices and invariant means. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **36:** 104–110.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *American Mathematical Monthly*, **66:** 361–375.

Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*, **30:** 139–150.

Ulusu, U. and Nuray, F. (2012). Lacunary statistical convergence of sequences of sets. *Progress in Applied Mathematics*, **4**(2)**:** 99–109.

Ulusu, U. (2013). Küme dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı. Doktora Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Volkov, I. I. (2001). Cesàro summation methods. In: Hazewinkel, M., (Eds.), Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4.

Wijsman, R. A. (1964). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **70:** 186–188.

Wijsman, R. A. (1966). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **123**(1)**:** 32–45.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Esra GÜLLE
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar, 08.07.1988
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 05373523600/egulle@aku.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise	: Afyon Süper Lisesi, (2002-2006)
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, (2007-2010)
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, (2010-2012)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2012-...

Yayınları (SCI ve Diğer)

Gülle, E. and Ulusu, U. (2017). Quasi-almost convergence of sequences of sets, *Journal of Inequalities and Special Functions*, **8**(5)**:** 59-65.

Gülle, E. and Ulusu, U. (2018). Quasi-almost lacunary statistical convergence of sequences of sets, *International Journal of Analysis and Applications*, **16**(2)**:** 222-231.

Ulusu, U., Dündar, E. and Gülle, E. (2018). $\mathcal{I}_2$-Cesàro summability of double sequences of sets, *Palestine Journal of Mathematics*, (kabul edildi).