LİNEER OLMAYAN KESİRLİ FARK DENKLEMLERİ İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru YILMAZ

Danışman
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN KESİRLİ FARK DENKLEMLERİ İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Ebru YILMAZ

Danışman
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Ebru Yılmaz tarafından hazırlanan "Lineer Olmayan Kesirli Fark Denklemleri için Salınımlılık Kriterleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 21/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

İmza

Başkan : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniv. Fen Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edebiyat Fak.

Üye : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

21/05/2018

Ebru YILMAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER OLMAYAN KESİRLİ FARK DENKLEMLERİ İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Ebru YILMAZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Kesirli mertebeden denklemler üzerinde uzun yıllardır çalışılmaktadır ve birçok bilim dalında uygulaması mevcuttur. Son yıllarda yüksek mertebeden lineer olmayan kesirli fark denklemlerinin salınımlılığını inceleyen çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu tezde Caputo fark denkleminin salınımlılığı incelenmiştir. Tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm girişe ayrılmıştır. İkinci bölümde, fark hesabı, lineer olmayan fark denklemleri ve kesirli toplam gibi bazı temel konular ele alınmış ve bu kavramlarla ilgili bilinen bazı teorem ve lemmalar da hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, aşağıdaki formda yüksek mertebeden lineer olmayan kesirli fark denklemlerinin bazı salınım kriterleri verilmiştir.

$$\Delta_*^{\alpha} x(t) - g(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) + f_1(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) = \upsilon(t)$$

$$\Delta_*^{\alpha} x(t) - g(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) + f_1(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) + f_2(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) = \upsilon(t)$$

Burada Δ_*^{α} Caputo kesirli diferansiyel fark operatörüdür, $t \in N_a$, $N_a = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$. $m-1 < \alpha \le m$ ve $m \ge 1$ olacak şekilde bir tamsayıdır. $g, f_i : [0,\infty) \times R \to R$, $i = 1,2$ ve $\upsilon : [0,\infty) \to R$ fonksiyonları t ve x'te süreklidir. Bu bölümde $m = 1$ şartı ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, yüksek mertebeden lineer olmayan kesirli fark denklemi incelenmiştir. $m-1 < \alpha \le m$ ve $m \ge 1$ olduğu durumla ilgili bazı kriterler elde edilmiştir.

2018, v + 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli fark denklemi, salınımlılık, caputo türevi

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

OSCİLLATİON CRİTERİA FOR FRACTİONAL DİFFERENCE EQUATİONS WİTH NONLİNEARİTİES

Ebru YILMAZ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Fractional equations has been studied for a long time and its applications is avaliable in many scientific branches. In many years there has been much research activity concerning the oscillaton of fractional difference equations. This thesis consists of four chapter. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, some main topics of difference calculus, theory of nonlinear difference equations, fractional sum have been given and some known theorems and lemmas concerning these concepts have also been reminded. In the third chapter, some oscillation criteria of higher order nonlinear fractional difference equations of the form

$$\Delta_*^\alpha x(t) - g(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) + f_1(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) = \upsilon(t)$$

$$\Delta_*^\alpha x(t) - g(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) + f_1(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) + f_2(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) = \upsilon(t)$$

where Δ_*^α is a Caputo like discrete fractional difference operatör, $t \in N_a$, $N_a = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$. $m-1 < \alpha \leq m$ and $m \geq 1$ is an integer, $g, f_i : [0,\infty) \times R \to R$, $i = 1,2$ and $\upsilon : [0,\infty) \to R$ are continuous with respect t and x. This chapter has $m = 1$condition. In the four chapter, we consider oscillation criteria of higher order nonlinear fractional difference equation. We obtain some oscillation criteria for $m-1 < \alpha \leq m$ and $m \geq 1$ about the equations.

2018, v + 44 pages

Keywords: Fractional difference equations, oscillation, caputo derivative

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince görüş ve önerileriyle çalışmama yön veren, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı değerli tez danışmanım Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ'a ve Arş. Grv. Tuğba YALÇIN UZUN'a teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman, her konuda bana destek veren, bugünlere ulaşmama vesile olan aileme teşekkür ederim.

Ebru YILMAZ
Afyonkarahisar, 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
Δ	Fark Operatörü
$\int$	İntegral Operatörü
$\sum$	Toplam Operatörü
Δ^{α}	Riemann- Liouville Ayrık Kesirli Farkı
$\int_a^b$	Belirli İntegral
Γ	Gamma Fonksiyonu
$t^{(n)}$	Faktöriyel Fonksiyonu
$\prod$	Çarpım Operatörü
$\frac{d}{dt}$	Türev
$\in$	Elemanıdır
N	Doğal Sayılar Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
lim	Limit
lim sup	Limit Supremum
lim inf	Limit İnfimum

1. GİRİŞ

Türev ve integral operatörleri reel sayılar üzerinde tanımlı hesaplamaların iki temel kavramıdır. Benzer şekilde, fark ve toplam operatörleri de tam sayılar üzerinde tanımlı fark hesaplamasının iki temel kavramıdır. Genellikle n bir tamsayı olmak üzere türev ve fark operatörleri n kez bir fonksiyona uygulanabilir. Bunlar da sırasıyla $d^n f(x)/dx^n$, $\Delta^n f(x)$ şeklinde tanımlanmıştır. Aslında kesirli hesap, integral ya da türev operatörlerinin mertebelerinin keyfi sayılar olabileceğini belirtir. Örneğin; bir fonksiyonun $1/2$-nci mertebeden türevi ya da $\sqrt{3}$. mertebeden integrali hesaplanabilir. Keyfi mertebeden türevler ve integraller ile ilgilenen kesirli hesap uygulamalı matematiğin bir alanıdır ve bunun uygulamaları, mühendislik, uygulamalı matematik, ekonomi ve birçok alanda görülür. Bilindiği gibi, $D = \frac{d}{dx}$ operatörünü içeren diferansiyel hesabın özellikleri ve ileri fark operatörü olarak bilinen $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ operatörünü içeren fark hesabının özellikleri arasında bir benzerlik vardır. Kesirli hesabın özellikleri ve fark kesirli hesabının özellikleri arasında da benzerlikler vardır (Sengul 2010).

İlk olarak 300 yıl önce, kesirli hesap, L'Hospital tarafından Leibnez'e gönderilen bir mektupta, L'Hospital'in "$n = 1/2$ olduğunda $d^n y / d^n x$ notasyonu ne anlama gelir? " sorusuyla gündeme gelmiştir. 30 Eylül 1695 tarihli cevapta, Leibniz "Bu paradoksun bir gün yararlı sonuçları olacaktır. " diye yazmıştır (Sengul 2010).

Sonra, Leibniz, Johann Bernoulli ile yazışarak, genel mertebenin türevlerinden bahsetti. $1/2$-nci mertebeden türevi $d^{1/2} y$ notasyonunu kullanarak gösterdi. Daha sonra kesirli türevlerden çok sayıda kaynakta bahsedilmiştir (Sengul 2010).

$D^\alpha f$ kesirli mertebeden türev literatürde yaygın olarak yer almasına rağmen kesirli mertebeden fark daha az ilgi çekmiştir. Kesirli mertebeden farka ilk kez Kuttner (1957) tarafından değinilmiştir (Sengul 2010).

a_n kompleks sayıların herhangi bir dizisi ve s herhangi bir reel sabit olmak üzere, Kuttner, s-mertebeden farkı aşağıdaki şekilde tanımladı (Sengul 2010).

$$\Delta_{a_n}^{s} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-s-1+m}{m} a_{n+m} \qquad (1.1)$$

Diaz ve Osler (1974) kesirli farkı,

$$\Delta^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x+\alpha-k) \qquad (1.2)$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1).k!}$$

şeklinde tanımlamışlardır, burada α herhangi bir reel ya da kompleks sayıdır (Sengul 2010).

Miller ve Ross (1989) kesirli mertebeden toplam ve fark operatörlerini sırasıyla aşağıdaki gibi tanımladı (Sengul 2010).

$$\Delta^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-\sigma(s))^{(\alpha-1)} f(s) \qquad (1.3)$$

$$\Delta^{\alpha} f(t) = \Delta\Delta^{-(1-\alpha)} f(t) = \Delta \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-1+\alpha} (t-\sigma(s))^{(1-\alpha)} f(s) \qquad (1.4)$$

Burada $t \equiv \alpha \pmod 1$ ve $0 < \alpha < 1$ dir.

Anastassiou (2009) Caputo ayrık kesirli farkını,

$$\Delta^{\alpha} f(t) = \Delta^{-(m-\alpha)} \Delta^{m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{s=a}^{t-m+a} (t-\sigma(s))^{(m-\alpha-1)} \Delta^{m} f(s) \qquad (1.5)$$

şeklinde tanımlamıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR ve TEOREMLER

2.1 Fark Operatörü

Tanım 2.1.1 $\mathrm{N}_a = \{a, a+1, a+2, ...\}$ ve $y : \mathrm{N}_a \to R$ olsun. Fark operatörü "Δ",

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yüksek mertebeden farklar, fark operatörünün kendisine tekrarlı olarak uygulanması ile elde edilir (Kelley ve Peterson 2004). İkinci mertebeden fark,

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(t) &= \Delta(\Delta y(t)) \\ &= \Delta(y(t+1) - y(t)) \\ &= \Delta y(t+1) - \Delta y(t) \\ &= (y(t+2) - y(t+1)) - (y(t+1) - y(t)) \\ &= y(t+2) - 2y(t+1) - y(t)\end{aligned}$$

şeklindedir.

Tümevarım kullanılarak n-inci mertebeden fark,

$$\begin{aligned}\Delta^n y(t) &= y(t+n) - ny(t+n-1) + \frac{n(n-1)}{2!} y(t+n-2) \\ &\quad + ... + (-1)^n y(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(t+n-k)\end{aligned}$$

olarak elde edilir (Charoenphon 2014).

Tanım 2.1.2 (İleri Fark Operatörü) α bir sabit olsun.

$$\Delta t^\alpha = (t+1)^\alpha - t^\alpha$$

Teorem 2.1.3 Aşağıdaki faktöriyel fonksiyonlar iyi tanımlanmış olsun.

(i) $\Delta t^{(v)} = vt^{(v-1)}$ burada Δ ileri fark operatörüdür.

(ii) $(t-\mu)t^{(\mu)} = t^{(\mu+1)}$ burada $\mu \in \mathrm{R}$ dir.

(iii) $\mu^{(\mu)} = \Gamma(\mu+1)$ burada $\mu \in R$ dir.

(iv) Eğer $t \le r$ ise, her $v > r$ için $t^{(v)} \le r^{(v)}$ dir.

(v) Eğer $0 < v < 1$ ise $t^{(\alpha v)} \le \left(t^{(\alpha)}\right)^{(v)}$ dir.

(vi) $t^{(\alpha+\beta)} = (t-\beta)^{(\alpha)} t^{(\beta)}$ dir (Charoenphon 2014).

İspat: Faktöriyel fonksiyonunun tanımına göre ispat aşağıdaki gibidir. Ve v, α ve β pozitif tamsayı olsun.

(i) Tanım 2.1.1'i kullanarak,

$$\begin{aligned}\Delta t^{(v)} &= (t+1)^{(v)} - t^{(v)} \\ &= (t+1)(t)(t-1)\ldots(t-v+2) - (t)(t-1)(t-2)\ldots(t-v+2)(t-v+1) \\ &= (t)(t-1)\ldots(t-v+2)[(t+1)-(t-v+1)] \\ &= vt^{(v-1)}\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)

$$\begin{aligned}(t-\mu).t^{(\mu)} &= (t-\mu)\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\mu)} \\ &= (t-\mu)\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\mu+1)} \\ &= (t-\mu)\frac{\Gamma(t+1)}{(t-\mu)\Gamma(t-\mu)} \\ &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-(\mu+1))} \\ &= t^{(\mu+1)}.\end{aligned}$$

(iii) $\mu^{(\mu)} = \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\mu)} = \Gamma(\mu+1)$ olduğu tanımdan açıktır.

(iv) Herhangi bir $v > r$ için $t \le r$ olsun.

Euler'in sonsuz çarpımı,

$$\Gamma(u)=\frac{1}{u}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{u}}{1+\left(\frac{u}{n}\right)}$$

şeklindedir. $t\le r$ olduğundan, $\frac{-v}{t+1}\le\frac{v}{r+1}$ yazılabilir. O halde, Euler'in sonsuz çarpımı da kullanılarak,

$$t^{(v)}=\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-v)}$$

$$=\frac{\frac{1}{t+1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{t+1}}{1+\left(\frac{t+1}{n}\right)}}{\frac{1}{t+1-v}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{t+1-v}}{1+\left(\frac{t+1-v}{n}\right)}}$$

$$=\frac{t+1-v}{t+1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{v}\frac{\left(1+\frac{t+1-v}{n}\right)}{\left(1+\frac{t+1}{n}\right)}$$

$$=\left(1-\frac{v}{t+1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{v}{n+t+1}\right)$$

$$\le\left(1-\frac{v}{r+1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{v}{n+t+1}\right)\le r^{(v)}$$

elde edilir.

(v) $\mathrm{I}\subseteq R$ üzerinde tanımlı f konveks fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f[ux+(1-u)y] &\le u\,f(x)+(1-u)f(y)\\ &\le [f(x)]^{u}+[f(y)]^{1-u}, \qquad x,y\in\mathrm{I}\ \ ve\ \ u\in[0,1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t+1-\alpha v &= t+1-\alpha v+vt-vt-v+v \\ &= vt+v-\alpha v+t+1-vt-v \\ &= v(t+1-\alpha)+(t+1)(1-v) \end{aligned}$$

olduğu için,

$$\begin{aligned} t^{(\alpha v)} &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha v)} \\ &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(v(t+1-\alpha)+(t+1)(1-v))} \end{aligned}$$

elde edilir. Gamma fonksiyonunun konveks özelliği kullanılarak,

$$\Gamma[vx+(1-v)y] \leq [\Gamma(x)]^{v}[\Gamma(y)]^{1-v}, \qquad 0<v<1 \quad için,$$

$x=t+1-\alpha$ ve $y=t+1$ alındığında,

$$\Gamma[v(t+1-\alpha)+(t+1)(1-v)] \leq [\Gamma(t+1-\alpha)]^{v}[\Gamma(t+1)]^{1-v}$$

$$\frac{1}{\Gamma[v(t+1-\alpha)+(t+1)(1-v)]} \geq \frac{1}{[\Gamma(t+1-\alpha)]^{v}[\Gamma(t+1)]^{1-v}}$$

olur. Bu eşitsizlik $\Gamma(t+1)$ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma[v(t+1-\alpha)+(t+1)(1-v)]} &\geq \frac{\Gamma(t+1)}{[\Gamma(t+1-\alpha)]^{v}[\Gamma(t+1)]^{1-v}} \\ &\geq \left[\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha)}\right]^{v} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$t^{(\alpha v)}=\left(t^{(\alpha)}\right)^{(v)}$$

olur.

(vi) $t^{(\alpha+\beta)}=\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha-\beta)}$, $\Gamma(t-\beta+1)$ ile çarpılıp bölünerek,

$$\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha-\beta)}\,\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\beta+1)}=(t-\beta)^{(\alpha)}t^{(\beta)}$$

elde edilir.

2.2 Ayrık Hesap ve Adi Hesap Arasında Bir Benzerlik

Ayrık hesabın teorisi, adi hesabın teorisine paraleldir. Kavram olarak benzerlik göstermelerine rağmen hesaplamada bazı farklılıklar vardır. Örneğin, diferansiyel operatörü “D” , fark operatörü “Δ” ile, integral operatörü “$\int$ ” , toplam operatörü “$\sum$ ” ile benzerdir (Charoenphon 2014).

Aşağıda bu kavramlar arasındaki benzerliği göstermek amacıyla Teorem 2.2.1 ve Lemma 2.2.1 verilmiştir.

Teorem 2.2.1 (Analizin Temel Teoremi)

(i) $\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)$

(ii) $d\left(\int_a^b f(t)dt\right) = f(x)$

(Elaydi 2004).

Lemma 2.2.2 Aşağıdaki durumlar sağlanır;

(i) $\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0)$

(ii) $\Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k)\right) = x(n)$

(Elaydi 2004).

Ayrık hesap ve adi hesap arasındaki benzerlik açıkça görülmektedir.

2.3 Shift Operatörü

Herhangi bir b sabiti için, E shift operatörünün k derece polinomu b^n koşuluyla,

$$p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + ... + a_k I$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} p(E)b^n &= a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + ... + a_k b^n \\ &= \left(a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + ... + a_k\right) b^n \\ &= p(b) b^n \end{aligned}$$

(Elaydi 2004).

Lemma 2.3.1 $p(E)$ polinomu ve $g(n)$ herhangi bir fark fonksiyonu ele alındığında,

$$p(E)\left(b^n g(n)\right) = b^n p(bE) g(n)$$

olur (Elaydi 2004).

2.4 Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu $\Gamma(x)$ ile gösterilen özel bir transandantal fonksiyondur ve tamsayı olmayan değerler için faktöriyel genelleştirmesi ilk kez Euler tarafından yapılmıştır (Sengul 2010).

Tanım 2.4.1 $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

şeklinde tanımlanmıştır (Diethelm 2010).

$x = 1$ için,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{z \to \infty} \int_0^z e^{-t} dt = \lim_{z \to \infty} \left[-e^{-t}\right]_0^z = \lim_{z \to \infty} \left(1 - e^{-z}\right) = 1$$

olduğu görülür (Diethelm 2010).

Teorem 2.4.2 (Γ için Fonksiyonel Denklem) Eğer $x > 0$ ise,

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

dir (Diethelm 2010).

İspat:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{z\to\infty, y\to 0+} \int_y^z t^x e^{-t} dt = \lim_{z\to\infty, y\to 0+} \left(\left[-e^{-t} t^x \right]_{t=y}^{t=z} + \int_y^z t^{x-1} e^{-t} dt \right)$$

$$= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

Teorem 2.4.3 $n \in N$ için, $\Gamma(n+1) = n!$ dir (Podlubny 1999).

İspat: Matematiksel tümvarım kullanılır. Sırasıyla, $\Gamma(1) = 1$ ve Teorem 2.3.1 kullanılarak $x = 1,2,3,...$ için,

$$\begin{aligned}
&\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1 = 1! \\
&\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\
&\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!
\end{aligned}$$

$\Gamma(n+1) = n!$ elde edilir.

Teorem 2.4.4 $n \notin Z$ ve $k \in N_0$ olsun. O halde,

$$(-1)^k \Gamma(n-k)\Gamma(k+1-n) = \Gamma(-n)(n+1)$$

dir (Diethelm 2010).

Teorem 2.4.5 (Γ için Yansıma Formülü) $0 < x < 1$ olsun.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

dir (Diethelm 2010).

Teorem 2.4.6 (Γ için Gauss Çarpım Formülü) $x \in R, -x \notin N_0$ olsun. O halde,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)....(x+n)}$$

dir (Diethelm 2010).

2.5 Faktöriyel Fonksiyonu

Faktöriyel fonksiyonu $t^{(n)}$, her $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$t^{(n)} = t(t-1)(t-2)...(t-(n-1)) = \prod_{k=0}^{n-1}(t-k) = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-n)}$$

ile tanımlanır ve Γ, Gamma fonksiyonunu belirtir (Sengul 2010).

Not : Her $\alpha > 0$ reel sayısı için, $\frac{d}{dt} t^{\alpha} = \alpha t^{\alpha - 1}$ ve ayrık hesapta $\Delta t^{(\alpha)} = \alpha t^{(\alpha-1)}$ dir. Bundan dolayı adi hesaptaki x^n ile ayrık hesaptaki $x^{(n)}$ benzerlik gösterir (Sengul 2010).

2.6 Belirsiz Toplam

Tanım 2.6.1 Reel değerli bir $f(t)$ fonksiyonu için, belirsiz toplam $\sum f(t)$ şeklinde yazılmıştır,

$$\Delta\left(\sum f(t)\right) = f(t)$$

dir (Charoenphon 2014).

Sonuç 2.6.2 $a \in R$, olmak üzere, $F(t)$ fonksiyonu $\{a, a+1, ...\}$ kümesinde tanımlanmış olsun. $f(t)$, $F(t)$'nin belirsiz toplamı ve C herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\sum F(t) = f(t) + C \,, \ \ \Delta C = 0$$

dır (Charoenphon 2014).

Teorem 2.6.3 α ve C sabitler olsun.

(i) $\sum \alpha^t = \dfrac{\alpha^t}{\alpha - 1} + C$, $\alpha \neq 1$

(ii) $\sum t^{(\alpha)} = \dfrac{t^{(\alpha+1)}}{\alpha + 1} + C$, $\alpha \neq -1$

dir (Charoenphon 2014).

Teorem 2.6.4 $F(t)$, $f(t)$'nin $[a,b]$ aralığı üzerinde belirli toplamı ve C herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\sum_{t=a}^{b} f(t) = F(t)\Big|_a^{b+1} = F(b+1) - F(a) + C\,,\ \ \Delta C = 0$$

dır (Kelley ve Peterson 2004).

İspat: $\sum_{t=a}^{b} f(t) = F(b+1) - F(a)$ olduğunu göstermeye ihtiyaç vardır. Δ, $\sum_{t=a}^{b} f(t)$ ye uygulanarak,

$$\begin{aligned}\Delta \sum_{t=a}^{b} f(t) &= \sum_{t=a}^{b+1} f(t) - \sum_{t=a}^{b} f(t)\\ &= f(b+1)\end{aligned}$$

elde edilir.

$F(b+1) - F(a)$ ya Δ uygulanarak,

$$\begin{aligned}\Delta\big(F(b+1) - F(a)\big) &= \Delta F(b+1) - \Delta F(a)\\ &= \Delta F(b+1)\\ &= f(b+1)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\Delta \sum_{t=a}^{b} f(t) = \Delta F(b+1) - F(a)$ dır. Buradan,

$$\sum_{t=a}^{b} f(t) = F(b+1) - F(a) + C\,, \quad \Delta C = 0$$

elde edilir.

2.7 Fark Operatörü İçin Çarpım ve Bölüm Kuralları

Teorem 2.7.1 (Çarpım Kuralı)

$$\Delta(f(t)g(t)) = g(t)\Delta f(t) + f(\sigma(t))\Delta g(t) = g(\sigma(t)) = g(\sigma(t))\Delta f(t) + f(t)\Delta g(t)$$

dir. Burada $\sigma(t) = t+1$ dir (Kelley ve Peterson 2004).

İspat: Tanım 2.1.1 kullanılarak, ilk eşitlik için,

$$\begin{aligned}\Delta(f(t)g(t)) &= f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t)\\ &= f(t+1)g(t+1) - f(t+1)g(t) + f(t+1)g(t) - f(t)g(t)\\ &= f(t+1)(g(t+1) - g(t)) + g(t)(f(t+1) - f(t))\\ &= f(\sigma(t))\Delta g(t) + g(t)\Delta f(t)\end{aligned}$$

elde edilir.

İkinci eşitlik için,

$$\begin{aligned}\Delta(f(t)g(t)) &= f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t)\\ &= f(t+1)g(t+1) - g(t+1)f(t) + g(t+1)f(t) - f(t)g(t)\\ &= g(t+1)(f(t+1) - f(t)) + f(t)(g(t+1) - g(t))\\ &= g(\sigma(t))\Delta f(t) + f(t)\Delta g(t)\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.7.2 (Bölüm Kuralı)

$$\Delta\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

dir. Burada $\sigma(t) = t+1$ dir (Kelley ve Peterson 2004).

İspat: Tanım 2.1.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\Delta\frac{f(t)}{g(t)} &= \frac{f(t+1)}{g(t+1)} - \frac{f(t)}{g(t)}\\ &= \frac{f(t+1)g(t) - f(t)g(t+1)}{g(t)g(t+1)}\\ &= \frac{f(t+1)g(t) + f(t)g(t) - f(t)g(t) - f(t)g(t+1)}{g(t)g(t+1)}\\ &= \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}\end{aligned}$$

elde edilir.

2.8 Tamsayı Mertebeden Toplamlar

N_0 doğal sayılar kümesini göstermek üzere, $f:\mathrm{N}_a \to R$ bir fonksiyon olsun. Burada $\mathrm{N}_a=\{a\}+\mathrm{N}_0=\{a,a+1,a+2,...\}$ $(a\in R)$ kümesini belirtir.

f fonksiyonunun n katlı belirli integrali,

$$y(t)=\int_a^t\int_a^s\int_a^{\tau_1}...\int_a^{\tau_{n-2}} f(\tau_{n-1})(d\tau_{n-1}...d\tau_2 d\tau_1 ds)$$
$$=\int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)ds\,, \qquad t\in[a,\infty) \tag{2.8.1}$$

şeklinde tanımlansın.

n-inci mertebeden başlangıç değer probleminin tek çözümü,

$$\begin{cases} y^{(n)}(t)=f(t), & t\in[a,\infty) \\ y^{(i)}(a)=0 \quad, & i=0,1,...,n-1 \end{cases}$$

dir (Kısalar 2015).

Benzer olarak, bir f ayrık fonksiyonunun n kez tekrarlanmış belirli toplamları

$$y(t)=\sum_{s=a}^{t-1}\sum_{\tau_1=a}^{s-1}...\sum_{\tau_{n-1}=a}^{\tau_{n-2}-1} f(\tau_{n-1})$$
$$=\sum_{s=a}^{t-n}\frac{\prod_{j=a}^{n-1}(t-s-1-j)}{(n-1)!} f(s),\ t\in\mathrm{N}_a \tag{2.8.2}$$

dir.

Ayrık n-inci mertebeden başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$\begin{cases} \Delta^n y(t)=f(t), & t\in\mathrm{N}_a \\ \Delta^i y(a)=0 \quad, & i=0,1,...,n-1 \end{cases}$$

dir. Bundan dolayı, (2.8.2) toplamının çekirdeği Ayrık Cauchy fonksiyonudur. Bu çekirdek,

$$(t-s-1)^{(n-1)}=\prod_{j=0}^{n-1}(t-s-1-j)$$

şeklinde tanımlanır.

$$y(a)=\Delta y(a)=...=\Delta^{n-1}y(a)=0$$

başlangıç şartlarından yararlanılarak,

$$y(a)=y(a+1)=...=y(a+n-1)=0$$

olduğu görülür.

(2.8.2) toplamından, f 'nin n-inci mertebeden toplamı $\Delta_a^{-n}f$ ile gösterilmiştir ve

$$y(t)=\left(\Delta_a^{-n}f\right)(t)=\sum_{s=a}^{t-n}\frac{(t-s-1)^{(n-1)}}{(n-1)!}f(s), \quad t\in \mathrm{N}_a$$

yazılır (Kısalar 2015).

2.9 Kesirli Toplam Operatörü ve Kesirli Fark Operatörü

Bu kesimde bazı temel tanımlar ve sonuçlar verilecektir. Bir $f(x)$ fonksiyonunun kesirli toplamı $\Delta_a^{-\alpha}f(x)$ şeklinde ve kesirli farkı da $\Delta^{\alpha}f(x)$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.9.1 a herhangi bir reel sayı ve α herhangi bir pozitif reel sayı olsun. f fonksiyonunun α. mertebeden kesirli toplamı,

$$\Delta_a^{-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a}^{t-\alpha}(t-\sigma(s))^{(\alpha-1)}f(s) \tag{2.9.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada f, $s=a \pmod 1$ için tanımlanır ve $\Delta_a^{-\alpha}f$, $t=a+\alpha \pmod 1$ için tanımlanır. Özel olarak; $\Delta_a^{-\alpha}:\mathrm{N}\rightarrow \mathrm{N}_{a+\alpha}$ tanımlanır, burada $\mathrm{N}_t=\{t,t+1,t+2,...\}$ dir (Sengul 2010).

Not : $\alpha=1$ için Tanım 2.9.1 e göre, ayrık toplam operatörü

$$\Delta_a^{-1}f(t)=\sum_{s=a}^{t-1}f(s)$$

şeklindedir (Sengul 2010).

Tanım 2.9.2 a herhangi bir reel sayı, m bir tamsayı ve α, $m-1<\alpha<m$ aralığında herhangi bir pozitif reel sayı olsun. f fonksiyonunun α. mertebeden kesirli farklı,

$$\Delta^{\alpha} f(t)=\Delta^{m}\Delta^{-(m-\alpha)} f(t)=\Delta^{m}\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{s=a}^{t-m+\alpha}(t-\sigma(s))^{(m-\alpha-1)} f(s) \qquad (2.9.2)$$

şeklinde tanımlanır (Sengul 2010).

2.9.1 Kesirli Toplamlar İçin Üs Kuralı

Kesirli toplamların üs kuralı Atıcı ve Eloe tarafından aşağıdaki gibi ispatlanmıştır ve benzer tipte toplamların hesaplanması için çok kullanışlıdır (Sengul 2010).

Teorem 2.9.1.1 f bir reel değerli fonksiyon ve $\mu,\alpha>0$ olsun. $t=m+\alpha \pmod 1$ olmak üzere, bütün t 'ler için,

$$\Delta^{-\alpha}\left[\Delta^{\mu} f(t)\right]=\Delta^{-(\mu+\alpha)} f(t)=\Delta^{-\mu}\left[\Delta^{-\alpha} f(t)\right]$$

dir (Atıcı ve Eloe 2007).

İspat: Kesirli toplamın tanımından,

$$\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\alpha} f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Delta^{-\mu}\sum_{r=0}^{t-\alpha}(t-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\sum_{s=\alpha}^{t-\mu}(t-\sigma(s))^{(\mu-1)}\sum_{r=0}^{s-\alpha}(s-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\sum_{s=\alpha}^{t-\mu}\sum_{r=0}^{s-\alpha}(t-\sigma(s))^{(\mu-1)}(s-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r)$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\alpha} f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)}\sum_{s=r+\alpha}^{t-\mu}(t-\sigma(s))^{(\mu-1)}(s-\sigma(r))^{(\alpha-1)} f(r)$$

elde edilir.

$x=s-(r+1)$ alınırsa eşitlik,

$$\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\alpha} f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)}\left(\sum_{x=\alpha-1}^{t-\sigma(r)-\mu}(t-\sigma(r)-\sigma(x))^{(\mu-1)} x^{(\alpha-1)}\right) f(r)$$

haline gelir.

Kesirli toplam operatörünün tanımından,

$$\begin{aligned}
\Delta^{-\mu}\left(\Delta^{-\alpha} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)}\left(\Delta^{-\mu}(t-\sigma(r))^{(\alpha-1)}\right) f(r) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(t-\sigma(r))^{(\alpha+\mu-1)} f(r) \\
&= \Delta^{-(\mu+\alpha)} f(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Not : f, tamsayılar kümesinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olsun. Ayrık hesapta, $\Delta\Delta^{-1} f = f$ dir. Her pozitif reel α sayısı için, bu eşitlik ayrık kesirli hesapta da geçerlidir. Ayrık kesirli farkın tanımından,

$$\Delta^{\alpha}\Delta^{-\alpha} f(x)=\Delta\Delta^{-(1-\alpha)}\Delta^{-\alpha} f(x)$$

dir. Burada $0<\alpha<1$ dir (Sengul 2010).

Bundan dolayı üs kuralı kullanılarak (Teorem 2.9.1.1),

$$\Delta\Delta^{-\alpha}\Delta^{-(1-\alpha)} f(x)=\Delta\Delta^{-1} f(x)= f(x)$$

yazılabilir (Kısalar 2015).

2.9.2 Ayrık Kesirli Hesap İçin Kuvvet Fonksiyonu

Kuvvet fonksiyonu bir faktöriyel fonksiyonun α-inci mertebeden kesirli toplamını ifade eder (Sengul 2010).

Lemma 2.9.2.1

$$\Delta^{-\alpha} t^{(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} t^{(\mu+\alpha)}$$

dir (Atıcı ve Eloe 2007).

Not : Her sabit c için, $\Delta^{\alpha} c$ sıfır değildir. Toplam operatörünün lineerlik özelliği ve kuvvet fonksiyonu kullanılarak, c sabitinin kesirli farkı,

$$\Delta\Delta^{-(1-\alpha)} c = \Delta \frac{c}{\Gamma(2-\alpha)} t^{(1-\alpha)} = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} t^{(-\alpha)}$$

bulunur, burada $0 < \alpha < 1$ dir (Sengül 2010).

2.9.3 Kesirli Toplam ve Kesirli Farkın Değişme Özelliği

Değişme özelliği, toplam ve fark operatörlerinin mertebesinin yer değiştirebileceğini ifade eder (Sengül 2010).

Teorem 2.9.3.1 $\alpha > 0$ için, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\Delta^{-\alpha} \Delta f(t) = \Delta\Delta^{-\alpha} f(t) - \frac{(t-a)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} f(a) \qquad (2.9.3).$$

Burada, f , N_a ’da tanımlanmıştır (Atıcı ve Eloe 2007).

İspat: Parçalı formülden toplam hatırlanırsa,

$$\Delta_s\left((t-s)^{(\alpha-1)} f(s)\right) = (t-\sigma(s))^{(\alpha-1)} \Delta_s f(s) - (\alpha-1)(t-\sigma(s))^{(\alpha-2)} f(s)$$

dir.

Toplam kullanılarak,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-\sigma(s))^{(\alpha-1)} \Delta_s f(s) = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-\sigma(s))^{(\alpha-2)} f(s) + \left. \frac{(t-s)^{(\alpha-1)} f(s)}{\Gamma(\alpha)} \right|_a^{t+1-\alpha}$$

$$= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-\sigma(s))^{(\alpha-2)} f(s)$$

$$+ \frac{(\alpha-1)^{(\alpha-1)} f(t+1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-\alpha)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} f(a)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \sum_{s=a}^{t-(\alpha-1)} (t-\sigma(s))^{(\alpha-2)} f(s) - \frac{(t-\alpha)^{(\alpha-1)}}{\Gamma(\alpha)} f(s)$$

yazılır. Burada,

$$\Delta\Delta^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \sum_{s=a}^{t-(\alpha-1)} (t-\sigma(s))^{(\alpha-2)} f(s)$$

dir. İstenilen eşitlik sağlanır.

2.10 Lineer Olmayan Fark Denklemleri

$k \in Z^+$ ve $N \in Z^+$ için,

$$x(n+1) - x(n) + p(n) f(x(n-k)) = 0 \qquad (2.10.1).$$

Teorem 2.10.1 Kabul edelim ki f fonksiyonu R üzerinde sürekli,

(i) $xf(x) > 0, \qquad x \neq 0,$

(ii) $\liminf_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L, \qquad 0 < L < \infty,$

(iii) $pL > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}, \qquad k \geq 1$ *ise*

$pL > 1, \qquad k = 0$ *ise* burada $p = \liminf_{n\to\infty} p(n) > 0$ dır.

Bunları sağlayan (2.10.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: $x(n)$, (2.10.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Varsayalım ki, $n \geq N$ için $x(n) > 0$ olsun. (i)'den $f(x(n)) > 0$ olur. Bundan dolayı,

$$x(n+1) - x(n) = -p(n) f(x(n-k)) < 0$$

ve böylece $x(n)$ azalandır. Bundan dolayı $\lim_{n\to\infty} x(n) = c \geq 0$ dır.

$f(c) = 0$ olduğunda ve (2.10.1) denkleminin her iki taraftan limiti alındığında (i)'den dolayı $c = 0$ olur. Bundan dolayı $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ dır. (2.10.1) denklemi $x(n)$ ile bölündüğünde ve $z(n) = x(n)/x(n+1) \geq 1$ alındığında,

$$\frac{1}{z(n)} = 1 - p(n) z(n-1) \ldots z(n-k) \frac{f(x(n-k))}{x(n-k)} \qquad (2.10.2)$$

elde edilir.

$\liminf_{n\to\infty} z(n) = r$ dir. (2.10.2) denkleminin üst limiti alınarak,

$$\frac{1}{r} \leq 1 - pLr^k$$

ya da

$$pL \leq \frac{r-1}{r^{k+1}} \tag{2.10.3}$$

elde edilir. Kolaylıkla görülür ki $h(r) = (r-1)/r^{k+1}$ fonksiyonu $r = (k+1)/k$ 'da maksimum değerini alır. Bu değer $k^k/(k+1)^{k+1}$ olur. Böylece (2.10.3) eşitsizliği,

$$pL \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

olur. Ki bu da (iii) ile çelişir (Elaydi 2004).

3. CAPUTO KESİRLİ FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde kesirli lineer olmayan fark denklemlerinin salınımlılığını incelenecektir. Bunun için aşağıdaki kesirli fark denklemleri göz önüne alınacaktır.

$$\Delta_*^{\alpha} x(t) - g(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) + f_1(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) = \upsilon(t) \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &\Delta_*^{\alpha} x(t) - g(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) + f_1(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) \\ &\quad + f_2(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) = \upsilon(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Burada, Δ_*^{α} Caputo kesirli fark operatörüdür, $t \in \mathrm{N}_{1-\alpha}$ ve $x(0) = x_0$ dır. $g, f_i : [0,+\infty] \times R \to R, i = 1, 2$ ve $\upsilon : [0,+\infty) \to R$, fonksiyonları sürekli olup $\mathrm{N}_{1-\alpha} = \{1-\alpha, 2-\alpha, \ldots\}$ dir.

Bu kesimde, kesirli fark hesaplamalarının bazı sonuçlarından bahsedilecektir.

Tanım 3.1 $\upsilon > 0$ olmak üzere, f'nin $\upsilon' inci$ mertebeden kesirli toplamı,

$$\Delta^{-\upsilon} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \sum_{s=a}^{t-\upsilon} (t-s-1)^{(\upsilon-1)} f(s)$$

şeklinde tanımlanır. Burada f fonksiyonu için $s \equiv a \mod(1)$ ve $\Delta^{-\upsilon} f$, $t \equiv (a+\upsilon) \mod(1)$ için tanımlıdır.

Ayrıca,

$$t^{(\upsilon)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\upsilon+1)}$$

şeklindedir. $\Delta^{-\upsilon} f$ kesirli toplamı N_a'da tanımlı fonksiyonları $\mathrm{N}_{a+\upsilon}$'de tanımlı fonksiyonlara dönüştürür (Marian *et al.* 2013).

Tanım 3.2 $\mu > 0$ ve $m-1 < \mu < m$, m pozitif tamsayı ve $m = \lceil \mu \rceil$. $\upsilon = m - \mu$ olarak alınırsa μ ' inci kesirli Caputo fark operatörü,

$$\Delta_*^{\mu} f(t) = \Delta^{-\upsilon}(\Delta^m f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \sum_{s=a}^{t-\upsilon} (t-s-1)^{(\upsilon-1)} (\Delta^m f)(s), \quad \forall t \in N_{a+\upsilon}$$

şeklinde tanımlanır. Burada Δ^m operatörü $m' inci$ mertebeden ileri fark operatörü,

$$\left(\Delta^m f\right)(s)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\, f(s+k)$$

şeklindedir (Marian *et al.* 2013).

Teorem 3.3 $\mu>0$ ve $m-1<\mu<m$, m pozitif bir tamsayı ve $m=\lceil \mu \rceil$, $\upsilon=m-\mu$ olsun. Bu durumda,

$$f(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{(k)}}{k!}\Delta^k f(a)+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{s=a+\upsilon}^{t-\mu}(t-s-1)^{(\mu-1)}\Delta_*^{\mu} f(s)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a\in Z^+=\{0,1,2,...\}$ olmak üzere f, N_a üzerinde tanımlıdır.

Özellikle, $0<\mu<1$ ve $a=0$ olduğunda f aşağıdaki gibi olur (Marian *et al.* 2013).

$$f(t)=f(0)+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{s=1-\mu}^{t-\mu}(t-s-1)^{(\mu-1)}\Delta_*^{\mu} f(s)$$

Lemma 3.4 (Taylor Fark Formülü) $x(t)\colon N\to R$ olarak tanımlanan $x(t)$ fonksiyonu (3.1) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür ancak ve ancak $x(t)$ fonksiyonu,

$$x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]$$

$$0<\alpha\le 1,\quad x(0)=x_0 \text{ için} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanan Taylor Fark Formülünün bir çözümüdür (Marian *et al.* 2013).

İspat: Kabul edilsin ki $x(t)$, $t\in N$ için (3.1) denkleminin bir çözümü olmak üzere,

$$\Delta_*^{\alpha}x(t)=v(t)+g(t+\alpha-1,x(t+\alpha-1))-f_1(t+\alpha-1,x(t+\alpha-1)),\quad t\in N_{1-\alpha}$$

şeklindedir.

O halde $x(t)$ çözümü,

$$x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]$$

olarak yazılabilir.

Diğer taraftan, Teorem 3.3'ten

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \Delta_*^{\alpha} x(s)$$

olduğu görülür.

Yukarıdaki iki denklemden,

$$x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[v(s) + g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) \right]$$
$$= x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \Delta_*^{\alpha} x(s)$$

bulunur.

$x(0) = x_0$ olduğundan,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\Delta_*^{\alpha} x(s) - \left(v(s) + g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) \right) \right] = 0$$

elde edilir.

Bu durumda $t = 1, 2, \ldots$ olmak üzere ve $t \in N_{1-\alpha}$ için,

$$\Delta_*^{\alpha} x(s) = v(s) + g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1))$$

bulunur. Görülür ki $x(t)$**,** (3.1) denkleminin bir çözümüdür.

Lemma 3.5 $X \geq 0$ ve $Y \geq 0$ olmak üzere $\lambda \geq \gamma > 0$ için**,**

$$\gamma X^{\lambda} + (\lambda - \gamma) Y^{\lambda} - \lambda X^{\gamma} Y^{\lambda-\gamma} \geq 0 \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır (Marian *et al.* 2013).

Aşağıda verilen teoremlerin ispatında kullanılmak üzere bazı şartlar göz önüne alınacaktır.

$$x f_i(t, x) > 0, \quad (i = 1, 2), \quad x \neq 0, \quad t \geq t_0 \tag{3.5}$$

$$|g(t,x)| \leq |p(t)| |x|^{\gamma}, \quad |f_1(t,x)| \geq |q_1(t)| |x|^{\lambda} \ ve \ |f_2(t,x)| \geq |q_2(t)| |x|^{\mu}, \quad x \neq 0, \ t \geq t_0 \tag{3.6}$$

olduğu kabul edilecektir. Burada, $p, q_1, q_2 \in C[0, +\infty)$ ve $\lambda, \gamma > 0$ reel sayılardır.

Teorem 3.6 Eğer,

$$\lim_{t\to\infty} \inf \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} v(s) = -\infty \tag{3.7}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} \sup \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} v(s) = \infty \tag{3.8}$$

şartları sağlanıyorsa (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Marian *et al.* 2013).

İspat: $g = 0$ olmak üzere $x(t)$**,** (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Yani $T > t_0$ yeterince büyük bir pozitif sayı ve $t \geq T$ için $x(t) > 0$ olsun. Taylor Fark denkleminden,

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[v(s) + g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) \right]$$

formülü elde edilir.

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $\Gamma(\alpha)$ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)x(t) &= \Gamma(\alpha)x(0) \\ &+ \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[v(s) + g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) \right]\end{aligned} \tag{3.9}$$

denklemi bulunur. Eğer,

$$F(t) = v(t) + g(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) - f_1(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1))$$

olarak tanımlanırsa (3.9) denklemi,

$$\Gamma(\alpha)x(t) = \Gamma(\alpha)x(0) + \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} F(t)$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan,

$$\Gamma(\alpha)x(t) = \Gamma(\alpha)x_0 + \sum_{s=1-\alpha}^{T-1-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} F(s) + \sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} F(s), \qquad t \geq T$$

elde edilir. Eğer,

$$c(T) = \Gamma(\alpha)x_0 + \sum_{s=1-\alpha}^{T-1-\alpha} \left(\frac{1}{t-s-1} \right)^{(1-\alpha)} |F(s)|$$

şeklinde tanımlanırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $t \geq T$ için yukarıdaki eşitlik,

$$\Gamma(\alpha)x(t) \leq c(T) + \sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}v(s), \tag{3.10}$$

olarak yazılabilir.

(3.10)'un her iki tarafının $t \to \infty$ iken limiti alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = M < \infty, \qquad t \geq T$$

olduğu görülür. Bu sonuçlar (3.7) ile çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.7 Eğer,

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+g_1(s)] = -\infty \tag{3.11}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+g_1(s)] = \infty \tag{3.12}$$

şartları sağlanıyorsa (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Burada,

$$g_1(s) = (\lambda-\gamma)\lambda^{\lambda/(\gamma-\lambda)}\gamma^{\gamma/(\lambda-\gamma)}p^{\lambda/(\lambda-\gamma)}q_1^{\gamma/(\gamma-\lambda)} \tag{3.13}$$

olarak tanımlanmıştır (Marian *et al.* 2013).

İspat: $x(t)$ (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Yani $t \geq T > t_0$ için $x(t) > 0$ olsun. Taylor Fark denkleminden,

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1))]$$

denklemi elde edilir.

Yukarıdaki denklemin her iki tarafı $\Gamma(\alpha)$ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)x(t) &= \Gamma(\alpha)x(0)\\ &+ \sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1))]\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Elde edilen bu eşitlik,

$$\Gamma(\alpha)x(t)=\Gamma(\alpha)x(0)$$
$$+\sum_{s=1-\alpha}^{T-1-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]$$
$$+\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan,

$$\Gamma(\alpha)x(t)\leq\Gamma(\alpha)x_0+\sum_{s=1-\alpha}^{T-1-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}|F(s)|+\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}v(s)$$

eşitsizliği elde edilir.

O halde,

$$c(T)=\Gamma(\alpha)x_0+\sum_{s=1-\alpha}^{T-1-\alpha}\left(\frac{1}{t-s-1}\right)^{(1-\alpha)}|F(s)|,\qquad t\geq T$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\Gamma(\alpha)x(t)\leq c(T)+\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}v(s)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.6) şartları kullanılırsa,

$$\Gamma(\alpha)x(t)\leq c(T)+\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\upsilon(s)+p(s)x^{\gamma}-q_1(s)x^{\lambda}\right] \tag{3.14}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.5'den,

$$X=\gamma^{-1/\lambda}q_1^{1/\lambda}x,\qquad\qquad Y=\lambda^{1/(\gamma-\lambda)}\gamma^{\gamma/\lambda(\lambda-\gamma)}p^{1/(\lambda-\gamma)}q_1^{\gamma/\lambda(\gamma-\lambda)}$$

olmak üzere,

$$pX^{\gamma}-q_1X^{\lambda}=\lambda\left(\gamma^{-\gamma/\lambda}q_1^{\gamma/\lambda}x^{\gamma}\right)\left(\lambda^{-1}\gamma^{\gamma/\lambda}pq_1^{-\gamma/\lambda}\right)-\gamma\left(\gamma^{-1}q_1x^{\lambda}\right)$$

$$=\lambda X^{\gamma}Y^{\lambda-\gamma}-\gamma X^{\lambda}$$

$$\leq(\lambda-\gamma)Y^{\lambda}=g_1(t)$$

elde edilir. Buradan,

$$\Gamma(\alpha)x(t)\leq c(T)+\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g_1(s)\right],\qquad t\geq T$$

bulunur. O halde,

$$\lim_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)x(t)\le \lim_{t\to\infty} c(T)+\lim_{t\to\infty}\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+g_1(s)], \qquad t\ge T$$

olacağından ve Teorem (3.6) nın ispatından $\lim_{t\to\infty} c(T)=M$ olduğu görülür.

Bu durumda,

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+g_1(s)]=\lim_{t\to\infty}\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}\left(\frac{1}{t-s-1}\right)^{(1-\alpha)}[v(s)+g_1(s)]=0$$

$$0\le \lim_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)x(t)\le M$$

olduğu görülür ki bu da (3.11) ile çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.8 Eğer,

$$\liminf_{t\to\infty}\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+g_2(s)]=-\infty\,, \tag{3.15}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty}\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s)+g_2(s)]=\infty\,, \tag{3.16}$$

şartları sağlanıyorsa (3.2) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Burada,

$$\begin{aligned} g_2(s)&=(\lambda-\gamma)\lambda^{\lambda/(\gamma-\lambda)}\gamma^{\gamma/(\lambda-\gamma)}\delta^{\lambda/(\lambda-\gamma)}p^{\lambda/(\lambda-\gamma)}q_1^{\gamma/(\gamma-\lambda)}\\ &+(\mu-\gamma)\mu^{\mu/(\gamma-\mu)}\gamma^{\gamma/(\mu-\gamma)}(1+\delta)^{\mu/(\mu-\gamma)}p^{\mu/(\mu-\gamma)}q_2^{\gamma/(\gamma-\mu)} \end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak tanımlanmıştır (Marian *et al.* 2013).

İspat: $x(t)$ (3.2) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Yani $t\ge T>t_0$ için $x(t)>0$ olsun. Taylor Fark denkleminden,

$$\begin{aligned} x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}&[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\\ &-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_2(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))] \end{aligned}$$

denklemi elde edilir.

Bu durumda denklemin her iki tarafı $\Gamma(\alpha)$ ile çarpıldığında,

$$\Gamma(\alpha)x(t)=\Gamma(\alpha)x_0+\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\big[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))$$
$$-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_2(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\big]$$

denklemi elde edilir. Ve bu denklem (3.6) şartları kullanılarak,

$$\Gamma(\alpha)x(t)\le\Gamma(\alpha)x_0+\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\upsilon(s)+p(s)x^{\gamma}-q_1(s)x^{\lambda}-q_2(s)x^{\mu}\right]$$

eşitsizliği şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\Gamma(\alpha)x(t)\le\Gamma(\alpha)x_0+\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\upsilon(s)+\delta p(s)x^{\gamma}-q_1(s)x^{\lambda}+(1-\delta)p(s)x^{\gamma}-q_2(s)x^{\mu}\right]$$

yazılabilir.

Bu eşitsizlikten,

$$\Gamma(\alpha)x(t)\le\Gamma(\alpha)x_0+\sum_{s=1-\alpha}^{T-1-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\upsilon(s)+\delta\, p(s)x^{\gamma}-q_1(s)x^{\lambda}+(1-\delta)p(s)x^{\gamma}-q_2(s)x^{\mu}\right]$$
$$+\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\upsilon(s)+\delta\, p(s)x^{\gamma}-q_1(s)x^{\lambda}+(1-\delta)p(s)x^{\gamma}-q_2(s)x^{\mu}\right] \tag{3.18}$$

elde edilir.

$X_1,X_2\ge 0$ ve $Y_1,Y_2\ge 0$ olmak üzere,

$$X_1=\gamma^{-1/\lambda}q_1^{1/\lambda}x$$

$$Y_1=\lambda^{1/(\gamma-\lambda)}\gamma^{\gamma/(\lambda(\lambda-\gamma))}\delta^{1/(\lambda-\gamma)}p^{1/(\lambda-\gamma)}q_1^{\gamma/(\lambda(\gamma-\lambda))}$$

ve

$$X_2=\gamma^{-1/\mu}q_2^{1/\mu}x$$

$$Y_2=\mu^{1/(\gamma-\mu)}\gamma^{\gamma/(\mu(\mu-\gamma))}(1+\delta)^{1/(\mu-\gamma)}p^{1/(\mu-\gamma)}q_1^{\gamma/(\mu(\gamma-\mu))}$$

şeklinde tanımlansın. Lemma 3.5 kullanılarak,

$$\delta px^{\gamma}-q_1x^{\lambda}=\lambda\left(\gamma^{-1/\lambda}q_1^{1/\lambda}x\right)^{\gamma}\left(\lambda^{1/(\gamma-\lambda)}\gamma^{\gamma/(\lambda(\lambda-\gamma))}\delta^{1/(\lambda-\gamma)}p^{1/(\lambda-\gamma)}q_1^{\gamma/(\lambda(\gamma-\lambda))}\right)^{\lambda-\gamma}-\gamma\left(\gamma^{-1/\lambda}q_1^{1/\lambda}x\right)^{\lambda}$$
$$=\lambda X_1^{\gamma}Y_1^{\lambda-\gamma}-\gamma X_1^{\lambda}\le(\lambda-\gamma)Y_1^{\lambda}$$

$$
\begin{aligned}
(1+\delta)px^{\gamma}-q_2x^{\mu} &= \mu\left(\gamma^{-1/\mu}q_2^{1/\mu}x\right)^{\gamma}\left(\mu^{1/(\gamma-\mu)}\gamma^{\gamma/(\mu(\mu-\gamma))}(1+\delta)^{1/(\mu-\gamma)}p^{1/(\mu-\gamma)}q_1^{\gamma/(\mu(\gamma-\mu))}\right)^{\mu-\gamma}-\gamma\left(\gamma^{-1/\mu}q_2^{1/\mu}x\right)^{\mu} \\
&= \mu X_2^{\gamma}Y_2^{\mu-\gamma}-\gamma X_2^{\mu}\le(\mu-\gamma)Y_2^{\mu}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitsizliklerden (3.18),

$$
\Gamma(\alpha)x(t)\le c(T)+\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\upsilon(s)+(\lambda-\gamma)Y_1^{\lambda}+(\mu-\gamma)Y_2^{\mu}\right] \tag{3.19}
$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$
c(t)=\Gamma(\alpha)x_0+\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}\left(\frac{1}{t-s-1}\right)^{(1-\alpha)}\left[\upsilon(s)+\delta p(s)x^{\gamma}-q_1(s)x^{\lambda}+(1-\delta)p(s)x^{\gamma}-q_2(s)x^{\mu}\right]
$$

şeklinde tanımlanmıştır. O halde,

$$
\Gamma(\alpha)x(t)\le c(T)+\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\upsilon(s)+g_2(s)\right]
$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının $t\to\infty$ iken limiti alınırsa,

$$
\lim_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)x(t)\le\lim_{t\to\infty}c(T)+\lim_{t\to\infty}\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g_2(s)\right]
$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten,

$$
\lim_{t\to\infty}c(T)=\lim_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)x_0+\lim_{t\to\infty}\sum_{s=1-\alpha}^{t-\alpha}\left(\frac{1}{t-s-1}\right)^{(1-\alpha)}\left[\upsilon(s)+\delta p(s)x^{\gamma}-q_1(s)x^{\lambda}+(1-\delta)p(s)x^{\gamma}-q_2(s)x^{\mu}\right]
$$

$$
\lim_{t\to\infty}c(T)=M
$$

ve

$$
\lim_{t\to\infty}\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g_2(s)\right]=\lim_{t\to\infty}\sum_{s=T-\alpha}^{t-\alpha}\left(\frac{1}{t-s-1}\right)^{(1-\alpha)}\left[v(s)+g_2(s)\right]=0
$$

bulunur.

Bu durumda,

$$
0\le\lim_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)x(t)\le M
$$

sonucu (3.15) ile çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4. LİNEER OLMAYAN KESİRLİ FARK DENKLEMLERİ İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Bu bölümde yüksek mertebeden kesirli lineer olmayan fark denklemlerin salınımlılığı incelenecektir. Bunun için aşağıdaki kesirli fark denklemleri göz önüne alınacaktır.

$$\Delta_*^{\alpha} x(t) - g(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) + f_1(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) = \upsilon(t) \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\Delta_*^{\alpha} x(t) &- g(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) + f_1(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) \\ &+ f_2(t+\alpha-1, x(t+\alpha-1)) = \upsilon(t)\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\Delta_*^{k} x(t)\Big|_{t=a} = x_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots,m-1$$

Burada, Δ_*^{α} Caputo kesirli fark operatörüdür, $t \in \mathrm{N}_a$, $m-1 < \alpha \le m$ dır. $g, f_i : [0,+\infty] \times R \to R, i = 1, 2$ ve $\upsilon : [0,+\infty) \to R$, t ve x de sürekli olup $\mathrm{N}_a = \{a, a+1, a+2 \ldots\}$ dir.

Tanım 4.1 $\mu > 0$ ve bir tamsayı değil, $m-1 < \mu < m$, m pozitif tamsayı ve $m = \lceil \mu \rceil$, $\upsilon = m - \mu$ olarak tanımlansın, $\Delta^k f(a) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots,m-1$ için ve f, N_a üzerinde tanımlıdır $a \in Z$. Bu şartlarla,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} \Delta^k f(a) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{s=a+\upsilon}^{t-\mu} (t-s-1)^{(\mu-1)} \Delta_*^{\mu} f(s), \quad \forall t \in N_{a+m}$$

elde edilir (Anastassiou 2009).

Teorem 4.2 Eğer,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-m)} \sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} v(s) = -\infty \tag{4.3}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(1-m)} \sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} v(s) = \infty \tag{4.4}$$

şartları sağlanıyorsa (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: $g = 0$ olmak üzere $x(t)$, (4.1) denkleminin salınımlı olmayan çözümü olsun. Farz edelim ki $T_1 > t_0$, yeterince büyük pozitif bir sayı olsun $t > T_1$ için $x(t) > 0$ dır.

Teorem 3.3'e göre Taylor Fark denklemi,

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{(k)}}{k!}\Delta^k x(a)$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]$$

olarak elde edilir.

$$F(s)=v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))$$

olarak tanımlandığında $x(t)$ denklemi,

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{(k)}}{k!}\Delta^k x(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}F(s)$$

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{(k)}}{k!}\Delta^k x(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}F(s)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}F(s)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda bu denklemin her iki tarafı $\Gamma(\alpha)$ ile çarpıldığında,

$$\Gamma(\alpha)x(t)=\Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{(k)}}{k!}\Delta^k x(a)+\sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}F(s)+\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}F(s)$$

elde edilir.

O halde,

$$\Phi(t)=\Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{(k)}}{k!}\Delta^k x(a)=\Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{(k)}}{k!}x_k \tag{4.5}$$

ve

$$\Psi(t,T_1)=\sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}F(s), \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\Gamma(\alpha)x(t)=\Phi(t)+\Psi(t,T_1)+\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}F(s)$$

elde edilir.

$F(s)$'nin tanımı kullanılarak,

$$F(s)=v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\leq \upsilon(s)$$

yazılabilir.

Yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\Gamma(\alpha)x(t)\leq \Phi(t)+\Psi(t,T_1)+\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\upsilon(s)$$

elde edilir.

Bu durumda eşitsizliğin her iki tarafı $t^{(1-\alpha)}$ ile çarpıldığında,

$$0<t^{(1-m)}\Gamma(\alpha)x(t)\leq t^{(1-m)}\Phi(t)+t^{(1-m)}\Psi(t,T_1)+t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\upsilon(s) \qquad (4.7)$$

bulunur.

3. bölümde yapılan çalışma sadece $0<\alpha\leq 1$ için yapılmıştır. Bu bölümde $m-1<\alpha\leq m$ olarak genelleştirilmiş hali inceleneceği için, $T_2>T_1$ alarak $0<\alpha\leq 1$ ve $\alpha>1$ şeklinde iki ayrı durumda incelenecektir;

i. $0<\alpha\leq 1$ olsun.
$t>T_2$ ve $m=1$ için $\Phi(t)=x(a)$ elde edilir.

$$\left|t^{(1-m.)}\Phi(t)\right|=\left|t^{(1-m)}x(a)\right|=x_0 \qquad (4.8)$$

ve

$$\left|t^{(1-m.)}\Psi(t,T_1)\right|=\left|t^{(1-m)}\sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]\right|$$

$$\leq\sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha}\left(\frac{1}{t-s-1}\right)^{(1-\alpha)}\left|v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right| \qquad (4.9)$$

$$\leq\sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha}\left(\frac{1}{T_2-s-1}\right)^{(1-\alpha)}|\upsilon(s)|=c(T_1,T_2), \qquad t\geq T_2$$

şeklinde yazılabilen (4.8) ve (4.9) kullanılarak, (4.7) eşitsizliği,

$$0 < t^{(1-m)}\Gamma(\alpha)x(t) \leq x_0 + c(T_1, T_2) + \sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha} \left(\frac{1}{t-s-1} \right)^{(1-\alpha)} \upsilon(s)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda eşitsizlik,

$$\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha} \left(\frac{1}{t-s-1} \right)^{(1-\alpha)} \upsilon(s) > -[x_0 + c(T_1, T_2)] \qquad \mathrm{t} \geq \mathrm{T}_2 \text{ için} \tag{4.10}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha} \left(\frac{t}{t-s-1} \right)^{(1-\alpha)} \upsilon(s) > -[x_0 + c(T_1, T_2)] > -\infty \tag{4.11}$$

olduğu görülür.

Eşitsizliğin her iki tarafının $t \to \infty$ iken limiti alındığında (4.3) ile çelişki elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Yani $x(t)$ her zaman pozitif değildir. $x(t) < 0$ olduğu durumda da benzer şekilde çelişki elde edilerek ispat yapılır.

ii. $\alpha > 1$ ve $m-1 < \alpha \leq m$ olsun,

$$\begin{aligned}
\left| t^{(1-m.)}\Phi(t) \right| &= \left| t^{(1-m)}\Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} x_k \right| \\
&\leq \Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|x_k|(t-a)^{(k)}}{k!t^{(m-1)}} \\
&\leq \Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|x_k|(t-a)^{(k)}}{k!(t-a)^{(m-1)}} \\
&\leq \Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|x_k|(t-a)^{(k-m+1)}}{k!} \\
&\leq \Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|x_k|}{k!(t-a)^{(m-1-k)}} \\
&\leq \Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|x_k|}{k!} \cdot \left(\frac{1}{T_2 - a} \right)^{(m-1-k)} \\
&= c_1(T_2), \qquad t \geq T_2 \quad \textit{için}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ve

$$\left|t^{(1-m.)}\Psi(t,T_1)\right| = \left|t^{(1-m)}\sum_{s=a+\upsilon}^{T-1-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]\right|$$

$$\le \sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha} t^{(1-m)}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left|v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right|$$

$$\le \sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha} \frac{(t-s-1)^{(\alpha-1)}}{t^{(m-1)}}\left|v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right|$$

$$\le \sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha} \left(\frac{t-s-1}{t}\right)^{(\alpha-1)}\left|v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right|$$

$$\le \sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha} \left(\frac{T_1-s-1}{T_1}\right)^{(\alpha-1)}\left|v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right|$$

$$\le \sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha}|v(s)| = c_2(T_1), \qquad t \ge T_1 \text{ için} \tag{4.13}$$

elde edilir.

(4.12) ve (4.13) eşitsizliklerinde bulunan sonuçlar (4.7) eşitsizliğinde yerine yazıldığında,

$$0 < c_1(T_2)+c_2(T_1)+t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\upsilon(s)$$

elde edilir. O halde eşitsizlik,

$$0 < c_1(T_2)+c_2(T_1)+t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\upsilon(s)$$

$$t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}v(s) \ge -[c_1(T_2)+c_2(T_1)]$$

olarak yazılabilir.

Buradan,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}v(s) \ge -[c_1(T_2)+c_2(T_1)] > -\infty$$

olduğu görülür.

Eşitsizliğin her iki tarafının $t \to \infty$ iken limiti alındığında (4.3) ile çelişki elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Yani $x(t)$ her zaman pozitif değildir. $x(t) < 0$ olduğu durumda da benzer şekilde ispat yapılır.

Teorem 4.3 Eğer,

$$\lim_{t\to\infty} \inf\ t^{(1-m)} \sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s) + g_1(s)] = -\infty \tag{4.14}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} \sup t^{(1-m)} \sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s) + g_1(s)] = \infty \tag{4.15}$$

şartlarını sağlanıyorsa (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Burada,

$$g_1(s) = (\lambda - \gamma)\lambda^{\lambda/(\gamma-\lambda)} \gamma^{\gamma/(\lambda-\gamma)} p^{\lambda/(\lambda-\gamma)} q_1^{\gamma/(\gamma-\lambda)} \tag{4.16}$$

olarak tanımlanmıştır.

İspat: $x(t)$ (4.1) denkleminin salınımlı olmayan çözümü olsun, yani $t \geq T > t_0$ için $x(t) > 0$ olsun. Taylor Fark denkleminden,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} \Delta^k x(a)$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s) + g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1))]$$

elde edilir.

Bu durumda bu denklemin her iki tarafı $\Gamma(\alpha)$ ile çarpıldığında,

$$\Gamma(\alpha)x(t) = \Gamma(\alpha) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} \Delta^k x(a)$$

$$+ \sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} [v(s) + g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1))]$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) denklemleri yukarıdaki eşitlikten,

$$\Gamma(\alpha)x(t)=\Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^{(k)}}{k!}\Delta^k x(a)$$

$$+\sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]$$

$$+\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]$$

$$\le\Phi(t)+\Psi(t,T_1)+\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\upsilon(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]$$

(4.17)

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda (3.6) şartlarından,

$$\left[v(s)+g(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))-f_1(s+\alpha-1,x(s+\alpha-1))\right]\le\left[v(s)+p(s)x^{\gamma}(s)-q_1(s)x^{\lambda}(s)\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

O halde,

$$\Gamma(\alpha)x(t)\le\Phi(t)+\Psi(t,T_1)+\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[\upsilon(s)+p(s)x^{\gamma}(s)-q_1(s)x^{\lambda}(s)\right] \qquad (4.18)$$

olur.

Lemma 3.5 kullanılarak X ve Y,

$$X=\gamma^{-1/\lambda}q_1^{1/\lambda}$$

$$Y=\lambda^{1/(\gamma-\lambda)}\gamma^{\gamma/\lambda(\lambda-\gamma)}p^{1/(\lambda-\gamma)}q_1^{\gamma/\lambda(\gamma-\lambda)} \qquad (4.19)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}pX^{\gamma}-q_1X^{\lambda}&=\lambda\left(\gamma^{-\gamma/\lambda}q_1^{\gamma/\lambda}x^{\gamma}\right)\left(\lambda^{-1}\gamma^{\gamma/\lambda}pq_1^{-\gamma/\lambda}\right)-\gamma\left(\gamma^{-1}q_1x^{\lambda}\right)\\&=\lambda X^{\gamma}Y^{\lambda-\gamma}-\gamma X^{\lambda}\le(\lambda-\gamma)Y^{\lambda}=g_1(t) \qquad (4.20)\end{aligned}$$

bulunur.

(4.20) eşitsizliği (4.18)'de yerine yazılırsa,

$$\Gamma(\alpha)x(t) \leq \Phi(t) + \Psi(t,T_1) + \sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[\upsilon(s) + g_1(s)] \tag{4.21}$$

elde edilir.

Elde edilen eşitsizliğin her iki tarafı $t^{(1-m)}$ ile çarpıldığında,

$$t^{(1-m)}\Gamma(\alpha)x(t) \leq t^{(1-m)}\Phi(t) + t^{(1-m)}\Psi(t,T_1) + t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[\upsilon(s) + g_1(s)] \tag{4.22}$$

elde edilir.

O halde bu eşitsizlik de,

$$t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[\upsilon(s) + g_1(s)] \geq -\left[t^{(1-m)}\Phi(t) + t^{(1-m)}\Psi(t,T_1)\right] \tag{4.23}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.2'nin ispatında olduğu gibi $T_2 > T_1$ kabul edilip $0 < \alpha \leq 1$ ve $\alpha > 1$ durumları aşağıda sırasıyla incelenecektir.

i. $0 < \alpha \leq 1$ durumu ele alınsın. Teorem 4.2'nin ispatında elde edilen aşağıdaki ifadeler,

$$\left|t^{(1-m.)}\Phi(t)\right| = x_0 \text{ ve } \left|t^{(1-m)}\Psi(t,T_1)\right| \leq c(T_1,T_2)$$

(4.23)'te yerlerine yazıldığında,

$$t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s) + g_1(s)] \geq -[x_0 + c(T_1,T_2)]$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin her iki tarafının $t \to \infty$ iken limiti alındığında,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s) + g_1(s)] \geq -[x_0 + c(T_1,T_2)] > -\infty \tag{4.24}$$

bulunur. Bu sonuç (4.14) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Yani $x(t)$ her zaman pozitif değildir. $x(t) < 0$ olduğu durumda da benzer şekilde çelişki elde edilir.

ii. $\alpha > 1$ olsun. $m \geq 2$ için ispata başlandığında Teorem 4.2'nin ispatında elde edilen aşağıdaki eşitsizlikler,

$$\left|t^{(1-m.)}\Phi(t)\right| \leq c_1(T_2) \qquad \text{ve} \qquad \left|t^{(1-m.)}\Psi(t,T_1)\right| \leq c_2(T_1)$$

(4.23)'te yerlerine yazıldığında,

$$t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g_1(s)\right] \geq -\left[c_1(T_2)+c_2(T_1)\right]$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin her iki tarafının $t \to \infty$ iken limiti alındığında,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g_1(s)\right] \geq -\left[c_1(T_2)+c_2(T_1)\right] > -\infty \tag{4.25}$$

elde edilir. Yani bu sonuç (4.14) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $x(t) < 0$ olduğu durumda benzer şekilde çelişki elde edilir.

Teorem 4.4 Eğer, $\lambda = 1$ ve $\gamma < 1$ için,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-m)}\sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g_2(s)\right] = -\infty\,, \tag{4.26}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{(1-m)}\sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}\left[v(s)+g_2(s)\right] = \infty\,, \tag{4.27}$$

şartları sağlanıyorsa (4.2) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Burada,

$$\begin{aligned} g_2(s) &= (\lambda-\gamma)\lambda^{\lambda/(\gamma-\lambda)}\gamma^{\gamma/(\lambda-\gamma)}\delta^{\lambda/(\lambda-\gamma)}p^{\lambda/(\lambda-\gamma)}q_1^{\gamma/(\gamma-\lambda)} \\ &\quad + (\mu-\gamma)\mu^{\mu/(\gamma-\mu)}\gamma^{\gamma/(\mu-\gamma)}(1+\delta)^{\mu/(\mu-\gamma)}p^{\mu/(\mu-\gamma)}q_2^{\gamma/(\gamma-\mu)} \end{aligned} \tag{4.28}$$

olarak tanımlanmıştır.

İspat: $x(t)$ (4.2) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Kabul edilsin ki yeterince büyük $T_1 > t_0$ için $t > T_1 > t_0 > 0$ olmak üzere $x(t) > 0$ olsun. Teorem 3.3'e göre Taylor Fark denklemi,

$$
\begin{aligned}
x(t) = &\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} \Delta^k x(a) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[v(s) + g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) \right. \\
&\left. - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1) - f_2(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1))) \right]
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Buradan,

$$F(s) = v(s) + g(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_1(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1)) - f_2(s+\alpha-1, x(s+\alpha-1))$$

şeklinde tanımlanır.

Bu durumda Taylor Fark denklemi,

$$\Gamma(\alpha) x(t) = \Gamma(\alpha) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} \Delta^k x(a) + \sum_{s=a+\upsilon}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} F(s)$$

şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\Gamma(\alpha) x(t) = \Gamma(\alpha) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} \Delta^k x(a) + \sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} F(s) + \sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} F(s) \tag{4.29}$$

elde edilir.

Diğer taraftan,

$$\Phi(t) = \Gamma(\alpha) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} \Delta^k x(a)$$

ve

$$\Psi(t, T_1) = \sum_{s=a+\upsilon}^{T_1-1-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} F(s)$$

şeklinde tanımlanırsa (4.29) denklemi,

$$\Gamma(\alpha) x(t) = \Phi(t) + \Psi(t, T_1) + \sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} F(s)$$

şeklinde yazılabilir. (3.6) da verilen eşitsizlikler kullanılarak,

$$F(s) \le \left[\upsilon(s) + \delta p(s) x^{\gamma} - q_1(s) x^{\lambda} + (1-\delta) p(s) x^{\gamma} - q_2(s) x^{\mu} \right]$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda,

$$\Gamma(\alpha)x(t) \le \Phi(t) + \Psi(t,T_1)$$
$$+ \sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\upsilon(s) + \delta\, p(s) x^{\gamma} - q_1(s) x^{\lambda} + (1-\delta) p(s) x^{\gamma} - q_2(s) x^{\mu} \right]$$

elde edilir.

$X_1, X_2 \ge 0$ ve $Y_1, Y_2 \ge 0$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$X_1 = \gamma^{-1/\lambda} q_1^{1/\lambda} x \qquad \text{ve} \qquad X_2 = \gamma^{-1/\mu} q_2^{1/\mu} x$$

$$Y_1 = \lambda^{1/(\gamma-\lambda)} \gamma^{\gamma/(\lambda(\lambda-\gamma))} \delta^{1/(\lambda-\gamma)} p^{1/(\lambda-\gamma)} q_1^{\gamma/(\lambda(\gamma-\lambda))}$$
$$Y_2 = \mu^{1/(\gamma-\mu)} \gamma^{\gamma/(\mu(\mu-\gamma))} (1+\delta)^{1/(\mu-\gamma)} p^{1/(\mu-\gamma)} q_1^{\gamma/(\mu(\gamma-\mu))}$$

olur.

Bu ifadeler Lemma 3.5'te yerine yazılırsa,

$$\delta p x^{\gamma} - q_1 x^{\lambda} = \lambda \left(\gamma^{-1/\lambda} q_1^{1/\lambda} x\right)^{\gamma} \left(\lambda^{1/(\gamma-\lambda)} \gamma^{\gamma/(\lambda(\lambda-\gamma))} \delta^{1/(\lambda-\gamma)} p^{1/(\lambda-\gamma)} q_1^{\gamma/(\lambda(\gamma-\lambda))}\right)^{\lambda-\gamma} - \gamma \left(\gamma^{-1/\lambda} q_1^{1/\lambda} x\right)^{\lambda}$$

$$= \lambda X_1^{\gamma} Y_1^{\lambda-\gamma} - \gamma X_1^{\lambda} \le (\lambda-\gamma) Y_1^{\lambda}$$

$$(1+\delta) p x^{\gamma} - q_2 x^{\mu} = \mu \left(\gamma^{-1/\mu} q_2^{1/\mu} x\right)^{\gamma} \left(\mu^{1/(\gamma-\mu)} \gamma^{\gamma/(\mu(\mu-\gamma))} (1+\delta)^{1/(\mu-\gamma)} p^{1/(\mu-\gamma)} q_1^{\gamma/(\mu(\gamma-\mu))}\right)^{\mu-\gamma}$$

$$- \gamma \left(\gamma^{-1/\mu} q_2^{1/\mu} x\right)^{\mu}$$

$$= \mu X_2^{\gamma} Y_2^{\mu-\gamma} - \gamma X_2^{\mu} \le (\mu-\gamma) Y_2^{\mu}$$

elde edilir.

O halde,

$$\Gamma(\alpha)x(t) \le \Phi(t) + \Psi(t,T_1) + \sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[\upsilon(s) + (\lambda-\gamma) Y_1^{\lambda} + (\mu-\gamma) Y_2^{\mu} \right] \tag{4.30}$$

elde edilir.

(4.30) eşitsizliği $t^{(1-\alpha)}$ ile çarpıldığında,

$$t^{(1-m)}\Gamma(\alpha)x(t) \le t^{(1-m)}\Phi(t) + t^{(1-m)}\Psi(t,T_1) + t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[\upsilon(s) + g_2(s)]$$

bulunur.

Bu eşitsizlik,

$$t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[\upsilon(s) + g_2(s)] \ge -[t^{(1-m)}\Phi(t) + t^{(1-m)}\Psi(t,T_1)]$$

şeklinde yazılabilir.

O halde Teorem 4.2'nin ispatında olduğu gibi $T_2 > T_1$ kabul edilip $0 < \alpha \le 1$ ve $\alpha > 1$ durumları aşağıda sırasıyla incelenecektir.

i. $0 < \alpha \le 1$ olsun. Teorem 4.2'nin ispatında elde edilen (4.8) ve (4.9) ifadeleri yerlerine yazıldığında,

$$t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s) + g_2(s)] \ge -[a_0 + c(T_1,T_2)]$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin her iki tarafının $t \to \infty$ iken limiti alındığında,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s) + g_2(s)] \ge -[c(T_1,T_2)] > -\infty \qquad (4.31)$$

bulunur. O halde bu sonuç (4.26) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Yani $x(t)$ her zaman pozitif değildir. $x(t) < 0$ olduğu durumda benzer şekilde çelişki elde edilir.

ii. $\alpha > 1$ olsun. $m \ge 2$ için ispata başlandığında Teorem 4.2'nin ispatında elde edilen (4.12) ve (4.13) eşitsizlikleri (4.23)'te yerlerine yazıldığında,

$$t^{(1-m)}\sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha}(t-s-1)^{(\alpha-1)}[v(s) + g_1(s)] \ge -[c_1(T_2) + c_2(T_1)]$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin her iki tarafının $t \to \infty$ iken limiti alındığında,

$$\liminf_{t\to\infty} t^{(1-m)} \sum_{s=T_1-\alpha}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \left[v(s)+g_1(s)\right] \geq -\left[c_1(T_2)+c_2(T_1)\right] > -\infty$$

elde edilir. Yani bu sonuç (4.26) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $x(t) < 0$ olduğu durumda benzer şekilde çelişki elde edilir.

5. KAYNAKLAR

Aktoprak, E., Kısalar, S. ve Yıldız, M.K. (2015) Oscillation of higher order fractional nonlinear difference equations. *International Journal of Difference Equations,* **10:** 201-212

Atici, F.M. and Eloe, P.W. (2009) Initial Value Problems in Discrete Fractional Calculus. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **137:** 981-989.

Anastassiou, G.A. (2009) Discrete fractional calculus and inequalities.

Charoenphon, S. (2014) Green's Functions of Discrete Fractional Calculus Boundary Value Problems and an Application of Discrete Fractional Calculus to a Pharmacokinetic Model, Masters Theses & Specialist Projects, Western Kentucky University.

Chen, D.X., Lan, Y.H. and Qu, P.X. (2013). Forced oscillation of certain fractional differential equations, **Doi:** 10.1186/1687-1847-2013-125

Chen, F., Luo, X. and Zhou, Y. (2011). Existence results for nonlinear fractional difference equation, Hindawi Publishing Corporation Advances in Difference Equations, **Doi:** 10.1155/2011/713201

Diethelm, K. (2010). The Analysis of Fractional Differential Equations. Springer, Berlin.

Elaydi, S. (2004). An Introduction to Difference Equations. Springer, 3. edition, Texas, USA.

Han, Z., Sun, Y., Zhang, C. and Zhao, Y. (2013). Oscillation for a class of fractional differential equation, **Doi:** 10.1155/2013/390282

Kelley, W.G. and Peterson, A.C. (2001). Difference Equations: An Introduction with Applications. Academic Press, 2. edition, USA.

Kısalar, S. (2015). Kesirli Fark Denklemlerinin Salınımlılığı. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Marian, S.L., Loganathan, M.P., Maria Selvam, A.G. and Sagayaraj, M.R. (2013). Oscillation of caputo like discrete fractional equations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* **89:** 667-677.

Miller, K.S. and Ross B. (1993). An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley & Sons, New York, USA.

Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations. Academic Press, California, USA.

Sagayaraj, M.R., Loganathan, M.P., Marian, S.L. and Maria Selvam, A.G. (2012). Oscillation of fractional nonlinear difference equations. *Mathematica Aeterna,* **2:** 805-813.

Sengul, S. (2010). Discrete Fractional Calculus and Its Applications to Tumor Growth, Masters Theses & Specialists Projects, Paper 161, Western Kentucky University, Bowling Green, Kentucky.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ebru YILMAZ

Doğum Yeri ve Tarihi : EŞME, 11.08.1989

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Telefon/e-posta) : 507 267 05 70
ebruyilmaz64@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Şehit Cemalettin Avcı Anadolu Lisesi, (2005-2004)

Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü, (2007-2012)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (2015-…)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Şehit Cemalettin Avcı Anadolu Lisesi (2012-2013)
Şuhut Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi (2013-…)