AYRIK KESİRLİ LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve ZENGİN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYRIK KESİRLİ LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Merve ZENGİN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Merve ZENGİN tarafından hazırlanan "Ayrık Kesirli Laplace Dönüşümü" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 11/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Başkan : Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......../......../ 2018 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

11/05/2018

Merve ZENGİN

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

AYRIK KESİRLİ LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Merve ZENGİN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Bu çalışmada, Nabla operatörü ile ayrık kesirli analizin özelliklerini inceleyerek bu operatörün yeni genelleştirmeleri araştırılmış ve Laplace dönüşümü uygulamaları incelenmiştir.

2018, v + 49 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ayrık Kesirli Analiz, Nabla Operatörü, Ayrık kesirli Analizde Laplace Dönüşümü

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

DISCRETE FRACTIONAL LAPLACE TRANSFORM

Merve ZENGİN
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic
Supervisor: Assoc. Prof. Umut Mutlu ÖZKAN

In this study, new generalizations of this operator were investigated by examining the features of discrete fractional analysis with Nabla operator and Laplace transformation applications were investigated.

2018, v + 49 pages

Key Words: Discrete Fractional Calculus, Nabla Operator, The Laplace Transform in Discrete Fractional Calculus

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince görüş ve önerileriyle çalışmama yön veren, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı değerli tez danışmanım Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN' a teşekkür ederim.

Ayrıca tez yazım aşamasında benden yardımını esirgemeyen her konuda bana destek veren, bugünlere ulaşmama vesile olan aileme çok teşekkür ederim.

Merve ZENGİN
AFYONKARAHİSAR, 2018

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\Delta(.)$	Fark Operatörü
$\nabla(.)$	Nabla (Geri Fark) Operatörü
$\Delta^{-\nu}f$	f fonksiyonunun ν-inci mertebeden kesirli toplamı
$\Delta^{\nu}f$	f fonksiyonunun ν-inci mertebeden kesirli farkı
$\Gamma(x)$	Gamma Fonksiyonu
$\mathcal{N}$	Ayrık Dönüşüm
$\mathcal{L}_a\{f(t)\}$	Laplace Dönüşümü
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N}_a$	$\mathbb{N}_a \coloneqq \mathbb{N}_0 + \{a\}$
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
μ	Mü
$t^{\overline{n}}$	Artan Fonksiyon
$t^{\underline{\mu}}$	Azalan Fonksiyon
$h_\mu(t,a)$	μ-inci Taylor Tek Terimlisi

1. GİRİŞ

Reel sayılar kümesinde türev ve integral operatörleri analizin iki temel içeriğidir. Benzer olarak tam sayılar kümesinde de toplam ve fark operatörleri de ayrık analizin iki temel içeriğidir. Genellikle türev veya integral operatörleri $n-$inci mertebeden bir fonksiyona uygulanabilir burada n tamsayıdır ve $\frac{d^n f(x)}{dx^n}, \Delta^n f(x)$ şeklinde gösterilir.

Aslında kesirli analiz, türev veya integral operatörlerinin mertebelerinin keyfi sayılar olabildiğini ifade eder. Örneğin bir fonksiyonun $1/2$ – inci mertebeden türevi veya $\sqrt{3}$ – üncü mertebeden integrali gibi.

Kesirli analiz uygulamalı matematiğin bir dalıdır, keyfi mertebeden türev ve integrallerle ilgilidir. Bunların uygulamaları fen, mühendislik, uygulamalı matematik ve diğer dallarda görülür. $D = \frac{d}{dx}$ operatörünü içeren diferansiyel analizin özellikleri ile fark operatörü olarak bilinen $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ operatörünü içeren ayrık kesirli analizin özellikleri arasında bir benzerlik olduğu bilinir. Aynı benzerlik kesirli ve ayrık kesirli analizin operatörleri arasında da vardır.

Kesirli analizin kökleri yaklaşık üçyüz yıl önce L-Hospital'den Leibniz'e gönderilen bir mektupla ekildi. Burada L-Hospital $n = 1/2$ ise $d^n y/dx^n$ in anlamı hakkında bir soru ortaya çıkardı. Leibniz mektuba verdiği cevap ile kesirli analiz hakkındaki araştırmalar başlamış oldu. Sonra John Bernoulli'nin cevabı ile birlikte, Leibniz genel mertebelerin türevlerini ispatladı. Leibniz $1/2$ mertebeden türevin ifadesine $d^{1/2}y$ gösterimini kullandı. Kesirli türevler birçok farklı içerikle ispatlandı (Podlubny 1999).

$D^a f$ mertebeden kesirli türev, kapsamlı bir şekilde düşünülmesine rağmen, kesirli mertebeden fark yıllardır daha az dikkat çekti. Kesirli mertebeden farklar ispatlandı ve 1974'de farkın içeriğine doğal bir yaklaşımla kesirli fark tanımlandı (Spanier and Oldham 1974).

Ayrık kesirli hesap üzerine yapılan çalışmalar ivme kazanarak Atıcı ve Eloe (2007), kesirli fark operatörü için kuvvet kurallarını ve genelleştirilmiş fonksiyonun özelliklerini verdiler. Atıcı ve Eloe (2009) yılında ise nabla operatör ile ayrık kesirli hesaplamalar ifade edip geliştirdiler (Atıcı and Eloe *et al*. 2007a, b, 2009).

Bu tezde, Atıcı ve Eloe (2009) ve Holm (2011) tarafından yapılan çalışmaların ışığında ayrık kesirli analiz incelenecektir. Zaman skalası analizindeki terimleri kullanarak, geri fark veya Nabla türev göz önüne alınacaktır. Laplace dönüşümünün ayrık Nabla benzeşimini ve bazı temel özelliklerin gelişimi verilecektir. Kesirli Nabla fark denklemi çözümü için dönüşüm yöntemi incelenecek ve Gamma fonksiyonu için iki özdeşlik ifade edilecektir. Son olarak kesirli bir başlangıç değeri problemini çözmek için Laplace Dönüşüm Yöntemi uygulanacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

$$t^{\overline{n}} = t\,(t+1)\dots(t+\mathrm{n}-1), \quad n \in \mathbb{N},$$

şeklinde tanımlanır ve artan faktöriyel kuvvet olarak adlandırılır. $t^{\overline{0}} = 1$ dır. Artan faktöriyeli ifade etmek için Pochhammer sembolü kullanılır.

$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$t^{\overline{\alpha}} = \frac{\Gamma(t+\alpha)}{\Gamma(t)}$$

olarak tanımlanır. Burada $t \in \mathbb{R} \backslash \{\dots, -2, -1, 0\}$ ve $0^{\overline{\alpha}} = 0$ dır.

Ayrıca $\nabla y(t) = y(t) - y(t-1)$ olmak üzere,

$$\nabla(t^{\overline{\alpha}}) = \alpha t^{\overline{\alpha-1}}$$

şeklindedir.

$k = 2,3, \dots$ için, $\nabla^k = \nabla\, \nabla^{k-1}$ tarafından tümevarım ile ∇^k tanımlanır.

$f\colon \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ tanımlı olsun. $a \in \mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}_a = \{a, a+1, \dots\}$ olmak üzere,

$$\nabla^n y(t) = f(t)$$

$$\nabla^i y(a) = 0, \qquad 0 \le i \le n-1$$

ayrık n-inci mertebeden başlangıç değer problemini düşünelim.

Bu başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = \sum_{s=a+1}^{t} \frac{\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!} f(s)$$

olarak verilir.

Burada $t \equiv a+1 \ (mod\ 1)$, $\rho(s) = s-1$ ve $\frac{\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}$; $\nabla^n y(t) = 0$ için Cauchy fonksiyonudur.

$f(t)$ nin n-inci mertebeden toplam formülü,

$$\nabla_a^{-n} f(t) = \sum_{s=a}^{t} \frac{\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{n-1}}}{\Gamma(n)} f(s) \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır.

Bundan dolayı başlangıç değer probleminin çözümü $\nabla_{a+1}^{-n} f(t)$' dir.

Böylelikle f' nin υ-inci mertebeden kesirli toplamı,

$$\nabla_a^{-\upsilon} f(t) = \sum_{s=a}^{t} \frac{\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{\upsilon-1}}}{\Gamma(\upsilon)} f(s); \quad \upsilon \in \mathbb{R} \backslash \{\dots, -2, -1, 0\} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlıdır.

Sonraki bölümde ileri farka benzer biçimde kesirli Nabla fark tanımlanacaktır, (K. S. Miller and B. Ross, 1993).

$\mu > 0$ ve m bir pozitif tamsayı olmak üzere, $m-1 < \mu < m$ olduğunu varsayalım. $-\upsilon = \mu - m$ olarak belirlensin. Bu durumda

$$\nabla^{\mu} u(t) = \nabla^{m-\upsilon} u(t) = \nabla^{m}\left(\nabla^{-\upsilon} u(t)\right) \tag{2.3}$$

şeklindedir.

$$t^{\underline{\alpha}} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha)}\ ,\ t^{\underline{n}} = t(t-1)\dots(t-n+1)$$

şeklinde tanımlıdır.

$$t^{\overline{\alpha}} = (t+\alpha-1)^{\underline{\alpha}} \tag{2.4}$$

ifadesini sık sık kullanacağız.

m pozitif bir tamsayı, $-\upsilon = \mu - m$ ve $m-1 < \mu < m$ olmak üzere,

$$\Delta_a^{-\upsilon} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \sum_{s=a}^{t-\upsilon} \left(t-\sigma(s)\right)^{\underline{\upsilon-1}} f(s) \tag{2.5}$$

$$\Delta^{\mu} u(t) = \Delta^{m-\upsilon} u(t) = \Delta^{m}\left(\Delta^{-\upsilon} u(t)\right)$$

tanımlanır.

Herhangi bir m pozitif sayısı için $\Delta^{m} y(t-m) = \nabla^{m} y(t)$ olduğu tümevarım ile kolayca gösterilebilir. Herhangi bir υ pozitif reel sayısı için bu formülü genelleştirilecek ve $\nabla -$ kesirli toplam ve $\Delta -$ kesirli toplam operatörleri arasında bir ilişki verilecektir.

Lemma 2.1 m bir tam sayı olmak üzere $0 \leq m-1 \leq \upsilon \leq m$ olsun. a pozitif bir tamsayı ve $y(t)$, $\mathbb{N}_a = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$ üzerinde tanımlı olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$(i)\quad \Delta_a^{\upsilon} y(t-\upsilon) = \nabla_a^{\upsilon} y(t)\,; \qquad t \in \mathbb{N}_{m+a}$$

$$(ii)\quad \Delta_a^{-\upsilon} y(t+\upsilon) = \nabla_a^{-\upsilon} y(t)\,; \qquad t \in \mathbb{N}_a$$

İspat (i) Özdeşliğinin sol tarafından başlayalım.

$$\Delta_a^{\nu} y(t-\nu) = \Delta^m \Delta_a^{-(m-\nu)} y(t-\nu)$$

$$= \Delta^m \sum_{s=a}^{t-m} \frac{\big(t-\nu-\sigma(s)\big)^{\underline{m-\nu-1}}}{\Gamma(m-\upsilon)} . y(s)$$

$$= \nabla^m \sum_{s=a}^{t} \frac{\big(t+m-\nu-\sigma(s)\big)^{\underline{m-\nu-1}}}{\Gamma(m-\upsilon)} . y(s)$$

$$= \nabla^m \sum_{s=a}^{t} \frac{\big(t-\rho(s)\big)^{\overline{m-\nu-1}}}{\Gamma(m-\upsilon)} . y(s)$$

$$= \nabla^m \nabla_a^{-(m-\nu)} y(t)$$

$$= \nabla_a^{\upsilon} y(t)$$

elde edilir. Burada Δ ve ∇ kesirli operatörlerin tanımları kullanılmıştır.

(ii) Özdeşliğinin sol tarafından başlayalım. Bu durumda

$$\Delta_a^{-\nu} y(t+\nu) = \sum_{s=a}^{t+\nu-\nu} \frac{\left(t+\nu-\sigma(s)\right)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} . y(s)$$

$$= \sum_{s=a}^{t} \frac{\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} . y(s)$$

$$= \nabla_a^{-\nu} y(t)$$

yazılır.

Lemma 2.2 m pozitif bir tamsayı olmak üzere, $0 \leq m-1 < \nu \leq m$ ve $y(t)$ de $\mathbb{N}_{\nu-m} = \{\nu-m, \nu-m+1, \dots\}$ üzerinde tanımlı olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$(i) \quad \Delta_{\nu-m}^{\nu} y(t) = \nabla_{\nu-m}^{\nu} y(t+\nu); \qquad t \in \mathbb{N}_{-m}$$

$$(ii) \quad \Delta_{\nu-m}^{-(m-\nu)} y(t) = \nabla_{\nu-m}^{-(m-\nu)} y(t-m+\nu); \qquad t \in \mathbb{N}_0$$

İspat (i) Özdeşliğin sağ tarafından başlayalım.

$$\nabla_{\nu-m}^{\nu} y(t+\nu) = \nabla^m \nabla_{\nu-m}^{-(m-\nu)} y(t+\nu)$$

$$= \nabla^m \sum_{s=\nu-m}^{t+\nu} \frac{\left(t+\nu-\rho(s)\right)^{\overline{m-\nu-1}}}{\Gamma(m-\nu)} . y(s)$$

$$= \nabla^m \sum_{s=\nu-m}^{t+\nu} \frac{\left(t+m-\sigma(s)\right)^{\underline{m-\nu-1}}}{\Gamma(m-\nu)} . y(s)$$

$$= \Delta^m \sum_{s=\nu-m}^{t-m+\nu} \frac{\big(t-\sigma(s)\big)^{\underline{m-\nu-1}}}{\Gamma(m-\nu)} . y(s)$$

$$= \Delta^m \Delta_{\nu-m}^{-(m-\nu)} y(t) = \Delta_{\nu-m}^{\nu} y(t)$$

dir. Burada Δ ve ∇ kesirli operatörlerin tanımları kullanılmıştır.

(ii) Özdeşliğin sağ tarafından başlayalım.

$$\Delta_{\nu-m}^{-(m-\nu)} y(t-m+\nu) = \sum_{s=\nu-m}^{t-m+\nu} \frac{\big(t-+\mathrm{m}+\nu-\sigma(s)\big)^{\underline{m-\nu-1}}}{\Gamma(m-\nu)} . y(s)$$

$$= \sum_{s=\nu-m}^{t-m+\nu} \frac{\big(t-\rho(s)\big)^{\overline{m-\nu-1}}}{\Gamma(m-\nu)} . y(s)$$

$$= \nabla_{\nu-m}^{-(m-\nu)} y(t)$$

elde edilir.

Şimdi ∇-kesirli operatörlerin bazı temel özellikleri ve bazı kesirli fark denklemlerinin çözümü için önemli bir role sahip olan kuvvet kuralını ispatlayalım.

Lemma 2.3

$$\nabla_{\mathbf{1}}^{-\boldsymbol{\nu}} t^{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} t^{\overline{\mu+\nu}}$$

dir.

İspat

$$\nabla_{\mathbf{1}}^{-\nu} t^{\overline{\mu}} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{\nu-1}} s^{\overline{\mu}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{t-1} \left(t-\rho(s+1)\right)^{\overline{\nu-1}} (s+1)^{\overline{\mu}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{t-1} \frac{\Gamma(t-s+\nu-1)}{\Gamma(t-s)} . \frac{\Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(s+1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{t-1} \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t)} . \frac{\Gamma(t-s+\nu-1)}{\Gamma(t-s)} . \frac{\Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(s+1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{t-1} \binom{t-1}{s} \frac{\Gamma(t-s+\nu-1)\Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(t)}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t)} \sum_{s=0}^{t-1} \binom{t-1}{s} \frac{\Gamma(t-s+\nu-1)}{\Gamma(\nu)} . \frac{\Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t)} \sum_{s=0}^{t-1} \binom{t-1}{s} \nu^{\overline{t-s-1}} (\mu+1)^{\bar{s}}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t)} (\nu+\mu+1)^{\overline{t-1}}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t)} \; t^{\overline{\nu+\mu}}$$

olarak bulunur.

Uyarı 2.1

$$\Delta_{\mu}^{-\nu} t^{\underline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} . t^{\underline{\mu+\nu}}$$

kuvvet kuralı ispatlanmıştır (Atıcı and Eloe 2007).

$$\nabla_{1}^{-\nu} t^{\overline{\mu}} = \Delta_{1}^{-\nu}(t+\nu)^{\overline{\mu}} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1}^{t+\nu-\nu} \big(t+\nu-\sigma(s)\big)^{\underline{\nu-1}} s^{\overline{\mu}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1}^{t} \big(t+\nu-\sigma(s)\big)^{\underline{\nu-1}} (s+\mu-1)^{\underline{\mu}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-(1-\mu)}^{t-(1-\mu)} \big(t+\nu-\sigma(s+1-\mu)\big)^{\underline{\nu-1}} (s+1-\mu+\mu-1)^{\underline{\mu}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=\mu}^{t-1+\mu} \big(t+\nu+\mu-1-\sigma(s)\big)^{\underline{\nu-1}} s^{\underline{\mu}}$$

$$= \Delta_{\mu}^{-\nu}(t+\nu+\mu-1)^{\underline{\mu}}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} . (t+\nu+\mu-1)^{\overline{\mu+\nu}}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} . t^{\overline{\mu+\nu}}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.1 f reel değerli bir fonksiyon ve $\mu, \nu > 0$ olsun. Bu durumda

$$\nabla_a^{-\nu}\left[\nabla_a^{-\mu} f(t)\right] = \nabla_a^{-(\mu+\nu)} f(t) = \nabla_a^{-\mu}[\nabla_a^{-\nu} f(t)]$$

dir.

İspat

$$\nabla_a^{-\nu}\left[\nabla_a^{-\mu} f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a}^{t}\big(t-\rho(s)\big)^{\overline{\nu-1}}\,\nabla_a^{-\mu} f(s)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a}^{t}\big(t-\rho(s)\big)^{\overline{\nu-1}}\,\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{\tau=a}^{s}\big(s-\rho(\tau)\big)^{\overline{\mu-1}} f(\tau)$$

$$= \sum_{s=a}^{t}\sum_{\tau=a}^{s}\frac{\big(t-\rho(s)\big)^{\overline{\nu-1}}\big(s-\rho(\tau)\big)^{\overline{\mu-1}}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} f(\tau)$$

$$= \sum_{\tau=a}^{t}\sum_{s=\tau}^{t}\frac{\big(t-\rho(s)\big)^{\overline{\nu-1}}\big(s-\rho(\tau)\big)^{\overline{\mu-1}}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} f(\tau)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{\tau=a}^{t}\sum_{s=\tau-\rho(\tau)}^{t-\rho(\tau)}\frac{\Big(t-\rho\big(s+\rho(\tau)\big)\Big)^{\overline{\nu-1}}\big(s+\rho(\tau)-\rho(\tau)\big)^{\overline{\mu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(\tau)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{\tau=a}^{t}\sum_{s=1}^{t-\rho(\tau)}\frac{\big(t-\rho(s)-\rho(\tau)\big)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} s^{\overline{\mu-1}} f(\tau)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{\tau=a}^{t}\nabla_1^{-\nu}\big(t-\rho(\tau)\big)^{\overline{\mu-1}} f(\tau)$$

$$= \frac{\Gamma(\mu-1+1)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\nu)}\sum_{\tau=a}^{t}\big(t-\rho(\tau)\big)^{\overline{\mu+\nu-1}} f(\tau)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)} \sum_{\tau=a}^{t} \left(t-\rho(\tau)\right)^{\overline{\mu+\nu-1}} f(\tau)$$

$$= \nabla_a^{-(\mu+\nu)} f(t).$$

2.1 Ayrık Dönüşümün Uygulaması

Ayrık dönüşüm ($\mathcal{N}$ −dönüşümü)

$$\mathcal{N}_{t_0}\left(f(t)\right)(s) = \sum_{t=t_0}^{\infty} (1-s)^{t-1} f(t) \qquad (2.6)$$

şeklinde tanımlıdır. f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{N}_1$ ise $\mathcal{N}$ veya $\mathcal{N}_1$ notasyonları kullanılır.

Lemma 2.1.1 Herhangi bir $\nu \in \mathbb{R} \backslash \{\dots, -2, -1, 0\}$ için

$$(i) \quad \mathcal{N}\left(t^{\overline{\nu-1}}\right)(s) = \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}; \qquad |1-s| < 1$$

$$(ii) \quad \mathcal{N}\left(t^{\overline{\nu-1}} \alpha^{-t}\right)(s) = \frac{\alpha^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{(s+\alpha-1)^{\nu}}; \qquad |1-s| < 1$$

şeklindedir.

İspat (i) Öncelikle $0 < \nu < 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\mathcal{N}\left(t^{\overline{\nu-1}}\right)(s) = \sum_{t=1}^{\infty} (1-s)^{t-1}\, t^{\overline{\nu-1}}$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} (1-s)^{t-1}\, \frac{\Gamma(t+\nu-1)}{\Gamma(t)}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty}(1-s)^{t+1-1}\frac{\Gamma(t+\nu)}{\Gamma(t+1)}$$

$$= \Gamma(\nu)_2F_1(1,\nu;1;1-s)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\int_0^1 \frac{u^{\nu-1}(1-u)^{1-\nu-1}}{\big(1-u(1-s)\big)}du = \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}$$

olur. Buradan aşağıdaki özdeşlikler yazılır.

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \frac{u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}}{(1-uz)^{a}}du$$

ve

$$\int_0^1 \frac{u^{x-1}(1-u)^{y-1}}{\big(au+b(1-u)\big)^{x+y}}du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{a^x b^y\Gamma(x+y)}$$

(i) de bulunan yakınsaklık yarıçapı, ${}_2F_1(1,\nu;1;1-s)$ için genişletilmiş serilerin yakınsaklık yarıçapı ile verilir. Genellikle

$$\mathcal{N}(t^{\overline{\nu}})(s) = \tfrac{\nu}{s}\mathcal{N}\big(t^{\overline{\nu-1}}\big); \qquad \nu \in \mathbb{R}\backslash\{\dots,-2,-1,0\} \tag{2.7}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\sum_{t=1}^{\infty}(1-s)^{t-1}t^{\overline{\nu-1}} = \frac{1}{\nu}\sum_{t=1}^{\infty}(1-s)^{t-1}\nabla(t^{\overline{\nu}})$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{t=1}^{\infty}(\nabla((1-s)^t t^{\overline{\nu}}) - (\nabla(1-s)^t)t^{\overline{\nu}})$$

$$= -\frac{1}{\nu}0^{\overline{\nu}} + \frac{s}{\nu}\sum_{t=1}^{\infty}(1-s)^{t-1}\, t^{\overline{\nu}}$$

olur.

Gamma fonksiyonu 0 noktasında kutup noktasına sahip olduğundan $0^{\overline{\nu}} = 0$ olup (i)' in ispatı tamamlanır.

(ii) ise (i) den dolayı

$$\sum_{t=1}^{\infty}(1-s)^{t-1}t^{\overline{\nu-1}}\alpha^{-t} = \frac{1}{\alpha}\sum_{t=1}^{\infty}\left(1-\frac{s+\alpha+1}{\alpha}\right)^{t-1} t^{\overline{\nu-1}}$$

olarak yazılır.

Lemma 2.1.2 f fonksiyonu $\mathbb{N}_{a+1}$ üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda

$$\mathcal{N}_a f(t+1) = (1-s)^{-1}\mathcal{N}_{a+1}f(t)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

$$\mathcal{N}_a f(t+1) = \sum_{t=a}^{\infty}(1-s)^{t-1}f(t+1)$$

$$= \sum_{t=a+1}^{\infty}(1-s)^{t-2}f(t)$$

$$= (1-s)^{-1}\sum_{t=a+1}^{\infty}(1-s)^{t-1}f(t)$$

$$= (1-s)^{-1}\,\mathcal{N}_{a+1}f(t)$$

olup ispat tamamlanır.

Lemma 2.1.3 Herhangi bir ν pozitif reel sayısı için

$$\mathcal{N}_a\left(\nabla_a^{-\nu} f(t)\right) = s^{-\nu}\, \mathcal{N}_a\left(f(t)\right)(s)$$

dir. Burada f, $\mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlıdır.

İspat

$$\mathcal{N}_a\left(\nabla_a^{-\nu} f(t)\right) = \sum_{t=a}^{\infty} (1-s)^{t-1} \nabla_a^{-\nu} f(t)$$

$$= \sum_{t=a}^{\infty} (1-s)^{t-1} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{\tau=a}^{t} \left(t-\rho(\tau)\right)^{\overline{\nu-1}} f(\tau)$$

$$= \sum_{t=a}^{\infty} \sum_{\tau=a}^{t} (1-s)^{t-1} \frac{\left(t-\rho(\tau)\right)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(\tau)$$

$$= \sum_{\tau=a}^{\infty} \sum_{t=\tau}^{\infty} (1-s)^{t-1} \frac{\left(t-\rho(\tau)\right)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(\tau)$$

$$= \sum_{\tau=a}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (1-s)^{r-1+\tau-1} \frac{1}{\Gamma(\nu)} r^{\overline{\nu-1}} f(\tau)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{\tau=a}^{\infty} (1-s)^{\tau-1} f(\tau) \sum_{r=1}^{\infty} (1-s)^{r-1} r^{\overline{\nu-1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \mathcal{N}_a\left(f(t)\right)(s) \mathcal{N}\left(t^{\overline{\nu-1}}\right)(s)$$

$$= s^{-\nu}\mathcal{N}_a\big(f(t)\big)(s)$$

dir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Lemma 2.1.4 $0 < \nu \leq 1$ için ve $f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{a+1}\big(\nabla_a^\nu f(t)\big)(s) = s^\nu\ \mathcal{N}_a\big(f(t)\big)(s) - (1-s)^{a-1}f(a)$$

dir.

İspat Öncelikle dikkat edelim ki

$$\mathcal{N}_{a+1}\big(\nabla\, f(t)\big)(s) = s\ \ \mathcal{N}_a\big(f(t)\big)(s) - (1-s)^{a-1}f(a)$$

şeklindedir. Gerçekten;

$$\mathcal{N}_{a+1}\big(\nabla\, f(t)\big)(s) = \sum_{t=a+1}^{\infty}(1-s)^{t-1}\nabla f(t) = \sum_{t=a+1}^{\infty}(1-s)^{t-1}[f(t)-f(t-1)]$$

$$= \sum_{t=a+1}^{\infty}(1-s)^{t-1}f(t) - \sum_{t=a+1}^{\infty}(1-s)^{t-1}f(t-1)$$

$$= \sum_{t=a}^{\infty}(1-s)^{t-1}f(t) - (1-s)^{a-1}f(a) - \sum_{t=a}^{\infty}(1-s)^{t}\, f(t)$$

$$= \left(\frac{1}{1-s}-1\right)\sum_{t=a}^{\infty}(1-s)^{t}f(t) - (1-s)^{a-1}f(a)$$

$$= s\sum_{t=a}^{\infty}(1-s)^{t-1}f(t) - (1-s)^{a-1}f(a)$$

olur.

Bu nedenle

$$\mathcal{N}_{a+1}\left(\nabla_a^{\nu} f(t)\right)(s) = \mathcal{N}_{a+1}\left(\nabla \nabla_a^{-(1-\nu)} f(t)\right)(s)$$

$$= s\mathcal{N}_a\left(\nabla_a^{-(1-\nu)} f(t)\right)(s) - (1-s)^{a-1}\nabla_a^{-(1-\nu)} f(t)|_{\,t=a}$$

$$= s^{\nu}\mathcal{N}_a\left(f(t)\right)(s) - (1-s)^{a-1} f(a)$$

olur. Burada

$$\nabla_a^{-(1-\nu)} f(t)|_{\,t=a} = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\sum_{s=a}^{t}\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{-\nu}} f(s)|_{\,t=a} = f(a)$$

şeklindedir.

Örnek 2.1.1

$$\nabla_0^{1/2} y(t) = 5; \qquad t = 1, 2, \ldots$$

$$\nabla_0^{-1/2} y(t)|_{\,t=0} = y(0) = a$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Denklemin her iki tarafına $\mathcal{N}_1 -$ dönüşümünü uygularsak

$$\mathcal{N}_1\left(\nabla_0^{1/2}y(t)\right) = \mathcal{N}_1(5)$$

olur.

Lemma 2.2 ve Lemma 2.1.4’ den

$$s^{1/2}\mathcal{N}_0\big(y(t)\big)(s) - (1-s)^{-1}y(0) = \frac{5}{s}$$

$$\mathcal{N}_0\big(y(t)\big)(s) = \frac{5}{s^{3/2}} + \frac{y(0)}{(1-s)s^{1/2}}$$

elde edilir. Lemma 2.1.2’ den

$$\mathcal{N}_0\big(y(t)\big)(s) = 5s^{-3/2} + y(0)(1-s)^{-1}s^{-1/2}$$

$$= 5\frac{\mathcal{N}\left(t^{\overline{1/2}}\right)}{\Gamma(3/2)} + y(0)(1-s)^{-1}\frac{\mathcal{N}\left(t^{\overline{-1/2}}\right)}{\Gamma(1/2)}$$

$$= 5\frac{\mathcal{N}_0\left(t^{\overline{1/2}}\right)}{\Gamma(3/2)} + y(0)(1-s)^{-1}\frac{\mathcal{N}\left(t^{\overline{-1/2}}\right)}{\Gamma(1/2)}$$

$$= \frac{5}{\Gamma(3/2)}\mathcal{N}_0\left(t^{\overline{1/2}}\right) + \frac{y(0)}{\Gamma(1/2)}\mathcal{N}_0\left((t+1)^{\overline{-1/2}}\right)$$

bulunur.

Son denklemin her tarafına $\mathcal{N}_0 -$ dönüşümünün tersini uygulayarak başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = \frac{5}{\Gamma(3/2)} t^{\overline{1/2}} + \frac{y(0)}{\Gamma(1/2)} (t+1)^{\overline{-1/2}}; \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

olarak elde edilir.

Bir sonraki örnekte kesirli $\nabla -$ fark denklemini, kesirli $\Delta -$ fark denklemini ve çözümlerini karşılaştıracağız.

Örnek 2.1.2:

$$\Delta^{1/2} y(t) = 5; \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Delta^{-1/2} y(t)|_{\,t=0} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = a$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Bu başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = \frac{5}{\Gamma(3/2)} t^{\underline{1/2}} + \frac{y(-1/2)}{\Gamma(1/2)} t^{\underline{-1/2}} \tag{2.8}$$

şeklindedir.

Lemma 2.2' yi kullanarak kesirli $\Delta -$ fark denklemini kesirli $\nabla -$ fark denklemine dönüştüreceğiz.

Dolayısıyla

$$\Delta\, \Delta_{-1/2}^{-1/2}\, y(t) = \Delta\, \nabla_{-1/2}^{-1/2}\, y(t - 1 + 1/2) = \nabla\, \nabla_{-1/2}^{-1/2}\, y(t + 1/2) = 5; \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

yazılır.

Ayrıca $\mathcal{N}_1 -$ dönüşümünü uygulayabilmek için

$$\nabla_{-1/2}^{-1/2}\, y(t+1/2) = \nabla_0^{-1/2} z(t+1); \qquad t = 0, 1, 2, \dots$$

eşitliğini ispatlamalıyız.

$$\nabla_{-1/2}^{-1/2}\, y(t+1/2) = \sum_{s=-1/2}^{t+1/2} \big(t+1/2-\rho(s)\big)^{\overline{-1/2}} y(s)$$

$$= \sum_{u=0}^{t+1} \big(t+1/2-\rho(u-1/2)\big)^{\overline{-1/2}} y(u-1/2)$$

$$= \sum_{u=0}^{t+1} \big(t+1-\rho(u)\big)^{\overline{-1/2}} y(u-1/2)$$

$$= \nabla_0^{-1/2} z(t+1); \qquad z(t) = y(t-1/2)$$

olur. Burada $z(t) = y(t-1/2)$ dır.

Bu eşitlik sonucunda $\nabla -$ farka karşılık gelen denklem

$$\nabla_0^{1/2} z(t) = 5; \qquad t = 1, 2, \dots$$

$$\nabla_0^{-1/2} z(t)|_{\, t=0} = z(0) = a$$

olarak bulunur.

Örnek 2.1.1’ den bu kesirli $\nabla -$ fark denkleminin çözümü

$$z(t) = \frac{5}{\Gamma(3/2)} t^{\overline{1/2}} + \frac{z(0)}{\Gamma(1/2)} (t+1)^{\overline{-1/2}}; \qquad t \in \mathbb{N}_0 \tag{2.9}$$

olur.

Basit bir hesaplama ile (2.8) ve (2.9) çözümlerinin benzer olduğu görülebilir.

Şimdi Gamma fonksiyonu için iki yeni özdeşlik verilebilir. Bunun için $\alpha -$ Laplace dönüşüm kullanılmıştır.

Özellikle

$$\mathcal{R}_a\big(f(t)\big)(s) = \sum_{t=a}^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{t+1} f(t)$$

kullanılmış ve

$$\mathcal{R}_{\nu-1}(t^{\underline{\nu-1}})(s) = \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}$$

olduğu gösterilmiştir.

Bu özdeşliğin $s = 1$ için değeri

$$\Gamma(\nu) = \sum_{t=\nu-1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} t^{\underline{\nu-1}}; \qquad \nu \in \mathbb{R}\backslash\{\dots, -2, -1, 0\} \tag{2.10}$$

olarak elde edilir.

Nabla Laplace dönüşümünün tanımıyla Lemma 2.1.1, (i) de verilen özdeşliğin s=1/2 değeri için

$$\Gamma(\nu) = \sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{t+\nu-1} t^{\overline{\nu-1}}; \qquad \nu \in \mathbb{R}\backslash\{\dots, -2, -1, 0\} \tag{2.11}$$

olarak elde edilir. ■

2.2 Laplace Dönüşümü

$f\colon \mathbb{T}_a \to \mathbb{R}$ fonsiyonunun genel zaman skalası üzerinde ki Laplace dönüşümü, $s \in \mathcal{D}\{f\}$ için

$$\mathcal{L}_a\{f\}(s) \coloneqq \int_a^\infty e_{\theta s}^{\sigma}(t,a)f(t)\Delta t, \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $a \in \mathbb{R}$ sabit, $\mathbb{T}_a$, a dan başlayan sınırsız zaman skalası ve $\mathcal{D}\{f\}$ karmaşık sabitlerin kümesidir.

$$\mathbb{N}_a \coloneqq \mathbb{N}_0 + \{a\} = \{a, a+1, a+2, \dots\}$$

izole zaman skalasını göz önüne alalım.$a \in \mathbb{R}$ sabit sayı olmak üzere (2.12) serisinin sadeleştirilmiş gösterimi

$$\mathcal{L}_a\{f\}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k+a)}{(s+1)^{k+1}} \tag{2.13}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.1 Yeteri kadar büyük $t \in \mathbb{N}_a$ için $|f(t)| \leq Ar^t$ olacak şekilde $A > 0$ sabiti varsa $f\colon \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna r üstel mertebedendir denir. Burada $r > 0$ dır. Eğer $f\colon \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $r > 0$ üstel mertebeden ise tüm $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(r)}$ ler için

$$\mathcal{L}_a\{f\}(s) \tag{2.14}$$

mevcuttur.

Örneğin, $e_p(t,a) = (1+p)^{(t-a)}$ genelleşmiş üstel fonksiyonunun Laplace dönüşümü $\frac{1}{s-p}$ olup $\forall\, s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1+p)}$ için yakınsaktır. Özel olarak, $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ için

$$\mathcal{L}_a\{1\}(s) = \frac{1}{s}$$

şeklindedir.

Laplace dönüşümü lineer ve birebirdir. Bu iki özellik, aşağıdaki dönüşüm formülleri ile birlikte daha sonra geliştirilecek sonuçları elde etmek için oldukça önemlidir.

$m \in \mathbb{N}_0$ olarak verilsin ve varsayalım ki $f\colon \mathbb{N}_{a-m} \to \mathbb{R}$ ve $g\colon \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $r > 0$ üstel mertebeden fonksiyonlar olsun. Bu durumda $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(r)}$ için,

$$\mathcal{L}_{a-m}\{f\}(s) = \frac{1}{(s+1)^m}\, \mathcal{L}_a\{f\}(s) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(k+a-m)}{(s+1)^{(k+1)}} \tag{2.15}$$

ve

$$\mathcal{L}_{a+m}\{g\}(s) = (s+1)^m\, \mathcal{L}_a\{g\}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} (s+1)^{m-1-k}\, g(k+a) \tag{2.16}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.2

$$\begin{cases} h_0(t,a) \coloneqq 1 \\ h_{(n+1)}(t,a) \coloneqq \displaystyle\int_a^t h_n(s,a)\Delta s \quad ; \qquad n \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{2.17}$$

ardışık ifadeleri Taylor tek terimlileri olarak tanımlanır.

$\mathbb{N}_a$ özel tanım kümesi için,

$$h_n(t,a) = \frac{(t-a)^{\underline{n}}}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,, \qquad t \in \mathbb{N}_a$$

yazılabilir öyle ki burada genelleştirilmiş azalan fonksiyon ifadesi $t, \mu \in \mathbb{R}$

$$t^{\underline{\mu}} := \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\mu)};$$

şeklinde verilmektedir.

Burada $t + 1 - \mu \in (-\mathbb{N}_0)$ olduğunda $t^{\underline{\mu}} = 0$ dir.

Tanım 2.2.3 Her $\mu \in \mathbb{R}\backslash(-\mathbb{N})$ için μ-inci Taylor tek terimlisi, $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$h_\mu(t,a) = \frac{(t-a)^{\underline{\mu}}}{\Gamma(\mu+1)}$$

şeklinde tanımlıdır.

Lemma 2.2.1 $\mu \in \mathbb{R}\backslash(-\mathbb{N})$ olsun. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{R}$ öyle ki $\mathrm{b} - \mathrm{a} = \mu$ olsun. Bu durumda $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ için

$$\mathcal{L}_b\{h_\mu(t,a)\}(s) = \frac{(s+1)^\mu}{s^{\mu+1}} \tag{2.18}$$

dir.

İspat Genel binom formülü, $|x| < |y|$ olmak üzere, $\nu, x, y \in \mathbb{R}$ için

$$(x+y)^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} x^k y^{\nu-k}$$

şeklinde olup

$$\binom{\nu}{k} := \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-k)\Gamma(k+1)} = \frac{\nu^{\underline{k}}}{k!}$$

dir. $k \in \mathbb{N}_0$ ve $\nu > 0$ için,

$$\binom{-\nu}{k} = \frac{(-\nu)^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(-\nu)\dots(-\nu-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{(k+\nu-1)^{\underline{k}}}{k!}$$

$$= (-1)^k \binom{k+\nu-1}{\nu-1}$$

dir. Yukarıda ki bilgilere dayanarak $\nu \in \mathbb{R}$ ve $|y| < 1$ için,

$$\frac{1}{(1-y)^\nu} = ((-y)+1)^{-\nu}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\nu}{k} (-y)^k 1^{-\nu-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\nu}{k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+\nu-1}{\nu-1} y^k$$

yazılabilir.

Dolayısıyla, $b - a = \mu$ olduğundan $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ için

$$\frac{(s+1)^{\mu}}{s^{\mu+1}} = \frac{1}{s+1} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{s+1}\right)^{\mu+1}}$$

$$= \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+\mu}{\mu} \frac{1}{(s+1)^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\mu)^{\underline{\mu}}}{\Gamma(\mu+1)} \frac{1}{(s+1)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h_{\mu}(k+b, a) \frac{1}{(s+1)^{k+1}}$$

$$= \mathcal{L}_b\{h_{\mu}(t,a)\}(s)$$

elde edilir.

Uyarı 2.2.1 (14) den de biliyoruz ki; eğer $h_{\mu}(t,a)$ $r > 0$ üstel mertebeden ise tüm $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_b\{h_{\mu}(t,a)\}(s)$$

mevcuttur. Şimdi her $r > 1$ için $h_{\mu}(t,a)$ Taylor tek terimlisinin r üstel mertebeden olduğunu göstereceğiz. h_{μ} , $\mu \in \mathbb{R}(-\mathbb{N})$ için tanımlı olduğundan aşağıdaki iki durumu göz önüne alalım.

İlk olarak $\mu \notin (-\mathbb{N})$ ve $\mu \leq 0$ olduğunu varsayalım. $t \in \mathbb{N}_a$ için,

$$h_{\mu}(t,a) = \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(t-a+1-\mu)} \leq \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}$$

yazılır. Yani h_μ sınırlıdır.

İkinci olarak $M \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M-1 \leq \mu \leq M$ ve $\mu > 0$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $r > 1$ için,

$$h_\mu(t,a) = \frac{(t-a)^{\underline{\mu}}}{\Gamma(\mu+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(t-a+1-\mu)}$$

$$< \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(t-a+1-M)}$$

$$= \frac{(t-a)\ldots(t-a-M+1)}{\Gamma(\mu+1)}$$

$$< \frac{(t-a)^M}{\Gamma(\mu+1)}$$

$$< \frac{r^t}{\Gamma(\mu+1)}\,; \qquad t \in \mathbb{N}_a$$

şeklindedir.

Dolayısıyla $r > 1$ olmak üzere her $\mu \in \mathbb{R}\backslash(-\mathbb{N})$ için h_μ r üstel mertebedendir. (2.14) den $\mathcal{L}_a\{h_\mu(t,a)t\}(s)$,

$$\bigcup_{r>1}\left(\mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(r)}\right) = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcap_{r>1} \overline{B_{-1}(r)}\right) = \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$$

üzerinde mevcuttur.

Fakat bu durum h_μ, bir üstel mertebedendir anlamına gelmez. Başka bir deyişle (2.14) ün tersi genellikle geçerli değildir.

Gerçekten $\mu > 0$ olduğunda, $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$h_\mu(t,a) = \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(t-a+1-\mu)}$$

$$> \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(t-a+2-\mu)}$$

$$= \frac{(t-a)\ldots(t-a-M+2)}{\Gamma(\mu+1)}$$

dir.

Yani $t \to \infty$ için $h_\mu(t,a) \longrightarrow \infty$ olur.

Tanım 2.2.4 $f,\ g\colon \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ için, f ve g nin konvolüsyonu, $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$(f * g)(t) \coloneqq \sum_{r=a}^{t-1} f(r)g(t-1-r+a) \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $(f * g)(a) = 0$ dır.

Lemma 2.2.2 $f,\ g\colon \mathbb{N}_a \to \mathbb{R},\ r > 0$ üstel mertebeden olsun. $s\ \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(r)}$ için

$$\mathcal{L}_a\{f * g\}(s) = \mathcal{L}_a\{f\}(s)\mathcal{L}_a\{g\}(s) \tag{2.20}$$

şeklindedir.

İspat $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(r)}$ için,

$$\mathcal{L}_a\{f * g\}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f * g)(k+a)}{(s+1)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+1}} \sum_{r=a}^{k+a-1} f(r) g(k + a - r - 1 + a)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{f(r+a) g(k - r - 1 + a)}{(s+1)^{k+1}}$$

olur.

$\tau = k - r - 1$ değişken değişimi yaparsak,

$$\mathcal{L}_a\{f * g\}(s) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f(r+a) g(\tau + a)}{(s+1)^{\tau+r+2}}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f(r+a)}{(s+1)^{r+1}} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{g(\tau+a)}{(s+1)^{\tau+1}}$$

$$= \mathcal{L}_a\{f\}(s) \mathcal{L}_a\{g\}(s), \qquad s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(r)}$$

elde edilir.

3. AYRIK KESİRLİ ANALİZDE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde, doğal sayılar üzerinde kesirli bir başlangıç değeri probleminin Laplace dönüşümü ile çözümünü inceleyeceğiz.

$f: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $\nu > 0$ olmak üzere $N \in \mathbb{N}$, $N-1 < \nu < \mathrm{N}$ aralığından seçilsin. Hatırlayalım ki f fonksiyonunun ν-ncü mertebeden kesirli toplamı

$$\Delta_a^{-\nu} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{r=a}^{t-\nu} \left(t-\sigma(r)\right)^{\underline{\nu-1}} f(r), \qquad t \in \mathbb{N}_{a+\nu-N}$$

şeklinde tanımlanır ve burada $\Delta_a^{-\nu} f$, $\{a+\nu-N, \dots, a+\nu-1\}$ kümesi üzerinde sıfırdır.

Benzer şekilde f fonksiyonunun ν-ncü mertebeden kesirli farkı

$$\Delta_a^{\nu} f(t) := \Delta^N \Delta_a^{-(N-\nu)} f(t), \qquad t \in \mathbb{N}_{a+N-\nu}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıda ki tanım $\Delta_a^{\nu} f$ için

$$\Delta_a^{\nu} f(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\nu)} \displaystyle\sum_{s=a}^{t+\nu} \left(t-\sigma(s)\right)^{\underline{\nu-1}} f(s) & , \qquad t \in \mathbb{N}_{a+N-\nu} \\ \Delta^N f(t), \qquad \nu = N \end{cases}$$

tanımına eşdeğerdir.

Laplace dönüşümleri teoreminden hatırlanacağı üzere $N \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\mathcal{L}_a\{\Delta_a^{-N} f\}(s) = \frac{\mathcal{L}_a\{f\}(s)}{s^N} \tag{3.1}$$

ve

$$\mathcal{L}_a\,\{\Delta^N f\}(s) = s^N \mathcal{L}_a\{f\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta^{N-1-j} f(a) \tag{3.2}$$

sonuçları bilinmektedir.

Şimdi kesirli mertebeden toplamların ve farkların Laplace dönüşümünü inceleyelim.

3.1 Üstel Mertebeden Kesirli Operatörler

Öncelikle f nin üstel mertebesinin $\Delta_a^{-\nu} f$ ve $\Delta_a^{\nu} f$ nin üstel mertebeleriyle nasıl ilişkili olduğunu belirlemeliyiz.

Lemma 3.1.1 Varsayalım ki $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \geq 1$ üstel mertebeden bir fonksiyon ve $\nu > 0$ olarak verilsin. $\forall\, \epsilon > 0$ için $\Delta_a^{-\nu} f$ ve $\Delta_a^{\nu}\, f$ kesirli operatörleri $r + \epsilon$ üstel mertebedendir.

İspat f, r üstel merteben bir fonksiyon olduğundan, $t \in \mathbb{N}_a$ ve $t \geq T$ için

$$|f(t)| \leq A r^t \tag{3.3}$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $T \in \mathbb{N}_a$mevcuttur.

$(0, \infty)$ aralığında $\Gamma(x) > 0$ ve $[2, \infty)$ aralığında $\Gamma(x)$ monoton artan olduğundan $N - 1 < \nu < N$ ve $t \geq \nu + 2$ olmak üzere herhangi bir ν, N ve t için,

$$t^{\underline{\nu}} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\nu)} \leq \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-N)} = t(t-1)\ldots\big(t-(N-1)\big) < t^N \tag{3.4}$$

şeklindedir.

Bu doğrultuda, öncelikle $\Delta_a^{-\nu} f$ kesirli toplamın üstel mertebesini inceleyelim. $\epsilon > 0$ ve $t \in \mathbb{N}_{T+\nu+2}$ belirlendiğine göre,

$$|\Delta_a^{-\nu} f(t)| = \left| \sum_{s=a}^{T-1} \frac{\big(t-\sigma(s)\big)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(s) + \sum_{s=a}^{t-\nu-2} \frac{\big(t-\sigma(s)\big)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(s) + \nu f(t-\nu-1) + f(t-\nu) \right|$$

(3.3) eşitsizliğinden

$$\leq \sum_{s=a}^{T-1} \frac{\big(t-\sigma(s)\big)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} |f(s)| + \sum_{s=a}^{t-\nu-2} \frac{\big(t-\sigma(s)\big)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} Ar^s + \nu A r^{t-\nu-1} + Ar^{t-\nu}$$

yazılır. (3.4) eşitsizliği kullanılarak ve $t - \sigma(s) \geq (\nu - 1) + 2 \Leftrightarrow s \leq t - \nu - 2$ olduğundan

$$< \left(\sum_{s=a}^{T-1} \frac{|f(s)|}{\Gamma(\nu)} \right) t^{N-1} + \frac{At^{N-1}}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=T}^{t-\nu-2} r^s + \frac{A}{r^\nu} \left(\frac{\nu}{r} + 1 \right) r^t$$

yazılır.

Eğer $r = 1$ ise

$$|\Delta_a^{-\nu} f(t)| < \left(\sum_{s=a}^{T-1} \frac{|f(s)|}{\Gamma(\nu)} \right) t^{N-1} + \frac{At^N}{\Gamma(\nu)} + A(\nu+1)$$

$$< (1+\epsilon)^t, \qquad t \in \mathbb{N}_{a+\nu}$$

olur.

Diğer yandan, $r > 1$ ise

$$|\Delta_a^{-\nu} f(t)| < \left(\sum_{s=a}^{T-1} \frac{|f(s)|}{\Gamma(\nu)}\right) t^{N-1} + \frac{At^{N-1}}{\Gamma(\nu)} \frac{r^{t-\nu-1} - r^a}{r-1} + \frac{A}{r^\nu}\left(\frac{\nu}{r}+1\right) r^t$$

$$< \left(\sum_{s=a}^{T-1} \frac{|f(s)|}{\Gamma(\nu)}\right) t^{N-1} \left(\frac{A}{r^\nu}\left(1+\frac{\nu}{r}\right) + \frac{At^{N-1}}{\Gamma(\nu)(r-1)r^{\nu+1}}\right) r^t$$

$$< (r+\epsilon)^t, \qquad t \in \mathbb{N}_{a+\nu}$$

olur.

Çünkü $(r+\epsilon)^t$, sonunda $\alpha t^{N-1} + (\beta + \gamma t^{N-1}) r^t$ formundan daha hızlı büyür. Bundan dolayı $\Delta_a^{-\nu} f,\ r+\epsilon$ üstel mertebedendir.

Şimdi ise $\Delta_a^{\nu} f = \Delta^N \Delta_a^{-(N-\nu)} f$ kesirli farkına dönelim. İspatın ilk bölümünden bildiğimiz üzere $\Delta_a^{-(N-\nu)} f$, $r+\epsilon$ üstel mertebedendir. Öyleyse $t \geq T_2$ olan her $t \in \mathbb{N}_{a+N-\nu}$ için bir $T_2 \in \mathbb{N}_{a+N-\nu}$ mevcuttur ve

$$\left|\Delta_a^{-(N-\nu)} f(t)\right| \leq (r+\epsilon)^t$$

olur.

$t \geq T_\epsilon$ olan her $t \in \mathbb{N}_{a+N-\nu}$ için,

$$|\Delta_a^{\nu} f(t)| = \left|\Delta^N \Delta_a^{-(N-\nu)} f(t)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \Delta_a^{-(N-\nu)} f(t+N-k)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \left|\Delta_a^{-(N-\nu)} f(t+N-k)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} . (r+\epsilon)^{t+N-k}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} . (r+\epsilon)^{N-k} \right) (r+\epsilon)^{t}$$

şeklindedir. Sonuç olarak $\Delta_a^{\nu} f$, $r+\epsilon$ üstel mertebedendir.

Sonuç 3.1.1 Varsayalım ki $f: \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \geq 1$ üstel mertebeden bir fonksiyon ve $N-1 < \nu \leq N$ aralığında $\nu > 0$ olarak verilsin. $\forall\, s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için $\mathcal{L}_{a+\nu-N}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s)$ ve $\mathcal{L}_{a+\nu-N}\{\Delta_a^{\nu} f\}(s)$ yakınsaktır.

İspat $f, r\ ve\ \nu$ sonuç ifadesinde olduğu gibi olduğunu varsayalım ve $s_0 \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ olarak seçilsin ve sabit olsun. $d\left(s_0, \overline{B_{-1}(r)}\right) > 0$ olduğu için $s_0 \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r+\epsilon_0)}$ olacak şekilde yeterince küçük bir $\epsilon_0 > 0$ vardır. Lemma 3.1.1, $\Delta_a^{-\nu} f$ ve $\Delta_a^{\nu} f$ kesirli operatörleri $r+\epsilon_0$ üstel mertebeden olduğunu söyler. (14)' den hem $\mathcal{L}_{a+\nu-N}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s_0)$ hem de $\mathcal{L}_{a+\nu-N}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s_0)$ iyi tanımlanmış olduğu görülür.

3.2 Ayrık Kesirli Operatörlerin Laplace Dönüşümü

Bu bölümde Laplace dönüşümünün kesirli operatörlere uygulanması incelenecektir.

Teorem 3.2.1 $f: \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \geq 1$ üstel mertebeden bir fonksiyon ve $N-1 < \nu \leq N$ aralığında $\nu > 0$ olduğunu varsayalım. $s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için,

$$\mathcal{L}_{a+\nu}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s) = \frac{(s+1)^{\nu}}{s^{\nu}}\, \mathcal{L}_a\{f\}(s) \tag{3.5}$$

ve

$$\mathcal{L}_{a+\nu-N}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s) = \frac{(s+1)^{\nu-N}}{s^{\nu}}\, \mathcal{L}_a\{f\}(s) \tag{3.6}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat $f,\ r, \nu\ ve\ N$ teoremin ifadesinde verildiği gibi olsun. f , $r \in (0,1)$ üstel mertebeden bir fonksiyon ise f , 1. üstel mertebeden bir fonksiyon olduğunu hatırlayalım.

$r \geq 1$ olarak varsaymanın amacı $r \in (0,1)$ üstel mertebeden f fonksiyonlarını hariç tutmamaktır. Daha doğrusu s' nin $\mathcal{L}_{a+\nu}\{\Delta_a^{-\nu} f\}$ için yakınsama kümesinde olduğunda Lemma 2.2.1 in uygulanacağını garanti etmektir.

Öncelikle (3.5) ve (3.6) arasında olan ilişkiyi ortaya çıkarmak için (2.15) dönüşüm formülünü uygulayalım.

Gerçekten de her $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$ için,

$$\mathcal{L}_{a+\nu-N}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s) = \frac{1}{(s+1)^N} \mathcal{L}_{a+\nu}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta_a^{-\nu} f(k+a+\nu-N)}{(s+1)^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^N} \mathcal{L}_{a+\nu}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s)$$

olarak aldıktan sonra $\Delta_a^{-\nu} f$ kesirli operatörün sıfırları hesaba katılır.

Diğer taraftan,

$$\mathcal{L}_{a+\nu}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta_a^{-\nu} f(k+a+\nu)}{(s+1)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+1}} \sum_{r=a}^{k+a} \frac{(k+a+\nu-\sigma(r))^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(r)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+1)^{k+1}} \sum_{r=a}^{k+a} f(r) h_{\nu-1}\big((k+a)-r+a, a-(\nu-1)\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Big(f * h_{\nu-1}\big(t, a-(\nu-1)\big)\Big)(k+a+1)}{(s+1)^{k+1}}$$, (2.19)$t$anımını uygularsak

$= \mathcal{L}_{a+1}\big\{f * h_{\nu-1}\big(t, a-(\nu-1)\big)\big\}(s),$ (2.16) ve (2.19) kullanılarak

$$= (s+1)\mathcal{L}_a\big\{f * h_{\nu-1}\big(t, a-(\nu-1)\big)\big\}(s)$$

$$= (s+1)\, \mathcal{L}_a\{f\}(s)\, \mathcal{L}_a\big\{h_{\nu-1}\big(t, a-(\nu-1)\big)\big\}(s)$$

$$= \frac{(s+1)^{\nu}}{s^{\nu}} \ \mathcal{L}_a\{f\}(s)$$

olur.

Diğer taraftan (2.15) dönüşüm formülü uygulanırsa

$$\mathcal{L}_{a+\nu-N}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s) = \frac{1}{(s+1)^N} \ \mathcal{L}_{a+\nu}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s)$$

$$= \frac{(s+1)^{\nu-N}}{s^{\nu}} \ \mathcal{L}_a\{f\}(s); \qquad s \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_{-1}(r)}$$

(3.6) eşitliği ispatlanmış olur.

Uyarı 3.2.1 Yukarıdaki (3.6) eşitliğinde $\nu = N$ olduğu zaman iyi bilinen (3.1) formülü elde edilir. Bu durum kesirli bir farkın Laplace dönüşümü için de geçerlidir.

Teorem 3.2.2 $f: \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \geq 1$ üstel mertebeden bir fonksiyon ve $N-1 < \nu \leq N$ aralığında $\nu > 0$ olduğunu varsayalım.

$s \in \mathbb{C} \backslash \overline{B_{-1}(r)}$ için,

$$\mathcal{L}_{a+N-\nu}\{\Delta_a^\nu f\}(s) = s^\nu\,(s+1)^{N-\nu}\,\mathcal{L}_a\{f\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta_a^{\nu-1-j} f(a+N-\nu) \quad (3.7)$$

dir.

İspat $f, r, \nu\ ve\ N$ teoremin ifadesinde verildiği gibi olsun. Biliyoruz ki (3.7) eşitliğinde $\nu = N$ olursa iyi bilinen (3.2) formülü elde edilir. Diğer taraftan eğer $N-1 < \nu < N$ ise $0 < N-\nu < 1$ olur ve (3.2) ve (3.5) uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{a+N-\nu}\{\Delta_a^\nu f\}(s) &= \mathcal{L}_{a+N-\nu}\left\{\Delta^N \Delta_a^{-(N-\nu)} f\right\}(s) \\
&= s^N \mathcal{L}_{a+N-\nu}\left\{\Delta_a^{-(N-\nu)} f\right\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta^{N-1-j} \Delta_a^{-(N-\nu)} f(a+N-\nu) \\
&= s^N \frac{(s+1)^{N-\nu}}{s^{N-\nu}} \mathcal{L}_a\{f\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta^{N-1-j} \Delta_a^{-(N-\nu)} f(a+N-\nu) \\
&= s^\nu (s+1)^{N-\nu} \mathcal{L}_a\{f\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta_a^{\nu-1-j} f(a+N-\nu)
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.1 $t \in \mathbb{N}_{5+\pi}$ için

$$f(t) \coloneqq (t-5)^{\underline{\pi}} = \Gamma(\pi+1)h_\pi(t,5)$$

şeklinde tanımlansın.

Uyarı 2.2.1' i hatırlatarak $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ için

$$\mathcal{L}_{5+\pi}\{f\}(s) = \Gamma(\pi+1)\mathcal{L}_{5+\pi}\{h_\pi(t,5)\}(s)$$

$$= \Gamma(\pi+1)\frac{(s+1)^\pi}{s^{\pi+1}}$$

$$\approx 7{,}188\frac{(s+1)^{3{,}142}}{s^{4{,}142}}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (3.6) ile

$$\mathcal{L}_{2+\pi+e}\{\Delta_{5+\pi}^{-e} f\}(s) = \frac{(s+1)^{e-3}}{s^e}\left(\Gamma(\pi+1)\frac{(s+1)^\pi}{s^{\pi+1}}\right)$$

$$= \Gamma(\pi+1)\frac{(s+1)^{\pi+e-3}}{s^{\pi+e+1}}$$

$$\approx 7{,}188\frac{(s+1)^{2{,}860}}{s^{6{,}860}}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}\ için$$

hesaplanır ve (3.7) uygun kuvvet kuralı ile birlikte

$$\mathcal{L}_{8+\pi-e}\{\Delta_{5+\pi}^{e} f\}(s) = s^e(s+1)^{3-e}\left(\Gamma(\pi+1)\frac{(s+1)^\pi}{s^{\pi+1}}\right) - \sum_{j=0}^{2} s^j \Delta_{5+\pi}^{e-1-j} f(8+\pi-e)$$

$$= \Gamma(\pi+1)\left(\frac{(s+1)^{\underline{\pi-e+3}}}{s^{\pi-e+1}} - \sum_{j=0}^{2} s^j \frac{(3+\pi-e)^{\underline{\pi-e+j+1}}}{\Gamma(\pi-e+j+2)}\right)$$

$$= \Gamma(\pi+1)\left(\frac{(s+1)^{\underline{\pi-e+3}}}{s^{\pi-e+1}} - \frac{(3+\pi-e)(2+\pi-e)}{2} - (3+\pi-e)s - s^2\right)$$

$$\approx 7{,}188\frac{(s+1)^{\underline{3{,}423}}}{s^{1{,}423}} - 29{,}815 - 24{,}607s - 7{,}188s^2$$

bulunur. Burada $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ dir.

3.3 Kuvvet Kuralı ve Bileşim Kuralı

Kesirli toplam ve fark operatörleri ile ilgili birçok özellik ve formül geliştirilmiştir. Bunlar Laplace dönüşümü olmasa da çeşitli araçlar kullanılarak ispatlanan bileşim kurallarını ve kesirli kuvvet kurallarını içerir. Ancak bu sonuçların bazıları da Laplace dönüşümü kullanılarak ispatlanabilir.

Teorem 3.3.1 $\nu, \mu > 0$ olarak verilsin. $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ için,

$$\Delta_{a+\mu}^{-\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\nu)}(t-a)^{\underline{\mu+\nu}}$$

olur.

İspat Lemma 3.1.1 ile beraber Uyarı 2.2.1 uygulanırsa her $\epsilon > 0$ için $(t-a)^{\underline{\mu}}$, $1+\epsilon$ üstel mertebeden ve dolayısıyla $\Delta_{a+\mu}^{-\nu}(t-a)^{\underline{\mu}}$ ise $1+2\epsilon$ üstel mertebeden olduğu sonucuna varılır. Böylece Sonuç 3.1.1 de verilen ispatlara benzer bir ispat kullanılarak $\mathcal{L}_{a+\mu}\{(t-a)^{\underline{\mu}}\}$ ve $\mathcal{L}_{a+\mu+\nu}\{\Delta_{a+\mu}^{-\nu}(t-a)^{\underline{\mu}}\}$ nin tüm $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ için yakınsak olduğu sonucuna varılır.

Dolayısıyla herhangi bir $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ için, (3.5) eşitliğini kullanarak

$$\mathcal{L}_{a+\mu+\nu}\left\{\Delta_{a+\mu}^{-\nu}(t-a)^{\underline{\mu}}\right\}(s) = \frac{(s+1)^{\nu}}{s^{\nu}}\mathcal{L}_{a+\mu}\{(t-a)^{\underline{\mu}}\}(s)$$

$$= \frac{(s+1)^{\nu}}{s^{\nu}}\Gamma(\mu+1)\mathcal{L}_{a+\mu}\left\{h_{\mu}(t,a)\right\}(s), \quad (2.18)' \text{ den}$$

$$= \frac{(s+1)^{\nu}}{s^{\nu}}\Gamma(\mu+1)\frac{(s+1)^{\mu}}{s^{\mu+1}}$$

$$= \Gamma(\mu+1)\frac{(s+1)^{\mu+\nu}}{s^{\mu+\nu+1}}$$

$$= \Gamma(\mu+1)\mathcal{L}_{a+\mu+\nu}\left\{h_{\mu+\nu}(t,a)\right\}(s)$$

$$= \mathcal{L}_{a+\mu+\nu}\left\{\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(t-a)^{\underline{\mu+\nu}}\right\}(s)$$

olur.

Laplace dönüşümünün birebir olma özelliğinden

$$\Delta_{a+\mu}^{-\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(t-a)^{\underline{\mu+\nu}}, \quad t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$$

dir.

Teorem 3.3.2 Varsayalım ki $f\colon \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ $r \geq 1$ üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. $\nu, \mu > 0$ olarak verilsin. Her $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ için,

$$\Delta_{a+\mu}^{-\nu}\,\Delta_a^{-\mu}f(t) = \Delta_a^{-\nu-\mu}f(t) = \Delta_{a+\nu}^{-\mu}\,\Delta_a^{-\nu}f(t)$$

olur.

İspat Teoremin açıklamasında olduğu gibi $f, r, \nu\ ve\ \mu$ değerleri verilsin. Sonuç 3.1.1' den

$$\mathcal{L}_{a+\mu+\nu}\{\Delta_{a+\mu}^{-\nu}\,\Delta_a^{-\mu} f\},\ \ \mathcal{L}_{a+\mu}\{\,\Delta_a^{-\mu} f\}\ \text{ ve }\ \mathcal{L}_{a+(\nu+\mu)}\left\{\,\Delta_a^{-(\nu+\mu)} f\right\}$$

her biri $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ üzerindedir. Dolayısıyla her $s \in\ \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ için (3.5) eşitliğini birden çok uygulayarak

$$\mathcal{L}_{a+\mu+\nu}\{\Delta_{a+\mu}^{-\nu}\,\Delta_a^{-\mu} f\}(s) = \frac{(s+1)^\nu}{s^\nu}\ \mathcal{L}_{a+\mu}\{\,\Delta_a^{-\mu} f\}(s)$$

$$= \frac{(s+1)^\nu}{s^\nu}\frac{(s+1)^\mu}{s^\mu}\ \mathcal{L}_a\{f\}(s)$$

$$= \frac{(s+1)^{\nu+\mu}}{s^{\nu+\mu}}\ \ \mathcal{L}_a\{f\}(s)$$

$$= \mathcal{L}_{a+(\nu+\mu)}\left\{\,\Delta_a^{-(\nu+\mu)} f\right\}(s)$$

$$= \mathcal{L}_{a+\mu+\nu}\{\,\Delta_a^{-\nu-\mu} f\}(s)$$

dir.

4. LAPLACE DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Bu bölümde Laplace dönüşüm yöntemini kullanarak bir kesirli başlangıç değeri probleminin çözümünü inceleyelim.

Teorem 4.1 $f: \mathbb{N}_a \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \geq 1$ üstel mertebeden bir fonksiyon ve $N-1 < \nu \leq N$ aralığında $\nu > 0$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{cases} \Delta^{\nu}_{a+\nu-N} y(t) = f(t), & t \in \mathbb{N}_a \\ \Delta^{i} y(a+\nu-N) = A_i, & i \in \{0,1,\dots,N-1\};\ A_i \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1}$$

kesirli başlangıç değer probleminin tek çözümü $i \in \{0,1,\dots,\ N-1\}$ için

$$\alpha_i := \sum_{p=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} (i-k)^{\underline{N-\nu}} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} A_p$$

olmak üzere

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (t-a)^{\underline{i+\nu-N}} + \Delta_a^{-\nu} f(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$$

şeklindedir.

İspat f, r üstel mertebeden bir fonksiyon olduğu için $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ üzerinde $\mathcal{L}_a\{f\}$ mevcut olduğunu biliyoruz. Yani, Laplace dönüşümünü (4.1) diferensiyel denkleminin her iki tarafına uygulanır ve ardından (3.7) kullanılarak $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ için,

$$\mathcal{L}_a\{\Delta^{\nu}_{a+\nu-N} y\}(s) = \mathcal{L}_a\{f\}(s)$$

$$\Longrightarrow s^{\nu}(s+1)^{N-\nu}\, \mathcal{L}_{a+\nu-N}\{y\}(s) - \sum_{j=0}^{N-1} s^j \Delta^{\nu-j-1}_{a+\nu-N} y(a) = \mathcal{L}_a\{f\}(s)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_{a+\nu-N}\{y\}(s) = \frac{\mathcal{L}_a\{f\}(s)}{s^{\nu}(s+1)^{N-\nu}} + \sum_{j=0}^{N-1} s^j \frac{\Delta_{a+\nu-N}^{\nu-j-1} y(a)}{s^{\nu-j}(s+1)^{\mathrm{N}-\nu}}$$

olur. Önceki (3.6) eşitliğinden

$$\frac{\mathcal{L}_a\{f\}(s)}{s^{\nu}(s+1)^{N-\nu}} = \mathcal{L}_{a+\nu-N}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s)$$

olarak bulunur. Sonraki toplam terimleri göz önünde bulundurarak her sabit $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ için,

$$\frac{1}{s^{\nu-j}(s+1)^{N-\nu}} = \frac{1}{(s+1)^{N-j-1}} \frac{(s+1)^{\nu-j-1}}{s^{\nu-j}}, \qquad \text{(2.18) eşitliğinden}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^{N-j-1}} \mathcal{L}_{a+\nu-j-1}\{h_{\nu-j-1}(t,a)\}(s), \qquad \text{(2.15) ile}$$

$$= \mathcal{L}_{a+\nu-N}\{h_{\nu-j-1}(t,a)\}(s) - \sum_{k=0}^{N-j-2} \frac{h_{\nu-j-1}(k+a+\nu-N,a)}{(s+1)^{k+1}}$$

$$= \mathcal{L}_{a+\nu-N}\{h_{\nu-j-1}(t,a)\}(s)$$

olur. Burada her $k \in \{0, \dots, N-j-2\}$ için,

$$h_{\nu-j-1}(k+a+\nu-N,a) = \frac{(k+\nu-N)^{\underline{\nu-j-1}}}{\Gamma(\nu-j)}$$

$$= \frac{\Gamma(k+\nu-N+1)}{\Gamma\big(k-(N-j-2)\big)\Gamma(\nu-j)}$$

$$= 0$$

dır.

Yukarıdaki adımları bir araya getirdiğimizde $s \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{-1}(1)}$ için,

$$\mathcal{L}_{a+\nu-N}\{y\}(s) = \mathcal{L}_{a+\nu-N}\{\Delta_a^{-\nu} f\}(s) + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta_{a+\nu-N}^{\nu-j-1} y(a)\, \mathcal{L}_{a+\nu-N}\left\{h_{\nu-j-1}(t,a)\right\}(s)$$

$$= \mathcal{L}_{a+\nu-N}\left\{\sum_{j=0}^{N-1} \Delta_{a+\nu-N}^{\nu-j-1} y(a) h_{\nu-j-1}(t,a) + \Delta_a^{-\nu} f\right\}(s)$$

olur.

Laplace dönüşümünün birebir özelliğinin uygulanması $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ için,

$$y(\mathrm{t}) = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta_{a+\nu-N}^{\nu-j-1} y(a) h_{\nu-j-1}(t,a) + \Delta_a^{-\nu} f(t)$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Delta_{a+\nu-N}^{\nu-j-1}\, y(a)}{\Gamma(\nu-j)} (t-a)^{\underline{\nu-j-1}} + \Delta_a^{-\nu} f(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\Delta_{a+\nu-N}^{i+\nu-N}\, y(a)}{\Gamma(i+\nu-N+1)}\right) (t-a)^{\underline{i+\nu-N}} + \Delta_a^{-\nu} f(t)$$

sonucuna ulaşmamızı sağlar.

Diğer taraftan $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ için

$$\frac{\Delta_{a+\nu-N}^{i+\nu-N}\, \mathrm{y(a)}}{\Gamma(\mathrm{i}+\nu-\mathrm{N}+1)} = \sum_{\mathrm{p}=0}^{\mathrm{i}} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{i-p}} \frac{(-1)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{i}!} (\mathrm{i}-\mathrm{k})^{\underline{\mathrm{N}-\nu}} \binom{\mathrm{i}}{\mathrm{p}} \binom{\mathrm{i}-\mathrm{p}}{\mathrm{k}} \Delta^{\mathrm{i}} \mathrm{y}(\mathrm{a}+\nu-\mathrm{N})$$

elde edilir.

Teorem 4.1' in ispatı Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak (4.1) kesirli başlangıç değer probleminin nasıl çözüldüğünü gösterir.

Örnek 4.1:

$$\begin{cases} \Delta_{\pi-4}^{\pi}\, y(t) = \pi^4 t^{\underline{2}}, \quad t \in \mathbb{N}_0 \\ y(\pi-4) = 2, \quad \Delta y(\pi-4) = 3, \quad \Delta^2 y(\pi-4) = 5, \quad \Delta^3 y(\pi-4) = 7 \end{cases} \tag{4.2}$$

π'inci mertebeden başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

(4.1) ve (4.2) ifadelerinden

$$a = 0, \qquad \nu = \pi, \qquad N = 4, \qquad f(t) = \pi^4 t^{\underline{2}}$$
$$A_0 = 2, \qquad A_1 = 3, \qquad A_2 = 5, \qquad A_3 = 7$$

yazılır. Buna göre,

$$y(t) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i t^{\underline{i+\pi-4}} + \Delta_0^{-\pi}(\pi^4 t^{\underline{2}})$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \alpha_i t^{\underline{i+\pi-4}} + \Delta_2^{-\pi}(\pi^4 t^{\underline{2}}), \qquad t^{\underline{2}} = t(t-1)$$

$$\approx 0{,}303 t^{\underline{\pi-4}} + 5{,}040 t^{\underline{\pi-3}} + 6{,}977 t^{\underline{\pi-2}} + 4{,}876 t^{\underline{\pi-1}} + 3{,}272 t^{\pi+2}$$

dir. Burada

$$\alpha_i = \sum_{p=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-p} \frac{(-1)^k}{i!} (i-k)^{\underline{4-\pi}} \binom{i}{p} \binom{i-p}{k} A_p, \quad i = 0,1,2,3$$

şeklindedir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Mühendislik ve bilimin farklı alanlarında yaygın olarak kullanılan ayrık kesirli hesaplamalar birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır ve ayrıca kesirli hesaplamalarla ilgili yapılmakta olan çalışmalar teknolojik gelişmelere de büyük katkılar sağlamaktadır. Bu sayede bu alanda yapılan çalışmalar daha çok önem kazanmaktadır.

6. KAYNAKLAR

Andrews, G. E., Askey, R. and Roy, R. (1999). Special Functions, Cambridge University Press, Cambridge.

Atıcı, F. M. and Eloe, P. W. (2003). Discrete Fractional Calculus With The Nabla Operatör, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **3:** 1-12.

Atıcı, F. M. and Eloe, P. W. (2007a). A transform method in discrete fractional calculus, *International Journal of Difference Equations,* **2:** 165–176.

Atıcı, F. M. and Eloe, P. W. (2007b). Fractional q-calculus on a time scale, *J. Nonlinear Mathematical Physics,* **14:** 333-344.

Atıcı, F. M. and Eloe, P. W. (2009). Initial value problems in discrete fractional calculus, *Proceedings of the American Mathematical Society,* **137:** 981–989.

Boros, G. and Moll, V. (2004). Irresistible Integrals: Symbols, Analysis and Experiments in the Evaluation of Integrals, Cambridge University Press, Cambridge.

Diaz, J. B. and Osler, T.J. (1974). Differences of Fractional, *Mathematics of Computation,* **28:** 185-201.

Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. (1994). Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Granger, C. W. J. and Joyeux, R. (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differences, *Journal of Time Series Analysis,* **1:** 15-29.

Gray, H. L. and Zhang, N. F. (1988). On a new definition of the fractional difference, *Mathematics of Computation,* **50:** 513-529.

Holm, M. (2011a). The Laplace Transform in discrete fractional calculus, *Computers and Mathematics with Applications*, **62:** 1591-1601.

Holm, M. (2011b). Sum and difference compositions in discrete fractional calculus, CUBO, *A Mathematics Journal,* **13:** 153-184.

Hosking, J. R. (1981). Fractional differencing, *Biometrika,* **68:** 165-176.

Isaacs, G. L. (1980). Exponential laws for fractional differences, *Math. Comp.,* **35:** 933-936.

Kelley, W. and Peterson, A. (1991). Difference Equations: An Introduction with Applications, Academic Press, London.

Miller, K. S. and Ross, B. (1993). An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations, Academic Press, New York.

Samko, G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1993). Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon.

Spanier, J. and Oldham, K.B. (1974). The Fractional Calculus, Academic Press, New York.

Spanier, J. and Oldham, K. B. (1987). The Pochhammer Polynomials $(x)_n$, *An Atlas of Functions*, Hemisphere, Washington, DC.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Merve ZENGİN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Akşehir – 01/01/1991
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: 0553 654 03 91 / mervebalci@yandex.com.tr

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Akşehir Anadolu Lisesi, (2004 - 2008)
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, (2008 - 2012)
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (2012 - 2018)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Anadolu Birlik Holding (Torku/Konya) (2014 - ...)