RİEMANN-LİOUVİLLE VE HADAMARD TİPLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

DOKTORA TEZİ

Tuğba YALÇIN UZUN

Danışman
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

RİEMANN-LİOUVİLLE VE HADAMARD TİPLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Tuğba YALÇIN UZUN

Danışman

Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Tuğba YALÇIN UZUN tarafından hazırlanan "Riemann-Liouville ve Hadamard Tipli Genelleştirilmiş Kesirli Diferansiyel Denklemler" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 11/05/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Başkan : Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Başak KARPUZ
Dokuz Eylül Üniversitesi
Fen Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../ 2018 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

11/05/2018

Tuğba YALÇIN UZUN

ÖZET

Doktora Tezi

RİEMANN-LİOUVİLLE VE HADAMARD TİPLİ
GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Tuğba YALÇIN UZUN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Kesirli hesabın geçmişi oldukça önceye dayanmaktadır. Kesirli mertebeli diferensiyel ve integrasyon kavramları, tam sayı mertebeli türev ve n katlı integrali genelleştiren kavramlardır. Bu kavramlar ilk olarak 17. yüzyılda Leibniz tarafından ortaya atılmış, sonrasında Euler, Lagrange, Abel, Liouville gibi bir çok matematikçinin çalıştığı bir alan olmuştur.

Dört bölümden oluşan bu çalışmada Reimann-Liouville ve Hadamard tipli genelleştirilmiş kesirli integrali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ ve $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\left[\mathcal{J}_\rho^\alpha f\right](t) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta) f(\eta) \mathrm{d}\eta, & \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}_0^- \\ f(t), & \alpha = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{(-\alpha)} \frac{A_{(-\alpha),i}(\rho)}{t^{(-\alpha)\rho - i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t), & \alpha \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanım daha önce Katugampola'nın yaptığı tanımdan yola çıkılarak elde edilmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde kesirli türev kavramı hakkında genel bir bilgi verilmiş, ikinci bölümde çalışma için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Reimann-Liouville ve Hadamard tipli genelleştirilmiş kesirli integrali ve türevi tanımlanmış ve temel özellikleri verilmiş, son bölümde ise bu kesirli türevi içeren diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerinde durulmuştur.

2018, vi+45 sayfa

Anahtar Kelimeler : Kesirli Türevler, Kesirli İntegraller, Kesirli Diferansiyel Denklemler

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

RIEMANN-LIOUVILLE AND HADAMARD TYPE GENERALIZED FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Tuğba YALÇIN UZUN
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Fractional calculus is based on a very long history. Fractional differential and integration are generalization of integer order derivative and n-times integrals. These notions were originally proposed by Leibniz in the 17th century and then many mathematician worked on this subject like Euler, Lagrange, Abel, Liouville.

In this work, which is consisted of four chapters, Riemann-Liouville and Hadamard type generalized fractional integral defined by

$$\left[\mathcal{J}_\rho^\alpha f\right](t) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta) f(\eta)\mathrm{d}\eta, & \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_0^- \\ f(t), & \alpha = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{(-\alpha)} \frac{A_{(-\alpha),i}(\rho)}{t^{(-\alpha)\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t), & \alpha \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ and $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. In the first chapter of this work,a general knowledge about the fractional derivative. In the second chapter of this work, some basic definitions and theorems, necessary for this work, are given. In the third chapter, Riemann-Liouville and Hadamard type generalized fractional integral and derivative are defined and basic features are given, in the last chapter focused on solution of Riemann-Liouville and Hadamard type generalized fractional differential equations.

2018, vi+45 pages

Keywords: Fractional Derivative, Fractional Integral, Fractional Differential Equations

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca bilgisini ve yardımlarını esirgemeyip sabır ve hoşgörü ile beni destekleyen sayın hocam Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ'a, tezin her aşamasında verdiği destek için değerli hocam Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN'a ve değerli dostum Doç. Dr. Başak KARPUZ'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Beni her zaman destekleyen, bütün zorluklara rağmen ümidini kaybetmeyen bugünlere gelmemde büyük bir pay sahibi olan güzel aileme, her zaman sevgisini ve desteğini hissettiğim sevgili eşime göstermiş oldukları sabır için ve oğlum Çağan'a varlığı için sonsuz teşekkürler.

Tuğba YALÇIN UZUN

AFYONKARAHİSAR 2018

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
Γ	Gamma fonksiyonu
$B(z,\omega)$	Beta fonksiyonu
$\mathrm{E}_\alpha(z)$	Mittag-Leffler fonksiyonu
${}_aD_t^{-\nu}$	Riemann-Liouville kesirli integrali
${}_aD_t^{\nu}$	Riemann-Liouville kesirli türevi
${}_H\mathcal{J}_{a+}^{\alpha}$	Hadamard kesirli integrali
${}_HD_{a+}^{\alpha}$	Hadamard kesirli türevi
$\mathcal{K}_\rho^\alpha(t,s)$	Riemann-Liouville- Hadamard kesirli integralinin çekirdeği
$\mathcal{J}_\rho^\alpha$	Riemann-Liouville- Hadamard kesirli integrali
$\mathcal{D}_\rho^\alpha$	Riemann-Liouville- Hadamard kesirli integrali
$\mathcal{G}_\rho$	Green fonksiyonu

1. GİRİŞ

Kesirli hesabın geçmişi oldukça önceye dayanmaktadır. Kesirli mertebeli diferensiyel ve integrasyon kavramları, tam sayı mertebeli türev ve n katlı integrali genelleştiren kavramlardır. Bu kavramlar ilk olarak 17. yüzyılda Leibniz tarafından orataya atılmış, sonrasında Euler, Lagrange, Abel, Liouville gibi bir çok matematikçinin çalıştığı bir alan olmuştur.

Kesirli diferansiyel teorisi, çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Kesirli mertebeden türev, tam mertebeden türeve göre bu alanlarda çok daha iyi sonuçlar vermektedir ve bu kesirli mertebe türev için çok önemli bir avantajdır. Kesirli mertebe türevler özellikle nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemesinde, akışkanlar teorisinde, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya ve bir çok alanda kullanılmaktadır.

17. yüzyıldan bu yana kesirli türev ve integral için bir çok farklı tanım verilmiştir. Bunlardan en önemlileri Riemann-Liouville, Hadamard, Grünwald-Letkinov, Riesz ve Caputo türevleridir. Bu türevler üzerine bir çok çalışma yapılmıştır ve eksikleri ya da yetersizlikleri fark edilmiş, düzeltilmeye çalışılmıştır. Bu alanda, Diethelm (2010), Kilbas (2006), Samko vd. (1993), Podlubny (1999) ve Oldham vd. (1974) gibi birçok matematikçinin çalışmaları vardır.

Kesirli mertebe türevler, çekirdeği kesirli mertebe olan integraller yardımıyla tanımlanır. Bu tezde, Diethelm (2010), Kilbas (2006), Samko vd. (1993), Podlubny (1999) ve Oldham vd. (1974) nin daha önce çalıştığı Reimann-Liouville ve Butzer vd. (2002), Kilbas (2001), Kilbas (2003) ve Pooseh vd. (2012) nin çalıştığı Hadamard tipli kesirli türevlerin bir genelleştirmesi yapılmıştır.

Katugampola (2011) Riemann-Liouville ve Hadamard tipli kesirli türev ve integralin genelleştirmesini yapmış fakat daha sonraki çalışmasında kesirli türev tanımını yenien vermiştir. Ayrıca, Katugampola (2016) tanımlamış olduğu bu türevi içeren kesirli difernsiyel denklemlerin varlığı ve tekliğini incelemiştir. Katugampola (2016) daha sonra Riemann-Liouville ve Hadamard dışında dört integrali daha içeren genel bir tanım vermiştir.

Katugampola'nın tanımladığı genelleştirilmiş integral ve türev tanımı Akkurt vd. (2015), Almeida vd. (2015), Almeida vd. (2016), Anderson ve Ulness (2015), Atangana vd. (2015), Bayour ve Torres (2017), Iyiola ve Nwaezw (2016), Jaradd vd. (2017), Kaçar vd. (2015), Kaçar vd. (2018), Sarıkaya vd. (2014), Thaiprayoon vd. (2015), Yang vd. (2016), Yıldırım vd. (2016), Zeng (2017) gibi matematikçiler tarafından çalışılmış, yeni eşitsizlikler tanımlanmış ve bu türevin farklı genelleştirmeleri yapılmıştır.

Katugampola (2011) nın tanımladığı Reimann-Liouville ve Hadamard tipli genelleştirilmiş kesirli integral ve türev tanımları mertebenin sadece 0 ve 1 arasında olduğu durumlarda doğru sonuçlar verirken, mertebenin 1'den büyük olduğu durumlarda ise hatalı sonuçlar veriyordu. Bu tezde Katugampola (2014) nın verdiği tanımdan yararlanarak yeni bir genelleştirilmiş kesirli türev ve integral tanımı verilmiş ve bu kesirli türevi içeren diferensiyel denklemlerin çözümü üzerinde durulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olana temel tanım ve teoremlerden bahsedilecektir. Bu bölümde özellikle Gamma, Beta ve Mittag-Leffler fonksiyonları üzerinde durulacak ki bu fonksiyonlar kesirli integral hesap ve kesirli diferansiyel denklemlerde önemli bir rol oynar. Ayrıca Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integral ve türevin temel özelliklerinden bahsedilecektir.

2.1. Gamma Fonksiyonu

Tanım 2.1.1. Gamma fonksiyonu, $\mathrm{Re}(z) > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}\mathrm{d}t$$

integrali yardımıyla tanımlanır.

Gamma fonksiyonunun önemli özelliklerinden biri $z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
$$\Gamma(n+1) = n!$$

dir. $n \in \mathbb{Z}^-$ noktaları gamma fonksiyonunun tekil kutup noktalarıdır.

2.2. Beta Fonksiyonu

Tanım 2.2.1. Beta fonksiyonu $\mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Re}(\omega) > 0$ için

$$B(z,\omega) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{\omega-1}\mathrm{d}\tau$$

integrali ile tanımlanır.

Beta fonksiyonunu,

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}$$

şeklinde Gamma fonksiyonu yardımıyla da ifade edilebilir.

2.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Üstel fonksiyon tam mertebeli diferansiyel denklemlerde önemli bir rol oynar ve 1903 te G. M. Mittag-Leffler tarafından tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir halidir (Podlubny 1999).

Tanım 2.3.1. Mittag-Leffler fonksiyonu $\alpha > 0$ için

$$\mathrm{E}_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

şeklinde tanımlıdır (Podlubny 1999).

Bu fonksiyon bir değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu olarak bilinir. Daha sonra 1953 te Agarwal tarafından iki değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu tanımlanmıştır (Podlubny 1999). Bu fonksiyon özellikle kesirli analizde önemli bir role sahiptir ve aşağıdaki seri yardımıyla tanımlanır:

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Bu tanımdan açıkça görülüyor ki

$$\mathrm{E}_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \mathrm{e}^z$$

ve

$$\mathrm{E}_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \mathrm{E}_{\alpha}(z)$$

sağlanır.

2.4. Reimann-Liouville Kesirli İntegrali ve Türevi

Tanım 2.4.1. $\mathrm{Re}(\nu) > 0$ ve f fonksiyonu, $J' = (a, b)$ aralığında parçalı sürekli ve $J = [a, b]$ sınırlı alt aralıkta integrallenebilir olsun. Bu durumda ν. mertebeden sağdan ve soldan Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla,

$$[\,{}_aD_t^{-\nu} f](t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t - \tau)^{\nu - 1} f(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t > a \tag{2.4.1}$$

ve

$$[\,{}_tD_b^{-\nu}f](t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_t^b(t-\tau)^{\nu-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t<b \tag{2.4.2}$$

şeklinde tanımlanır (Kimeu 2009).

Cauchy formulü, bir f fonksiyonunun n. mertebeden integrali şeklinde yazılabilir:

$$\int_a^x\int_a^{x_{n-1}}\cdots\int_a^{x_1}f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t,$$
$$\int_x^b\int_{x_{n-1}}^b\cdots\int_{x_1}^bf(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}\int_x^b(x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t.$$

Bu eşitliklerin sağ taraflarındaki integraller tam sayı olmayan n değerleri için de geçerli olduğundan Riemann-Liouville kesirli integrali bu integrallerin bir genelleştirmesi olarak ifade edilebilir. Ayrıca,

$${}_aD_t^{-\nu}f(t)=\frac{(t-a)^\nu f(a)}{\Gamma(\nu+1)}+\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_a^t(t-\tau)^\nu f'(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\lim_{\nu\to0}\,{}_aD_t^{-\nu}f(t)=f(a)+\int_a^tf'(\tau)\mathrm{d}\tau=f(a)+\big(f(t)-f(a)\big)=f(t)$$

olduğundan ${}_aD_t^0f(t)=f(t)$ olarak alınabilir.

Lemma 2.4.2. Eğer $f(t)$ fonksiyonu $t\geq a$ için sürekli ise, bu durumda herhangi mertebeden kesirli integral için

$${}_aD_t^{-\nu}\big(\,{}_aD_t^{-\mu}f(t)\big)={}_aD_t^{-\nu-\mu}f(t) \tag{2.4.3}$$

eşitliği sağlanır (Podlubny 1999).

İspat $\mathrm{Re}(\nu),\ \mathrm{Re}(\mu)>0$ için,

$$\begin{aligned}{}_aD_t^{-\nu}\big(\,{}_aD_t^{-\mu}f(t)\big)&=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^t(t-\tau)^{\nu-1}\,{}_aD_\tau^{-\mu}f(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\int_a^t(t-\tau)^{\nu-1}\mathrm{d}\tau\int_a^\tau(\tau-\xi)^{\mu-1}f(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\int_a^tf(\xi)\mathrm{d}\xi\int_\xi^t(\tau-\xi)^{\mu-1}(t-\tau)^{\nu-1}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{\Gamma(\nu+\mu)}\int_a^t(t-\xi)^{\nu+\mu-1}f(\xi)\mathrm{d}\xi=\,{}_aD_t^{-\nu-\mu}f(t)\end{aligned}$$

olur. □

Açık olarak;

$$ {}_aD_t^{-\nu}\big({}_aD_t^{-\mu}f(t)\big) = {}_aD_t^{-\mu}\big({}_aD_t^{-\nu}f(t)\big) = {}_aD_t^{-\nu-\mu}f(t) $$

sağlandığı görülür.

Örnek 2.4.3. $f(t) = (t-a)^\alpha$ fonksiyonunun ν. mertebeden kesirli integrali, $\mathrm{Re}(\nu) > 0$ için

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-\nu}(t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^t (t-\tau)^{\nu-1}(\tau-a)^\alpha \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}(t-a)^{\alpha+\nu}\int_0^1 (1-\xi)^{\nu-1}\xi^\alpha \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}B(\nu,\alpha+1)(t-a)^{\alpha+\nu} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)}(t-a)^{\alpha+\nu} \end{aligned} $$

elde edilir.

Kesirli türevin varlığı, Abel integral denkleminin çözülebilirliği ile alakalıdır. $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonu için Abel integral denklemi

$$ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\phi(t)\mathrm{d}t = f(x), \quad x > a,\ \alpha > 0 \tag{2.4.4} $$

ile verilir. $0 < \alpha < 1$ için

$$ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \quad t > a. $$

Abel integral denklemi alınsın ve bu eşitliğin her iki yanı $(s-t)^{-\alpha}$ ile çarpılarak a'dan s'ye integrali alınırsa,

$$ \begin{aligned} \int_a^s (s-t)^{-\alpha}f(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s \left[\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau\right](s-t)^{-\alpha}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s \left[\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(s-t)^{-\alpha}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau\right]dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^s \phi(\tau)\left[\int_\tau^s (t-\tau)^{\alpha-1}(s-t)^{-\alpha}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^s \phi(\tau) \left[\int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{-\alpha} \mathrm{d}\xi \right] \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^s \phi(\tau) B(\alpha, 1-\alpha) \mathrm{d}\tau \\
&= \Gamma(1-\alpha) \int_a^s \phi(\tau) \mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde,

$$
\int_a^s \phi(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^s (s-t)^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}t
$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanının s'ye göre türevi alınırsa,

$$
\phi(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{\mathrm{d}s} \int_a^s (s-t)^{-\alpha} f(t)\mathrm{d}t \tag{2.4.5}
$$

bulunur. (2.4.5) ifadesine α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi denir (Özen 2003, Özen ve Öztürk 2004).

Tanım 2.4.4. (a, b) aralığında sürekli ve integrallenebilir bir f fonksiyonu için, $k-1 \leq \nu < k$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere ν. mertebeden sağdan ve soldan Riemann kesirli türevi sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{\nu} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(k-\nu)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\nu-1} f(\tau)\mathrm{d}\tau \\
{}_tD_b^{\nu} f(t) &= \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-\nu)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \int_t^b (t-\tau)^{k-\nu-1} f(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlıdır (Kimeu 2009).

Tanımdan açıkça görülüyor ki, $k-1 \leq \nu < k$ için

$$
{}_aD_t^{\nu} f(t) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \Big({}_aD_t^{-(k-\nu)} f(t) \Big)
$$

sağlanır.

Lemma 2.4.5. $\nu > 0$ için

$$
{}_aD_t^{\nu} \Big({}_aD_t^{-\nu} f(t) \Big) = f(t) \tag{2.4.6}
$$

sağlanır (Podlubny 1999).

İspat $k-1 \le \nu < k$ için

$$ {}_aD_t^{-k} f(t) = {}_aD_t^{-(k-\nu)} \Big({}_aD_t^{-\nu} f(t) \Big) $$

olduğundan

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{\nu} \Big({}_aD_t^{-\nu} f(t) \Big) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \Big[{}_aD_t^{-(k-\nu)} \Big({}_aD_t^{-\nu} f(t) \Big) \Big] \\ &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \Big[{}_aD_t^{-k} f(t) \Big] = f(t) \end{aligned} $$

elde edilir. □

Lemma 2.4.6. Eğer $k-1 \le \nu < k$ olmak üzere ${}_aD_t^{\nu} f(t)$ kesirli türevi integrallenebiliyorsa, bu durumda

$$ {}_aD_t^{-\nu} \big({}_aD_t^{\nu} f(t) \big) = f(t) - \sum_{i=1}^{k} \big[{}_aD_t^{\nu-i} f(t) \big]_{t=a} \frac{(t-a)^{\nu-i}}{\Gamma(\nu-i+1)} \tag{2.4.7} $$

olur (Podlubny 1999).

İspat İlk olarak,

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-\nu} \big({}_aD_t^{\nu} f(t) \big) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu-1} \; {}_aD_\tau^{\nu} f(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big\{ \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu} \; {}_aD_\tau^{\nu} f(\tau) \mathrm{d}\tau \Big\} \end{aligned} \tag{2.4.8} $$

eşitliği kullanılır ve kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$ \begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu} \; {}_aD_\tau^{\nu} f(\tau) \mathrm{d}\tau &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\tau^k} \big\{ {}_aD_\tau^{-(k-\nu)} f(\tau) \big\} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu-k} \big\{ {}_aD_\tau^{-(k-\nu)} f(\tau) \big\} \mathrm{d}\tau \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} \Big[\frac{\mathrm{d}^{k-i}}{\mathrm{d}t^{k-i}} \big({}_aD_t^{-(k-\nu)} f(t) \big) \Big]_{t=a} \frac{(t-a)^{\nu-i+1}}{\Gamma(2+\nu-i)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu-k} \big\{ {}_aD_\tau^{-(k-\nu)} f(\tau) \big\} \mathrm{d}\tau \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} \big[{}_aD_t^{\nu-i} f(t) \big]_{t=a} \frac{(t-a)^{\nu-i+1}}{\Gamma(2+\nu-i)} \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
&= {}_aD_t^{-(\nu-k+1)}\big({}_aD_t^{-(k-\nu)} f(t)\big) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{k} \big[{}_aD_t^{\nu-i} f(t)\big]_{t=a} \frac{(t-a)^{\nu-i+1}}{\Gamma(2+\nu-i)} \\
&= {}_aD_t^{-1} f(t) - \sum_{i=1}^{k} \big[{}_aD_t^{\nu-i} f(t)\big]_{t=a} \frac{(t-a)^{\nu-i+1}}{\Gamma(2+\nu-i)}
\end{aligned}
\tag{2.4.9}
$$

elde edilir. (2.4.8) ve (2.4.9) eşitlikleri kullanılarak ispat tamamlanır. □

Bu durumda $0 < \nu < 1$ için

$$
{}_aD_t^{-\nu}\big({}_aD_t^{\nu} f(t)\big) = f(t) - \big[{}_aD_t^{\nu-1} f(t)\big]_{t=a} \frac{(t-a)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \tag{2.4.10}
$$

olur. (2.4.6) ve (2.4.7) özellikleri aşağıdaki özelliklerin birer özel halleridir:

$$
{}_aD_t^{\nu}\big({}_aD_t^{-\mu} f(t)\big) = {}_aD_t^{\nu-\mu} f(t), \quad \nu \geq \mu \geq 0, \tag{2.4.11}
$$

$$
{}_aD_t^{-\nu}\big({}_aD_t^{\mu} f(t)\big) = {}_aD_t^{\mu-\nu} f(t) - \sum_{i=1}^{k} \big[{}_aD_t^{\mu-i} f(t)\big]_{t=a} \frac{(t-a)^{\nu-i+1}}{\Gamma(1+\nu-i)}, \quad 0 \leq k-1 < \mu < k. \tag{2.4.12}
$$

Örnek 2.4.7. $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ fonksiyonunun ν. mertebeden kesirli türevi, $k-1 \leq \nu < k$ olmak üzere

$$
{}_aD_t^{\nu} f(t) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\big({}_aD_t^{-(k-\nu)} f(t)\big)
$$

ve

$$
{}_aD_t^{-\nu}\big((t-a)^{\alpha}\big) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+\nu)}(t-a)^{\alpha+\nu}
$$

olduğundan

$$
{}_aD_t^{\nu}\big((t-a)^{\alpha}\big) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-\nu)}(t-a)^{\alpha-\nu}
$$

elde edilir.

2.5. Hadamard Kesirli İntegral ve Türevi

Tanım 2.5.1. $f \in L^p[a,b]$, $0 \leq a \leq t \leq b \leq \infty$ fonksiyonunun α. mertebeden Hadamard kesirli integrali

$$
({}_H\mathcal{J}_{a+}^{\alpha}) f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} f(s) \frac{\mathrm{d}s}{s} \tag{2.5.1}
$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $({}_{H}\mathcal{J}^{0}_{a+})f(t) = f(t)$ dir (Samko *et al.* 1993).

Tanım 2.5.2. $0 < a < b < \infty$, $\delta = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ve $AC^{n}_{\delta}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \delta^{n-1}[f(t)] \in AC[a,b]\}$ olsun. $f \in AC^{n}_{\delta}[a,b]$ fonksiyonunun α. mertebeden Hadamard kesirli türevi,

$$({}_{H}D^{\alpha}_{a+})f(t) = \delta^{n}({}_{H}\mathcal{J}^{n-\alpha}_{a+}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} f(s)\frac{\mathrm{d}s}{s} \tag{2.5.2}$$

şeklindedir. Burada, $n-1 < \alpha < n$ ve $AC[a,b]$, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonların kümesidir (Kilbas 2003).

Bu tanımlar $a = 0$ için Hadamard tarafından 1892 de verilmiştir. 1993 te Kilbas, α. mertebeden Hadamard tipli kesirli integral ve türevi

$$({}_{H}\mathcal{J}^{\alpha}_{a+,\mu}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}\left(\frac{s}{t}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s)\frac{\mathrm{d}s}{s} \tag{2.5.3}$$

$$({}_{H}D^{\alpha}_{a+,\mu})f(t) = t^{-\mu}\delta^{n}t^{\mu}({}_{H}\mathcal{J}^{n-\alpha}_{0+,\mu}f)(t) \tag{2.5.4}$$

şeklinde daha genel bir tanımla vermiştir. $\mu = 0$ için (2.5.1) ve (2.5.2) Hadamard kesirli integral ve türevi elde edilir (Kilbas 2003).

Tanım 2.5.3. Reel değerli bir $f(t)$ fonksiyonu için $f_1(t) \in C[0,\infty]$ olmak üzere $f(t) = t^{p}f_1(t)$ olacak şekilde en az bir $p > \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ varsa f fonksiyonuna C_μ uzayındadır denir (Yıldırım and Kırtay 2014).

Tanım 2.5.4. Bir $f(t) \in C_\mu, t > 0$ fonksiyonu için

$$L_{p,k}(a,b) = \left\{ f : \|f\|_{L_{p,k}(a,b)} = \left(\int_{a}^{b} |f(t)|^{p}t^{k}dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 1 \le p < \infty,\ k \ge 0 \right\}$$

oluyorsa f fonksiyonuna $L_{p,k}(a,b)$ uzayındadır denir (Yıldırım and Kırtay 2014).

Tanım 2.5.5. $X^{p}_{c}(a,b)$, $(c \in \mathbb{R}, 1 \le p > \infty)$ $[a,b]$ aralığında reel değerli Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır, öyle ki,

$$\|f\|_{X^{p}_{c}} = \left(\int_{a}^{b} |t^{c}f(t)|^{p}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, (c \in \mathbb{R}, 1 \le > \infty)$$

ve $p = \infty$ için

$$\|f\|_{X^{p}_{c}} = ess \sup_{a \le t \le b} |t^{c}f(t)|, c \in \mathbb{R}. \tag{2.5.5}$$

Özel olarak, $c = \frac{k+1}{p}$ $(1 \le p < \infty, k \ge 0)$ alınırsa $X_c^p(a,b)$ uzayı ile $L_{p,k}(a,b)$ uzayı ve $c = \frac{1}{p}$ $(1 \le p < \infty)$ alınırsa $X_c^p(a,b)$ uzayı ile $L^p(a,b)$ uzayı çakışır (Yıldırım and Kırtay 2014).

Lemma 2.5.6. $\alpha, \beta > 0$, $0 < a < b < \infty$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $f \in X_\mu(a,b)$ fonksiyonu için

$$ {}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\alpha} \; {}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\beta} f = \; {}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\alpha+\beta} f \tag{2.5.6}$$

yarı-grup özelliği sağlanır (Kilbas 2003).

İspat Fubini teoremi uygulanarak

$$\begin{aligned}
({}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\alpha} \; {}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\beta} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu} \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau \left(\frac{s}{\tau}\right)^{\mu} \left(\log\frac{\tau}{s}\right)^{\beta-1} f(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}\right] \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \\
&= \frac{t^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \left[\int_a^\tau s^{\mu-1} \left(\log\frac{\tau}{s}\right)^{\beta-1} f(s) ds\right] \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \\
&= \frac{t^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t s^{\mu-1} f(s) \left[\int_s^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{\tau}{s}\right)^{\beta-1} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\right] \mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

elde edilir. İçerideki integralde $u = \log(\tau/s)/\log(t/s)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_s^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{\tau}{s}\right)^{\beta-1} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} &= \int_0^1 \left(u\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \left((1-u)\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \log\frac{t}{s}\mathrm{d}u \\
&= \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}\mathrm{d}u \\
&= \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} B(\beta,\alpha) = \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade (2.5.7)'de yazılırsa

$$({}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\alpha} \; {}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\beta} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\mu} \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} f(s)\frac{\mathrm{d}s}{s} = ({}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\alpha+\beta} f)(t)$$

elde edilir. □

Lemma 2.5.7. $\alpha > \beta > 0$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $f \in X_\mu(a,b)$ için

$$ {}_H D_{a+,\mu}^{\beta} \; {}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\alpha} f = \; {}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\alpha-\beta} f \tag{2.5.8}$$

olur. Özel olarak $\beta = m \in \mathbb{N}$ ise

$$ {}_H D_{a+,\mu}^{m} \; {}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\alpha} f = \; {}_H\mathcal{J}_{a+,\mu}^{\alpha-m} f \tag{2.5.9}$$

sağlanır (Kilbas 2003).

İspat $m-1<\beta\leq m,\ m\in\mathbb{N}$ olsun. O halde $\beta=m$ ise

$$({}_H D^m_{a+,\mu})f(t)=t^{-\mu}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m t^{\mu}f(t) \tag{2.5.10}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
({}_H D^m_{a+,\mu}\ {}_H\mathcal{J}^{\alpha}_{a+,\mu}f)(t) &= t^{-\mu}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{m-1} t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\mu}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}\\
&= t^{-\mu}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{m-1}\frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t s^{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}\\
&= t^{-\mu}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{m-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t s^{\mu}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-2} f(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}\\
&= t^{-\mu}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{m-1} t^{\mu}({}_H\mathcal{J}^{\alpha-1}_{a+,\mu}f)(t)
\end{aligned}$$

olur. Bu işlem $k,\ 1\leq k\leq m$ kere tekrarlanırsa

$$({}_H D^m_{a+,\mu}\ {}_H\mathcal{J}^{\alpha}_{a+,\mu}f)(t)=t^{-\mu}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{m-k} t^{\mu}({}_H\mathcal{J}^{\alpha-k}_{a+,\mu}f)(t)$$

olur ki $k=m$ için (2.5.9) elde edilir. Eğer $m-1<\beta<m$ ise

$${}_H D^{\beta}_{a+,\mu}\ {}_H\mathcal{J}^{\alpha}_{a+,\mu}f={}_H D^m_{a+,\mu}\ {}_H\mathcal{J}^{m-\beta}_{a+,\mu}\ {}_H\mathcal{J}^{\alpha}_{a+,\mu}f={}_H D^m_{a+,\mu}\ {}_H\mathcal{J}^{m+\alpha-\beta}_{a+,\mu}f={}_H\mathcal{J}^{\alpha-\beta}_{a+,\mu}f$$

olur. □

Lemma 2.5.8. $\alpha>0$ ve $\mu\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $f\in X_\mu(a,b)$ için

$${}_H D^{\alpha}_{a+,\mu}\ {}_H\mathcal{J}^{\alpha}_{a+,\mu}f=f \tag{2.5.11}$$

sağlanır.

Bir kuvvet fonksiyonun Hadamard tipli kesirli integrali hesaplandığında tamamlanmamış Gamma fonksiyonu,

$$\gamma(\nu,x)=\int_0^x t^{\nu-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ \nu>0,\ x\geq 0 \tag{2.5.12}$$

elde edilir.

Lemma 2.5.9. $\alpha > 0$, $a \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu + \nu > 0$ olsun. Bu durumda,

$$({}_H\mathcal{J}^{\alpha}_{a+,\mu} *^{\nu})(t) = \frac{\gamma(\alpha, (\nu+\mu)\log(t/a))}{\Gamma(\alpha)}(\mu+\nu)^{-\alpha} t^{\nu} \tag{2.5.13}$$

olur. Özel olarak $\mu = 0$ ve $\nu > 0$ için

$$({}_H\mathcal{J}^{\alpha}_{a+} *^{\nu})(t) = \frac{\gamma(\alpha, \nu\log(t/a))}{\Gamma(\alpha)}\nu^{-\alpha} t^{\nu} \tag{2.5.14}$$

olur (Kilbas 2003).

İspat

$$\begin{aligned}
({}_H\mathcal{J}^{\alpha}_{a+,\mu} *^{\nu})(t) &= \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\mu+\nu-1} \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \\
&= \frac{t^{\nu}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\log(t/a)} \mathrm{e}^{-\tau(\mu+\nu)}\, \tau^{\alpha-1} \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{t^{\nu}}{\Gamma(\alpha)} (\mu+\nu)^{-\alpha} \int_a^{(\mu+\nu)\log(t/a)} \mathrm{e}^{u}\, u^{\alpha-1} \mathrm{d}u \\
&= \frac{\gamma(\alpha, (\nu+\mu)\log(t/a))}{\Gamma(\alpha)}(\mu+\nu)^{-\alpha} t^{\nu}
\end{aligned}$$

olup ispat biter. □

Sonuç 2.5.10. $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu + \nu > 0$ olsun. Bu durumda,

$$({}_H\mathcal{J}^{\alpha}_{0+,\mu} *^{\nu})(t) = (\mu+\nu)^{-\alpha} t^{\nu}, \quad ({}_H D^{\alpha}_{0+,\mu} *^{\nu})(t) = (\mu+\nu)^{\alpha} t^{\nu} \tag{2.5.15}$$

ve özel olarak $\mu = 0$, $\nu > 0$ için

$$({}_H\mathcal{J}^{\alpha}_{0+} *^{\nu})(t) = \nu^{-\alpha} t^{\nu}, \quad ({}_H D^{\alpha}_{0+} *^{\nu})(t) = \nu^{\alpha} t^{\nu} \tag{2.5.16}$$

olur (Kilbas 2003).

2.6. Laplace Dönüşümü

Tanım 2.6.1. f karmaşık değerli bir fonksiyon ve $s \in \mathbb{C}$ olsun. f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\mathrm{d}t \tag{2.6.1}$$

integrali ile tanımlanır (Schiff 1999).

Laplace dönüşümünün var olması için f fonksiyonunun bir üstel fonksiyondan daha hızlı büyümemesi gerekir. Bu ise fonksiyonun üstel mertebeden olması demektir.

Tanım 2.6.2. Bir f fonksiyonuna eğer $t_0 \geq 0$ için

$$|f(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{\alpha t},\ t \geq t_0$$

olacak şekilde $M > 0$ ve α varsa f üstel mertebedendir denir.

Laplace dönüşümü lineer bir operatördür ve bu dönüşümün en önemli özelliklerinden biri konvolüsyon teoremidir. Bu teorem, iki fonksiyonun konvolüsyonunun Laplace dönüşümünün Laplace dönüşümlerinin çarpımına eşit olduğunu ifade eder. Yani,

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

iki fonksiyonun konvolüsyonu olmak üzere

$$\mathcal{L}\big((f * g)(t)\big) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)\mathcal{L}\big(g(t)\big)$$

sağlanır.

Örnek 2.6.3. $\mu > -1$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\mathcal{L}\{t^\mu\} = \int_0^\infty t^\mu\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s^{\mu+1}}\int_0^\infty u^\mu\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}} \tag{2.6.2}$$

ve

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-a} \tag{2.6.3}$$

olur.

2.6.1. Reimann-Liouville Kesirli İntegralinin Laplace Dönüşümü

$f(t)$ fonksiyonunun ν. mertebeden Reimann-Liouville kesirli integrali

$$[\,{}_0D_t^{-\nu}f](t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

aslında bir konvolüsyon integralidir.

Bu durumda,

$$\mathcal{L}\{[\,{}_0D_t^{-\nu}f](t)\} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\mathcal{L}\{t^{\nu-1}\}\mathcal{L}\{f(t)\} = s^{-\nu}F(s),\ \nu > 0 \tag{2.6.4}$$

olur. (2.6.4) denklemi kesirli integralin Laplace dönüşümüdür.

Örnek 2.6.4. $\mu > -1$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\nu > 0$ için

$$\mathcal{L}\{\,{}_0D_t^{-\nu}t^{\mu}\} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+\nu+1}} \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}\{\,{}_0D_t^{-\nu}\,\mathrm{e}^{at}\} = \frac{1}{s^{\nu}(s-a)} \tag{2.6.5}$$

olur.

2.6.2. Reimann-Liouville Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü

Tam mertebeden türevin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}f^{(k)}(0^+)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$[\,{}_0D_t^{\nu}f](t) = [D_t^n(\,{}_0D_t^{-(n-\nu)}f)](t)$$

olduğundan Reimann-Liouville kesirli integralinin Laplace dönüşümü, $n-1 \le \nu < n$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\,{}_0D_t^{\nu}f(t)\} &= \mathcal{L}\{D_t^n\,{}_0D_t^{-(n-\nu)}f(t)\} \\
&= s^n\mathcal{L}\{\,{}_0D_t^{-(n-\nu)}f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^k[\,{}_0D_t^{-(n-\nu)}f(t)]_{t=0} \\
&= s^n(s^{-(n-\nu)}F(s)) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k-(n-\nu)}f(0^+) \\
&= s^{\nu} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k-n+\nu}f(0^+) \qquad (2.6.6)
\end{aligned}$$

olur.

2.6.3. Mittag-Leffler Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü

$\rho, \alpha, \beta, s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0, \mathrm{Re}(\gamma) > 0, \mathrm{Re}(\rho) > 0, \mathrm{Re}(a) > 0$ ve $\left|\frac{t}{s^\rho}\right| < 1$ olmak üzere Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, t^{\rho-1}\, \mathrm{E}_{\alpha,\beta}(at^\gamma)\mathrm{d}t = \frac{1}{s^\rho}\ {}_2\psi_1\left[\begin{matrix}(1,1),(\rho,\gamma)\\(\beta,\alpha)\end{matrix}\middle|\frac{a}{s^\rho}\right] \tag{2.6.7}$$

olur. Burada ${}_2\psi_1$ genelleştirilmiş Wright fonksiyonudur. Özel olarak, $\rho = \beta,\ \gamma = \alpha,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0$ alınırsa,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, t^{\beta-1}\, \mathrm{E}_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\mathrm{d}t = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a} \tag{2.6.8}$$

olur. (2.6.8) te $s = 1$ alınırsa,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{\beta-1}\, \mathrm{E}_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\mathrm{d}t = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1 \tag{2.6.9}$$

(2.6.9) denkleminde $\beta = 1$ alınırsa,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{E}_{\alpha,1}(at^\alpha)\mathrm{d}t = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1 \tag{2.6.10}$$

olur. Ayrıca, (2.6.8) denkleminde $\beta = 1$ için

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{E}_{\alpha,1}(at^\alpha)\mathrm{d}t = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}, \quad \left|\frac{a}{s^\alpha}\right| > 1 \tag{2.6.11}$$

olur.

Laplace teoreminin konvolüsyon teoreminden

$$\begin{aligned}\int_0^t \tau^{\beta-1}\, \mathrm{E}_{\alpha,\beta}(a\tau^\alpha)(t-\tau)^{\gamma-1}\, \mathrm{E}_{\alpha,\gamma}(-a(t-\tau)^\alpha)\mathrm{d}\tau &= \mathcal{L}\{t^{\beta-1}\, \mathrm{E}_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\}\mathcal{L}\{t^{\gamma-1}\, \mathrm{E}_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)\}\\ &= \left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}\right]\left[\frac{s^{\alpha-\gamma}}{s^\alpha + a}\right]\\ &= \frac{s^{2\alpha-(\beta+\gamma)}}{s^{2\alpha} - a^2}\\ &= t^{\beta+\gamma-1}\, \mathrm{E}_{2\alpha,\beta+\gamma}(a^2t^{2\alpha}) \qquad (2.6.12)\end{aligned}$$

elde edilir.

3. RİEMANN-LİOUVİLLE VE HADAMARD TİPLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL VE TÜREV

Katugampola (2011), Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integrallerinin bir genelleştirmesini yapmıştır. Bu genelleştirme, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_a^x \tau_1^\rho \mathrm{d}\tau_1 \int_a^{\tau_1} \tau_2^\rho \mathrm{d}\tau_2 \ldots \int_a^{\tau_{n-1}} \tau_n^\rho f(\tau_n)\mathrm{d}\tau_n = \frac{(\rho+1)^{1-n}}{(n-1)!} \int_a^x (t^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{n-1} \tau^\rho f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.1}$$

katlı integralin bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır ve Katugampola genelleştirilmiş kesirli integralin tanımını $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq -1$ olmak üzere

$${}^\rho_a\mathcal{I}^\alpha_t f(t) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^\rho f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.2}$$

şeklinde vermiştir. $\rho = 0$ için Riemann-Liouville kesirli integrali, $\rho \to -1^+$ için ise Hadamard kesirli integrali elde edilir. Katugampola (2011) yaptığı çalışmada Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli türevlerinin bir genelleştirmesini $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ ve $\rho > 0$ için

$${}^\rho\mathcal{D}^\alpha_a f(t) = \frac{(\rho+1)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \int_a^t (t^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{n-\alpha-1} \tau^\rho f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.3}$$

şeklinde vermiştir.

Daha sonra Katugampola (2014), genelleştirilmiş kesirli türevi $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ ve $\rho > 0$ için

$${}^\rho\mathcal{D}^\alpha_a f(t) = \frac{(\rho+1)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \int_a^t (t^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{n-\alpha-1} \tau^\rho f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlamıştır. Katugampola'nın verdiği her iki kesirli türev tanımı da $0 \leq \mathrm{Re}(\alpha) < 1$ olduğu durumda düzgün bir şekilde çalışmasına rağmen $n-1 \leq \mathrm{Re}(\alpha) < n$ için doğru sonuçlar vermemektedir.

Bu çalışmada, Katugampola'nın vermiş olduğu genelleştirilmiş kesirli integralin daha genel hali ve yeni tanımlanan genelleştirilmiş kesirli türevi kullanılacaktır. Çekirdek fonksiyonu şu şekilde verilsin: $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ ve $\rho \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\mathcal{K}^\alpha_\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ çekirdek fonksiyonu, $s, t \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{K}^\alpha_\rho(t,s) := \frac{[t^\rho - s^\rho]^{\alpha-1} s^{\rho-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \tag{3.5}$$

olarak tanımlıdır. $\alpha \in \mathbb{Z}_0^-$ için $\mathcal{K}_\rho^\alpha(t,s) \equiv 0$ alınsın. Ayrıca, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ ve $\rho \in \mathbb{R}^+$ için

$$A_{n,k}(\rho) := \begin{cases} [1-(n-1)\rho]A_{n-1,1}(\rho), & k=1 \\ A_{n-1,k-1}(\rho) + [k-(n-1)\rho]A_{n-1,k}(\rho), & k = 2, 3, \cdots, n-1 \\ 1, & k=n \end{cases} \tag{3.6}$$

fonksiyonu tanımlansın. Şimdi Katugampola'nın yapmış olduğu kesirli integral tanımının daha genel hali verilebilir.

Tanım 3.1 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ ve $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ olsun. f fonksiyonunun α. mertebeden kesirli integrali $t > 0$

$$\big[\mathcal{J}_\rho^\alpha f\big](t) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta) f(\eta) \mathrm{d}\eta, & \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}_0^- \\ f(t), & \alpha = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{(-\alpha)} \frac{A_{(-\alpha),i}(\rho)}{t^{(-\alpha)\rho - i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t), & \alpha \in \mathbb{Z}^- \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklindedir (Karpuz *et al.* 2017).

Uyarı 3.2 Açık olarak görülüyor ki, δ Kronecker'in deltası olmak üzere, $A_{n,k}(1) = \delta_{n,k}$ dır. Buradan, $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ için $\mathcal{J}_\rho^\alpha f = f^{(-\alpha)}$ olur.

Örnek 3.3 $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$, $\nu \in (-1, \infty)$ ve $\rho \in \mathbb{R}^+$ için

$$\big[\mathcal{J}_\rho^\alpha *^{\rho\nu}\big](t) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\rho^\alpha \Gamma(\nu+\alpha+1)} t^{\rho(\nu+\alpha)} \ t > 0.$$

$\alpha = 0$ için sonuç aşikardır. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olsun ve $t > 0$ için hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \big[\mathcal{J}^\alpha *^{\rho\nu}\big](t) &= \int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta) \eta^{\rho\nu} \mathrm{d}\eta \\ &= \int_0^t \frac{[t^\rho - \eta^\rho]^{\alpha-1} \eta^{\rho-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \eta^{\rho\nu} \mathrm{d}\eta \\ &= \frac{t^{\rho(\alpha+\nu)}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 [1-\zeta]^{\alpha-1} \zeta^\nu \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{t^{\rho(\alpha+\nu)}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \mathrm{B}(\alpha, \nu+1) \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+\nu+1)} t^{\rho(\alpha+\nu)} \end{aligned}$$

olur.

Lemma 3.4 $\mathcal{K}$ çekirdek fonksiyonunun bazı temel özellikleri şu şekildedir.

(i) $t \geq s \geq 0$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$ için $\displaystyle\int_s^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)\mathcal{K}_\rho^\beta(\eta,s)\mathrm{d}\eta = \mathcal{K}_\rho^{\alpha+\beta}(t,s)$ dir.

(ii) $s, t \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $t^{\rho-1}\mathcal{K}_\rho^\alpha(t,s) = (-1)^{\alpha-1}s^{\rho-1}\mathcal{K}_\rho^\alpha(s,t)$ dir.

(iii) $s, t \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ için $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}_\rho^{\alpha+1}(t,s) = t^{\rho-1}\mathcal{K}_\rho^\alpha(t,s)$ dir.

(iv) $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $t \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ için $\dfrac{\partial}{\partial s}\dfrac{\mathcal{K}_\rho^{\alpha+1}(t,s)}{s^{\rho-1}} = -\mathcal{K}_\rho^\alpha(t,s)$ dir.

İspat (i) $t \geq s \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
\int_s^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)\mathcal{K}_\rho^\beta(\eta,s)\mathrm{d}\eta &= \int_s^t \frac{[t^\rho-\eta^\rho]^{\alpha-1}\eta^{\rho-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\frac{[\eta^\rho-s^\rho]^{\beta-1}s^{\rho-1}}{\rho^{\beta-1}\Gamma(\beta)}\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{\rho^{\alpha+\beta-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_s^t [t^\rho-\eta^\rho]^{\alpha-1}\eta^{\rho-1}[\eta^\rho-s^\rho]^{\beta-1}s^{\rho-1}\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{[t^\rho-s^\rho]^{\alpha+\beta-1}s^{\rho-1}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 [1-\zeta]^{\alpha-1}\zeta^{\beta-1}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{[t^\rho-s^\rho]^{\alpha+\beta-1}s^{\rho-1}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mathrm{B}(\alpha,\beta) \\
&= \frac{[t^\rho-s^\rho]^{\alpha+\beta-1}s^{\rho-1}}{\rho^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)} = \mathcal{K}_\rho^{\alpha+\beta}(t,s).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
t^{\rho-1}\mathcal{K}_\rho^\alpha(t,s) &= t^{\rho-1}\frac{[t^\rho-s^\rho]^{\alpha-1}s^{\rho-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \\
&= s^{\rho-1}(-1)^{\alpha-1}\frac{[s^\rho-t^\rho]^{\alpha-1}t^{\rho-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \\
&= (-1)^{\alpha-1}s^{\rho-1}\mathcal{K}_\rho^\alpha(s,t).
\end{aligned}$$

(iii) $t \geq s \geq 0$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}_\rho^{\alpha+1}(t,s) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{[t^\rho-s^\rho]^{\alpha}s^{\rho-1}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{\alpha\rho t^{\rho-1}[t^\rho-s^\rho]^{\alpha-1}s^{\rho-1}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{t^{\rho-1}[t^\rho-s^\rho]^{\alpha-1}s^{\rho-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \\
&= t^{\rho-1}\mathcal{K}_\rho^\alpha(t,s).
\end{aligned}$$

(iv) İspat, (iii) dekine benzer şekilde yapılır.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\mathcal{K}_\rho^{\alpha+1}(t,s)}{s^{\rho-1}} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{s^{\rho-1}}\frac{(t^\rho - s^\rho)^\alpha s^{\rho-1}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}\right] \\
&= -\frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}\alpha(t^\rho - s^\rho)^{\alpha-1}\rho s^{\rho-1} \\
&= -\frac{(t^\rho - s^\rho)^{\alpha-1} s^{\rho-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \\
&= -\mathcal{K}_\rho^\alpha(t,s).
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.5 $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$
\left[\mathcal{J}_\rho^\alpha f\right](t) = \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{J}_\rho^{\alpha+1} f](t), \quad t>0 \tag{3.8}
$$

sağlanır.

İspat İspat için α'nın tüm durumları ayrı ayrı incelenecektir.

- $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$ olsun. Bu durumda, $t>0$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{J}_\rho^{\alpha+1} f\right](t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \mathcal{K}_\rho^{\alpha+1}(t,\eta) f(\eta)\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{[t^\rho - \eta^\rho]^\alpha \eta^{\rho-1}}{\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)} f(\eta)\mathrm{d}\eta \\
&= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{[t^\rho - \eta^\rho]^\alpha \eta^{\rho-1}}{\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)} f(\eta)\mathrm{d}\eta + \frac{[t^\rho - t^\rho]^\alpha \eta^{\rho-1}}{\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)} f(t) \\
&= \alpha\rho t^{\rho-1}\int_0^t \frac{[t^\rho - \eta^\rho]^{\alpha-1} \eta^{\rho-1}}{\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)} f(\eta)\mathrm{d}\eta \\
&= t^{\rho-1}\int_0^t \frac{[t^\rho - \eta^\rho]^{\alpha-1} \eta^{\rho-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} f(\eta)\mathrm{d}\eta \\
&= t^{\rho-1}\left[\mathcal{J}_\rho^\alpha f\right](t)
\end{aligned}
$$

  olur.

- $\alpha = -1$ olsun.

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{J}_\rho^0 f](t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = t^{\rho-1}\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = t^{\rho-1}\left[\mathcal{J}_\rho^{-1} f\right](t), \quad t>0
$$

  elde edilir.

- $\alpha \in \{\cdots, -3, -2\}$ olsun. Bu durumda $n := -\alpha$ alınırsa, $t > 0$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{J}_\rho^{\alpha+1} f\right](t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{n-1,i}}{t^{(n-1)\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{A_{n-1,i}}{t^{(n-1)\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{A_{n-1,i}}{t^{(n-1)\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{i+1} - [(n-1)\rho - i] \frac{A_{n-1,i}}{t^{(n-1)\rho-i+1}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i \right] f(t) \\
&= t^{\rho-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{A_{n-1,i}}{t^{n\rho-(i+1)}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{i+1} - [(n-1)\rho - i] \frac{A_{n-1,i}}{t^{n\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i \right] f(t) \\
&= t^{\rho-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{n-1,i}}{t^{n\rho-(i+1)}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{i+1} f(t) - \sum_{i=1}^{n-1} [(n-1)\rho - i] \frac{A_{n-1,i}}{t^{n\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t) \right] \\
&= t^{\rho-1} \left[\sum_{i=2}^{n} \frac{A_{n-1,i-1}}{t^{n\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{i} f(t) - \sum_{i=1}^{n-1} [(n-1)\rho - i] \frac{A_{n-1,i}}{t^{n\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t) \right] \\
&= t^{\rho-1} \Bigg[\frac{A_{n-1,n-1}}{t^{n(\rho-1)}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n} f(t) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{A_{n-1,i-1}}{t^{n\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{i} f(t) \\
&\qquad - \sum_{i=2}^{n-1} \big((n-1)\rho - i\big) \frac{A_{n-1,i}}{t^{n\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t) \\
&\qquad - [(n-1)\rho - 1] \frac{A_{n-1,1}}{t^{n\rho-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \Bigg] \\
&= t^{\rho-1} \Bigg[\frac{A_{n-1,n-1}}{t^{n(\rho-1)}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n} f(t) \\
&\qquad + \sum_{i=2}^{n-1} \big[A_{n-1,i-1} - [(n-1)\rho - i] A_{n-1,i} \big] \frac{1}{t^{n\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t) \\
&\qquad - [(n-1)\rho - 1] \frac{A_{n-1,1}}{t^{n\rho-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \Bigg] \\
&= t^{\rho-1} \left[\frac{A_{n,n}}{t^{n(\rho-1)}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n} f(t) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{A_{n,i}}{t^{n\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t) + \frac{A_{n,1}}{t^{n\rho-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \right] \\
&= t^{\rho-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{n,i}}{t^{n\rho-i}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i f(t) = t^{\rho-1} \left[\mathcal{J}_\rho^{\alpha} f\right](t)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylelikle ispat tamamlanır. □

Lemma 3.5 ten bir fonksiyonun kesirli türevinin tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 3.6 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ ve $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ olsun. f fonksiyonun α. mertebeden kesirli türevi

$$\big[\mathcal{D}_\rho^\alpha f\big](t) := \begin{cases} \big[\mathcal{J}_\rho^{-\alpha} f\big](t), & \alpha \in \mathbb{R}_0^- \\ \dfrac{1}{t^{\rho-1}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\big](t), & \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

şeklindedir (Karpuz *et al.* 2017).

Örnek 3.7 $\alpha, \nu \in \mathbb{R}_0^+$ ve $\rho \in \mathbb{R}^+$ için

$$\big[\mathcal{D}_\rho^\alpha *^{\rho\nu}\big](t) = \frac{\rho^\alpha \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} t^{\rho(\nu-\alpha)}, \quad t > 0. \tag{3.9}$$

$\alpha \in [0,1)$ olsun. Bu durumda $t > 0$ için

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{D}_\rho^\alpha *^{\rho\nu}\big](t) &= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} *^{\rho\nu}\big](t) = \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{J}_\rho^{1-\alpha} *^{\rho\nu}\big](t) \\ &= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\rho^{1-\alpha}\Gamma\big(\nu+(1-\alpha)+1\big)} t^{\rho(\nu+(1-\alpha))} \\ &= \frac{\rho^\alpha \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} t^{\rho(\nu-\alpha)}\end{aligned}$$

olur. O halde $\alpha \in [0,1)$ için (3.9) doğrudur. $n \in \mathbb{Z}_0^+$ olsun ve her $\alpha \in [n, n+1)$ için (3.9) eşitliğinin doğru olduğu kabul edilsin. Tanım 3.6 dan herhangi bir $\alpha \in [n+1, n+2)$ için

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{D}_\rho^\alpha *^{\rho\nu}\big](t) &= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} *^{\rho\nu}\big](t) = \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\big(\nu-(\alpha-1)+1\big)} t^{\rho(\nu-(\alpha-1))} \\ &= \frac{\rho^\alpha \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} t^{\rho(\nu-\alpha)}, \quad t > 0\end{aligned}$$

olur. İspat tamamlanır.

Lemma 3.8 $\alpha, \rho \in \mathbb{R}^+$ için

$$\big[\mathcal{D}_\rho^\alpha f\big](t) = \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} \frac{A_{\lceil\alpha\rceil,i}(\rho)}{t^{\lceil\alpha\rceil\rho-i}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i \big[\mathcal{J}_\rho^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f\big](t), \quad t > 0$$

sağlanır (Karpuz *et al.* 2017).

İspat

$$\big[\mathcal{D}_\rho^\alpha f\big](t) = \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\big](t) = \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-2} f\big](t)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cdots\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}f\big](t)\cdots\right]\right]\\
&= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cdots\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{J}_\rho^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}f\big](t)\cdots\right]\right]
\end{aligned}
$$

olur. Burada $\lceil\alpha\rceil$ kere türev alınmıştır. $g := \mathcal{J}_\rho^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}f$ alınır ve (3.8) uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha}f\big](t) &= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cdots\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{J}_\rho^{0}g\big](t)\cdots\right]\right]\\
&= \cdots = \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{J}_\rho^{-\lceil\alpha\rceil+1}g\big](t) = \big[\mathcal{J}_\rho^{-\lceil\alpha\rceil}g\big](t)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.6) kullanılarak ispat tamamlanır. □

3.1. Reimann-Liouville ve Hadarmad Tipli Kesirli Türev ve İntegralin Temel Özellikleri

Bu bölümde Reimann-Liouville ve Hadarmad tipli kesirli türev ve integralin sağladığı temel özellikler üzerinde durulacakır.

Teorem 3.1.1. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{D}_\rho^{\alpha} = \mathcal{J}_\rho^{-\alpha}$ olur.

(ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ için $\mathcal{J}_\rho^{\alpha}\mathcal{J}_\rho^{\beta} = \mathcal{J}_\rho^{\alpha+\beta}$ olur.

(iii) $\alpha \in \mathbb{Z}_0^+$ ve $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ veya $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Z}^+$, $(\alpha+\beta) \notin \mathbb{Z}^+$ için $\mathcal{D}_\rho^{\alpha}\mathcal{D}_\rho^{\beta} = \mathcal{D}_\rho^{\alpha+\beta}$ olur.

(iv) I operatörü birim operatör olmak üzere $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{D}_\rho^{\alpha}\mathcal{J}_\rho^{\alpha} = \mathrm{I}$ olur.

(v) $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $\big[\mathcal{J}_\rho^{\alpha}\mathcal{D}_\rho^{\alpha}f\big](t) = f(t) - \displaystyle\sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}\frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)}\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-i}f\big](0^+)$ olur.

İspat (i) $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ için, ispat Lemma 3.8 dekine benzer şekilde ilerlemektedir. $\alpha \in \mathbb{R}^-$ için ispat Tanım 3.6 dan elde edilir.

(ii) $\alpha = 0$ veya $\beta = 0$ için sonuç aşikardır. O halde, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ için,

$$
\begin{aligned}
\big[\mathcal{J}_\rho^{\alpha}\mathcal{J}_\rho^{\beta}f\big](t) &= \int_0^t \mathcal{K}_\rho^{\alpha}(t,\eta)\int_0^\eta \mathcal{K}_\rho^{\beta}(\eta,\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\\
&= \int_0^t\int_0^\eta \mathcal{K}_\rho^{\alpha}(t,\eta)\mathcal{K}_\rho^{\beta}(\eta,\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\\
&= \int_0^t\int_\zeta^t \mathcal{K}_\rho^{\alpha}(t,\eta)\mathcal{K}_\rho^{\beta}(\eta,\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \left[\int_\zeta^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)\mathcal{K}_\rho^\beta(\eta,\zeta)\mathrm{d}\eta\right] f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^t \mathcal{K}_\rho^{\alpha+\beta}(t,\zeta) f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \left[\mathcal{J}_\rho^{\alpha+\beta} f\right](t)
\end{aligned}
$$

olur.

(iii) $\alpha = 0$ veya $\beta = 0$ için sonuç aşikardır. $\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ olsun. Bu durumda,

(a) $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ ve $\beta \in \mathbb{R}^+$ için

$$
\begin{aligned}
\left[\mathcal{D}_\rho^\alpha \mathcal{D}_\rho^\beta f\right](t) &= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cdots \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{D}_\rho^\beta f\right](t)\cdots\right]\right] \\
&= \cdots = \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{D}_\rho^{\beta+(\alpha-1)} f\right](t) = \left[\mathcal{D}_\rho^{\beta+\alpha} f\right](t)
\end{aligned}
$$

olur.

(b) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Z}^+$, $(\alpha+\beta) \notin \mathbb{Z}^+$ için (ii) deki gibi $\mathcal{D}_\rho^\alpha \mathcal{D}_\rho^\beta = \mathcal{D}_\rho^{\alpha+\beta}$ olur.

(iv) (i) ifadesi, (ii) ve (iii) de kullanılırsa ispat tamamlanmış olur.

(v) $\alpha \in \mathbb{R}^+$ kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
\left[\mathcal{J}_\rho^{\alpha+1}\mathcal{D}_\rho^\alpha f\right](t) = &= \left[\mathcal{J}_\rho^{\alpha+1}\frac{1}{*^{\rho-1}}\left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right]'\right](t) = \int_0^t \frac{\mathcal{K}_\rho^{\alpha+1}(t,\eta)}{\eta^{\rho-1}}\left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right]'(\eta)\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{\mathcal{K}_\rho^{\alpha+1}(t,\eta)}{\eta^{\rho-1}}\left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right](\eta)\Bigg|_{\eta=0^+}^{\eta=t} - \int_0^t \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mathcal{K}_\rho^{\alpha+1}(t,\eta)}{\eta^{\rho-1}}\right)\left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right](\eta)\mathrm{d}\eta \\
&= -\frac{[t^\rho - \eta^\rho]^\alpha}{\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right](\eta)\Bigg|_{\eta=0^+}^{\eta=t} + \int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)\left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right](\eta)\mathrm{d}\eta \\
&= \left[\mathcal{J}_\rho^\alpha \mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right](t) - \frac{t^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right](0^+)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada, (ii) kullanılarak

$$
\left[\mathcal{J}_\rho^1 \mathcal{J}_\rho^\alpha \mathcal{D}_\rho^\alpha f\right](t) = \left[\mathcal{J}_\rho^1 \mathcal{J}_\rho^{\alpha-1} \mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right](t) - \frac{t^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right](0^+)
$$

elde edilir. Her iki tarafa D_ρ^1 uygulanırsa (iv) den

$$
\left[\mathcal{J}_\rho^\alpha \mathcal{D}_\rho^\alpha f\right](t) = \left[\mathcal{J}_\rho^{\alpha-1} \mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right](t) - \frac{t^{\rho(\alpha-1)}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\right](0^+)
$$

olur. Bu işlem $\lceil\alpha\rceil$ kere uygulanırsa,

$$\left[\mathcal{J}_\rho^\alpha \mathcal{D}_\rho^\alpha f\right](t) = \left[\mathcal{J}_\rho^{\alpha-\lceil\alpha\rceil} \mathcal{D}_\rho^{\alpha-\lceil\alpha\rceil} f\right](t) - \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} \frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)} \left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-i} f\right](0^+) \tag{3.1.1}$$

elde edilir. Tanım 3.1, Tanım 3.6 ve (ii) den

$$\mathcal{J}_\rho^{\alpha-\lceil\alpha\rceil} \mathcal{D}_\rho^{\alpha-\lceil\alpha\rceil} = \begin{cases} \mathcal{J}_\rho^0 D_\rho^0 = \mathrm{I}, & \alpha \in \mathbb{N} \\ \mathcal{J}_\rho^{\alpha-\lceil\alpha\rceil} \mathcal{J}_\rho^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} = \mathcal{J}_\rho^{(\alpha-\lceil\alpha\rceil)+(\lceil\alpha\rceil-\alpha)} = \mathcal{J}_\rho^0 = \mathrm{I}, & \alpha \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N} \end{cases}$$

olur. (3.1.1) kullanılarak ispat tamamlanır. $\square$

4. RİEMANN-LİOUVİLLE VE HADAMARD TİPLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1. Reimann-Liouville ve Hadamard Tipli Kesirli Diferansiyel Denklemler için Varlık ve Teklik Teoremi

Bu kesimde aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenecektir. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $y_0, y_1, \cdots, y_{\lceil\alpha\rceil-1} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{cases} \big[\mathcal{D}_\rho^\alpha y\big](t) = f\big(t, y(t)\big), & t > 0 \\ \big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k} y\big](0^+) = y_{\lceil\alpha\rceil-k}, & k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil \end{cases} \tag{4.1.1}$$

başlangıç değer problemi verilsin. f fonksiyonu (t, y) düzleminin bir Ω bölgesinde tanımlı ve $R(h, K) \subset \Omega$ bölgesi h ve K birer sabit olmak üzere

$$\left| y(t) - \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} \frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)} \right| \leq K, \quad t \in (0, h)$$

eşitsizliğini sağlayan $(t, y) \in \Omega$ noktalarının bir kümesi olsun.

Teorem 4.1.1 (Varlık Teklik Teoremi)**.** $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci bileşenine göre Lipschitz koşulunu sağlayan bir fonksiyon, yani, bir $L \in \mathbb{R}^+$ için

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad (t, y_1), (t, y_2) \in \Omega$$

ve Ω kümesi üzerinde sınırlı, yani, bir $M \in \mathbb{R}^+$ için

$$|f(t, y)| \leq M, \quad (t, y) \in \Omega$$

olsun. Ayrıca

$$\frac{Mh^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)} \leq K$$

koşulunu sağlayan en az bir $h, K \in \mathbb{R}^+$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (4.1.1) başlangıç değer probleminin $R(h, K) \subset \Omega$ bölgesinde sürekli ve tek bir çözümü vardır.

İspat Teorem 3.1.1 in (v) koşulu göz önüne alınırsa (4.1.1) başlangıç değer problemi

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} \frac{y_{\lceil\alpha\rceil-i}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)} t^{\rho(\alpha-i)} + \int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t, \eta) f\big(\eta, y(\eta)\big) \mathrm{d}\eta, \quad t \in (0, h] \tag{4.1.2}$$

kesirli integral denklemi şeklinde yazılabilir. Eğer y, (4.1.1) başlangıç değer problemini sağlıyorsa bu durumda (4.1.2) denklemini de sağlar. Diğer taraftan eğer y, (4.1.2) denkleminin bir çözümü ise (4.1.1) başlangıç değer problemini de sağlayacaktır. O halde (4.1.2) denklemi (4.1.1) başlangıç değer problemine eşittir. $t \in (0, h]$ için $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ fonksiyon serisi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$y_m(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\lceil \alpha \rceil} \frac{y_{\lceil \alpha \rceil - i}}{\rho^{\alpha - i}\Gamma(\alpha - i + 1)} t^{\rho(\alpha - i)}, & m = 0 \\ y_0(t) + \left[\mathcal{J}_\rho^\alpha f\big(*, y_{m-1}(*)\big)\right](t), & m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Burada $\lim_{m \to \infty} y_m$ limiti var ve bu limit (4.1.2) integral denkleminin y çözümüne eşit ise (4.1.1) başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı gösterilmiş olacaktır. Her $t \in (0, h]$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ için $y_m(t) \in R(h, K)$ olduğu tümevarım ile gösterilebilir. Gerçekten, her $t \in (0, h]$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} |y_m(t) - y_0(t)| &= \left| \int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t, \eta) f\big(\eta, y_{m-1}(\eta)\big) \mathrm{d}\eta \right| \\ &\leq \int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t, \eta) \big| f\big(\eta, y_{m-1}(\eta)\big) \big| \mathrm{d}\eta \\ &\leq M \int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t, \eta) \mathrm{d}\eta \\ &= \frac{M t^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \\ &\leq \frac{M h^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \leq K \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \frac{M h^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \leq K, \quad t \in (0, h] \tag{4.1.4}$$

elde edilir. Tümevarım ile

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq \frac{M L^{m-1} t^{m\rho\alpha}}{\rho^{m\alpha}\Gamma(m\alpha + 1)}, \quad t \in (0, h], \; m \in \mathbb{N} \tag{4.1.5}$$

olduğu gösterilsin. (4.1.4) eşitsizliğinden, $m = 1$ için (4.1.5) sağlanır. Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq \frac{M L^{m-1} t^{m\rho\alpha}}{\rho^{m\alpha}\Gamma(m\alpha + 1)}, \quad t \in (0, h] \tag{4.1.6}$$

sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda, (4.1.3) ve (4.1.6) kullanılarak $t \in (0,h]$ için

$$\begin{aligned}
|y_{m+1}(t)-y_m(t)| &= \left|\int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)\big[f\big(\eta,y_m(\eta)\big)-f\big(\eta,y_{m-1}(\eta)\big)\big]\mathrm{d}\eta\right| \\
&\le \int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)\big|f\big(\eta,y_m(\eta)\big)-f\big(\eta,y_{m-1}(\eta)\big)\big|\mathrm{d}\eta \\
&\le L\int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)|y_m(\eta)-y_{m-1}(\eta)|\mathrm{d}\eta \\
&\le \frac{ML^m}{\rho^{m\alpha}\Gamma(m\alpha+1)}\int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)\eta^{m\rho\alpha}\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{ML^m}{\rho^{(m+1)\alpha t^{(m+1)\rho\alpha}}\Gamma(\alpha)\Gamma(m\alpha+1)}\int_0^1 [1-\zeta]^{\alpha-1}\zeta^{m\alpha}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{ML^m t^{(m+1)\rho\alpha}}{\rho^{(m+1)\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(m\alpha+1)}\int_0^1 [1-\zeta]^{\alpha-1}\zeta^{m\alpha}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{ML^m t^{(m+1)\rho\alpha}}{\rho^{(m+1)\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(m\alpha+1)}\mathrm{B}(\alpha,m\alpha+1) \\
&= \frac{ML^m t^{(m+1)\rho\alpha}}{\rho^{(m+1)\alpha}\Gamma\big((m+1)\alpha+1\big)}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (4.1.5) eşitsizliği sağlanır. Limit fonksiyonu

$$y(t) := \lim_{m\to\infty} y_m(t) = y_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty}[y_j(t)-y_{j-1}(t)], \quad t \in (0,h] \tag{4.1.7}$$

şeklinde tanımlansın. $t \in (0,h]$ için (4.1.5) eşitsizliği göz önüne alınırsa terimlerinin mutlak değeri karşılık gelen yakınsak sayısal dizinin terimlerinden daha azdır, yani

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}|y_j(t)-y_{j-1}(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{ML^{j-1}h^{j\rho\alpha}}{\rho^{j\alpha}\Gamma(j\alpha+1)} &= \frac{M}{L}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{L^j h^{j\rho\alpha}}{\rho^{j\alpha}\Gamma(j\alpha+1)} \\
&= \frac{M}{L}\left[\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\frac{Lh^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha}\right)-1\right]
\end{aligned}$$

olur. Burada E iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonudur. O halde, (4.1.7) serisi düzgün yakınsaktır. (4.1.3)'de $m \to \infty$ limiti alınırsa (4.1.7) eşitliği kullanılırsa,

$$y(t) = y_0(t) + \int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)f\big(\eta,y(\eta)\big)\mathrm{d}\eta, \quad t \in (0,h]$$

elde edilir. O halde (4.1.7) eşitliği ile tanımlanan y, (4.1.2) denkleminin ve (4.1.1) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Böylelikle (4.1.1) başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı gösterilmiş olur. Çözümün tekliğini göstermek için (4.1.2) denkleminin başka bir z çözümü olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $t \in (0,h]$ için

$w(t) := y(t) - z(t)$ olmak üzere

$$w(t) = \int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)\big[f\big(\eta, y(\eta)\big) - f\big(\eta, z(\eta)\big)\big]\mathrm{d}\eta \tag{4.1.8}$$

denklemi sağlanır. Buradan $w(0^+) = 0$ olur. Bu nedenle, w fonksiyonu $[0,h]$ aralığına sürekli olarak genişletilebilir. O halde, $C \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere her $t \in (0,h]$ için $|w(t)| \leq C$ olur ve (4.1.8) denkleminden

$$|w(t)| \leq \frac{CLt^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}, \quad t \in (0,h]$$

elde edilir. Bu durum $m \in \mathbb{N}$ kez tekrarlanırsa

$$|w(t)| \leq \frac{CL^m t^{m\rho\alpha}}{\rho^{m\alpha}\Gamma(m\alpha+1)}, \quad t \in (0,h]$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafında $\mathrm{E}_{\alpha,1}(\frac{Lt^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha})$ Mittag-Leffler fonksiyonunun genel terimi vardır ve

$$\lim_{m\to\infty} \frac{L^m t^{m\rho\alpha}}{\rho^{m\alpha}\Gamma(m\alpha+1)} = 0, \quad t \in (0,h]$$

olur. O halde $t \in (0,h]$ için $w(t) \equiv 0$ olup $y(t) \equiv z(t)$ elde edilir. İspat tamamlanır.

$\square$

4.2. Reimann-Liouville ve Hadamard Tipli Otonom Denklem

Bu kesimde otonom denklem içeren

$$\begin{cases} \big[\mathcal{D}_\rho^\alpha y\big](t) = \lambda y(t), \quad t > 0, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k} y\big](0^+) = y_{\lceil\alpha\rceil - k}, \quad k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil \end{cases} \tag{4.2.1}$$

başlangıç değer problemi ele alınacaktır. (4.2.1) probleminin çözümünü iki şekilde elde edilecektir.

4.2.1. Yerine Koyma Yöntemi

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve E iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu olmak üzere

$$y_{\alpha,\beta}(t) := \frac{t^{\rho\beta}}{\rho^{\beta}} \mathrm{E}_{\alpha,\beta+1}\left(\frac{\lambda t^{\rho\alpha}}{\rho^{\alpha}}\right), \quad t > 0,$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha} y = \lambda y$ olur. Gerçekten, $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha} y_{\alpha,\beta}\right](t) &= \left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha} \frac{*^{\rho\beta}}{\rho^{\beta}} \mathrm{E}_{\alpha,\beta+1}\left(\frac{\lambda *^{\rho\alpha}}{\rho^{\alpha}}\right)\right](t) = \left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j} *^{\rho(\alpha j+\beta)}}{\rho^{\alpha j+\beta}\Gamma(\alpha j+\beta+1)}\right](t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j}\left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha} *^{\rho(\alpha j+\beta)}\right](t)}{\rho^{\alpha j+\beta}\Gamma(\alpha j+\beta+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j} t^{\rho(\alpha(j-1)+\beta)}}{\rho^{\alpha(j-1)+\beta}\Gamma\big(\alpha(j-1)+\beta+1\big)} \\
&= \frac{t^{\rho(\beta-\alpha)}}{\rho^{\beta-\alpha}\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j} t^{\rho(\alpha(j-1)+\beta)}}{\rho^{\alpha(j-1)+\beta}\Gamma\big(\alpha(j-1)+\beta+1\big)} \\
&= \frac{t^{\rho(\beta-\alpha)}}{\rho^{\beta-\alpha}\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \lambda \frac{t^{\rho\beta}}{\rho^{\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j} t^{\rho\alpha j}}{\rho^{\alpha j}\Gamma(\alpha j+\beta+1)} \\
&= \frac{t^{\rho(\beta-\alpha)}}{\rho^{\beta-\alpha}\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \lambda y_{\alpha,\beta}(t).
\end{aligned}$$

Burada görülüyor ki, $(\beta-\alpha)$ bir negatif sayı olduğunda $y_{\alpha,\beta}$, $\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha} y = \lambda y$ denkleminin bir çözümüdür. O halde, $i = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil$ olmak üzere $y_{\alpha,\alpha-i}$, $\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha} y = \lambda y$ denklemini sağlar. Ayrıca $t > 0$ ve $k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil$ için

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha-k} y_{\alpha,\alpha-i}\right](t) &= \left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha-k} \frac{*^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha-i+1}\left(\frac{\lambda *^{\rho\alpha}}{\rho^{\alpha}}\right)\right](t) \\
&= \left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha-k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j} *^{\rho(\alpha(j+1)-i)}}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)}\right](t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j}\left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha-k} *^{\rho(\alpha(j+1)-i)}\right](t)}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j} t^{\rho(\alpha j-i+k)}}{\rho^{\alpha j-i+k}\Gamma(\alpha j-i+k+1)}
\end{aligned}$$

olur. Buradan, δ Kronecker delta olmak üzere,

$$\left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha-k} y_{\alpha,\alpha-i}\right](0^{+}) = \delta_{i,k}, \quad k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil$$

elde edilir. Bu nedenle, $\{y_{\alpha,\alpha-i}\}_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}$, $\mathcal{D}_\rho^\alpha y = \lambda y$ denkleminin temel çözümler kümesidir. O halde,

$$y(t) := \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i} \frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha-i+1}\left(\frac{\lambda t^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha}\right), \quad t > 0$$

lineer birleşimi (4.2.1) denkleminin istenen çözümünü verir.

4.2.2. Picard İterasyonu

Teorem 4.1.1 ispatına uygun olması için $t \in (0, h]$ olmak üzere

$$y_m(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} \frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)} [\mathcal{D}_\rho^{\alpha-i} y](0^+), & m = 0 \\ y_0(t) + \lambda\big[\mathcal{J}_\rho^\alpha y_{m-1}\big](t), & m \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

olarak seçilsin.

Tümevarım ile

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i} \sum_{j=0}^{m} \frac{t^{\rho(\alpha(j+1)-i)}\lambda^j}{\rho^{(\alpha(j+1)-i)}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)}, \quad t \in (0, h],\ m \in \mathbb{N}_0 \tag{4.2.3}$$

olduğu gösterilecektir. (4.2.2) den $m = 0$ için bu eşitlik sağlanır. Herhangi bir $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i} \sum_{j=0}^{m} \frac{t^{\rho(\alpha(j+1)-i)}\lambda^j}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)}, \quad t \in (0, h]$$

olsun. Bu durumda Örnek 3.3 ve (4.2.2) eşitliğinden $t \in (0, h]$ için

$$\begin{aligned}
y_{m+1}(t) &= y_0(t) + \lambda\big[\mathcal{J}_\rho^\alpha y_m\big](t) \\
&= y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i} \sum_{j=0}^{m} \frac{\lambda^j\big[\mathcal{J}_\rho^\alpha *^{\rho(\alpha(j+1)-i)}\big](t)}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)} \\
&= \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i} \frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i} \sum_{j=0}^{m} \frac{\lambda^{j+1}t^{\rho((j+2)\alpha-i)}}{\rho^{(j+2)\alpha-i}\Gamma\big((j+2)\alpha-i+1\big)} \\
&= \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i} \sum_{j=0}^{m+1} \frac{\lambda^j t^{\rho(\alpha(j+1)-i)}}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (4.2.3) eşitliği sağlanır.

(4.2.3) eşitliğinde $m \to \infty$ için limit alınırsa, (4.2.2) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} y(t) = \lim_{m\to\infty} y_m(t) &= \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\rho(\alpha(j+1)-i)}}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)} \\ &= \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i} \frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha-i+1}\left(\frac{\lambda t^{\rho\alpha}}{\rho^{\alpha}}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada E iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonudur.

4.3. Başlangıç Koşullarına Hassas Bağımlılık

Bu bölümde (4.1.1) probleminin başlangıç koşullarında küçük değişiklikler yapıldığında bu durumun çözümleri nasıl etkilediği incelenecektir. $\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-k}$ herhangi bir sabit olmak üzere başlangıç problemi

$$\begin{cases} \big[\mathcal{D}_\rho^\alpha y\big](t) = f\big(t, y(t)\big), & t > 0 \\ \big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k} y\big](0^+) = y_{\lceil\alpha\rceil-k} + \varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-k}, & k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil \end{cases} \tag{4.3.1}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3.1. Teorem 4.1.1 koşulları sağlansın. y ve z sırasıyla (4.1.1) ve (4.3.1) başlangıç değer problemlerinin bir çözümü olsun. Bu durumda,

$$|y(t) - z(t)| \leq \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} \left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}\right| \frac{\rho^i}{At^{\rho i}} \mathrm{E}_{\alpha,1-i}\left(\frac{At^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha}\right), \quad t \in (0, h]$$

olur.

İspat Teorem 4.1.1 e uygun olması açısından $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$, (4.1.3) de tanımlanan fonksiyon dizisi olmak üzere

$$y(t) = \lim_{m\to\infty} y_m(t), \quad t \in (0, h]$$

alınsın. Benzer şekilde, $t \in (0, h]$ için

$$z_m(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} \frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)} (y_{\lceil\alpha\rceil-i} + \varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}), & m = 0 \\ z_0(t) + \big[\mathcal{J}_\rho^\alpha f\big(*, z_{m-1}(*)\big)\big](t), & m \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.3.2}$$

olmak üzere

$$z(t)=\lim_{m\to\infty} z_m(t),\quad t\in(0,h]$$

olsun. Bu durumda tümevarım ile

$$|y_m(t)-z_m(t)|\leq \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}\left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}\right|\sum_{j=0}^{m}\frac{A^j t^{\rho(\alpha(j+1)-i)}}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)},\quad t\in(0,h],\ m\in\mathbb{N}_0 \tag{4.3.3}$$

olduğu kolay bir şekilde gösterilebilir. (4.3.2) ve (4.1.3) eşitliklerinden

$$|y_0(t)-z_0(t)|\leq \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}\left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}\right|\frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)},\quad t\in(0,h]$$

olup $m=0$ için (4.3.3) sağlanır. Herhangi bir $m\in\mathbb{N}$ için

$$|y_m(t)-z_m(t)|\leq \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}\left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}\right|\sum_{j=0}^{m}\frac{A^j t^{\rho(\alpha(j+1)-i)}}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)},\quad t\in(0,h] \tag{4.3.4}$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (4.1.3) ve (4.3.2) eşitliklerinden ve Lipschitz koşulu ile birlikte (4.3.4) eşitliğinden $t\in(0,h]$ için

$$\begin{aligned}
|y_{m+1}(t)-z_{m+1}(t)| &\leq \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}\left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}\right|\frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)}+A\int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)|y_m(\eta)-z_m(\eta)|\mathrm{d}\eta\\
&\leq \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}\left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}\right|\frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)}\\
&\quad +A\int_0^t \mathcal{K}_\rho^\alpha(t,\eta)\sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}\left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}\right|\sum_{j=0}^{m}\frac{A^j \eta^{\rho(\alpha(j+1)-i)}}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)}\mathrm{d}\eta\\
&= \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}\left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}\right|\frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}\Gamma(\alpha-i+1)}\\
&\quad +\sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}\left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}\right|\sum_{j=0}^{m}\frac{A^{j+1} t^{\rho((j+2)\alpha-i)}}{\rho^{(j+2)\alpha-i}\Gamma\big((j+2)\alpha-i+1\big)}\\
&= \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}\left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil-i}\right|\sum_{j=0}^{m+1}\frac{A^j t^{\rho(\alpha(j+1)-i)}}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1)-i+1\big)}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (4.3.3) sağlanır. (4.3.4) eşitsizliğinde $m\to\infty$ limiti alınırsa

$t \in (0, h]$ için

$$\begin{aligned}
|y(t) - z(t)| &\leq \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} \left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil - i}\right| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^{\rho(\alpha(j+1)-i)}}{\rho^{\alpha(j+1)-i}\Gamma\big(\alpha(j+1) - i + 1\big)} \\
&= \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} \left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil - i}\right| \frac{\rho^i}{At^{\rho i}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+1} t^{(j+1)\rho\alpha}}{\rho^{\alpha(j+1)}\Gamma\big(\alpha(j+1) - i + 1\big)} \\
&= \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} \left|\varepsilon_{\lceil\alpha\rceil - i}\right| \frac{\rho^i}{At^{\rho i}} \mathrm{E}_{\alpha,1-i}\left(\frac{At^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. □

4.4. Lineer Denklemler için Green Fonksiyonu

Bu bölümde, $p, f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} \big[\mathcal{D}_\rho^\alpha y\big](t) = p(t)y(t) + f(t), \quad t > 0 \\ \big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k} y\big](0^+) = y_{\lceil\alpha\rceil - k}, \quad k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil \end{cases} \tag{4.4.1}$$

başlangıç değer problemi için Green fonksiyonu tanımlanacak ve denklemin çözümünün bulunmasındaki rolü üzerinde durulacaktır.

$\Delta := \{(t, s) : \ t > s \geq 0\}$ olsun. ${}_s\mathcal{D}_\rho^\alpha f$ ve ${}_s\mathcal{J}_\rho^\alpha f$ sırasıyla f fonksiyonunun $s \in [0, \infty)$ deki kesirli türevini ve kesirli integralini göstersin.

Tanım 4.4.1 (Green fonksiyonu)**.** $\mathcal{G}_\rho : \Delta \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

(i) $(t, s) \in \Delta$ için $[{}_s\mathcal{D}_\rho^\alpha \mathcal{G}_\rho(*, s)](t) = p(t)\mathcal{G}_\rho(t, s)$'dir.

(ii) $t > 0$ ve $k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil$ için $\lim\limits_{s \to t^-} [{}_s\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k} \mathcal{G}_\rho(*, s)](t) = \delta_{k,1}$'dir.

(iii) $k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil - 1$ için $\lim\limits_{\substack{s \to t^- \\ t \to 0^+}} [{}_s\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k} \mathcal{G}_\rho(*, s)](t) = 0$'dir.

Bu durumda, $\mathcal{G}_\rho$ fonksiyonuna (4.4.1) başlangıç değer probleminin Green fonksi-yonu denir.

Teorem 4.4.2. $\mathcal{G}_\rho$, (4.4.1) başlangıç değer probleminin Green fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$y(t) := \int_0^t \mathcal{G}_\rho(t,\eta)\eta^{\rho-1}f(\eta)\mathrm{d}\eta, \quad t>0 \tag{4.4.2}$$

$$\begin{cases} \left[\mathcal{D}_\rho^\alpha y\right](t) = p(t)y(t) + f(t), \quad t>0 \\ \left[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k} y\right](0^+) = 0, \quad k = 1,2,\cdots,\lceil\alpha\rceil \end{cases} \tag{4.4.3}$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

İspat (4.4.2) eşitliği ile tanımlanan y fonksiyonu (4.4.3) başlangıç değer problemindeki diferansiyel denklemin bir çözümüdür. Gerçekten, $\beta = \alpha - \lceil\alpha\rceil + 1$ alınırsa $\beta \in (0,1]$ olur ve (4.4.2)'dan $t>0$ için

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{D}_\rho^\beta y\right](t) &= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{D}_\rho^{\beta-1}y\right](t) = \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{J}_\rho^{1-\beta}y\right](t) \\
&= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^t \mathcal{K}_\rho^{1-\beta}(t,\eta)\int_0^\eta \mathcal{G}_\rho(\eta,\zeta)\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\right] \\
&= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^t \int_0^\eta \mathcal{K}_\rho^{1-\beta}(t,\eta)\mathcal{G}_\rho(\eta,\zeta)\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\right] \\
&= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^t \int_\zeta^t \mathcal{K}_\rho^{1-\beta}(t,\eta)\mathcal{G}_\rho(\eta,\zeta)\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\right] \\
&= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^t \left[\int_\zeta^t \mathcal{K}_\rho^{1-\beta}(t,\eta)\mathcal{G}_\rho(\eta,\zeta)\mathrm{d}\eta\right]\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right] \\
&= \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^t \left[{}_\zeta\mathcal{J}_\rho^{1-\beta}\mathcal{G}_\rho(*,\zeta)\right](t)\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right] \\
&= \int_0^t \frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[{}_\zeta\mathcal{J}_\rho^{1-\beta}\mathcal{G}_\rho(*,\zeta)\right](t)\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
&\quad + \frac{1}{t^{\rho-1}}\lim_{\zeta\to t^-}\left[\left[{}_\zeta\mathcal{J}_\rho^{1-\beta}\mathcal{G}_\rho(*,\zeta)(t)\right]\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\right],
\end{aligned}$$

elde edilir.

Kesirli türev tanımından $t>0$ için

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{D}_\rho^\beta y\right](t) = &\int_0^t \left[{}_\zeta\mathcal{D}_\rho^\beta\mathcal{G}_\rho(*,\zeta)\right](t)\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
&+ \lim_{\zeta\to t^-}\left[{}_\zeta\mathcal{D}_\rho^{\beta-1}\mathcal{G}_\rho(*,\zeta)\right](t)f(t)
\end{aligned}$$

olur. $\mathcal{D}^1$ operatörü $(\lceil\alpha\rceil - 1)$ uygulanır ve Tanım 4.4.1 (ii) kullanılırsa $t > 0$ için

$$
\begin{aligned}
\big[\mathcal{D}^{\alpha}_{\rho} y\big](t) &= \int_0^t \big[{}_{\zeta}\mathcal{D}^{\alpha}_{\rho}\mathcal{G}_{\rho}(*,\zeta)\big](t)\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
&\quad + \lim_{\zeta\to t^-}\big[{}_{\zeta}\mathcal{D}^{\alpha-1}_{\rho}\mathcal{G}_{\rho}(*,\zeta)\big](t)f(t) \\
&= \int_0^t \big[{}_{\zeta}\mathcal{D}^{\alpha}_{\rho}\mathcal{G}(*,\zeta)\big](t)\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + f(t) \\
&= p(t)\int_0^t \mathcal{G}_{\rho}(t,\zeta)\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + f(t) \\
&= p(t)y(t) + f(t)
\end{aligned}
\tag{4.4.4}
$$

bulunur. Buradan, y fonksiyonu (4.4.3) denkleminin bir çözümüdür.

(4.4.4) den $t > 0$ ve $k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil$ için

$$
\begin{aligned}
\big[\mathcal{D}^{\alpha-k}_{\rho} y\big](t) &= \int_0^t \big[{}_{\zeta}\mathcal{D}^{\alpha-k}_{\rho}\mathcal{G}_{\rho}(*,\zeta)\big](t)\zeta^{\rho-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
&\quad + \lim_{\zeta\to t^-}\big[{}_{\zeta}\mathcal{D}^{\alpha-k+1}_{\rho}\mathcal{G}_{\rho}(*,\zeta)\big](t)f(t)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Tanım 4.4.1 (iii) kullanılırsa ve $t \to 0^+$ alınırsa, $k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil$ için $\big[\mathcal{D}^{\alpha-k}_{\rho} y\big](0^+) = 0$ olur. Böylelikle başlangıç koşulları sağlanmış olur.

(4.4.2) eşitliği ile tanımlanan y fonksiyonu (4.4.3) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. □

Sonuç 4.4.3. $\{H_i\}_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil}$,

$$
\begin{cases}
[\mathcal{D}^{\alpha}_{\rho} H_i](t) = p(t)H_i(t), & t > 0 \\
[\mathcal{D}^{\alpha-k}_{\rho} H_i](0^+) = \delta_{i,k}, & k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil
\end{cases}
\tag{4.4.5}
$$

homojen başlangıç değer probleminin temel çözümlerinin bir kümesi ve $\mathcal{G}$, (4.4.1) başlangıç değer proble-minin Green fonksiyonu ise, (4.4.1) başlangıç değer probleminin çözümü

$$
y(t) = \sum_{k=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i}H_i(t) + \int_0^t \mathcal{G}_{\rho}(t,\eta)\eta^{\rho-1}f(\eta)\mathrm{d}\eta, \quad t > 0
$$

şeklindedir.

4.4.1. Otonom Denklemlerin Çözümleri

$$\begin{cases} \left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha} y\right](t) = \lambda y(t) + f(t), \quad t > 0 \\ \left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha-k} y\right](0^{+}) = y_{\lceil\alpha\rceil-k}, \quad k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil \end{cases} \tag{4.4.6}$$

lineer otonom başlangıç değer problemi verilsin. Lineer otonom denklemler için

$$\mathcal{G}_{\rho}(t,s) = \mathcal{G}_{\rho}\big(\sqrt[\rho]{t^{\rho} - s^{\rho}}, 0\big), \quad (t,s) \in \Delta \tag{4.4.7}$$

olur. Ayrıca, $\mathcal{G}_{\rho}(*,0)$

$$\begin{cases} \left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha} y\right](t) = \lambda y(t), \quad t > 0 \\ \left[\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha-k} y\right](0^{+}) = \delta_{k,1}, \quad k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil \end{cases}$$

homojen denkleminin bir çözümüdür. Bölüm 4.2.1 den (4.4.6) probleminin Green fonksiyonu

$$\mathcal{G}_{\rho}(t,s) = \frac{[t^{\rho} - s^{\rho}]^{\alpha-1}}{\rho^{\alpha-1}} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\frac{\lambda[t^{\rho} - s^{\rho}]^{\alpha}}{\rho^{\alpha}}\right), \quad (t,s) \in \Delta$$

olarak verilir. Buradan, (4.4.6) başlangıç değer probleminin çözümü $t > 0$ için

$$\begin{aligned} y(t) = & \sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i} \frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha-i+1}\left(\frac{\lambda t^{\rho\alpha}}{\rho^{\alpha}}\right) \\ & + \int_{0}^{t} \frac{[t^{\rho} - \eta^{\rho}]^{\alpha-1}}{\rho^{\alpha-1}} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\frac{\lambda[t^{\rho} - \eta^{\rho}]^{\alpha}}{\rho^{\alpha}}\right) \eta^{\rho-1} f(\eta) \mathrm{d}\eta \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

elde edilir (Kilbas *et al.* 2016).

Örnek 4.4.4. $\alpha \in \mathbb{R}_0^{+}$, $\nu \in (-1,\infty)$ ve $\rho \in \mathbb{R}^{+}$ için

$$\left[{}_{s}\mathcal{J}_{\rho}^{\alpha}[*^{\rho} - s^{\rho}]^{\nu}\right](t) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\rho^{\alpha}\Gamma(\nu+\alpha+1)}[t^{\rho} - s^{\rho}]^{\nu+\alpha}, \quad t > s \geq 0$$

olur.

Örnek 4.4.5. $\alpha, \nu \in \mathbb{R}_0^{+}$ ve $\rho \in \mathbb{R}^{+}$ için

$$\left[{}_{s}\mathcal{D}_{\rho}^{\alpha}[*^{\rho} - s^{\rho}]^{\nu}\right](t) = \frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}[t^{\rho} - s^{\rho}]^{\nu-\alpha}, \quad t > s \geq 0$$

olur.

4.5. Riemann-Liouville ve Hadamard Tipli Kesirli Diferansiyel Denklemler için Laplace Dönüşümü

Tanım 4.5.1. $t \geq 0$ için tanımlı bir f fonksiyonu verilsin. f fonksiyonun Laplace-ρ dönüşümü

$$F(s,\rho) = \mathcal{L}_\rho\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1} f(t)\mathrm{d}t$$

şeklinde tanımlanır.

İntegralin tanımlı olması için, $f(t^{1/\rho})$ fonksiyonu üstel mertbeden olmalıdır. Çünkü, $u = t^\rho$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\rho\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\rho}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}\, f(u^{1/\rho})\mathrm{d}u = \mathcal{L}\{f(u)\}(s)\end{aligned}$$

olur. $\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonu, e^z üstel fonksiyonunun genel hali ve üstel fonksiyonu da Mittag-Leffler fonksiyonun bir özel halidir. Bu durumda Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace-ρ dönüşümü,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1} \frac{t^{\rho(\beta-1)}}{\rho^{\beta-1}}\,\mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left(\frac{\lambda t^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha}\right)\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}\,\frac{u^{\beta-1}}{\rho^\beta}\,\mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left(\frac{\lambda u^\alpha}{\rho^\alpha}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{s^{\alpha-\beta}\rho^{\alpha-\beta}}{s^\alpha\rho^\alpha - \lambda} \qquad (4.5.1)\end{aligned}$$

şeklindedir.

Önerme 4.5.2.

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t \tau^{\rho-1} f_1(\tau) f_2\big(\sqrt[\rho]{t^\rho - \tau^\rho}\big)\mathrm{d}\tau$$

konvolüsyonunun Laplace-ρ dönüşümünü, f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Laplace-ρ dönüşümlerinin çarpımına eşittir:

$$\mathcal{L}_\rho\{(f_1 * f_2)(t)\}(s) = F_1(s,\rho)F_2(s,\rho).$$

Burada $\mathcal{L}_\rho\{f_1(t)\} = F_1(s,\rho)$ ve $\mathcal{L}_\rho\{f_2(t)\} = F_2(s,\rho)$'dir.

İspat Laplace-ρ dönüşümünün tanımından açık olarak

$$\mathcal{L}_\rho\{f_1(t) * f_2(t)\}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1}\int_0^t \tau^{\rho-1} f_1(\tau) f_2\big(\sqrt[\rho]{t^\rho - \tau^\rho}\big)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \tau^{\rho-1} f_1(\tau) \int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1} f_2\big(\sqrt[\rho]{t^\rho - \tau^\rho}\big)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\infty \tau^{\rho-1} f_1(\tau) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s(u^\rho+\tau^\rho)}\, u^{\rho-1} f_2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau^\rho}\, \tau^{\rho-1} f_1(\tau) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-su^\rho}\, u^{\rho-1} f_2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau^\rho}\, \tau^{\rho-1} f_1(\tau) F_2(s,\rho)\mathrm{d}\tau \\
&= F_1(s,\rho)F_2(s,\rho)
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Örnek 4.5.3. $f(t) = t^{\rho\nu}$ fonksiyonun Laplace-ρ dönüşümü

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\rho\{f(t)\}(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1} t^{\rho\nu}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\rho}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}\, u^\nu \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\rho}\Gamma(\nu+1)s^{-\nu-1}
\end{aligned}
$$

olur.

Lemma 4.5.4. $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \rho \leq 1$ and $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

(i) $L_\rho\Big\{\big[\mathcal{J}_\rho^\alpha f\big](t)\Big\}(s) = \frac{1}{\rho^\alpha} s^{-\alpha} L_\rho\{f(t)\}(s)$

(ii) $s^\alpha \rho^\alpha L_\rho\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} s^k \rho^k \big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k-1} f\big](0^+)$

olur.

İspat Açıkça,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\rho\Big\{\big[\mathcal{J}_\rho^\alpha f\big](t)\Big\}(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1}[\mathcal{J}_\rho^\alpha f](t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1} \int_0^t \frac{(t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1}}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \tau^{\rho-1} f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1} \int_0^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}_\rho\{t^{\rho(\alpha-1)}\}(s)\mathcal{L}_\rho\{f(t)\}(s) \\
&= \frac{1}{\rho^\alpha} s^{-\alpha} \mathcal{L}_\rho\{f(t)\}(s)
\end{aligned}
$$

olup

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\rho\Big\{\big[\mathcal{D}\rho^\alpha f\big](t)\Big\}(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1}\big[\mathcal{D}_\rho^\alpha f\big](t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, t^{\rho-1}\frac{1}{t^{\rho-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\big](t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st^\rho}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\Big](t)\mathrm{d}t \\
&= s\rho\int_0^\infty t^{\rho-1}\,\mathrm{e}^{-st^\rho}\,\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\big](t)\mathrm{d}t - \big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\big](0^+) \\
&= s\rho\mathcal{L}_\rho\Big\{\big[\mathcal{D}\rho^{\alpha-1} f\big](t)\Big\}(s) - \big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-1} f\big](0^+) \\
&= s^\alpha\rho^\alpha\mathcal{L}_\rho\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} s^k\rho^k\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k-1} f\big](0^+)
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Laplace-ρ dönüşümü yardımıyla homojen olmayan

$$
\begin{cases}
\big[\mathcal{D}_\rho^\alpha y\big](t) = \lambda y(t) + f(t), \quad t > 0 \\
\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k} y\big](0^+) = y_{\lceil\alpha\rceil-k}, \quad k = 1, 2, \cdots, \lceil\alpha\rceil
\end{cases}
$$

başlangıç değer probleminin çözümü kolaylıkla bulunabilir. Başlangıç değer problemindeki denklemin Laplace-ρ dönüşümü

$$
s^\alpha\rho^\alpha \mathrm{Y}(s,\rho) - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} s^k\rho^k\big[\mathcal{D}_\rho^{\alpha-k-1} y\big](0^+) = \lambda\mathrm{Y}(s,\rho) + \mathrm{F}(s,\rho)
$$

olup buradan

$$
\mathrm{Y}(s,\rho) = \frac{\mathrm{F}(s,\rho)}{s^\alpha\rho^\alpha - \lambda} + \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1}\frac{s^k\rho^k}{s^\alpha\rho^\alpha-\lambda}y_{\lceil\alpha\rceil-k}
$$

elde edilir. (4.5.1) kullanılarak verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$
\begin{aligned}
y(t) = &\sum_{i=1}^{\lceil\alpha\rceil} y_{\lceil\alpha\rceil-i}\frac{t^{\rho(\alpha-i)}}{\rho^{\alpha-i}}\,\mathrm{E}_{\alpha,\alpha-i+1}\left(\frac{\lambda t^{\rho\alpha}}{\rho^\alpha}\right) \\
&+ \int_0^t \frac{[t^\rho-\eta^\rho]^{\alpha-1}}{\rho^{\alpha-1}}\,\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\frac{\lambda[t^\rho-\eta^\rho]^\alpha}{\rho^\alpha}\right)\eta^{\rho-1}f(\eta)\mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

KAYNAKLAR

[1] Akkurt, A., Kırtay Z., Yıldırım, H. (2015). Generalized Fractional Integrals Inequalities for Continuous Random Variables. *Journal of Probablity Statistics*, **2015**: 7 pages.

[2] Akkurt, A. and Yıldırım, H. (2016). Hermite-Hadamard Type Inequalities for $(n, m, h_1, h_2, \varphi)$-Convex Functions Via Fractional Integrals. *Malaya Journal of Mathematik*, **4**(2): 230-237.

[3] Almeida R., Bastos N. R. O. (2015). An approximation formula for the Katugampola integral. arXiv:1512.03791v1 [math.GM].

[4] Almeida R., Malinowska A. B., Odzijewicz T. (2016). Fractioanl differantial equations with dependence on the Caputo-Katugampola derivative. *Journal of Computatonal and Nonlinear Dynamics*, **11**(6): 061017–061017–11.

[5] Anastassiou G. A. (2011). Advances on Fractional İnequalities, Springer-Verlag, New York.

[6] Anderson D. R. and Ulness D. (2015). Properties of the Katugampola fractional derivative with potential applicatin in quantum mechanics. **56**: 063502.

[7] Atangana A., Baleanu D., Alsaedi A. (2015). New properties of conformable derivative. *De Gruyter Open*, **13**: 889–898.

[8] Bayour B. and Torres D. F. M. (2017). Existence of solution to a local fractional nonlinear differential equation. *Journal of Computatonal and Applied Mathematics*, **312**: 127–133.

[9] Butzer P. L., Kilbas A. A., Trujillo J. J. (2002). Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **269**(2): 387–400.

[10] Butzer P. L., Kilbas A. A., Trujillo J. J. (2002). Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **269**(1): 1–27.

[11] Diethelm K. (2010). The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin.

[12] Hadamard J. (1892). Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **4**(8): 101–186.

[13] Iyiola O. S. and Nwaeze E. R. (2016). Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D'Alembert approach. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, **2**(2): 1–7.

[14] Jarad F., Uğurlu E., Abdeljawad T. and Baleanu D. (2017). On a new class of fractional operators. *Advances in Difference Equations*, **2017**(247).

[15] Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D. (2017). On the generalized fractionalderivatives and their Caputo modification. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **10**: 2607–2619.

[16] Kaçar E., Yıldırım H. (2015). Grüss Type Integral Inequalities for Generalized Riemann-Liouville Fractional Integrals. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **101**(1): 55–70).

[17] Kaçar E., Kaçar Z., Yıldırım H. (2018). Integral Inequalities for Riemann-Liouville Fractional Integrals of a Function With Respect to Another Function. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, **13**(1): 1–13.

[18] Katugampola U. N. (2011). New approach to a generalized fractional integral. *Applied Mathematics and Computation*, **218**(3): 860–865.

[19] Katugampola U. N. (2014). A new approach to generalized fractional derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, **6**(4): 1–15.

[20] Katugampola U. N. (2016). New fractional integral unifying six existing fractional integrals. arXiv:1612.08596v1 [math.CA].

[21] Katugampola U. N. (2016). Existence and uniqueness results for a class of generalized fractional differential equations. arXiv:1411.5229v2 [math.CA].

[22] Karpuz B. , Özkan U. M., Yalçın T. and Yıldız M. K. (2017). Basic Theory for Differential Equations with Unified Reimann-Liouville and Hadamard type Fractional Derivatives, *International Journal of Analysis and Applications*, **13**(2): 216–230.

[23] Kilbas A. A. (2001). Hadamard-type fractional calculus. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **38**(6): 1191–1204.

[24] Kilbas A. A. (2003). Hadamard-type Integral Equations and Fractional Calculus Operators. *Operator Theory: Advances and Applications*, **142**: 175–188.

[25] Kilbas A. A., Trujillo J. J. (2003). Hadamard-type integrals as G-transforms. *Integral Transforms and Special Functions*, **14**(5): 413–427.

[26] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Science B.V., Amsterdam.

[27] Kimeu J. M. (2009). Fractional Calculus: Definitions and Applications. Masters Thesis and Specialist Projects, Western Kentucky University, Kentucky, ABD.

[28] Oldham K. B., Spanier J. (1974). The Fractional Calculus, Academic Press, New York.

[29] Özen S. (2003). Kesirsel Türevler için Opial Eşitsizlikleri. Yüksek LİSans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri.

[30] Özen S. ve Öztürk İ. (2004). Grünwald-Letnikov, Reimann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri üzerine. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, **20**(1–2): 66–76.

[31] Podlubny I. (1999). Fractional Differential Equations, Academic Press, New York.

[32] Pooseh S., Almeida P., Torres D. F. M. (2012). Expansion formulas in terms of integer-order derivatives for the Hadamard fractional integral and derivative. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **33**(3): 301–319.

[33] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. (1993). Fractional Integrals and Derivatives, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon.

[34] Sarıkaya M. Z., Karaca A. (2014). On the k-Riemann-Liouville fractional integral and applications. *International Journal of Statistics and Mathematics*, **1**(3): 33–34.

[35] Schiff J. L. (1999). The Laplace Transform, Springer-Verlag, New York.

[36] Thaiprayoon C., Ntouyas S. K. and Tariboon J. (2015). On the nonlocal Katugampola fractional integral conditions for fractional Langevin equation. *Advances in Differnce Equations*, **2015**(374).

[37] Yang X. J., Baleanu D., Srivastava H. M. (2016). Local fractional integral transforms and their applications, Academic Press, London.

[38] Yıldırım H. and Kırtay Z. (2014). Ostrowski inequality for generalized fractional integral and related inequalities. *Malaya Journal of Matematik*, **2**(3): 322–329.

[39] Yıldırım M.E., Akkurt A. ve Yıldırım H. (2016). On Some Integral Inequalities for Twice Diferentiable φ-Convex and quasi-Convex Functions via k-Fractional Integrals. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, **16**(6): 1-11.

[40] Zeng S., Baleanu D., Bai Y., Wu G. (2017). Fractional differential equations of Caputo-Katugampola type and numerical solutions. *Applied Mathematics and Computation*, **315**: 549–554

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Tuğba YALÇIN UZUN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Yenişehir, 03.08.1985
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	:	05079587911/ tyalcin@aku.edu.tr

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Ulubatlı Hasan Anadolu Lisesi, (1999-2003)
Lisans	:	Anadolu Üniversitesi, Matematik Bölümü, (2003-2007)
Yüksek Lisans	:	Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (2007-2010)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2009 -)

Yayınları (SCI ve diğer) : Karpuz B. , Ozkan U. M., Yalçın T. and Yıldız M. K. (2017). Basic Theory for Differential Equations with Unified Reimann-Liouville and Hadamard type Fractional Derivatives. *International Journal of Analysis and Applications*, **13**(2), 216-230.