JENSEN, HERMITE-HADAMARD VE OSTROWSKI EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yusuf ERDEM

Danışman
Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

JENSEN, HERMITE-HADAMARD VE OSTROWSKI EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Yusuf ERDEM

Danışman
Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Yusuf ERDEM tarafından hazırlanan “Jensen, Hermite-Hadamard ve Ostrowski Eşitsizlikleri Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 26 / 06 / 2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

İmza

Başkan : Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
........./......../ 2018 tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.

26/ 06/ 2018

Yusuf ERDEM

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

JENSEN, HERMITE-HADAMARD VE OSTROWSKI EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Yusuf ERDEM
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde Jensen eşitsizliklerinin tanımı verilmiş ve teoremlerle desteklenmiştir. Üçüncü bölümde konveks fonksiyonları içeren bazı eşitsizliklerle ilgili teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin ne olduğu verilmiştir ve bazı teoremlerin ispatları açık halde verilerek incelenmiştir. Beşinci bölümde ise Ostrowski eşitsizlikleri dört kısma ayrılarak ele alınmıştır.

2018, vi + 120 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, Konveks Fonksiyonlar, Eşitsizlikler, Jensen, Hadamard, Ostrowski, Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri, Ostrowski Eşitsizlikleri

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON THE JENSEN, HERMITE-HADAMARD AND OSTROWSKI INEQAULITIES

Yusuf ERDEM

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Hasan ÖĞÜNMEZ

In this research, consisted of five parts. The first part was divided for the entrance part. In the second part, the definition of Jensen inequalities was given and supported by theorems. In third part, it was given theorems about some inequalities including convex funcitons. In the fourth part, it was given what is the Hermite- Hadamard inequalities and the proofs of some thorems were explicitly given and examined. In the last part, Ostrowski inequalities were handled in four parts.

2018, vi + 120 pages

Keywords: Convexity, Convex Functions, Inequality, Jensen, Hadamard, Ostrowski, Jensen Inequalities, Hermite- Hadamard Inequalities, Ostrowski Inequalities

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ'e, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin BUDAK'a, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Yusuf ERDEM
AFYONKARAHİSAR, 2018

İÇİNDEKİLER DİZİNİ **Sayfa**

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\in$	Elemanıdır
α	Alfa
β	Beta
τ	Tau
ϕ	Fi
μ	Mu
ψ	Psi
σ	Sigma
χ	Khi
ξ	Ksi
$<$	Küçüktür
$\leq$	Küçük veya eşittir
$>$	Büyüktür
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\equiv$	Denktir
$\subset$	Öz alt küme
$\subseteq$	Alt küme
$\sum$	Toplam sembolü
$\prod$	Çarpım sembolü
∞	Sonsuz
$\int$	İntegral
$(.,.)$	Açık aralık
$[.,.]$	Kapalı aralık
$\{.,.\}$	Küme işareti
$\lvert \quad \rvert$	Mutlak değer
Δ	Artış
Γ	Gamma
ρ	Rho
δ	Delta

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler hakkındaki klasik çalışmalar Hardy vd. (1934) tarafından ortaya çıkarılmış ve matematikçiler arasında yerini almıştır. Bu çalışmada klasik ve yeni eşitsizlikler hakkında geniş çeşitlilik, problemler, sonuçlar, teoremler ve ispatlar sunulacaktır.

Hölder eşitsizliği, Minkovski eşitsizliği ve aritmetik ve geometrik manadaki eşitsizliklerin; eşitsizlik teorisi üstünde büyük bir rolü vardır. Bunlar ve birçok temel eşitsizlikler artık dünya dilinde ortak kullanımdadır ve bu alanda yapılan sayısız çalışmalar vardır.

Konveks fonskiyonların tarihi oldukça eskidir. Konveks fonksiyonlar hakkındaki ilk çalışmalar 19. yüzyılın sonlarına kadar dayanmaktadır. Bu matematiksel ifadenin köklerini Hölder (1889), Stolz (1893) ve Hadamard (1893) atmıştır. Geçen yüzyılın başında Jensen (1905, 1906) konveks fonksiyonlar hakkındaki ilk gerçek çalışmayı vermiştir. Sonraki yıllarda da konveks fonksiyonlar matematiksel analizde önemli bir yere sahip olmuştur.

Eğer $f''(x) \geq 0$ olursa f fonksiyonu bilinen Jensen eşitsizliğini sağlar (Hölder 1889). Stolz (1893) ve Popoviciu (1944, 1964) da f nin $[a, b]$ aralığında sürekli olduğunda

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{1.1}$$

eşitsizliğini sağladığını göstermişlerdir. Bu durumda f, (a, b) aralığında sağdan ve soldan türevlenebilirdir. Hadamard (1893), $[a, b]$ aralığında artan türevlere sahip olan konveks fonksiyonlar hakkında temel integral eşitsizlikleri elde etmiştir. Onun bu öncü çalışması; Jensen (1905, 1906) tarafından yapılan çalışmada (1.1) eşitsizliğini kullanarak eşitsizliklerin ne derece önemli ve perspektif bir yapıya sahip olduğunu keşfetmesini sağlamıştır.

f fonksiyonu $[a, b]$ de Jensen hassasiyetine sahip bir konveks fonksiyon olsun. $[a, b]$ deki herhangi $x_1, \dots, x_n$ noktaları ve en az biri negatif olmayan rasyonel $r_1, \dots, r_n$ sayıları için $r_1 + \cdots + r_n = 1$ eşitsizliği sağlansın. O halde

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i) \tag{1.2}$$

dir. (1.2) eşitsizliği literatürde bilinen Jensen eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik konveks fonksiyonlar için en önemli eşitsizliklerden birisidir. Jensen eşitsizliğinin incelenmesindeki temel amaç; analizdeki problemlerin çözümüne bir temel kaynak olmasını sağlamaktır. Konveks fonksiyonları içeren eşitsizlikler matematiğin çeşitli dallarındaki gelişimler için verimli bir araçtır ve literatürde önemli bir yere sahiptir.

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.3}$$

(1.3) eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılır. Eşitsizliğin sol tarafının ispatı Hadamard (1893) yapmadan önce f ve $[a, b]$ de artan f'' fonksiyonu için kesinlik olarak yapılmıştır ve Hadamard eşitsizliği olarak ve eşitsizliğin sol tarafı da bilinen Jensen eşitsizliği olarak adlandırılmıştır.

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ye $[a, b]$ de sürekli, (a, b) de türevlenebilir ve $f': [a, b] \to \mathbb{R}$ ye (a, b) de sınırlı olsun. Burada $\|f'\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}|f'(x)| < \infty$ dur. O halde

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f'\|_\infty \tag{1.4}$$

(1.4) eşitsizliği Ostrowski eşitsizliği olarak adlandırılır. (1.4) eşitsizliğinin üst sınırı, $x \in [a, b]$ olmak üzere bir $f(x)$ değeri için integralin ortalama değerini verir. Bu konuda literatürde de son on yılda çok önemli sonuçlar yer almıştır.

1.1 Temel Kavramlar

Tanım 1.1 (Süreklilik) $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için; $\forall x \in A$ için, eğer $|x - a| < \delta$ ise $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olur önermesinin doğru olduğu bir $\delta > 0$ sayısı varsa o zaman f fonksiyonuna a' da süreklidir, denir.

Tanım 1.2 (Düzgün Süreklilik) (X, ρ) ve (Y, σ) iki metrik uzay olsun ve $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık;

$$\rho(x, y)\delta \Longrightarrow p\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

olacak biçimde, yalnız verilen ε sayısına bağlı, bir $\delta > 0$ varsa; f fonksiyonuna düzgün süreklidir, denir.

Tanım 1.3 (Mutlak Süreklilik) $(x_k, x_k + h_k)$ aralıklarının sonlu her alt kümesi için;

$$\sum_{k=1}^{n} |h_k| < \delta$$

koşulu sağlandığında ve verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için;

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k + h_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ kapalı aralığında mutlak süreklidir, denir.

Tanım 1.4 (Lipschitzian Koşulu) $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $\forall x, y \in I$ için;

$$|f(x) - f(y)| \leq C(x - y)$$

olacak şekilde bir C sabiti varsa $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna I'da Lipschitzian koşulunu sağlıyor, denir.

Tanım 1.5 (Diferansiyel Kavramı) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. x in sonsuz küçük değişimi dx olarak ifade edilir. Fonksiyondaki değişim ise dy olarak kabul edilir. $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi alınırsa;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

olarak ifade edilir. Buradan:

$$dy = f'(x)dx$$

elde edilir. Bu ifadeye $y = f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli denir.

Tanım 1.6 (Monoton Artan ve Azalan Fonksiyonlar) $I \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x_1, x_2 \in I$ olmak üzere $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) \leq f(x_2)$ şartı sağlanıyorsa; f ye monoton artan fonksiyon denir. $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f kesin olarak artandır. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise f monoton azalan bir fonksiyondur. $f(x_1) > f(x_2)$ olduğunda ise f kesin olarak azalandır.

Tanım 1.7 (Vektör Uzayı (Lineer Uzay)) X bir küme ve K bir cisim olsun. $+: XxX \to X$ ve $.: KxX \to X$ iki fonksiyon olmak üzere:

(i) $\forall x, y, z \in X, (x + y) + z = x + (y + z),$

(ii) $\forall x, y, z \in X, x + y = y + x,$

(iii) $\exists \theta \in X, \forall x \in X, x + \theta = x,$

(iv) $\forall x, -x \in X, x + (-x) = 0$ ve $(-x) + x = 0,$

(v) $\forall a \in K,\ \forall x, y \in X;\ (x + y)a = xa + ya,$

(vi) $\forall a \in K,\ \forall x, y \in X;\ a(x + y) = ax + ay,$

(vii) $\forall a \in K,\ \forall x, y \in X;\ a(xy) = (ax)y,$

(viii) $\forall x \in X, 1x = x,$

şartları sağlanırsa $(X, K, +, .)$ dörtlüsüne Vektör Uzayı veya Lineer Uzay denir.

2. JENSEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER

2.1 Jensen Eşitsizlikleri

I, reel ($\mathbb{R}$) sayılarda bir aralık olsun. Eğer $x, y \in I$ için $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa f; Jensen konveks, *J*-konveks veya *mid*-konveks olarak adlandırılır.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.1.1}$$

Jensen ilk tanımlamayı (2.1.1) eşitsizliğini kullanarak yapmış ve bunun altını önemle çizmiştir. $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in (0,1)$ için $f: I \to \mathbb{R}$ konveks ise;

$$f(\alpha\, x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \tag{2.1.2}$$

eşitsizliği tanımlansın. (2.1.2) eşitsizliği mutlak $x \neq y$ için kesinlikle sağlanır. Eğer burada $-f: I \to \mathbb{R}$ olarak tanımlanırsa f fonksiyonu bir konkav fonksiyondur. (2.1.2) eşitsizliğinde de $\alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa hem (2.1.1) hem de (2.1.2) eşitsizliğini sağlar ancak bu tanımlamalar açık bir aralıkta süreksiz olduğundan birbirileriyle eşdeğer değildirler. Bu durumda bütün fonksiyonlar (2.1.1) için bu açık aralıkta süreklidir. Konveks fonksiyondaki bu tanımlama, normlu L lineer uzayı üzerinde reel değerli fonksiyonlar için oldukça yeterli bir genellemedir. Bu tanımlama f nin U da konveks olduğunda yapılır. Bu da $x_1, x_2 \in U, \alpha \in (0,1)$ için $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ de f nin bu şekilde tanımlanmasını garanti eder. $U \subseteq L$ üzerinde aşağıdaki tanımlama yapılabilir:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)x_2$$

dir. Konveks fonksiyonlar hakkında detaylı açıklamalar Mitronovic (1970), Pecaric vd. (1992) ve Roberts (1973) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.1.1 f bir *J*-konveks fonksiyon ve $I = [a, b]$ olsun. Bazı rasyonel ve negatif olmayan $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ ve $r_1, r_2, \dots, r_n$ için $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = 1$ sağlansın. Bu durumda:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i) \tag{2.1.3}$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat:

<u>1. DURUM:</u> $n = 2$ ve $r_1, r_2 \in I$ için (2.1.1)'i elde ederiz. $r_i = \frac{1}{n},\ i = 1,2,\dots,n$ için (2.1.3) eşitsizliği;

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{2.1.4}$$

gibi olur. İlk olarak Pecaric (1992) de verilen hipotezler incelenecektir. (2.1.4) de k, $2 \leq k \leq n$ için geçerli olduğu kabul edilsin. $x = \frac{1}{n+1}\sum_{i}^{n} x_i$ alınırsa;

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + f\left(\frac{n-1}{n}x + \frac{1}{n}x_{n+1}\right)\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \frac{1}{n}\big((n-1)f(x) + f(x_{n+1})\big)\right)$$

olur ki $f(x) \leq \left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\right)$ sağlanır ve Teorem 2.1.1 bu şekilde ispatlanmış olur.

<u>2. DURUM:</u> $r_1, r_2, \dots, r_n$ negatif olmayan rasyonel sayılar, burada m negatif olmayan bir doğal sayı ve $p_1, p_2, \dots, p_n$ için $m = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$, $r_i = \frac{p_i}{m_i}$, $i = 1,2,\dots,n$ olsun. Şimdi 1.durumdan:

$$f\left(\frac{(x_1 + \cdots + x_1) + (x_n + \cdots + x_n)}{m}\right)$$

$$\leq \left(\frac{\big(f(x_1) + \cdots + f(x_1)\big) + \cdots + \big(f(x_n) + \cdots + f(x_n)\big)}{m}\right)$$

dir. Burada ilk olarak parantez içindeki ifadeler p_1 olarak ayrı kategoriye alınsın ve aynı şekilde p_n. terim olsun. Böylece (2.1.5) ten;

$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{m} f(x_i) \tag{2.1.6}$$

olur ve (2.1.6) da $\frac{p_i}{m} = r$ olarak seçilirse (2.1.3) elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Hatırlatma 2.1.1 Jensen, serilerde hangi şartlarda (2.1.3) eşitsizliğinin geçerli olduğunu notlarında belirtiyor. Eğer r_i üzerindeki bazı kısıtlamaları yok sayarak, $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ den türeyen kombinasyonlar göz önüne alınırsa bu sınıftaki fonksiyonların Jensen eşitsizliğini küçültmesi için yeterli olacaktır.

Bu durumda Teorem 2.1.1 in sonucunu incelemek Jensen eşitsizliği için faydalı olacaktır.

Sonuç 2.1.1 $f: U \subseteq L \to R$ olarak tanımlansın. L lineer uzayı üstünde seçilmiş bir konveks dönüşüm, $x_i \in C$, $i = 1,2,\dots,n$ ve $p_i > 0$, $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ olursa:

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \tag{2.1.7}$$

dir (Pecaric 1982).

Teorem 2.1.2 *x* ve *p* iki *n*-değişkenli reel sayılar ve *x* bir bilinmeyen $x_i \in [a, b]$ ve aynı zamanda $1 \le i \le n$ ve $0 \le P_n, P_k$, $k = 1, \dots, n-1$, $P_n \ge 0$, $P_k = \sum_{i=1}^{k} p_{k-1}$ ile birlikte $k = 1, \dots, n-1$ olsun. O halde $[a, b]$ deki her reel değerli konveks *f* fonksiyonu için;

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \tag{2.1.8}$$

eşitsizliği yazılabilir (Pachpatte 2005a).

İspat: Eğer her p_i pozitif olursa (2.1.8) eşitsizliği konveks fonksiyonlarda kolaylıkla tanımlanır. *A* da karakterize edilmiş bir f konveks fonksiyon ise bu durumda:

$$f(z) - f(x) < M(z - c) \tag{2.1.9}$$

dir. (2.1.9) tüm c ve z ler için *c; M* de bağımlı ($M = f'(c)$ olacak şekilde; $M = f'(c)$ nin var olması *M* nin sayılamayan ve ardından $f'_-(c)$ ve $f'_+(c)$ nin sayılabilir seçilmesi burada önemlidir. (2.1.9) kullanılırsa; kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$f(z) - f(y) \ge M(z - y), \quad z \ge y \ge c$$

$$f(z) - f(y) \geq M(z-y), \quad y \leq z \leq c \tag{2.1.10}$$

dir. M yukarıdaki gibi tanımlanmıştır.

Şimdi x ve p Jensen-Steffensen eşitsizliğindeki durumları sağlasın. Bu durumda: $\overline{x} = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ ve $\overline{P_k} = P_n - P_{k-1}$ olursa, o halde;

$$\overline{P_k} = P_n(x_1 - x_n) = \sum_{i=2}^{n} p_i(x_1 - x_i) = \sum_{j=2}^{n} \left(x_{j-1} - x_j\right)\overline{P_j} > 0, \bar{x} \leq x$$

olur. Benzer şekilde;

$$\overline{P_k} = P_n(\bar{x} - x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_1 - x_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - x_{j+1}\right)\overline{P_j} > 0,\ x_n \leq \bar{x} \leq x_1$$

dir. Şimdi m, $\bar{x} \in [x_{m+1}, x_m\ ]$ olsun. Daha sonra, M, $c = \bar{x}$ olduğunu veriyor. Kolaylıkla benzer durum gösterilebilir. Şimdi (2.1.10) ve (2.1.11) kullanılırsa (2.1.8) elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{m-1} \left(M(x_i - x_{i+1}) - f(x_i) + f(x_{i+1})\right)\frac{P_i}{P_m}$$

$$+\left(M(x_m - \bar{x}) - f(x_m) + f(\bar{x})\right)\frac{P_m}{P_n} + \left(f(\bar{x}) - f(x_{m+1}) - M(x_i - x_{i+1})\right)\frac{\overline{P_{m+1}}}{P_n}$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i+1})\right) - M(x_i - x_{i+1})\frac{\overline{P_{m+1}}}{P_n} \tag{2.1.11}$$

dir. $f\colon I \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon ve $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n \in I)$ olsun.

$$f_{k,n} = f_{k,n}(x) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} f\left(\frac{1}{k}\left(x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\right)\right)$$

ifadesi kullanılırsa bu ifade Gabler tarafından " serisel konveks fonksiyon " olarak tanımlanır. Bu fonksiyonlar özel tanımlı fonksiyonlardır. Gabler ayrıca eşitsizliği serisel fonksiyonlar için;

$$f(x) \geq f_{k+1,n}(x), k = 1, \dots, n \tag{2.1.12}$$

şeklinde ifade ediyor. Bu teorem Pecaric (1994) tarafından konveks fonksiyonlar için iyi-bilinen Jensen eşitsizliğine, dizilerin hangi şartlarda eklenebileceği verilmiştir.

Teorem 1.2.3 $f: I \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n \in I)$ olsun.

$$f_{k,n} = f_{k,n}(x,p) \frac{1}{\binom{n-1}{k-1} P_n} \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} (p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}) f\left(\frac{p_{i_1} x_{i_1} + \cdots + p_{i_k} x_{i_k}}{p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}}\right) f_{k,n}(x,p) f_{k+1,n}$$

$$\ge \; f_{k+1,n}(x,p) \tag{2.1.13}$$

dir. Burada p pozitif sayılardır ve $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$ dir (Pachpatte 2005a).

İspat: Gerçekten:

$$(p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}) = (p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}) f\left(\frac{\sum_{j=1}^{k+1} \left(p_{i_1} + \cdots + p_{i_k} - p_{i_j}\right) \frac{p_{i_1} x_{i_1} + \cdots + p_{i_{k+1}} x_{i_{k+1}}}{p_{i_1} + \cdots + p_{i_{k+1}} - p_{i_j}}}{\sum_{j=1}^{k+1} \left(p_{i_1} + \cdots + p_{i_{k+1}} - p_{i_j}\right)}\right)$$

$$= \left(p_{i_1} + \cdots + p_{i_{k+1}}\right) \frac{\sum_{j=1}^{k+1} \left(p_{i_1} + \cdots + p_{i_k} - p_{i_j}\right) \frac{p_{i_1} x_{i_1} + \cdots + p_{i_{k+1}} x_{i_{k+1}}}{p_{i_1} + \cdots + p_{i_{k+1}} - p_{i_j}}}{\sum_{j=1}^{k+1} \left(p_{i_1} + \cdots + p_{i_{k+1}} - p_{i_j}\right)}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k+1} \left(p_{i_1} + \cdots + p_{i_{k+1}} - p_{i_j}\right) f\left(\frac{p_{i_1} x_{i_1} + \cdots + p_{i_{k+1}} x_{i_{k+1}}}{p_{i_1} + \cdots + p_{i_{k+1}} - p_{i_j}}\right)$$

olduğunu biliniyor. Bu nedenle;

$$f_{k+1,n} = \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} (p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}) f\left(\frac{p_{i_1} x_{i_1} + \cdots + p_{i_k} x_{i_k}}{p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}}\right)$$

$$= \frac{1}{k \binom{n-1}{k} P_n} \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} \left(p_{i_1} + \cdots + p_{i_k} - p_{i_j}\right) f\left(\frac{p_{i_1} x_{i_1} + \cdots + p_{i_k} x_{i_k} - p_{i_j} x_{i_j}}{p_{i_1} + \cdots + p_{i_k} - p_{i_j}}\right)$$

$$= \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} (p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}) f\left(\frac{p_{i_1} x_{i_1} + \cdots + p_{i_k} x_{i_k}}{p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}}\right) = f_{k,n}$$

olur ve ispat tamamlanır. ■

Hatırlatma 2.1.2 (2.1.12) de konveks fonksiyonlar için verilen Jensen eşitsizliğinin ara değerini hesaplanmıştı. Gerçekten:

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = f_{n,n} \le \cdots \le f_{k+1,n} \le f_{k,n} \le \cdots \le f_{1,n} = \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{2.1.14}$$

dir. Yukarıda verilenler keyfi lineer uzaylarda tanımlı konveks fonksiyonlarda; $p_i = 1, \dots, n$ kadar olan rasyonel sayılar için keyfi reel lineer uzaylarda tanımlı *mid-*

konveks fonksiyonlarda tanımlıdır.

Şimdi $f: C \subset X \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve C de X lineer uzayın üstünde konveks olarak seçilmiş olsun. $f: C \subset X \to \mathbb{R}$, $x_i \in C\ ve\ P_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ için T boştan farklı olarak seçilsin ve $m \geq 2$ bir doğal sayı olsun. Kabul edilsin ki şimdi m fonksiyonu ve $t \in T$ için $\alpha_i(t) + \cdots + \alpha_m(t) = 1$ eşitliği sağlansın.

Dragomir ve Sandor (1992) tarafından verilen dizisel fonksiyonları göz önünde bulundurursak $t \in T$ ve $n \geq 1$ için;

$$F_1^{[m]}(t) = \frac{1}{P_n} \sum_{i_1=1}^{n} P_{i_1} f \left[\alpha_1(t) x_{i_1} + \left(\alpha_2(t) + \cdots + \alpha_m(t) \right) \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right]$$

$$F_2^{[m]}(t) = \frac{1}{P_n^2} \sum_{i_1, i_2=1}^{n} P_{i_1} P_{i_2} f \left[\alpha_1(t) x_{i_1} + \alpha_2(t) x_{i_2} + \left(\alpha_3(t) + \cdots + \alpha_m(t) \right) \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right]$$

.

.

.

$$F_{m-1}^{[m]}(t) = \frac{1}{P_n^{m-1}} \sum_{i_1, i_2=1}^{n} P_{i_1} \dots P_{i_m} f \left[\alpha_1(t) x_{i_1} + \cdots + \alpha_{m-1}(t) x_{i_{m-1}} + \alpha_m(t) \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right]$$

ve

$$F^m(t) = \frac{1}{P_n^m} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n} P_{i_1} \dots P_{i_m} f\left[\alpha_1(t) x_{i_1} + \cdots + \alpha_m(t) x_{i_m} \right]$$

eşitlikleri geçerlidir. Yukarıdaki teoremin ispatı Dragomir ve Sandor (1992) tarafından verilmiştir. ■

Teorem 2.1.4 $f, p_i, x_{i,}\ i = 1, \dots, n$ kadar ve m önceki teoremdeki gibi olsun. O halde:

(i) $\forall t \in T$ için:

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right) \leq F_1^{[m]}(t) \leq \cdots \leq F_{m-1}^{[m]}(t) \leq F^{[m]}(t) \leq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \qquad (2.1.15)$$

dir.

(ii) Eğer burada $t_0(t) \in T$ ve $\alpha_1(t_0) = \cdots = \alpha_p(t_0), 1 \leq p \leq m-1$ olursa, o halde $1 \leq j \leq m$ için;

$$\inf_{t\in T} F_j^{[m]}(t) = F_j^{[m]}(t_0) = f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \tag{2.1.16}$$

dir.

(iii) Eğer burada $t_1 \in T$ ve $\alpha_p(t_1) = 1$ olursa;

$$\sup_{t\in T} F_j^{[m]}(t) = F_j^{[m]}(t_1) = f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \tag{2.1.17}$$

olur ve tüm $p \leq j \leq m-1$ ve $1 \leq q \leq p-1$ için;

$$\inf_{t\in T} F_q^{[m]}(t) = F_q^{[m]}(t_1) = f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \tag{2.1.18}$$

eşitliği geçerlidir.

(iv) T, Y lineer uzayında konveks olarak seçilirse $\alpha_i = 1, \dots, n$ e kadar yeteri şartlar sağlandığında $t_1, t_2 \in T$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ için;

$$\alpha_i\big(\gamma(t_1) + \beta(t_2)\big) = \gamma\alpha_i(t_1) + \beta\alpha_i(t_2)$$

dir. O halde $F_j^{[m]}, 1 \leq j \leq m-1$ ve $F^{[m]}$ T de konveks dönüşümlerdir (Pachpatte 2005a).

İspat:

(i) Jensen eşitsizliğinden $t \in T$ için:

$$F_1^{[m]}(t) \geq f\left[\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\alpha_1(t) + \cdots + \big(\alpha_2(t) + \cdots + \alpha_m(t)\big)\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] = f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

dir. Şimdi $1 \leq j \leq m-2$ ve $t \in T$ olsun. O halde Jensen eşitsizliğinden;

$$F_{j+1}^{[m]}(t) = P_n^{j+1} \sum_{i_1,\dots,i_{j+1}=1} p_{i_1+\dots+}p_{i_{j+1}} f\Bigg[\alpha_1(t)x_{i_1} + \cdots + \alpha_{j+1}(t)x_{j+1} + (\alpha_{j+2}(t)$$
$$+ \alpha_m(t))\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Bigg]$$

$$\geq P_n^j \sum_{i_1,\dots,i_{j+1}=1} p_{i_1+\dots+}p_{i_{j+1}} f\left[\alpha_1(t)x_{i_1} + \cdots + \alpha_j(t)x_j + \left(\frac{1}{P_n}\sum_{i_{j+1}}^{n} p_{i_{j+1}} x_{i_{j+1}}\right)\alpha_{j+1}(t)\right.$$

$$\left. + (\alpha_{j+2}(t) + \alpha_m(t))\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] = F_j^{[m]}(t)$$

dir. Burada ifade edilen $\left\{F_j^{[m]}(t)\right\}_{j=1}^{m-1}$ dizisi $t \in T$ için monoton azalmayandır.

Diğer taraftan Jensen eşitsizliğinden;

$$F(t) \geq \frac{1}{P_n^{m-1}} \sum_{i_1,\dots,i_{m+1}=1} p_{i_1+\dots+}p_{i_{m+1}} f\left(\alpha_1(t)x_{i_1} + \cdots \alpha_{m-1}(t)x_{i_{m-1}}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{P_n}\sum_{i_{j+1}}^{n} p_{i_m} x_{i_m}\right)\alpha_{i_m}(t)\right) = F_j^{[m]}(t)$$

elde edilir. Sonuçta *C* de f nin konveksliği bir tek $t \in T$ ve $x_i \in C$ için;

$$f\left(\alpha_1(t)x_{i_1} + \cdots + \alpha_m(t)x_{i_m}\right) \leq \alpha_1(t)f\left(x_{i_1}\right) + \cdots + \alpha_m(t)f\left(x_{i_m}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Artan $p_{i_1,\dots,}p_{i_m}$ den ve özetle $i_1, \dots, i_m, i = 1, \dots, n$ e kadar aşağıdaki elde edilir. $\forall t \in T$ için;

$$\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} p_{i_1} \dots p_{i_m} f\left(\alpha_1(t)x_{i_1} + \cdots + \alpha_m(t)x_{i_m}\right)$$

$$\leq \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} p_{i_1} \dots p_{i_m}\left(\alpha_1(t)f\left(x_{i_1}\right) + \cdots + \alpha_m(t)f\left(x_{i_m}\right)\right)$$

$$= \alpha_1(t)P_n^{m-1}\sum_{i_1=1}^{n} p_{i_1}\ f\left(x_{i_1}\right) + \cdots + \alpha_m(t)P_n^{m-1}\sum_{i_m=1}^{n} p_{i_m}\ f\left(x_{i_m}\right)$$

$$= P_n^{m-1}\sum_{i_1=1}^{n} p_i\ f(x_i)$$

(2.1.15) eşitliğine denktir. ■

(ii) $\alpha_1(t_0) = \cdots = \alpha_p(t_0) = 0, 1 \leq p \leq m-1$ olursa o halde:

$$F_p^{[m]}(t_0) = \frac{1}{P_n} \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} P_{i_1} \dots P_{i_p} f\left[\left(\alpha_1(t_0) + \cdots + \alpha_m(t_0)\right) \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] = f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

olur. Bu yüzden;

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq F_1^{[m]}(t_0) \leq \cdots \leq F_p^{[m]}(t_0)$$

elde edilir. ■

(iii) Eğer $\alpha_p(t_1) = 1$ olursa, bu durumda $\alpha_s(t_1) = 0$ olur ($\forall s \neq p$ için). Buradan $p \leq j \leq m-1$ için:

$$\frac{1}{P_n^j} \sum_{i_1,\dots i_j=1}^{n} P_{i_1} \dots P_{i_j} f\left(x_{i_j}\right) = \frac{1}{P_n} \sum_{i_1=1}^{n} p_i \ f(x_i) = F_1^{[m]}(t_1)$$

elde edilir. Eğer $1 \leq q \leq p-1$ olursa;

$$F_q^{[m]}(t_1) = \frac{1}{P_n^q} \sum_{i_1,\dots i_j=1}^{n} P_{i_1} \dots P_{i_q} f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = \frac{1}{P_n} \sum_{i_1=1}^{n} p_i \ f(x_i)$$

dir. Bu şekilde (2.1.17) ve (2.1.18) gösterilmiş olur. ■

(iv) Şimdi $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ ve $t_1, t_2 \in T$ olsun. O halde f nin konveksliğinden;

$$= \frac{1}{P_n^j} \sum_{i_1,\dots i_j=1}^{n} P_{i_1} \dots P_{i_j} f\Bigg(\alpha_1(\gamma t_1 + \beta t_2) x_{i_1} + \cdots + \alpha_j(\gamma t_1 + \beta t_2) x_{i_j}$$

$$+ \left(\alpha_{j+1}(\gamma t_1 + \beta t_2) + \cdots + \alpha_m(\gamma t_1 + \beta t_2)\right) \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Bigg)$$

$$= \frac{1}{P_n^j} \sum_{i_1,\dots i_j=1}^{n} P_{i_1} \dots P_{i_j} f\Bigg[\Bigg(\gamma\left(\alpha_1(t_1) x_{i_1} + \cdots + \alpha_j(t_1) x_{i_j}\right) + \left(\alpha_{j+1}(t_1) + \cdots + \alpha_m(t_1)\right) \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Bigg)$$

$$+ \left(\beta\left(\alpha_1(t_2) x_{i_1} + \cdots + \alpha_j(t_2) x_{i_j}\right) + \left(\alpha_{j+1}(t_2) + \cdots + \alpha_m(t_2)\right)\right) \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Bigg]$$

$$\leq \gamma F_j^{[m]}(t_1) + \beta F_j^{[m]}(t_2)$$

eşitsizliği elde edilir. $\forall\, 1 \leq j \leq m-1$ için $F_j^{[m]}$ nin T üzerinde konveks olduğu gösterildi.

Klasik eşitsizliklerin ardından ağırlıklı aritmetik ve geometrik durum şu şekilde verilebilir. $x_1, \ldots x_n$ ve $p_1, \ldots, p_n$ pozitif reel sayıları için;

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{P_n}} \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{2.1.19}$$

dir (Pachpatte 2005a). ■

Sonuç 2.1.2 $f: C \subset X \to (0, \infty)$, *C* lineer uzayı üzerinde konveks bir fonksiyon ve X te logaritmik özellikli *C* üzerinde konkav bir fonksiyon olsun. O halde tüm x_i, p_i, α_j ve m ler için aritmetik ve geometrik manada $\forall t \in T$ için:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i &\geq F^{[m]}(t) \geq F_{m-1}^{[m]}(t) \geq \cdots \geq F_2^{[m]}(t) \geq F_1^{[m]}(t) f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \\ &\geq G_1^{[m]}(t) \geq G_2^{[m]}(t) \geq \cdots \geq G_{m-1}^{[m]}(t) \geq G^{[m]}(t) \\ &\geq \left(\prod_{i=1}^{n}\big(f(x_i)\big)^{p_i}\right)^{\frac{1}{P_n}} \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

eşitsizliği geçerlidir (Pachpatte 2005a).

Burada:

$$G_1^{[m]}(t) = \left(\prod_{i_1, i_2=1}^{n} f^{p_{i_1}}\left[\alpha_1(t) x_{i_1} + \big(\alpha_2(t) + \cdots + \alpha_m(t)\big)\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]\right)^{\frac{1}{P_n}}$$

$$G_2^{[m]}(t) = \prod_{i_1, i_2=1}^{n} f^{p_{i_1} \cdot p_{i_2}}\left[\alpha_1(t) x_{i_1} + \alpha_2(t) x_{i_2} + \big(\alpha_3(t) + \cdots + \alpha_m(t)\big)\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]^{\frac{1}{P_n^2}}$$

.
.
.

$$G_{m-1}^{[m]}(t) = \left(\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}=1}^{n} f^{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \ldots p_{i_{m-1}}}\left[\alpha_1(t) x_{i_1} + \cdots + \alpha_{m-1}(t) x_{i_{m-1}} + \alpha_m(t)\right]\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^{\frac{1}{P_n^{m-1}}}$$

dir ve

$$G^{[m]}(t) = \left(\prod_{i_1, i_2, \ldots, i_m=1}^{n} f^{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \ldots p_{i_m}}\left[\alpha_1(t) x_{i_1} + \cdots + \alpha_m(t) x_{i_m} + \alpha_m(t)\right]\right)^{\frac{1}{P_n^m}}$$

olur ve sonuç tamamlanır. ■

Hatırlatma 2.1.3 Eğer f sonuç 2.1.2 deki gibi $f:(0,\infty)\rightarrow(0,\infty)$ olarak seçilirse $f(x)=x$ olmak üzere aritmetik ve geometrik anlamda;

$$\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i \geq \left(\prod_{i_1=1}^{n}\left[\alpha_i(t)x_{i_1}+\big(\alpha_2(t)+\cdots+\alpha_m(t)\big)\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right]^{p_{i_1}}\right)^{\frac{1}{P_n}}$$

$$\geq \left(\prod_{i_1,i_2=1}^{n}\left[\alpha_i(t)x_{i_1}+\alpha_2(t)x_{i_2}+\big(\alpha_3(t)+\cdots+\alpha_m(t)\big)\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right]^{p_{i_1}\cdot p_{i_2}}\right)^{\frac{1}{P_n^2}}$$

$$\vdots$$

$$\geq \left(\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_{m-1}=1}^{n}\left[\big(\alpha_i(t)x_{i_1}+\cdots+\alpha_{m-1}(t)x_{i_{m-1}}\big)\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right]^{p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdots p_{i_{m-1}}}\right)^{\frac{1}{P_n^{m-1}}}$$

$$\geq \left(\prod_{i_1,i_2,\ldots,i_m=1}^{n}\left[\big(\alpha_i(t)x_{i_1}+\cdots+\alpha_m(t)x_{i_m}\big)\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right]^{p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdots p_{i_m}}\right)^{\frac{1}{P_n^{m}}}$$

$$\geq \left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{P_n}}$$

elde edilir. Jensen eşitsizlikleri analizde önemli rol oynar. Birçok matematikçi sadece (2.1.3) veya (2.1.7) yi incelemekle kalmamış bu konuda çeşitli araştırmalar yapmışlardır (Dragomir and Sandor 1992, Dragomir *et. al*. 2000, McShane 1937, Mond and Pecaric 1993, Mond and Pecaric 1994, Pecaric 1992, 1993).

Teorem 2.1.5 $f:I=[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. $h:I\rightarrow(0,\infty)$ ve ardından $u:I\rightarrow\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ integrallenebilen fonksiyonlar olsun. O halde:

$$f\left(\frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}\right)\leq\frac{\int_a^b h(t)f\big(u(t)\big)dt}{\int_a^b h(t)dt} \tag{2.1.21}$$

dir. (2.1.21) tüm integraller için tanımlıdır (Pachpatte 2005a).

İspat: $\gamma>0$ seçilsin. f nin konveksliğinden $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere:

$$f(t)-f(\gamma)\geq k(t-\gamma), (\forall t\geq 0)$$

dır. $t=u(t)$ alınıp verilen eşitsizlikte $h(t)$ ile çarpılır ve ardından $[a,b]$ aralığında integre edilirse;

$$\int_a^b h(t)f\big(u(t)\big)dt - f(\gamma)\int_a^b h(t)dt \geq k\left\{\int_a^b h(t)u(t)dt - \gamma\int_a^b h(t)dt\right\} \qquad (2.1.22)$$

elde edilir. (1.2.21) eşitsizliğinde bu ifade yerine koyulursa;

$$\gamma = \frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}$$

ifadesi yerine konulursa ispat tamamlanır. ■

Steffensen (1919) tarafından kullanılan eşitsizlik şimdiki literatürdeki konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin türetilmiş halidir. Buna da "Steffensen Eşitsizliği" denir.

Şimdi Jensen eşitsizliği için başka bir genelleme ve integral örnekleri için Ciesielski (1958) tarafından sunulan ve ilgiyle okunan iki değişkenli integrallere değinilecektir. Boas (1970) integral örneklerine ilişkin değişik veriler elde etmiştir.

$f: I \to \mathbb{R}$ sürekli konveks fonksiyon ve I bir aralık olsun. $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ olarak tanımlansın. Eşitsizlik (Jensen eşitsizliği);

$$f\left(\frac{\int_a^b g(x)d\alpha(x)}{\int_a^b d\alpha(x)}\right) \leq \frac{\int_a^b f\big(g(x)\big)d\alpha(x)}{\int_a^b d\alpha(x)} \qquad (2.1.23)$$

tir. f sürekli, tanımlı ve kararlı, α azalmayan, sınırlı ve $\alpha(a) \neq \alpha(b)$ dir. ■

<u>Jensen-Steffensen Eşitsizliği:</u> Eşitsizlik (2.1.23) te f sürekli ve monoton (her iki anlamda) tanımlı, α ya sürekli ya da sınırlı varyasyonlu ise;

$$\alpha(a) \leq \alpha(x) \leq \alpha(b), x \in [a,b];\ \alpha(b) > \alpha(a)$$

dır (Pachpatte 2005a).

<u>Jensen-Boas Eşitsizliği:</u> (2.1.23) teki integralde tanımlı bir f ve α sürekli veya sınırlı varyasyonlu ise;

$$\alpha(a) \leq \alpha(x_1) \leq \alpha(y_1) \leq \alpha(x_2) \leq \cdots \leq \alpha(y_{n-1}) \leq \alpha(x_n) \leq \alpha(b)$$

dir (Pachpatte 2005a). $\forall x_k$ için $(y_{k-1}, y_k), y_0 = a, y_n = b$ ve $\alpha(b) > \alpha(a)$, f burada tanımlı, sürekli ve monotondur (her iki anlamda) . $\forall(n-1)$ aralıklı (y_{k-1}, y_k) aralığı için ve $n = 1$ için Jensen-Boas eşitsizliğinden Jensen-Steffensen eşitsizliği elde edilir. Limit $n \to \infty$, α arttırılır ve f de gerektiği kadar sürekli olursa, böylece Jensen eşitsizliği, Jensen-Boas eşitsizliğini limitlenmiş durumudur.

Pecaric (1982, 1984) tarafından Jensen-Boas eşitsizliği hakkında kısa ve ilgi çekici ispatlar verilmiştir. O bu ispatla toplam sembolü için sadece Jensen eşitsizliğini kullanmıştır. Yani;

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \qquad (2.1.24)$$

dir. Burada $p_i \geq 0$ ve $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0, x_i \in I, \dot{\mathrm{I}} = 1, \dots, n$ için Jensen-Steffensen eşitsizliğidir. Eşitsizlik (2.1.24) ve (2.1.23) ten kolayca elde edilebilir.

Eğer $\alpha(a) \leq \alpha(y_1) \leq \alpha(y_2) \leq \cdots \leq \alpha(y_{n-1}) \leq \alpha(b)$ olursa Jensen-Steffensen eşitsizliğinden;

$$f\left(\frac{\int_{y_{k-1}}^{y_k} g(x)d\alpha(x)}{\int_{y_{k-1}}^{y_k} d\alpha(x)}\right) \leq \frac{\int_{y_{k-1}}^{y_k} f\big(g(x)\big)d\alpha(x)}{\int_{y_{k-1}}^{y_k} d\alpha(x)}, \qquad k = 1,2, \dots, n$$

elde edilir. Yani:

$$f(t_k) \leq \frac{1}{P_k}\int_{y_{k-1}}^{y_k} f\big(g(x)\big)d\alpha(x), \quad k = 1,2, \dots, n$$

olur. Burada:

$$P_k = \int_{y_{k-1}}^{y_k} d\alpha(x), \qquad t_k = \frac{\int_{y_{k-1}}^{y_k} g(x)d\alpha(x)}{\int_{y_{k-1}}^{y_k} d\alpha(x)}$$

tir. $P_k > 0$ ve $t_k \in I, k = 1,2, \dots, n$ için (2.1.24) Jensen eşitsizliğinden;

$$f\left(\frac{\int_{y_{k-1}}^{y_k} g(x)d\alpha(x)}{\int_{y_{k-1}}^{y_k} d\alpha(x)}\right) = f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k)}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$$

$$\leq \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \left(\frac{1}{P_k}\right)\int_{y_{k-1}}^{y_k} f\big(g(x)\big)d\alpha(x)}{\sum_{k=1}^{n} p_k} = \frac{\int_a^b f\big(g(x)\big)d\alpha(x)}{\int_a^b d\alpha(x)}$$

elde edilir. Eğer $\alpha(y_{j-1}) = \alpha(y_j)$ olursa (bazı j'ler için), o halde $d\alpha(x) = 0$ olur.

$[y_{j-1}, y_j]$ aralığında;

$$\int_a^b g(x)d\alpha(x) = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} p_k t_k, \quad \int_a^b d\alpha(x) = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} p_k$$

dır. (2.1.24) kullanılırsa, Jensen-Boas eşitsizliğinin geçerli olduğunu kolayca kanıtlanır. Jensen integral eşitsizliği için Mitrinovic (1970) bazı ilgi çekici varyanslar ve genellemelerle ilgili atıfta bulunuyor.

Mitrinovic ve Vasic (1975) "centroid method" adından konveks fonksiyonlar için tamamlayıcı olan (başka bir versiyon) iki yeni Jensen eşitsizliği elde etmişlerdir. Beesack (1983) bu tür eşitsizliklerin genel halini savunmuş ve aynı geometrik düşünceleri kullanmıştır. Fakat centroid methodtan yaralanmamıştır. Beesack (1983) tarafından verilen sonuç eşitsizliklerin alanını genişletmiş ve eşitsizliğin ortaya çıkan sabit değerini açıklamıştır.

Teorem 2.1.6 τ, σ cebiri üzerinde negatif olmayan bir ölçü olsun. (D cümlesinin bir alt cümlesi) ve q,f reel D üzerinde τ-ölçülebilir fonksiyon,

$q(x) > 0, -\infty < x_1 \leq f(x) \leq x_2 < \infty, (\forall x \in D)$ ve $\int_D qd\,\tau = 1$, ϕ konveks fonksiyon, $I = [x_1, x_2]$ $\ni$ $\phi''(x) \geq 0$ (I da izole noktalar), (ϕ, I üzerinde kesin konveks) ise aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

(i) $\phi(x) > 0, (\forall x \in I)$

(ii) $\phi(x), x_1 < x < x_2$; $\phi(x_1) = 0, \phi'(x_1) \neq 0$ veya $\phi(x_2) = 0, \phi'(x_1) \neq 0$

(iii) $\phi(x) < 0, (\forall x \in I)$ veya

(iv) $\phi(x), x_1 < x < x_2$, $\phi(x_1) = 0, \phi(x_2) = 0$ dır. O halde:

$$\int_D q\,\phi(f)d\,\tau \leq \alpha\,\phi\left(\int_D qfd\tau\right) \tag{2.1.25}$$

dur. Bazı $\alpha > 1$ ler için (i) ve (ii) geçerli veya $\alpha \in (0,1)$ için (iii) ve (iv) geçerlidir. Daha kesin olarak , $\alpha, (x_1, x_2, \phi)$ ye bağlı olursa (2.1.25) aşağıdaki gibi belirlenebilir. Burada $\mu = [\phi(x_2) - \phi(x_1)/(x_1 - x_2)]$ olarak alınsın. Eğer $\mu = 0$ olursa, $\overline{x} = x$ olduğunda $\phi'(x) = 0$ da eşitliğin bir tek çözümü, $x_1 < x < x_2$ olursa $\alpha = \phi(x_1)/\phi(x_2)$ yeterli olur. (2.1.25) eşitliği için $\mu \neq 0$ olduğundan eşitliğin tek çözümü $\overline{x} = x$

olduğunda da $[x_1, x_2]$ kapalı aralığında;

$$g(x) = \mu\phi(x) - \phi'(x)[\phi(x_1) + \mu(x_1 - x_2)] = 0 \qquad (2.1.26)$$

olduğunda $\alpha = \frac{\mu}{\phi'(x)}$ olması (2.1.25) için yeterlidir. Üstelik $x_1 < \overline{x} < x_2$ durumunda (i) ve (ii) elde edilir. Ayrıca eşitlik (2.1.25) ancak ve ancak $f(x) = x_i$ durumunda geçerlidir. $(x \in D_i)$. Burada D_1, D_2 ; $D'de$ τ-ölçülebilir alt cümle $\ni D = D_1 \cup D_2$ ve

$$\overline{x} = x_1 \int_{D_1} q d\tau + x_2 \int_{D_2} q d\tau$$

olarak tanımlanır (Pachpatte 2005a).

İspat: Daha önce belirtildiği üzere (2.1.25) teki her iki integral mevcut olduğundan f ve $\phi(f)$ sınırlı ölçülebilir fonksiyonlardır. Bütün durumlarda $\phi'(x)$ sürekli ve I da kesinlikle artan olduğunda, μ ye ortalama değer teoremi uygulanırsa;

$$\phi'(x_1) < \mu < \phi'(x_2) \qquad (2.1.27)$$

eşitsizliği sağlanır. $A(x_1, \phi(x_1)), B(x_2, \phi(x_2))$ çiftleri ele alınsın. (konveks $y = \phi(x)$ eğrisi üzerinde). Eşitlik $[AB]$ kirişi için;

$$y = \phi(x_1) + \mu(x - x_1) \equiv m(x)$$

tir. Konveks eğriler ailesi ile $\alpha > 0$ için $y = \alpha\phi(x)$, eğrisi alınsın. Buradaki çözümde $\alpha > 0 \ni$ eğri $\overline{P}(x, \alpha\phi(\overline{x}))$ noktasında $[AB]$ kirişine teğet olsun. $(\overline{x} \in I)$.$(x_1 < \overline{x} < x_2)$ ise olduğunda (i) ve (ii) geçerlidir. Bu durumda:

$$\alpha\phi'(x) = \mu \qquad (2.1.28)$$

$$\alpha\phi(x) = m(x) \qquad (2.1.29)$$

eşitlikler geçerlidir. $(\overline{x}, \alpha)$ da tek çözüme sahiptir. $(\overline{x} \in I)$, $(\alpha > 0)$, $\mu = 0$ olduğunda (2.1.28) ve (2.1.29) $\alpha\phi'(x) = 0$, $\alpha\phi'(x) = x_1$ eşitliklerine indirgenir. Eğer $\phi(x_1) \neq 0$ olursa bu eşitlikler $\phi'(x) = 0$ olduğunda $(\overline{x}, \alpha)$ da tek çözüme sahiptir. $\alpha = \phi(x_1)/\phi(\overline{x})$ olduğunda da $\overline{x}$ yi $x_1 < \overline{x} < x_2$ aralığında incelenir. Bu durumda $\mu \neq 0$ iken $\phi(x_1) = 0$ olabilir. Buradan da $\mu \neq 0$ iken $\phi(x_2) = 0$ olabilir. (Fakat $\mu \neq 0$ oluğunda değil). $\alpha > 0$ olursa $\phi(x_1) \neq 0$ olur.

$\mu \neq 0$ olduğunda durum (i) ve (ii) geçerlidir. (2.1.28) den $\alpha \neq 0$ ve α yok edildiğinde (2.1.28) ve (2.1.29) çifti görülür ki burada $\overline{x} = x$ olduğundan (2.1.26) da tek çözüm olmalıdır. Şimdi bu eşitliğin (x_1, x_2) de tek bir çözüme sahip olduğu gösterilsin. İlk olarak;

$$g(x_1) = \phi(x_1)\big(\mu - \phi'(x_1)\big), \qquad g(x_2) = \phi(x_2)\big(\mu - \phi'(x_2)\big)$$

dir. $\phi(x_1), \phi(x_2)$ aynı işaretlere sahip olursa (2.1.27) den $g(x_1), g(x_2)$ ayni işaretlere sahip olur. Böylece g, (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfır noktasına sahiptir. Üstelik:

$$g'(x) = -m\phi''(x)$$

eşitliğinin $[x_1, x_2]$ de işareti değişmez. Bunun için $m(x)$ lineer fonksiyonu $(x_i) = \phi(x_i)$ ve $i = 1,2$ için eşitliğine sahip olur ve bundan dolayı $[x_1, x_2]$ kapalı aralığında ya durum (i) de her zaman pozitiftir ya da durum (ii) de her zaman negatiftir.

Devam edilirse g, $[x_1, x_2]$ de kesinlikle monoton fonksiyon ise (2.1.26) eşitliği $x = \overline{x} \in (x_1, x_2)$ de tek çözüme sahiptir. Üstelik $\phi'(x) = 0$ olduğunda (2.1.26) da $x = \overline{x}$ olurdu ve $\mu\phi(\overline{x}\,) = 0$ anlamına gelirdi. Bu durum $\mu \neq 0$ olduğunda imkânsızdır çünkü (x_1, x_2) de $\phi(x) = 0$ dır. Eğer şimdi $\alpha = \mu/\phi'(x)$ eşitliğini kullanılırsa (x, α) ikilisinin (2.1.28) ve (2.1.29) eşitliğini sağladığı kolaylıkla görülür ve $x_1 < \overline{x} < x_2$ için;

$$\alpha\phi(\overline{x}) = \phi(x_1) + \mu(\overline{x} - x_1) = \left(1 - \frac{\overline{x} - x_1}{x_2 - x_1}\right)\phi(x_1) + \frac{\overline{x} - x_1}{x_2 - x_1}\phi(x_2)$$

dir veya

$$\alpha\phi(x) > \phi(\overline{x}) \tag{2.1.30}$$

dir. Bu hipotezden $\alpha > 1$ olduğundan durum (i) ve $\alpha < 1$ olduğundan da durum (ii) bir önceki paragraftaki halini alır. Kalanlar gösteriyor ki $\alpha > 0$ olduğunda durum (ii) $\mu \neq 0$ olduğunda geçerlidir. (2.1.29) dan $\alpha\phi(\overline{x}) = m(\overline{x})$ ve yukarıda belirtildiği gibi ϕ ve μ nün *I* da aynı işaretlere sahip olur.

Aynı şekilde (iii) ve (iv) durumları, (i) ve (ii) nin kolay versiyonlarıdır. Sırasıyla $\phi(x_1) = 0, \phi'(x_1) \neq 0$ olduğunda $\phi'(x_1) > 0$ ve $\mu > 0$ olur. Bu durumda eğer $\phi(x_2) = 0$ ve $\phi'(x_2) \neq 0$ olursa, $\mu < \phi'(x_2) < 0$ şartına bağlı olunur. Bunu için buradaki ilk koşullar:

$$g(x) = \mu\, \phi(x) - \mu(x - x_1)\, \phi'(x) = \mu(x - x_1)[\phi'(X) - \phi'(x)],\ x_1 < X < x_2$$

eşitliğini verir. Burada $g(x) < 0$; $x_1 < x < x_2$ için aynı zamanda $x = \overline{x}$ (2.1.26) dan $[x_1, x_2]$ daki tek çözümüdür ve (2.1.28) ve (2.1.29) eşitlikleri $\alpha = \mu/\ \phi'(x_1) > 1$ olduğunda $x = x_1$, $[x_1, x_2]$ aralığında tek çözüme sahiptir.

Benzer uygulamalarda durum (ii) den $\overline{x} = x_2$ ve $\alpha = \mu/\ \phi'(x_2) > 1$ olduğunu bulunur. Durum (ii) için ilk olarak $\phi'(x_1) < 0$ durumu $x = x_1\ 0 < \alpha = \mu/\ \phi'(x_1) < 1$ ve $\phi'(x_2) > 0$ olduğunda da $x_2 = \overline{x}$,$0 < \mu/\ \phi'(x_2) < 1$ olur.

Yukarıda belirtilen α değeri sadece (2.1.25) eşitliğini kanıtlamak içindir. Bu kanıt bu noktanın $\alpha > 0$ olduğunda $\forall x \in I$ için $[AB]$ kirişinin grafiğe $\overline{P}$ noktasında teğet olduğunu ve kesinlikle konveks olduğunu söyler. Bu durumda:

$$\alpha\phi(x) \geq m(x) = \phi(x_1) + \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1}$$

dir. Eşitlik sadece $\overline{x} = x$ olduğunda geçerlidir. $x = \int_D\ qf d\tau\quad x \in I$ olduğunda kullanılabilir. Buradan:

$$\alpha\phi\left(\int_D qf d\tau\right) \geq \phi(x_1) + \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1}\left(\int_D qf d\tau - x_1\right)$$

$$= \int_D \left\{\phi(x_1) + \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1}(f - x_1)\right\} d\tau \geq \int_D q\, \phi(f) d\tau$$

eşitsizliği (2.1.30) daki gibidir. Bir önceki eşitlikte ancak ve ancak $f(x) = x_1$ veya x_2 D_1 veya D_2 alt cümlesinin üstünde τ −ölçülebilir olduğunda geçerlidir. Bundan dolayı (2.1.25) eşitliği buraya ilave edilirse;

$$\overline{x} = \int_D q\, \phi(f) d\tau = x_1 \int_{D_1} q\, d\tau + x_2 \int_{D_2} q\, d\tau$$

olur. Bu durumda $\phi(A) = \int_A\ q\, d\tau$ en küçük halindedir. Bu verilenler incelenirse herhangi bir $x \in [x_1, x_2]$ aralığında seçilen D_1, D_2 cümleleri mevcuttur fakat genel çözümde değillerdir. ■

Sonuç 2.1.3 (2.1.6) daki tüm hipotezleri kabul edilsin ve ϕ, I da konkav olursa $\phi''(x) \leq 0$ dır ve I daki izole noktalar için;

$$\int_D q\,\phi(f)d\tau \geq \alpha \int_D q\,f d\tau \qquad (2.1.31)$$

dur. Burada α reel bir değerdir. Şimdi $\alpha > 1$ olursa $\phi(x) < 0$ olur. (x_1, x_2) aralığında ve $0 < \alpha < 1$ olursa $\phi(x) > 0$ olur. (x_1, x_2) de eşitlik (iii) de kesinlikle aynı f yi temsil eder. (Teorem 2.1.6). Bu nokta $\phi_1 = -\phi$ olursa Teorem 2.1.6 elde edilir (Pachpatte 2005a).

Teorem 2.1.7 τ, D, q, f, x_1, x_2 Teorem 2.1.6 daki gibi olsun ve $\phi(x)$; $I = [a, b]$ de diferansiyellenebilir herhangi bir fonksiyon $\ni \phi'(x)$ var ve I üzerinde kesin artandır. O halde bazı α lar için $0 < \alpha < (x_2 - x_1)[\mu - \phi'(x_1)]$ eşitsizliğini sağlayan α lar için;

$$\int_D q\,\phi(f)d\tau \leq \alpha + \phi\left(\int_D q\,f d\tau\right) \qquad (2.1.32)$$

dur. Burada:

$$\mu = \frac{[\phi(x_2) - \phi(x_1)]}{x_2 - x_1}$$

olarak tanımlanır. Kesin olarak α, (2.1.32) için aşağıdaki gibi belirlenebilir. $\overline{x} = x$, $[\mu = \phi'(x)]$ olduğunda eşitliğin tek çözümü olsun. $x_1 < \overline{x} < x_2$ olursa;

$$\alpha = \phi(x_1) - \phi(x_2) + \mu(\overline{x} - x_1)$$

(2.1.32) için yeterlidir. Eşitlik (2.1.32) de $f(x) = x_i$ için geçerlidir. $x \in D_i$, burada D_1, D_2 D alt cümlesinin üzerinde τ −ölçülebilir $\ni D = D_1 \cup D_2$ ve

$$\overline{x} = x_1 \int_{D_1} q\,d\tau + x_2 \int_{D_2} q\,d\tau$$

olduğunda bu cümleler vardır (Pachpatte 2005a).

İspat: Bu ispat Teorem 2.1.6 daki gibi benzer olarak verilebilir. Aynı sistem kullanılırsa tekrar (2.1.27) elde edilir ve konveks eğri ile $(\overline{x}, \overline{y})$ noktasında $[AB]$ kirişine teğet olan $y = \alpha + \phi(x)$ için incelensin. Bu sonuç ancak ve ancak $\overline{x}$ ve α aşağıdaki çiftler için meydan gelir:

$$\phi'(x) = \mu \qquad (2.1.33)$$

$$\alpha + \phi(x) = m(x) \qquad (2.1.34)$$

tir. ϕ, I da kesin artan olduğunda $\overline{x} \in (x_1, x_2)$ de ortalama değer teoreminden (2.1.33) eşitliği tek çözüme sahiptir ve α tektir. (2.1.34) de;

$$\begin{aligned} \alpha &= m(\overline{x}) - \phi(\overline{x}) \\ &= \phi(x_1) - \phi(\overline{x}) + \mu(\overline{x} - x_1) \\ &= (\overline{x} - x_1)[\mu - \phi'(X)] \text{ , burada } x_1 < X < \overline{x} \end{aligned}$$

dir. Buradan:

$$0 < \alpha < (x_2 - x_1)[\mu - \phi(x_1)]$$

elde edilir. (2.1.32) nin ispatı önceki gibidir ve şimdi α nın değerinden;

$$\alpha + \phi(x) \geq m(x) = \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \forall x \in I$$

dir. Tekrar $x = \int_D q\, f d\tau$ alınırsa ve ϕ nin I daki konveksliği kullanılırsa (2.1.32) elde edilir. ■

Sonuç 2.1.4 Teorem 2.1.7 deki bütün hipotezler geçerli olsun ve bunun dışında $\phi'(x)$, I da kesin azalan olsun. O halde $0 < \alpha < (x_2 - x)[\phi'(x_1) - \mu]$ ve $\mu = \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{x_2 - x_1}$ olmak üzere;

$$\phi\left(\int_D q\, f d\tau\right) \leq \alpha + \int_D q\, \phi(f) d\tau \tag{2.1.35}$$

dur.

Aslında, $\alpha = \phi(\overline{x}) - \phi(x_1) - \mu(\overline{x} - x_1)$ olarak alınırsa $x = \overline{x}$ ve $\phi'(x) = \mu$ eşitliğin tek çözümü olur. Eşitlik (2.1.35) aynı koşullar altında (2.1.32) deki gibidir. $\mu_1 = -\mu$ yü kullanıp $\phi_1 = -\phi$ fonksiyonunu kanıtlamak için (2.1.7) teoremini uygulamaya ihtiyaç vardır (Beesack 1983). ■

2.2 Jessen Eşitsizlikleri

Bu bölümde konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliklerine uygun olan izotonik Jessen lineer fonksiyonlarıyla ilgili bilgi verilecektir. Beesack ve Pecaric tarafından verilen bazı genel eşitsizlikler Jessen eşitsizliklerini tamamlar. (İzotonik lineer Jessen fonksiyonları için).

$E \neq 0$ bir alt cümle olsun ve L lineer uzayda reel değerli bir fonksiyon olan $g: E \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(L_1) $f, g \in L \implies (af + bg) \in L, \forall a, b \in \mathbb{R}$

(L_2) $1 \in L$, burada eğer $f(t) = 1,\ t \in E$ ise o halde $f \in L$

dir. İzotonik lineer fonksiyonlarda düşünülürse, $A: L \to \mathbb{R}$ için;

(A_1) $A(af + bg) = aA(f) + bA(g), \qquad f, g \in L, \qquad a, b \in \mathbb{R}$

(A_2) $f \in L,\ f(t) \geq A(f) \geq 0$ (A izotonik)

olur. Burada:

$$A(g) = \int_E g d\mu \qquad\qquad A(g) = \sum_{k \in E} p_k g_k$$

dir. Burada μ, E üzerinde bir pozitif ölçü (1.durumda) , ikinci durumda ise E doğal sayılarda bir alt cümledir. Jessen (1931) Jensen eşitsizlikleriyle ilgili genellemeler veriyor.

Teorem 2.2.1 L boş olmayan E cümlesinin üzerinde (L_1) ve (L_2) özelliklerini sağlasın ve ϕ, $I \subseteq R$ aralığında bir konveks fonksiyon olsun. A herhangi bir izotonik lineer fonksiyon ve $A(1) = 1$ olsun. O halde $\forall g \in L$ için $\ni \phi(g) \in L$ olursa $A(g) \in L$ elde edilir ve

$$\phi\big(A(g)\big) \leq A\big(\phi(g)\big) \tag{2.2.1}$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: İlk olarak $I = [\alpha, \beta]$ ve $g \in L$ ile $\phi(g) \in L$ olursa o halde $\alpha \leq g(t) \leq \beta, t \in E$ bulunur. Burada $\alpha = A(\alpha - 1) \leq A(g) \leq \beta, A(g) \in I$ dır. Buradan ϕ, I da konveks $x_0 \in I$ ve $m = m(x_0)$ $\ni$ $\phi(x) \geq \phi\,(x_0) + m(x - x_0), \alpha \in I$ dır. Bu eşitsizlikte

$x = g(t),\ x_0 = A(g)$ alınırsa ve A fonksiyonuna uygulanırsa;

$$A(\phi(g)) \geq \phi\big(A(g)\big) + m(A(g) - A(g)) \Longrightarrow \phi\big(A(g)\big) \leq A(\phi(g))$$

olur ve teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi Beesack ve Pecaric (1985) tarafından üç temel lemma verilecektir. Bunlar (2.2.1) de Jessen eşitsizliği ile ilgi olacak ve bu eşitsizlikler de uygun bir X için $\phi\big(A(g)\big) \leq X\big(A(g)\big)$ formunda olacaktır. ■

Lemma 2.2.1 $\phi,\ I = [m, M]$ de konveks olsun. $-\infty < n < M < \infty$ ve L de (L_1) ve (L_2) koşullarını sağlansın ve A, I da izotonik lineer bir fonksiyon ve $A(1) = 1$ olsun. O halde $\forall g \in L$ için $\ni\ \phi(g) \in L,\ m \leq g(t) \leq M,\ \forall t \in E$ ise;

$$A(\phi(g)) = \frac{\big(M - A(g)\big)\phi(m) + (A(g) - m)\phi(M)}{M - m} \tag{2.2.3}$$

dir (Beesack and Pecaric 1985).

İspat: Konveks fonksiyonun tanımından;

$$\phi(v) \leq \frac{w - v}{w - u}\phi(u) + \frac{v - u}{w - u}\phi(w), u \leq v \leq w, u < w$$

dir. Şimdi $u = m$, $v = g(t),\ w = M$ alınırsa;

$$\phi\big(g(t)\big) \leq \frac{M - g(t)}{M - m}\phi(m) + \frac{g(t) - m}{M - m}\phi(M), t \in E$$

olur. Buradan $A.(A_1), (A_2)$ ve $A(k) = k$ olur. ($\forall k \in \mathbb{R}$) Lemma 2.2.1 in ispatı tamamlanır.

Lemma 2.2.2 (a) L; (L_1) ve (L_2) ve A da (A_1) ve (A_2) koşullarını sağlasın ve $A(t) = 1$ olsun. ϕ, $[m, M]$ de konveks ve $-\infty < m < M < \infty\ \ni\ \phi''(x)$ ≥0 ile eşitlik I da en izole noktalara sahip olsun. (ϕ, I da kesin konveks). $\phi(x) > 0, \forall x \in I$ ve buradan $\phi(x) > 0, m < x < M$ olduğunda ya $\phi(m) = 0,\ \phi'(m) \neq 0$ veya $\phi(M) = 0$, $\phi'(M) \neq 0$ ikinci durumda $\phi(x) < 0,\ \forall x \in I$ veya $\phi(x) < 0,\ m < x < M$ ile kesin olarak $\phi(m) = 0$ ve $\phi'(M) = 0$ olsun.

(b) O halde $\forall g \in L$ için $\exists\, \phi(g) \in L$ $(m \leq g(t) \leq M,\ \ \forall t \in E)$ ise;

$$A(\phi(g)) \leq \alpha\phi\big(A(g)\big) \qquad (2.2.3)$$

eşitliği bazı $\alpha > 1$ ler için 1. durum ve 2. durumu veya $\alpha \in (0,1)$ için durum 3 veya durum 4 ü sağlar. Daha kesin olarak α nın değeri (yalnızca m, M, ϕ ye bağlı olarak) (2.2.3) için tespit edilebilir. $\mu = \big(\phi(M) - \ \phi(m)\big)/(M - m)$ alınsın. Eğer $\mu = 0$ ise $x = \overline{x},\ \ \phi'(x) = 0$ eşitliğinin tek çözümü olur ve $m < \overline{x} < M$ dir. O halde: $\alpha = \phi(m)/\phi(\overline{x})$ eşitliği (2.2.3) için yeterlidir. Eğer $\mu \neq 0$ olursa $x = \overline{x}$ $[m, M]$ de;

$$\mu\, \phi(x) - \phi'(x)\{\phi(m) + \mu(x - m)\} = 0$$

eşitliğinin tek çözümüdür. O halde $\alpha = \mu/\phi'(\overline{x})$ (2.2.3) için yeterli olur. Üstelik $m < \overline{x} < M$ durum 1 ve durum 2 elde edilir.

(c) (a) daki bütün hipotezler dışında ϕ, I da konkav ve $\phi''(x) \leq 0$ olsun ve eşitlik I da en izole noktalara sahip olsun. O halde (2.2.3) eşitliğinin tersi geçerlidir. Burada α önceki gibi belirlenmiştir. Eğer $\phi(x) < 0$ (m, M) de ve $0 < \alpha < 1$, $\phi(x) < 0$, (m, M) aralığında sağlanır (Beesack and Pecaric 1985).

İspat: a) Mitrinovic ve Lackovic (1985) tarafından verilen $y = \phi(x)$ eğrisi üzerinde $B\big(m, \phi(m)\big)$ ve $B\big(m, \phi(m)\big)$ $C\big(M, \phi(M)\big)$ noktaları ele alınsın. Eşitlik [BC] kirişinde;

$$y = \ \phi(m) + \mu(x - m) \equiv h(x)$$

eşitliğine denktir. Lemma 2.2.1 den $A(\phi(g)) \leq h(A(g))$ eşitsizliği elde edilir. Şimdi $y = \alpha\phi(x), (\alpha > 0)$ ile konveks eğri ailesini düşünülürse, Mitrinovic ve Vasic (1975), Lieb ve Thirring (1976) $\alpha > 0$ için belirtilen şartlar sağlandığını söylemişlerdir. Öyle ki eğri [BC] kirişine teğettir. Bundan dolayıdır ki $h(y) \leq \alpha\phi(y), \forall y \in I$ ve $y = A(g)$ olmak üzere;

$$A(\phi(g)) \leq h(A(g)) \leq \alpha A(\phi(g))$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

(b) (a) daki konveks fonksiyona $\phi_1 = -\phi$ uygulandığından kolayca elde edilebilir.

Hatırlatma 2.2.1 Açık olarak görülür ki yukarıdaki ispat (2.2.3) den oluşturularak elde edilmiştir.

Lemma 2.2.3 a) A ve g Lemma 2.2.2 deki gibi ve $\phi(x)$ $I=[m,M]$ de herhangi diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun $\ni$ $\phi'(x)$ mevcuttur ve I da kesin azalandır. O halde:

$$A(\phi(g)) \leq \alpha + \phi\big(A(g)\big) \tag{2.2.4}$$

dir. Bazı α lar için $0<\alpha<(M-m)\{\mu-\phi'(m)\}$ sağlanır. Burada $\mu=\big(\phi(M)-\phi(m)\big)/(M-m)$ ve α, (2.2.4) deki gibidir. $x=\overline{x}$, $\phi'(x)=\mu, (m<\overline{x}<M)$ eşitliğin tek çözümü olsun. O halde:

$$\alpha=\phi(m)-\phi(\overline{x})+\mu(M-m)$$

(2.2.4) için de geçerlidir.

b) (a) daki tüm hipotezlerin dışında $\phi'(x)$ I da kesinlikle azalan olsun. O halde:

$$\phi\big(A(g)\big) \leq \alpha + A(\phi(g))$$

olur. Burada $0<\alpha<\ (M-m)\{\phi'(m)-\mu\}$ dür. Gerçekten de: $\alpha=\phi'(\overline{x})-\phi(m)-\mu(\overline{x}-m)$ eşitliği kullanılırsa kolaylıkla elde edilebilir. ($\overline{x}$, (a) daki gibidir) (Pachpatte 2005a).

İspat: (a) (2.2.2) nin ispatına benzerdir. Lemma 2.2.1 kullanılırsa $A(\phi(g)) \leq h\big(A(g)\big)$ bulunur. Burada $y=h(x)$, $B\big(m,\phi(m)\big)$, $C\big(M,\phi(M)\big)$ noktaları da kirişe teğettir. Şimdi ise burada $y=\alpha+\phi(x)$ ve konveks eğri ailesi ele alınsın. (Bennett 1988, Mond and Pecaric 1994).

Burada $\alpha>0$ belirtilen koşulları sağlar $\ni$ eğri $[BC]$ kirişine teğettir. Bu nedenle $h\big(A(g)\big) \leq \alpha+\ \phi\big(A(g)\big)$, $A(\phi(g)) \leq h\big(A(g)\big) \leq \alpha+\ \phi\big(A(g)\big)$ olur ve (2.2.4) ün ispatı tamamlanır.

(b) (a) daki konveks fonksiyona $\phi_1=-\phi$ uygulanarak elde edilir. ■

Hatırlatma 2.2.2 Eşitsizliklerin ispatı (2.2.4) ten oluşturularak verilmiştir.

Hatırlatma 2.2.3 Lemma (2.2.2) ve Lemma (2.2.3), Mitrinovic ve Vasic (1975), Lieb ve Thirring (1976) tarafından genelleştirilerek verilmiştir. Mitrinovic ve Vasic (1975)

$$A(g)=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i g_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, p_i>0$$

özel durumunu ela almıştır ve (2.2.3) eşitliği bu koşullar altında verilmiştir. Beesack (1983) özel durumu $A(g) = \int_D pqd\tau$ ile $\int_D qd\tau = 1$ dir ve eşitlik şartları (2.2.3) ve (2.2.4) deki durumlarla aynı verilmiştir.

Bu veriler Maligranda vd. (1994) belirlenmiş ve bazı teoremlerin uygulamaları veya temel eşitsizlikler (2.2.1) teoreminde ve (2.2.1)-(2.2.3) lemmalarında vermiştir ve A fonksiyonelinde ayrıntılı olarak uygulamalara dahil edilmiştir.

Teorem 2.2.3 L, E deki (L_1) ve (L_2) şartlarını sağlasın ve A da (A_1) ve (A_2) şartlarını sağlasın. Kabul edilsin ki ϕ, $I = [a, b]$ aralığından konveks ve $f: I \to \mathbb{R}$ konveks olsun. O halde:

$$\phi(x) \leq f(x) \leq C\phi B(x), x \in I \tag{2.2.5}$$

$$f(A(g)) \leq CA\big(f(Bg)\big) \tag{2.2.6}$$

dir (Pachpatte 2005).

İspat: (2.2.5) ve (2.2.1) kullanılırsa;

$$f(A(g)) \leq C\phi B\big(A(g)\big) = C\phi(A(B(g))) \leq CA(\phi B(g)) \leq CA(f(Bg))$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Hatırlatma 2.2.4 (2.2.6) eşitsizliği Teorem 2.2.1 genelleştirilmişidir (Mulholland 1932). *f* bazı ϕ ler için (2.2.5) sağlandığında Mullholland *f* yi ‘’*quasi*-konveks’’ olarak adlandırmıştır.

Teorem 2.2.3 *A*, Teorem 2.2.1 deki gibi olsun. $\phi, I \subseteq \mathbb{R}$ de konkav ve $\psi(x) = x\phi(x)$ eşitliği de *I* da konveks olsun. O halde $\forall g \in L$ için $\ni$ $g^2, \phi(g), \psi(g) \in L$ ve $A(g) > 0$ ise;

$$A\big(\phi(g)\big) \leq \phi\big(A(g)\big) \leq \frac{A\big(g\phi(g)\big)}{A(g)} \leq \phi\left(\frac{A(g^2)}{A(g)}\right) \tag{2.2.7}$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: (2.2.7) deki 1. ve 2. eşitsizliklerin sonuçları (2.2.1) de $-\phi$ ve $\phi(x)$ fonksiyonlarına uygulansın. Buradan $A_1(f) = A(gf)/A(g)$ operatörü lineer ve izotonik bir fonksiyondur ve $A_1 = 1$ dir. (2.2.7) deki eşitsizlikten (2.2.1) elde edilir. $I = [a, b], -\infty < a < b < \infty$ ve $\psi, \chi: I \to R$ sürekli ve kesin monoton olsun. Kabul edilsin ki L ve A (L_1),(L_2) ve (A_1),(A_2) şartlarını sağlasın ve $A_1 = 1$ olsun. (E baz cümlesi üzerinde) ve bazı $g \in L$ için $\psi(g), \chi(g) \in L$ dir. Bu tanımlama genel olarak yapıldığında A operatöründen ve ψ den;

$$\mu_\psi(g; A) = \psi^{-1}\left(A\big(\psi(g)\big)\right), \qquad g \in L \tag{2.2.8}$$

elde edilir. Eğer $\alpha < \psi(g(x)) < \beta$ arasında incelenirse o halde A nın izotonik karakterinden dolayı da $\alpha < A(\psi(g)) < \beta$ aynı şekilde μ_ψ (2.2.8) den tanımlanır. Bu da yukarıdaki varsayımdan $x \in E$ için $g(x) \in I$ anlamına gelir. ■

Teorem 2.2.4 Yukarıdaki hipotezlerin ışığında;

$$\mu_\psi(g; A) \leq \mu_\chi(g; A) \tag{2.2.9}$$

eşitsizliği sağlanır ya χ artan ve $\phi = \chi o \psi^{-1}$ konvekstir ya da χ azalan ve ϕ konvekstir (Beesack and Pecaric 1985).

İspat: Varsayımdan $g \in L$ için $\psi(g) \in L$ elde edilir. Bundan dolayı da $g \in L$ için $\phi\big(\psi(g)\big) = \chi(g) \in L$ dir. Aynı şekilde ϕ konveks olursa (2.2.1) Jensen eşitsizliğinden:

$$\phi(A\big(\psi(g)\big) \leq A\big(\chi(g)\big)$$

olur. Bundan dolayı χ artan ise ψ^{-1} de artan olur ve (2.2.9) dan;

$$\chi^{-1}\big[\phi(A\big(\psi(g)\big)\big] \leq \psi^{-1}\left(A\big(\chi(g)\big)\right)$$

elde edilir. Bu durumda ϕ konkav ve $-\phi$ konveks olursa önceki sayfada elde edilen ilk eşitsizlik yön değiştirir. Buradan χ^{-1} azalan ve χ den tekrar (2.2.9) elde edilir.

Hatırlatma 2.2.5. Teorem 2.2.4 fonksiyonellerin bir genellemesidir. Genel anlamdaki eşitsizlikler için bakınız (Hardy *et. al.* 1934).

Teorem 2.2.5 L, A, χ ve ψ Teorem (2.2.4) deki gibi olsun fakat $I = [m, M]$ ve burada $-\infty < m < M < \infty$ dur. O halde $\forall g \in L \ni m \leq g(t) \leq M, (t \in E)$ için;

$$\big(\psi(M) - \psi(m)\big)A\big(\chi(g)\big) - \big(\chi(M) - \chi(m)\big)A\big(\psi(g)\big) \leq \psi(M)\chi(m) - \chi(M)\psi(m) \tag{2.2.10}$$

eşitsizliği $\phi = \chi o \psi^{-1}$ olduğunda sağlanır. Ters olarak (2.2.10) ϕ konkav olduğunda geçerlidir (Pachpatte 2005a).

İspat: ψ nın I da artan olması durumunda $t \in T$ için;

$$m_1 = \psi(m) \leq \psi\big(g(t)\big) \leq \psi(M) = M_1$$

elde edilir. Lemma 2.2.1 de m yerine M ve m_1 yerine de M_1 konulursa;

$$\mathrm{A}(\phi(\psi(\mathrm{g}))) \leq \{\, \psi(\mathrm{M}) - \mathrm{A}\big(\psi(\mathrm{g})\big)\chi(\mathrm{m}) + \mathrm{A}\big(\chi(\mathrm{g})\big) - \psi(\mathrm{m})\chi(\mathrm{M})\big\}\mathrm{x}\{\psi(\mathrm{M}) - \psi(\mathrm{m})\}^{-1}$$

olması durumunda (2.2.10) azalandır. Eğer ψ, I da azalansa; $M_1 \leq \psi\big(g(t)\big) \leq m_1, t \in E$ ve sonuçların ardından ispat açıktır. ■

Jensen eşitsizliğine (2.2.1) ve (2.2.1)-(2.2.3) lemmalarına benzer lemma Beesack (1985) tarafından verilmiştir.

Lemma 2.2.4 L; (L_1),(L_2) ve A da (A_1),(A_2) şartlarını E baz cümlesi üzerinde sağlasın. Kabul edilsin ki E de $k \in L$ için $k \geq 0$ ve $A(k) > 0$, ardından ϕ, $I \subseteq \mathbb{R}$ de konveks fonksiyondur. Herhangi bir $g_1 \colon E \to \mathbb{R}$ için $\ni kg_1 \in L$ ve $k\phi(g_1) \in L$ olursa;

$$\phi\left(\frac{A(\,kg_1)}{A(k)}\right) \leq \frac{A\big(k\phi(g_1)\big)}{A(k)} \tag{2.2.11}$$

dır. Bu şartlarda $I = [m, M]$ ve burada $-\infty < m < M < \infty$ olursa;

$$A\big(k\phi(g_1)\big) \leq \frac{[MA(k) - A(kg_1)]\phi(m) + [A(kg_1) - mA(k)]\phi(M)}{M - m} \tag{2.2.12}$$

olur. Üstelik ϕ, 2.2.2 ve 2.2.3 lemmalarında konvekslik şartlarını sağlarsa;

$$A(k\phi(g_1)) \leq \alpha A(k)\phi\left(\frac{A\big(k(g_1)\big)}{A(k)}\right) \tag{2.2.13}$$

dır ve

$$A\big(k\phi(g_1)\big) \leq A(k)\left\{\alpha + \phi\left(\frac{A\big(k(g_1)\big)}{A(k)}\right)\right\} \tag{2.2.14}$$

olur. Burada α sırasıyla 2.2.2 ve 2.2.3 deki gibidir (Pachpatte 2005).

İspat: $g_1 \in L$ ve $\phi(g_1) \in L$ olması durumunda ve $k \ni kh \in L$ olur. $\forall h \in L$ için $F \colon L \to \mathbb{R}$ şöyle tanımlanmıştır:

$$F(h) = \frac{A(kh)}{A(k)}, h \in L$$

dir. $F(h)$ izotonik lineer fonksiyonu $F(1) = 1$ şartını sağlar. Bu durumda (2.2.11)-(2.2.14) ; (2.2.1)-(2.2.4) e benzer olur. Zayıf hipotezler altında belirtilen yukarıdaki k, g_1 için farklı olarak belirli bir yere kadar ilerlenebilir. (2.2.11)-(2.2.14) boyunca aynı yerde (2.2.1)-(2.2.4) kullanılmıştır. (2.2.11) in ispatında aynı işlemler diğer ispatlara uygulanır. Öncesinde $I = [\alpha, \beta]$ olursa $k\phi(g_1) \in L,\ \alpha \leq g_1(g) \leq \beta, t \in E$ olur ve $\alpha k(t) \leq k(t)\, g_1(t) \leq \beta$k(t) dir. Devam edilirse $x_0 = Ak(g_1)/A(k) \in I$ dır. ϕ nin I daki konveksliğinden;

$$\phi g_1(t) \geq \phi(x_0) + m[g_1(t) - x_0], t \in E$$

dir. Aynı şekilde:

$$k(t)\, \phi(g_1(t)) \geq\ \phi(x_0)k(t) + m[k(t)g_1(t) - x_0 k(t)], t \in E$$

dir. Herhangi uygun sabitler için A izotonik lineer fonksiyonunun uygulamaları burada verilmiştir. ■

İzotonik fonksiyonlar için devam eden teoremler Beesack ve Pecaric (1985) sırasıyla Hölder ve Minkovski eşitsizliklerini vermiştir.

Teorem 2.2.6 E baz cümlesi üzerinde L, (L_1),(L_2) ve A da (A_1),(A_2) şartlarını sağlasın. Eğer $p > 1\,, q = \frac{p}{p-1}$ olursa $w, f, g \geq 0, wf^p, wg^q, wfg \in L$ durumunda;

$$A(wfg) \leq A^{\frac{1}{p}}(wf^p)A^{\frac{1}{q}}(wg^q) \qquad (2.2.15)$$

eşitsizliği geçerlidir. $0 < p < 1$ (veya $p < 0$) ve $A(wg^q) > 0$, $A(, wf^p > 0)$ durumunda (2.2.15) eşitsizliği geçerlidir (Pachpatte 2005a).

İspat: İlk olarak $A(wg^q) > 0$ ve $p > 1$ olsun. O halde gerekli işlemlerden ve (2.2.15) ve (2.2.11) den:

$$\phi(x) = x^p, g_1 = fg^{-\frac{q}{p}}, k =\ wg^q \qquad (2.2.16)$$

dur. Buradan $k \in L, kg_1 = wfg \in L$ ve k$\phi(g_1) =\ wf^p \in L$ olur. Böylece (2.2.15) geçerli olur. $A(wf^p) > 0$ durumunda ise (2.2.15) deki p, qf, g yerine koyulursa tekrar (2.2.15) elde edilir. Son olarak $A(wg^q) > 0$ ve $A(wf^p) = 0$ olduğu kabul edilsin. Buradan;

$$0 \leq wfg \leq \frac{1}{p}\ wf^p + \frac{1}{q} wg^q$$

dur. Bu da ve $A(wf^q) = 0$ olduğunu gösterir. Tekrar (2.2.15) geçerli olup $p > 1$ durumunda ispat tamamlanır.

$0 < p < 1$ durumunda $P = \frac{1}{p} > 1$ ve (2.2.15) te p, qf, g yerine $P, Q = (1-p)^{-1}, f_1 = (fg)^p,\ g_1 = g^{-p}; wf_1 = wfg, wg_1 = \ wg^q$ eşitlikleri meydana gelir ve $wf_1 g_1 = \ wf^p \in L$ olur. Bu durumda :

$$A(wf^p) \leq A^p(wfg)A^{1-p}(\ wg^q)$$

elde edilir. Ardından (2.2.15) te $A(wf^q) > 0$ sağlanır. Sonuç olarak eğer $p < 0$ olursa $0 < q < 1$ için q, p, g, f yerine p, q, f, g konulursa $A(wf^p) > 0$ sağlanır. ■

Teorem 2.2.7 A ve L Teorem 2.2.6 daki gibi olsun. Eğer E üzerinde $p < 0$ olursa o halde $w, f, g \geq 0$ ile $wf^p, wg^q, w(f+g)^p \in L$ olur. Bu durumda:

$$A^{\frac{1}{p}}(w(f+g)^p) \leq A^{\frac{1}{p}}(\ wf^p) + A^{\frac{1}{p}} wg^q \qquad (2.2.17)$$

dir (Pachpatte 2005a).

Ardından (2.2.17) eşitsizliği $0 < p < 1$ durumunda geçerli olur ve $p < 0$ durumunda $A(wf^p) > 0,\ A(\ wg^q) > 0$ sağlanır.

İspat: Bilinen Minkovski eşitsizliğinden;

$$w(f+g)^p = wf(f+g)^{p-1} + wg(f+g)^{p-1}$$

yazılabilir. Buna A operatörü uygulanırsa (2.2.15) gelir. $p > 1$ durumunda;

$$A(w(f+g)^p) \leq \left\{A^{\frac{1}{p}}(w(f+g)^p) + A^{\frac{1}{p}}(wg^p)\right\} A^{\frac{1}{q}}\ \mathrm{A}(w(f+g)^p)\ p < 0$$

elde edilir. Burada $q = \frac{p}{p-1}$ dir. Bu da (2.2.17) de $\mathrm{A}(w(f+g)^p) > 0$ olmasını gerektirir. Ancak $\mathrm{A}(w(f+g)^p) = 0$ olursa $0 \leq \ wf^p \leq \ wg^q \leq w(f+g)^p$ olur. Buradan $A(wf^p) = A(\ wg^q) = 0$ olur ve (2.2.17) geçerli olur.

Eğer $0 < p < 1$ olursa (2.2.15) için $\mathrm{A}(w(f+g)^p) > 0$ ifadesi geçerlidir ve bundan dolayı aynı şekilde $\mathrm{A}(w(f+g)^p) > 0$ olursa (2.2.17) de geçerli olur. Yukarıdaki gibi eğer $\mathrm{A}(w(f+g)^p) = 0$ olursa buradan $A(wf^p) = \ A(\ wg^q) = 0$ olur ve (2.2.17) geçerli olur. Sonuç olarak $p < 0$ olursa tekrar yukarıda da belirtilen $\mathrm{A}(w(f+g)^p) > 0$ ve $A(\ wg^p) > 0$ eşitsizliği elde edilir. $A(\ wg^p) = 0$ olursa o halde (2.2.17) açıkça geçerli olur ve $A^{\frac{1}{p}}(w(f+g)^p) = \infty$ dur. ■

Beesack ve Pecaric (1986) tarafından verilen lemma (2.2.1) de ϕ nin konveks olmasının gerekebileceği göstermiştir. ■

3. KONVEKS FONKSİYONLARI İÇEREN BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde geçmiş birkaç yıl içinde iyi-bilinen;

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i\, f(x_i) \tag{3.1}$$

Jensen-Steffensen eşitsizliği ile ilgili çeşitli araştırmacılar tarafından belirlenmiş konveks fonksiyonları içeren bazı eşitsizlikler verilecektir. Burada *x* ve *p* iki-değişkenli reel sayılar $\ni\ x_i \in I, 1 \leq i \leq n$ ve burada $I \subseteq \mathbb{R}$, $P_n = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} p_i > 0$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ konveks ve her *n*-değişkenli *x* ler için;

$$0 \leq P_k \leq P_n, k = 1,2, \dots, n$$

dir. Pecaric (1981) eşitsizliğin tersinin geçerli olması için gerek ve yeter şartın ne olması gerektiği belirtilmiştir. Bu da;

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i\, f(x_i) \tag{3.2}$$

olduğunu gösterir. Pecaric, (1981) Fuchs genellemesi için majorlaştırılmış teoremler Jessen (1931) tarafından verilmiştir.

Lemma 3.1 $a_1 \geq \cdots \geq a_s, b_1 \geq \cdots \geq b_s$ ve $q_1, \dots, q_s$ reel sayılar olsun. Öyle ki:

$$\sum_{i=1}^{k} q_i\, a_i \leq \sum_{i=1}^{k} q_i\, b_i \quad 1 \leq k \leq s-1 \ \text{ ve } \ \sum_{i=1}^{s} q_i\, a_i = \sum_{i=1}^{s} q_i\, b_i$$

dir. O halde her konveks *f* fonksiyonu için;

$$\sum_{i=1}^{s} q_i\, f(a_i) \leq \sum_{i=1}^{s} q_i\, f(b_i)$$

dir (Pachpatte 2005a).

Teorem 3.1 *x* reel sayılarda artmayan bir değişken, $x_i \in I,\ 1 \leq k \leq n$ ve p reel *n*-değişkenli ve burada x_j var olsun. $j \in (1, \dots, n)$ için;

$$\sum_{i=1}^{k} p_i\big(\, x_i - \, x_j\big) \leq \forall k \ için \ \ni \ \ x_k \geq \overline{x} = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i\big(\, x_i - \, x_j\big) \geq \ \forall k \ için \ \ni \ x_k \leq \overline{x} \tag{3.3}$$

dir (Pecaric 1981).

Eğer $x_1 \leq \overline{x}$ olursa ilk şartın kullanılması anlamsız olur ve aynı şekilde $x_n \leq \overline{x}$ olursa ikinci şartın kullanılması anlamsızdır. $\overline{x} \in I$ olduğunda her $f: I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu için (3.2) geçerlidir. Ters olarak (3.2) eşitsizliği geçerli olduğunda (3.1) de geçerli olur.

İspat: $\overline{x} \in [x_{r+1}, x_r]$ olsun ve gerekli düzenlemelerden;

(i) $s = n+1,\ q_i = p_i,\ a_i = x_i,\ 1 \leq i \leq r,\ q_{r+1} = -P_n,\ a_{r+1} = \overline{x}$

$a_i = x_{i-1}, \qquad r+2 \leq i \leq n+1, \qquad b_i = x_j \qquad 1 \leq i \leq n+1$

(ii) $s = n+1, \qquad a_i = x_{j}, \qquad 1 \leq i \leq n+1, \qquad q_i = p_i, \quad b_i = x_i,\ 1 \leq i \leq r$

$q_{r+1} = -P_{n}, \quad b_{r+1} = \overline{x}, \qquad q_i = p_{i-1}, \qquad b_i = x_{i-1}, \qquad r+2 \leq n+1$

olur. Lemma 3.1 den Teorem 3.1 elde edilir. $x_1 \leq \overline{x}$ durumunda bu kolaylıkla gösterilebilir. $x_n \leq \overline{x}$ için (3.2) eşitsizliği geçerlidir. ■

Teorem 3.2 *x* ve p iki n-değişkenli reel sayılar olsun öyle ki $x_i \in I$, 1$\leq i \leq n, \overline{x} \in I$ ve $P_n > 0$ olsun. (3.2) eşitsizliği her konveks $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve her monoton *n*-değişkenli *x* için geçerlidir ancak ve ancak $m \in (1, \ldots, n)$ vardır $\ni$

$$P_k \leq 0,\ k \leq m,\ \ \overline{P_k} \leq 0,\ k \leq m \tag{3.5}$$

dir. Burada $\overline{P_k} = P_n - P_{k-1}$ dir (Pachpatte 2005a).

İspat: (3.2) eşitsizliğinin geçerli olduğu kabul edilsin. Buradan:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(x_i - x_m) = (x_k - x_m)P_k + \sum_{i=1}^{k-1} p_i(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

$$\sum_{i=k}^{n} p_i(x_i - x_m) = (x_k - x_m)\overline{P_k} + \sum_{i=l+1}^{n} \overline{P_i}\,(x_i - x_{i+1}) \tag{3.6}$$

özdeşlikleri kullanılırsa $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ olması durumunda;

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(x_i - x_m) \leq 0,\ \ 1 \leq k \leq m$$

$$\sum_{i=k}^{n} p_i(x_i - x_m) \geq 0,\ \ m \leq k \leq n \tag{3.7}$$

elde edilir. $\overline{x} \in [x_{r+1}, x_r]$ ve $m \leq r$ olsun. O halde (3.4) ün şartları $j = m$ için açıktır. Eğer $1 \leq k \leq m$ ve $r \leq k \leq m$ olursa eşitsizlik sağlanır. Kabul edilsin ki k_1 ve $m \leq k_1 \leq r$ için (3.4) geçersiz olsun. Burada $\sum_{i=1}^{k_1} p_i\,(x_i - x_m) \geq 0$ dır. Ardından

(3.7) den $\sum_{i=k+1}^{n} p_i\,(x_i - x_m) \geq 0$ olur. $\overline{x} \geq x_m$ olduğundan bu apaçık bir çelişkidir. Benzer şekilde $m < r$ veya $x_1 < \overline{x},\ x < x_n$ olursa (3.2) geçerli olur. Eğer $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ olursa (3.2) nin ispatı geçerlidir.

Daha sonra (3.2) nin geçerli olduğu kabul edilsin. $f(x) = x^2$, $x_i = 0,\ i = 1, \dots, k-1$ ve $x_i = 1, i = k, \dots, n$ dir. O halde (3.2) eşitsizliği $\left(\overline{P_k}/P_n\right)^2 \geq \overline{P_k}/P_n$ haline gelir. Bundan dolayı $k = 2, \dots, n$ için $\overline{P_k} \leq 0$ veya $\overline{P_{k-1}} \leq 0$ dır.

Şimdi $k < m$ ve $\overline{P_k} \leq 0$ geçerli olsun. $x_i = 0, 1 \leq i \leq k-1$ ve $x_i = 1$ ile $k \leq i \leq m-1$ ve $x_i = 1 + \varepsilon,\ m \leq i \leq n$ olsun. O halde $\overline{x} = \left(\overline{P_k} + \overline{P_m}\right)/P_n$ dir. Buradan $\overline{P_k} < 0$ için ε sayısını oldukça küçük seçilebilir. $z \geq 1$ için $f(z) = z - 1$ ve $z < 1$ için $f(z) = 0$ halini alır. O halde (3.2) $\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{m} \varepsilon p_i \leq 0$ e dönüşür. Benzer şekilde $P_m \leq 0$ olarak sonuçlandırılabilir ve bu da $P_k \leq 0$ anlamına gelir. Bu yüzden (3.5) bazı $m \in (1, \dots, n)$ için sağlanmak zorundadır. ■

Hatırlatma 3.1 Benzer şekilde (3.2) de ispatlanabilir. Gerçekten (3.6) daki özdeşlikler kullanılırsa $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ için ve $\forall m = 1, \dots, n$ için (3.7) eşitsizliğinin tersi elde edilir. Buradan $\overline{x} \in [x_{r+1}, x_r]$ için $j = r$ ve $j = r + 1$ için (3.4) eşitsizliğinin tersi geçerli olur. Ardından (3.1) geçerli olsun. $f(x) = x^2,\ x_i = 1,\ 1 \leq k \leq n$ ve $x_i = 0,\ k + 1 \leq i \leq n$ olsun. Buradan (3.1) eşitsizliği $(P_k/P_n)^2 \leq (P_k/P_n)$ haline dönüşür ve $0 \leq P_k \leq P_n, 1 \leq k \leq n$ dir (Pachpatte 2005a).

Şimdi Pecaric (1981) tarafından verilen sonuçlar verilecektir.

Sonuç 3.1 $x_1 \leq \cdots \leq x_m \leq 0 \leq x_{m+1} \leq \cdots \leq x_n,\ m \in (0,1, \dots, n),\ x_i \in I,\ 1 \leq i \leq n$ ve $0 \in I$ ve p reel n- değişkenli olsun.

(i) Her $f: I \rightarrow$ konveks fonksiyonu için;

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} (p_i - 1) f(0) \tag{3.8}$$

eşitsizliği ancak ve ancak $0 \leq P_k \leq 1, 1 \leq k \leq m$ ve $0 \leq \overline{P_k} \leq 1, m + 1 \leq k \leq n$ için geçerlidir.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \in I$ olsun. (3.8) eşitsizliğinin tersi geçerlidir ancak ve ancak $j \leq m$ vardır. Öyle ki;

$$P_i \leq 0,\quad i \leq j \qquad P_i \geq 1,\quad j \leq i \leq m \qquad \overline{P_i} \leq 0,\quad i \leq m+1$$

veya

$$P_i \leq 0,\ \ i \leq m \qquad \overline{P_i} \geq 1,\ \ m+1 \leq i \leq j \qquad \overline{P_i} \leq 0,\ \ i \leq j$$

dir (Pecaric 1981).

İspat: Teorem 3.1 ve 3.2 geçerli olsun. ($x_i = \overline{x_i}$ ve $p_i = \overline{p_i},\ 1 \leq i \leq n+1$). Verilenler yerine konursa $x_i = \overline{x_i},\ p_i = \overline{p_i},\ 1 \leq i \leq m,\ \overline{x_{m+1}} = 0,\ \overline{p_{m+1}} = 1 - P_n$ ve $m+2 \leq i \leq n+1$ olur ve sonuç 3.2 ispatlanır. ■

Sonuç 3.2 *x* ve *p* *n*-değişkenli reel sayılar ∋ $x_i \in I,\ 1 \leq i \leq n,\ \overline{x} \in I$ olduğunda;

$$p_m > 0, \qquad p_i \leq 0, \qquad i \neq m, \qquad P_n > 0$$

olur. O halde (3.2) her konveks $f\colon I \to \mathbb{R}$ için geçerlidir.

Şimdi de Dragomir ve Ionescu (1990) tarafından konveks-domine fonksiyonlar için bazı eşitsizlikler verilecektir (Pecaric 2005).

Tanım 3.1 $g\colon I \to \mathbb{R},\ I \subseteq \mathbb{R}$ aralığında verilen konveks bir fonksiyon olsun. $f\colon I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in I\ ve\ \alpha \in [0,1]$ için aşağıdaki şartları sağladığında I da g-konveks domine olarak adlandırılır.

$$|\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - f(\alpha x + (1-\alpha)y)| \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y) - f(\alpha x + (1-\alpha)y) \qquad (3.9)$$

dir (Pachpatte 2005a).

Lemma 3.2 g, I da konveks ve $f\colon I \to \mathbb{R}$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) *f*, *I* da g-konveks dominedir.

(ii) g-f ve g+f, *I* da konvekstir ve

(iii) Burada *h*,*l* ikilisi konvekstir ∋ $f = \frac{h-l}{2}$ ve $g = \frac{h+l}{2}$ dir (Pachpatte 2005a).

İspat: (i)↔ (ii):

$$\alpha(g(x) - f(x)) + (1-\alpha)\big(g(y) - f(y)\big) \geq g(\alpha(x) + (1-\alpha)y) - f(\alpha(x) + (1-\alpha)y)$$

$$\alpha(g(x) + f(x)) + (1-\alpha)\big(g(y) + f(y)\big) \geq g(\alpha(x) + (1-\alpha)y) + f(\alpha(x) + (1-\alpha)y)$$

dir.

(ii)↔(iii) olduğu açıktır. ■

F(I), I üzerinde tanımlı, lineer uzaylarda reel değerli bir fonksiyon ve $J: F(I) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu;

(J_1) $j(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g),\ \forall \alpha, \beta \in R\ ve\ f, g \in F(I)$

(J_2) $J(f) \geq 0$ I daki her konveks f fonksiyonu için geçerlidir.

Lemma 3.3 J, (J_1) ve (J_2) şartlarını sağlayan bir fonksiyonel olsun. O halde I daki her konveks g ve her g-konveks domine f fonksiyonu için

$$|g(f)| \leq |J(g)| \tag{3.10}$$

eşitsizliği geçerlidir (Pachpatte 2005).

İspat: f, I üzerinde g-konveks ve g-konveks domine olsun. Lemma 3.2 den g-f ve g+f te I da konvekstir. O halde:

$$0 \leq J(g - f) = J(g) - J(f) \text{ ve } 0 \leq J(g + f) = J(g) + J(f)$$

olduğunda $-J(g) \leq J(f) \leq J(g) \Leftrightarrow |g(f)| \leq |J(g)|$ dir. Buradan $J(g) \geq 0$ olur ve eşitsizlik ispatlanır. ■

Dragomir ve Ionescu (1990) Jensen eşitsizliğinin daha gelişmiş halini elde etmişlerdir.

Teorem 3.3 g, I da bir konveks fonksiyon ve $f: J \to \mathbb{R}$ g-konveks domine olsun. O halde $\forall x_i \in I,\ P_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq n$ için $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ olduğunda;

$$\left| \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \right) \right| \leq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i) - g\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \right) \tag{3.11}$$

dir (Pachpatte 2005).

İspat: Aşağıdaki özdeşlik;

$$J(f) = \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \right), \qquad f \in F(I)$$

şeklindedir. O halde J, (J_1) ve (J_2) şartlarını sağlar (Jensen eşitsizliğinden). Lemma 3.3 kullanılırsa eşitsizlik 3.11 elde edilir ve ispat tamamlanır. Fuchs (1947) bu eşitsizliğin genel halini vermiştir. ■

Teorem 3.4. $a_1 \geq \cdots \geq a_s,\ b_1 \geq \cdots \geq b_s$ ve $q_1 \geq \cdots \geq q_s$ reel sayılar olsunlar. Buna göre;

$$\sum_{i=1}^{k} q_i a_i \leq \sum_{i=1}^{k} q_i b_i\,, \qquad 1 \leq k \leq s-1 \ \text{ ve } \ \sum_{i=1}^{s} q_i a_i = \sum_{i=1}^{s} q_i b_i$$

olur. Eğer g, I da konveks ve f de I da g-konveks domine olursa;

$$\left|\sum_{i=1}^{s} q_i f(b_i) - f(a_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{s} g(b_i) - g(a_i) \tag{3.12}$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: Aşağıdaki fonksiyondan hareketle;

$$J(f) = \sum_{i=1}^{s} q_i f(b_i) - f(a_i)\,, \qquad f \in F(I)$$

dır. J, (J_1) ve (J_2) şartlarını sağlar (Fuchs eşitsizliğinden). Aynı şekilde Lemma 3.1 e Lemma 3.3 uygulanırsa 3.12 eşitsizliği elde edilebilir.

Teorem 3.5 x ve p reel sayılarda iki n-değişkenli sayılar olsun. Öyle ki $1 \leq i \leq n$ ve I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $P_n > 0$ olsun. O halde ifadeler birbirine denktir.

(i) $g: I \to R$ her konveks fonksiyon ve her g-konveks domine fonksiyon için n-değişkenli x için (3.1) eşitsizliği geçerlidir.

(ii) $0 \leq P_k \leq P_n,\ k = 1,2,\ldots,n$ dir (Pachpatte 2005).

İspat:

(i)→(ii): Jensen-Steffensen eşitsizliğinden açıktır.

(ii)→(i): Aşağıdaki özdeşlik göz önünden bulundurulursa;

$$J(f) = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i\right), \qquad f \in F(I)$$

olur ve J, (J_1) ve (J_2) şartlarını sağlar. Lemma 3.3 uygulanırsa (3.11) elde edilir. ■

4. HERMITE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Hadamard (1893) analizdeki temel eşitsizlikleri araştırmış ve bunu da literatürde bilinen Hadamard eşitsizliği olarak adlandırmıştır. Sonraki yıllarda birçok araştırmacı çeşitli genellemeler, varyanslar ve çözümler elde etmişlerdir. Bu bölümde çeşitli araştırmacılar tarafından verilen Hadamard eşitsizlikleri incelenecektir. Aşağıdaki teoremde Hadamard eşitsizliğini içeren konveks fonksiyonlara değinilmiştir.

Teorem 4.1 $f: I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, burada $I = [a, b]$ aralığında reel sayıların bir alt aralığı olsun. O halde:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.1}$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: *f* nin *I* daki konveksliğinden ve $t \in [0,1]$ için;

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.2) eşitsizliği $[0,1]$ de integre edilirse;

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt \leq \int_0^1 tf(a)dt + \int_0^1 (1-t)f(b)dt$$

$$\leq f(a)\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^1 + f(b)\left(t - \frac{t^2}{2}\right)_0^1$$

$$= \frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.3}$$

olur. Diğer taraftan *f* nin *I* daki konveksliğinden $t \in [0,1]$ için;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(ta + (1-tb + f((1-t)a+tb)] \tag{4.4}$$

eşitsizliğini elde edilir. (4.4), $[0,1]$ aralığında integre edilirse;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a+tb)]dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt\right] \tag{4.5}$$

dir. (4.5) eşitsizliğinin sağ tarafında $1 - t = s$ alınırsa;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 [f(ta+(1-t)b)+f((sa+(1-s)b)]dt$$

$$= \frac{1}{2}.2\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.3) ve (4.6) dan;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.7}$$

elde edilir. Ardından $ta+(1-t)b = x$ alınır ve (4.7) eşitsizliği integre edilirse:

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \tag{4.8}$$

olduğu görülür. (4.7) ve (4.8) birlikte kullanılırsa istenilen (4.1) eşitsizliği elde edilir. Lupaş (1976); $p,q > 0$ için f de I nın bir alt aralığı olan $[a,b]$ de konveks, $v = \frac{pa+qb}{p+q}$ ise o halde:

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)dt \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \tag{4.9}$$

olduğunu söylemiştir. $\left(0 < y \leq \left(\frac{b-a}{p+q}\right)\min(p,q)\right)$. $p = q = 1$ ve $y = \frac{b-a}{2}$ olursa (4.9) eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliğine döner. ■

Beesack ve Pecaric (1986) aynı hipotezler altında Hadamard eşitsizliğinin (4.9) un gelişmiş hali olduğu kanıtlamıştır.

Teorem 4.2 $p,q > 0$ ve f de $[a,b]$ de konveks olsun. $v = \frac{pa+qb}{p+q}$ ise;

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)dt \leq \frac{1}{2}[f(v-y)+f(v+y)] \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \tag{4.10}$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: İlk olarak $0 < y < \left[\frac{b-a}{p+q}\right]\min(p,q)$ olduğunda şu iki durum dikkate alınır. $0 < p \leq q$, $0 < q < p$ durumunda $a \leq v-y < v+y \leq b$ ve f de $[v-y, v+y]$ aralığında tanımlanır. (4.1) eşitsizliğinde $a = v-y, b = v+y$ alınırsa;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f\left(\frac{v-y+v+y}{2}\right) \leq \frac{1}{v-y+v+y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)dt$$

$$\Rightarrow f(v) \leq \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)dt \leq \frac{1}{2}[f(v-y)+f(v+y)] \tag{4.11}$$

olur. Konvekslik tanımından şu elde edilir. $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ için;

$$f(x_2) \leq \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$$

dir. Bundan dolayı $x_1 = a$ ve $x_3 = b$ alınırsa;

$$f(v-y) \leq \frac{b-(v-y)}{b-a}f(a) + \frac{v-y-a}{b-a}f(b) \tag{4.12}$$

$$f(v+y) \leq \frac{b-(v+y)}{b-a}f(a) + \frac{v+y-a}{b-a}f(b) \tag{4.13}$$

olur. (4.11)-(4.13) ten:

$$\begin{aligned}
f(v) &\leq \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)dt \leq \frac{1}{2}[f(v-y)+f(v+y)] \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\frac{b-(v+y)}{b-a}f(a) + \frac{v-y-a}{b-a}f(b) + \frac{b-(v-y)}{b-a}f(a) + \frac{v+y-a}{b-a}f(b)\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)}{b-a}(b-v+y+b-v-y) + \frac{f(b)}{b-a}(v-y-a+v+y-a)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2\frac{f(a)}{b-a}(b-v) + 2\frac{f(b)}{b-a}(v-a)\right] \\
&= \frac{1}{b-a}[f(a)b - f(a)v + f(b)v - f(b)a] \\
&= \frac{1}{b-a}[f(a)b - f(b)a + v(f(b)-f(a))] \\
&= \frac{1}{b-a}\left[f(a)b - f(b)a + \left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)(f(b)-f(a))\right] \\
&= \frac{1}{(b-a)(p+q)}\left[(p+q)\big(bf(a)-af(b)\big) + (pa+qb)(f(b)-f(a))\right] \\
&= \frac{1}{(b-a)(p+q)}[(b-a)(pf(a)+qf(b))] = \frac{pf(a)+qf(b))}{p+q}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. Dragomir (1990) Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin gelişmiş halini vermiştir. ■

Teorem 4.3 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. O halde $\forall t\in[a,b]$ için;

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (4.14)$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: *f* nin $[a,b]$ deki konveksliğinden $\forall x,y\in[a,b]$ ve $t\in[0,1]$ için;

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $[a,b]$ aralığından integre edilirse;

$$\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy\leq\int_a^b\int_a^b tf(x)+(1-t)f(y)dxdy=(b-a)\int_a^b f(x)dx$$

olur. Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı kullanılarak (4.14) ün ikinci kısmı da ispatlanır. Diğer yandan;

$$f\left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b(tx+(1-t)y)dxdy\right)\leq\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy$$

dir. Buradan:

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy=\frac{a+b}{2}$$

bulunur ve ispat tamamlanır. ∎

Sonuç 4.1 *f*, Teorem 4.3 teki gibi olsun. O halde:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (4.16)$$

dir (Pachpatte 2005a).

Teorem 4.4 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ de konveks bir fonksiyon olsun. O halde:

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy\leq\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f\big(tx+(1-t)\big)dxdydt\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ de konveks bir fonksiyon ve $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ ve $\alpha,\beta\geq 0$ ile $\alpha+\beta=1$ için;

$$g(t) = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b f(tx + (1-t)y)dxdy$$

dir. O halde:

$$g(\alpha t_1 + \beta t_2) = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b f\big((\alpha t_1 + \beta t_2)x + ((1-(\alpha t_1 + \beta t_2))y\big) + dxdy$$

$$\leq \frac{\alpha}{(b-a)^2}\int_a^b f(t_1 x + (1-t_1)y)dxdy$$

$$+ \tfrac{\beta}{(b-a)^2}\int_a^b f(t_2 x + (1-t_2)y)dxdy = \alpha g(t_1) + \beta g(t_2)$$

dir. Böylece g nin $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks olduğu gösterilmiş oldu. g nin konveksliğinden, Hermite-Hadamard eşitsizliğinden ve Fubini teoreminde kullanılan çift katlı integralden:

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy = g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b \int_0^1 f\big(tx + (1-t)\big)dxdydt$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b \int_0^1 f\big(tx + (1-t)\big)dtdydx$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b \left(\frac{t^2}{2}f(x) + \left(t - \frac{t^2}{2}\right)f(y)\right)_0^1 dydx$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b \left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b f(x)dxdy + \int_a^b \int_a^b f(y)dxdy\right]$$

$$= \frac{g(0)+g(1)}{2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

elde edilir (Hildebrandt 1963).

Teorem 4.5 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ye diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon olsun. O halde:

$$0\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy$$
$$\le t\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \tag{4.17}$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: f fonksiyonu,$[a,b]$ kapalı aralığında de konveks bir fonksiyon ise;

$$f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$

dir. $\forall x,y\in[a,b]$ ve $t\in[0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik $[a,b]x[a,b]$ de integre edilirse;

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy\le\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b(tf(x)+(1-t)f(y))dxdy$$
$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

elde edilir. (5.17) eşitsizliğinin ilk kısmının ispatı bu şekilde tamamlanmış olur. Diğer taraftan f nin konveksliğinden $[a,b]$ de türevelenebilirliğinden;

$$f(t(x)+(1-t)f(y))\ge t(x-y)f'(y)$$

dir. Bu eşitsizliğin sağ tarafının $[a,b]x[a,b]$ de integrali alınırsa;

$$t\int_a^b\int_a^b(x-y)f'\,(y)dxdy=t\int_a^b\left(\int_a^b(xf'(y-yf'(y))dx\right)dy$$
$$=t\int_a^b\left(\frac{x^2}{2}f'(y)-yf'(y)\right)_a^b dxdy$$
$$=t\int_a^b\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)f'(y)dy-t\int_a^b(b-a)yf'(y)dy$$
$$=(b-a)\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)^2\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

elde edilir. Bu formül (5.18) de kullanılırsa

$$(b-a)\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy$$
$$\le t\left[(b-a)^2\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-(b-a)\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

bulunur. Böylelikle (4.17) eşitsizliğinin ikinci kısmı da ispatlanmış olur. ■

Sonuç 4.2 *f*, Teorem 4.5 teki gibi olsun. O halde:

$$0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy \leq \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right]$$

dir (Pachpatte 2005a). ■

Teorem 4.6 *f*, Teorem 4.5 teki gibi olsun. O halde $t \in [0,1]$ için;

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx \\ &\leq (1-t)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right] \end{aligned} \tag{4.19}$$

dir (Dragomir 1992a).

İspat: İlk olarak $\forall t \in [a,b]$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) \leq tf(x) + (1-t)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliğini dikkate alınsın. Aşağıdaki eşitsizlik *x*'e göre integre edilir ve ardından $[a,b]$ de integrali alınır ve (4.1) in sol tarafının yarısı kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx &\leq \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)dx + (1-t)\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx\right) \\ &\leq \frac{t}{b-a}\int_a^b f(x)dx + \frac{1-t}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan f fonksiyonu $[a,b]$ de integre edildiğinde $\forall t \in [a,b]$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) - f(x) \geq (1-t)f\left(\frac{a+b}{2}\right)f'(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Aşağıdaki eşitsizlik sırasıyla *x*'e göre $[a,b]$ de integre edilirse;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq (1-t)\int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - x\right)f'(x)dx \tag{4.20}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (4.20) içinde kullanılırsa istenilen (4.19) eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 4.3 *f*, Teorem 4.6 daki gibi olsun. O halde:

$$0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{2}{b-a}\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+3b}{4}} f(x)dx \leq \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right]$$

dir. (Pachpatte 2005a).

Pecaric ve Dragomir (1991) ve Dragomir (1993) izotonik lineer fonksiyoneller için Hadamard eşitsizliğinden yararlanarak genellemeler elde etmişlerdir. Sonraki teoremlerde ise bunlardan yararlanılacaktır. Bunun için aşağıdaki lemmalar verilmiştir.

Lemma 4.1 *X*, *C* de bir lineer ve konveks bir alt cümle olsun. O halde $f: X \to \mathbb{R}$ ye aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) *f*, *C* de konvekstir ve

(ii) $\forall x, y \in C$ için $g_{x,y}: [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_{x,y} = f\big(tx + (1-t)f(y)\big)$, [0,1] de konvekstir (Pecaric and Dragomir 1991, Dragomir 1993).

İspat:

(i)→(ii) Kabul edilsin ki $x, y \in C$ ve $t_1, t_2 \in [0,1]$ olsun ve $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ durumunda $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ dir. O halde:

$$\begin{aligned} g_{x,y}(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) &= f\Big((\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)x + \big(1 - (\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\big)y\Big) \\ &= f\big((\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)x\big) + (\alpha_1(1-t_1) + \alpha_2(1-t_2)y) \\ &\leq \alpha_1 f(t_1 x + (1-t_1)y) + \alpha_2 f\big((t_2 x + (1-t_2)y)\big) \\ &= \alpha_1 g_{x,y}(t_1) + \alpha_2 g_{x,y}(t_2) \end{aligned}$$

dir. $g_{x,y}$ dönüşümü [0,1] de konvekstir.

(ii)→(i) $x, y \in C$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ olsun. O halde:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x + \alpha_2 y) &= f(\alpha_1 x + (1-\alpha_1)y) = g_{x,y}(\alpha_1.1 + \alpha_2.0) \\ &\leq \alpha_1 g_{x,y}(1) + \alpha_2 g_{x,y}(0) = \alpha_1 f(x) + \alpha_2 f(y) \end{aligned}$$

dir. Bu da *f* nin *C* deki konveksliğidir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 4.2 X, C de bir lineer ve konveks bir alt cümle olsun. Eğer $f: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonu C de konveks ise $\forall x, y \in C$ için $g_{x,y}: [0,1] \to \mathbb{R}$ dönüşümü;

$$g_{x,y}(t) = \frac{1}{2}\left[f\big(t(x) + (1-t)f(y)\big) + f((1-t)(x) + tf(y))\right]$$

şeklinde verilir ve $g_{x,y}$ dönüşümü [0,1] de konvekstir. Ek olarak;

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le g_{x,y}(t) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği verilebilir (Pecaric and Dragomir 1991, Dragomir 1993).

İspat: $x, y \in C$ ve $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \ge 0$ durumunda $\alpha + \beta = 1$ olur. O halde:

$$\begin{aligned}
&g_{x,y}(\alpha t_1 + \beta t_2) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[f(\alpha t_1 + \beta t_2)x + \big(1 - (\alpha t_1 + \beta t_2)\big)y + \big(1 - (\alpha t_1 + \beta t_2)\big)x + (\alpha t_1 + \beta t_2)y\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}\Big[f\big(\alpha(t_1 x + (1-t_1)y)\big) + \big(\beta(t_2 x + (1-t_2)y)\big) \\
&\qquad\qquad + f\big(\alpha((1-t_1)x + t_1 y) + \beta((1-t_2)x + t_2 y)\big)\Big] \\
&\quad \le \frac{1}{2}[\alpha f(t_1 x + (1-t_1)y) + \beta f(t_2 x + (1-t_2)y) + \alpha f((1-t_1)x + t_1 y) \\
&\qquad\qquad + \beta f((1-t_2)x + t_2 y)] \\
&\quad = \alpha g_{x,y}(t_1) + \beta g_{x,y}(t_2)
\end{aligned}$$

dir. Bu da gösterir ki $g_{x,y}$ dönüşümü [0,1] de süreklidir. f nin konveksliğinden $t \in [0,1]$ için;

$$g_{x,y}(t) \ge \frac{1}{2}[f(tx + (1-t)y) + ((1-t)x + ty] = f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$g_{x,y}(t) \le \frac{1}{2}[tf(x) + (1-t)f(y) + (1-t)f(x) + tf(y))] = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.7 $f: C \subseteq X \to \mathbb{R}$ ye konveks bir fonksiyon olsun ve L ve A; $(L_1), (L_2)$ ve $(A_1), (A_2)$ şartlarını sağlasın. $h: E \to \mathbb{R}$, $0 \le h(t) \le 1, h \in L \ \ni \ g_{x,y} \circ h \in L$ dir. E boş olmayan bir cümle olsun. Eğer $A(1) = 1$ ise;

$$f(A(h)x + (1 - A(h)y) \le A[f(hx + (1-h)y] \le A(h)f(x) + (1 - A(h)f(y)$$

eşitsizliği geçerlidir (Pachpatte 2005a).

İspat: $g_{x,y}:[0,1] \to \mathbb{R}$ dönüşümü için $g_{x,y}(s) = f(sx + (1-s)y)$ olsun. Lemma 4.1 den $g_{x,y}$ nin $[0,1]$ de konveks olduğu elde edilir. $\forall t \in E$ için;

$$A\big(g_{x,y}(h)\big) \leq A(h)g_{x,y}(1) + \big(1 - A(h)\big)g_{x,y}(0)$$

dir. Bu da;

$$A[f(hx + (1-h)y)] \leq Ah(x)f(x) + \big(1 - A(h)\big)f(y)$$

olduğunu gösterir. Teorem 3.1 deki Jessen eşitsizliği $g_{x,y}$ dönüşümünde kullanılırsa;

$$g_{x,y}(A(h)) \leq A\big(g_{x,y}(h)\big)$$

elde edilir. Son olarak;

$$f(A(h)x + (1 - A(h))y) \leq A[f(hx + (1-h)y)]$$

bulunur ve ispat tamamlanır. ∎

4.1 I.Tip Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

Geçmiş yıllarda, farklı notlarda belirtilen Hadamard eşitsizliklerini içeren farklı sınıflarda fonksiyonlar ortaya çıkmıştır. Bu bölümde son zamanlarda incelenen Hadamard tipindeki temel eşitsizlikler verilecektir. Gudunova ve Levin (1985) *I*.tip Hadamard eşitsizlikleri için örnekler veriyor. ■

$f: I \to \mathbb{R}$ ye $Q(I)$ sınıfına ait bir dönüşüm olsun. Eğer bu dönüşüm negatif değilse $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in (0,1)$ için;

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \frac{f(x)}{\alpha} + \frac{f(y)}{1-\alpha} \tag{4.1.1}$$

eşitsizliği literatürde *I*.tip Hermite-Hadamard eşitsizliği (Gudunova-Levin konveksliği) olarak adlandırılır. Burada her negatif olmayan konveks fonksiyon bu sınıfa aittir ve benzer bir gösterimle;

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0 \tag{4.1.1'}$$

olduğu sonucuna varılır. Gerçekten $Q(I)$ sınıfında (4.1.1') eşitsizliği (4.1.1) eşitsizliğinin alternatifi olarak kullanılır. $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ durumunda (4.1.1') eşitsizliği iyi bilinen Schur eşitsizliğidir.

Teorem 4.1.1 $f \in Q(I)$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. O halde:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{4}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{4.1.2}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x)f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.1.3}$$

dir. Burada $p(x) = \frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^2}$ olarak verilmiştir. (4.1.2) eşitsizliğinde "4" en iyi sabittir (Dragomir *et. al*. 1994).

İspat: $f \in Q(I)$ ve $\forall x, y \in I$ için (4.1.1) de $\alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa;

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \frac{f(x)}{\alpha} + \frac{f(y)}{1-\alpha} \Rightarrow f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) \leq 2\big(f(x) + f(y)\big)$$

$$\Rightarrow 2(f(x) + f(y)) \geq f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$$

elde edilir. $x = ta + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$ olarak alınsın. $t \in [0,1]$ için;

$$2\big(f(ta + (1-t)b) + f((1-t)b + ta))\big) \geq f\left(\frac{ta + b - tb + a - ta + tb}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\big(f(ta + (1-t)b) + f((1-t)b + ta))\big) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

dir. Aşağıdaki eşitsizlik $(0,1)$ de integre edilirse;

$$2\left(\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 f\big((1-t)a + tb\big)dt\right) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (4.1.6)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada:

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \int_0^1 f\big((1-t)a + tb\big)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

dir. Aynı zamanda;

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \int_0^1 f\big((1-t)a + tb\big)dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

olduğu kolayca görülebilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra (4.1.2) eşitsizliği (4.1.6) da kullanıldığında ispat tamamlanır.

(4.1.3) ün ispatı için $f \in Q(I)$, $\forall a, b \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere;

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \leq \frac{f(a)}{\alpha} + \frac{f(b)}{\alpha}$$

$$\alpha(1-\alpha)f(\alpha a + (1-\alpha)b) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)$$

$$\alpha(1-\alpha)f\big((1-\alpha)a + \alpha b\big) \leq (1-\alpha)f(a) + \alpha f(b)$$

dir. Son iki eşitsizlik $(0,1)$ aralığında integre edilirse;

$$\int_0^1 \alpha(1-\alpha)f(\alpha a + (1-\alpha)b)d\,\alpha = \int_0^1 \alpha(1-\alpha)f\big((1-\alpha)a + \alpha b\big)d\alpha$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^2} f(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.5) ve (4.1.6) birlikte kullanılırsa (4.1.3) elde edilir.

(4.1.2) deki sabitin en iyi sabit olduğunu göstermek için;

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \le x \le \dfrac{a+b}{2} \\ 4, & x = \dfrac{a+b}{2} \\ 1, & \dfrac{a+b}{2} \le x \le b \end{cases}$$

fonksiyonu ele alınsın. Üstelik bu fonksiyon $Q(I)$ sınıfına aittir. Çünkü;

$$\frac{f(x)}{\alpha} + \frac{f(x)}{1-\alpha} \ge \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} = g(\alpha) \ge \min_{0\le\alpha\le1} g(\alpha) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \ge f(\alpha x + (1-\alpha)y)$$

dir ve ispat tamamlanır. ■

Dragomir vd. (1994) bu sınıftaki fonksiyonları incelemiştir. $f: I \to \mathbb{R}$, $P(I)$ sınıfına ait bir dönüşüm ise $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için negatif değilse eşitsizlik sağlanır.

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliği açık olarak, $Q(I) \supset P(I)$ olduğunu gösterir ve $P(I)$ yı içeren her monoton, konveks ve *quasi*-konveks fonksiyonlar;

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \max_{0\le\alpha\le1}(f(x), f(y))$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 4.1.2 $f \in P(I)$ $a, b \in I$, $a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. O halde:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le 2\big(f(a) + f(b)\big) \qquad (4.1.8)$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: (4.1.7) de uygun bir $x = ta + (1-t)b,\ y = (1-t)a + tb$ için $\alpha = \frac{1}{2}$ seçilirse;

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le f(x) + f(y)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{ta + (1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a + tb}{2}\right) \le f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(ta + (1-t)b) + f\big((1-t)a + tb\big)$$

eşitsizliği elde edilir. En son yazılan eşitsizlik $t \in [0,1]$ aralığında integre edilirse;

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt \le \int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 f\big((1-t)a + tb\big)dt$$

dir ve eşitsizliğin sol tarafı ispatlanmış olur. Eşitsizliğin sağ tarafı için (4.1.7) de $x = a$ ve $y = b$ alınırsa ve $[0,1]$ de α ya göre integre edilirse istenilen eşitsizlik elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Gill vd. (1997) r-konveks ve r-konkav fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin üst versiyonlarını vermiştir. ■

Reel $[a, b]$ aralığında $\forall x, y \in [a, b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için pozitif f fonksiyonları *log*-konveks olarak adlandırılır ve bu da;

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f(x)^{\alpha} + f(y)^{1-\alpha}$$

eşitsizliği ile gösterilir. Tersi durumda da eşitsizlik geçerlidir. ■

Logaritmik manada;

$$L(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{lnx - lny}, & x \neq y \\ \\ x, & x = y \end{cases}$$

biçiminde gösterilir ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ için r-konveks fonksiyonlarının genelleştirilmiş logaritmik tanımı:

$$F_r(x,y) = \begin{cases} \dfrac{r}{r+1}\dfrac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r}, & r \neq 0, -1, & x \neq y \\ \\ \dfrac{x-y}{lnx - lny}, & r = 0 & x \neq y \\ \\ xy\dfrac{lnx - lny}{x-y}, & r = -1 & x \neq y \\ x, & & x = y \end{cases}$$

şeklinde yapılır (Dragomir *et. al.* 1990).

Sonraki teoremde *log*-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin başka bir versiyonu veriliyor.

Teorem 4.1.3 *f*, $[a,b]$ de pozitif *log*-konveks bir fonksiyon olsun. O halde:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq L(f(a),f(b))$$

dir. Pozitif *log*-konkav bir *f* fonksiyonu için eşitsizlik yön değiştirir (Gill *et. al*. 1997).

İspat: İlk olarak $f(a) \neq f(b)$ durumu ele alınsın. (4.1.9) dan;

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\left[\frac{f(b)-f(a)}{lnf(b)-lnf(a)}\right] = (b-a)L(f(a),f(b))$$

eşitsizliği elde edilir. İkinci durumda $f(a) = f(b)$ için;

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(a) = L(f(a),f(b))$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1.6 *f*, $U \subseteq X$ te pozitif, *log*-konveks fonksiyon olsun. Burada X bir lineer vektör uzayıdır. O halde $a,b \in U$ için;

$$\int_0^1 f(sa+(1-s)b)ds \leq L\big(f(a),f(b)\big)$$

dir. Sonraki teoremler Teorem 6.1.3 ve 6.1.4 ün sonuçlarından türetilerek verilmiştir (Pachpatte 2005a).

Sonuç 4.1.1 *f*, $[a,b]$ de pozitif *log*-konveks olsun. O halde:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \min_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)\big(f(a),f(x)\big)+(b-x)\big(f(x),f(b)\big)}{b-a} \tag{4.1.11}$$

dır. Eğer *f*, pozitif *log*-konkav fonksiyon ise o halde:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \geq \max_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)\big(f(a),f(x)\big)+(b-x)\big(f(x),f(b)\big)}{b-a} \tag{4.1.12}$$

dır (Pachpatte 2005a).

İspat: *f*, pozitif *log*-konveks fonksiyon olsun. Teorem 4.1.3 ten;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\begin{bmatrix} (x-a)\displaystyle\int_0^1 f(sx+(1-s)a)ds \\ +(b-x)\displaystyle\int_0^1 f(sb+(1-s)x)ds \end{bmatrix}$$

$$\leq \min_{x\in[a,b]} \frac{1}{b-a}\begin{bmatrix} (x-a)\displaystyle\int_a^b f(x)^s.f(a)^{1-s}ds \\ +(b-x)\displaystyle\int_a^b f(x)^s.f(a)^{1-s}ds \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{b-a}\begin{bmatrix} (x-a)f(a)\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^s ds \\ +(b-x)f(x)\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{f(b)}{f(x)}\right)^s ds \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[(x-a)f(a)\left\{\frac{\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^s}{ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)}\right\}_0^1 + (b-x)\left\{\frac{\left(\frac{f(b)}{f(x)}\right)^s}{ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)}\right\}_0^1\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[(x-a)L\big(f(a),f(x)\big) + (b-x)L\big(f(x),f(b)\big)\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. Benzer şekilde (4.1.12) de ispatlanabilir. ■

Sonuç 4.1.2 *f*, $[a,b]$ de pozitif *log*-konveks fonksiyon olsun. O halde:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L\left[f\left(a+\frac{i-1}{n}(b-a), a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right]$$

dir. *f*, pozitif *log*-konkav olursa eşitsizlik yön değiştirir (Pachpatte 2005a).

İspat: Aşağıdaki özdeşliğe Teorem 4.1.3 uygulanırsa ispat tamamlanır.

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} f(t)dt$$

Sonuç 4.1.3 a) *f*, $[a,b]$ de pozitif *log*-konveks fonksiyon olsun. O halde:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M_{\frac{1}{3}}(f(a),f(b))$$

dir. Eğer *f log*-konkav olursa;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \sqrt{f(a).f(b)} \qquad (4.1.13)$$

dir.

b) *f*, $U \subseteq X$ te pozitif *log*-konveks bir fonksiyon olsun. Burada *X* lineer vektör uzayıdır. O halde $a, b \in U$ için;

$$\int_0^1 f(sa+(1-s)b)ds \le M_{\frac{1}{3}}(f(a), f(b))$$

dir. *f*, *log*-konkav olursa;

$$\int_0^1 f(sa+(1-s)b)ds \ge \sqrt{f(a).f(b)}$$

olur. (Pachpatte 2005a)

İspat: (a) Teorem 4.1.3 ten görülüyor ki;

$$G(a,b) \le L(a,b) \le M_{\frac{1}{3}}(a,b)$$

dir. Burada $L(a,b), M_r(a,b)$ daha önceden tanımlanmıştı. $G(a,b)$ ise geometrik manayı temsil eder.

(b) Benzer şekilde Teorem 4.1.3 ten kolayca görülebilir. ■

Teorem 4.1.5 *f*, $[a,b]$ de pozitif *r*-konveks fonksiyon olsun. O halde:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \le F_r(f(a), f(b))$$

dir. Eğer f pozitif *r*-konkav olursa eşitsizlik yön değiştirir (Pachpatte 2005a).

İspat: $r=0$ durumunda Teorem 4.1.3 elde edilir. Kabul edilsin ki $r \neq 0, -1$ olsun. Bu durumda $f(a) \neq f(b)$ olur. (4.6.10) dan;

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= (b-a)\int_0^1 f(sb+(1-s)a)ds \\ &\le (b-a)\int_0^1 \{sf^r(b)+(1-s)f^r(a)\}^{\frac{1}{r}} ds \\ &= (b-a)\int_{f^r(a)}^{f^r(b)} \frac{t^{\frac{1}{r}}}{f^r(b)-f^r(a)} dt \\ &= (b-a)F_r(f(a), f(b))\end{aligned}$$

elde edilir.

$f(a)=f(b)$ için;

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &\le (b-a)\int_0^1 \{sf^r(b)+(1-s)f^r(a)\}^{\frac{1}{r}} ds \\ &= (b-a)\int_0^1 \{sf^r(a)+(1-s)f^r(a)\}^{\frac{1}{r}} ds\end{aligned}$$

$$= (b-a)\int_0^1 \{f^r(a)\}^{\frac{1}{r}} ds$$

$$= (b-a)f(a) = (b-a)\, F_r(f(a), f(b))$$

dir. Son olarak $f = -1$ olsun. Bu durumda tekrardan $f(a) \neq f(b)$ olur. O halde:

$$\int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\int_0^1 \{sf^{-1}(a) + (1-s)f^{-1}(a)\}^{-1} ds$$

$$= (b-a)\int_0^1 \frac{1}{\{sf^{-1}(a) + (1-s)f^{-1}(a)\}^{-1}} ds$$

$$= (b-a)(f(a).f(b))\frac{lnf(a) - lnf(b)}{f(a) - f(b)}$$

$$= (b-a)F_{-1}(f(a), f(b))$$

olur ve ispat tamamlanır. ■

4.2 II.Tip Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

Bu bölümde birçok araştırmacı tarafından incelenen Hermite-Hadamard eşitsizliğine ait çeşitli genellemeler ve varyanslar verilecektir. Dragomir (1992b) konveks fonksiyonlara ait bazı geliştirmeler elde etmiştir.

$$H(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx \tag{4.2.1}$$

ve

$$F(t) = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b f(tx + (1-t)y)dxdy \tag{4.2.2}$$

dir. Burada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ye konveks bir fonksiyon ve H ve F de $[a, b]$ de reel değerli fonksiyonlardır.

Teorem 4.2.1 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ye konveks bir fonksiyon olsun. O halde:

(i) *H*, $[0,1]$ aralığında konvekstir.

(ii) Burada:

$$\inf_{t\in[0,1]} H(t) = H(0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sup_{t\in[0,1]} H(t) = H(1) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

dir.

(iii) *H*, $[0,1]$ aralığında monoton artandır (Pachpatte 2005).

İspat:

(i) $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olsun. $t_1, t_2 \in [0,1]$ olmak üzere;

$$H(\alpha\, t_1 + \beta t_2) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\alpha\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right) + \beta\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}\right)\right)dx$$

$$\leq \alpha\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$+\beta\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}\right)dx = \alpha H(t_1) + \beta H(t_2)$$

dir. Bu da *H* nin $[0,1]$ de konveks olduğunu gösterir.

(ii) Eşitsizlik kanıtlanırsa ispat tamamlanır:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le H(t) \le t\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + (1-t)f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (4.2.3)$$

dir. Jensen integral eşitsizliğinden;

$$H(t) \ge f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b tx + (1-t)\frac{a+b}{2}dx\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = H(0)$$

dir. f nin konveksliğinden;

$$H(t) \ge f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b tx + (1-t)\frac{a+b}{2}dx\right) = t\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + (1-t)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece (4.2.3) ün ispatı tamamlanmış olur. Son olarak:

$$g(t) = t\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + (1-t)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olduğu açıktır. Çünkü $g(t)$ dönüşümü $[0,1]$ de monoton artandır.

(iii) $t_1, t_2 \in (0,1)$, $t_2 > t_1$ olsun. O halde H nin $(0,1)$ deki konveksliğinden;

$$\frac{H(t_2)-H(t_1)}{t_2-t_1} \ge H'(t_1) = \frac{1}{b-a}\int_b^a f'_t\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)dx$$

dir. f nin $[a,b]$ deki konveksliğinden;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right) \ge t_1 f'_t\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)$$

elde edilir. Bundan dolayı:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_b^a f'_t\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)dx \\
&\qquad\le \frac{1}{t_1}\left[\frac{1}{b-a}\int_b^a f'_t\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&\qquad= \frac{1}{t_1}\left[H(t_1) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \ge 0
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak $H(t_2) - H(t_1) \ge 0$ ve $1 \ge t_2 \ge t_1 \ge 0$ dır. Bu da H nin $[0,1]$ de monoton artan olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.2.2 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ye konveks bir fonksiyon olsun. O halde:

(i) $\forall \sigma \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere:

$$F\left(\sigma + \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)$$

dir.

(ii) F, $[0,1]$ aralığında konveks bir fonksiyondur.

(iii) Buradan:

$$\sup_{t\in[0,1]} F(t) = F(0) = F(1) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\inf_{t\in[0,1]} F(t) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy$$

dir.

(iv)

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq F\left(\frac{1}{2}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

(v) f, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ de monoton azalan ve $\left[\frac{1}{2},1\right]$ de monoton artandır.

(vi) $\forall t \in [0,1]$ için;

$$H(t) \leq F(t)$$

eşitsizliği geçerlidir (Pachpatte 2005a).

İspat:

(i) $\sigma \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ olsun. Buradan:

$$\begin{aligned}
F\left(\sigma+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)x + \left(1-\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)\right)y\right)dxdy \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}-\sigma\right)y\right)dxdy \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)x + \left(\sigma+\frac{1}{2}\right)y\right)dxdy = F\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

(ii) $\alpha,\beta \geq 0$ ve $\alpha+\beta = 1$ olsun. O halde:

$$\begin{aligned}
F(\alpha t_1+\beta t_2) &= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(\alpha t_1+\beta t_2)x + (1y(\alpha t_1+\beta t_2))\,dxdy \\
&= \alpha\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f(t_1x+(1-t_1)y)dxdy
\end{aligned}$$

$$+\beta\int_a^b\int_a^b f(t_2x+(1-t_2)y)dxdy=\alpha F(t_1)+\beta(t_2)$$

dir. Bu da F nin $[0,1]$ de konveks olduğunu gösterir. ■

(iii) $\forall x,y\in[a,b]$ ve $t\in[0,1]$ için;

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

dir. Bu eşitsizlik $[a,b]x[a,b]$ de integre edilirse;

$$\int_a^b\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy\leq\int_a^b\int_a^b tf(x)+(1-t)f(y)dxdy=(b-a)\int_a^b f(x)dx$$

elde edilir. Bu da $F(t)\leq F(0)=F(1)$ olduğunu gösterir. f nin $[a,b]$ deki konveksliğinden $\forall t\in[0,1]$ ve $x,y\in[a,b]$ için;

$$\frac{1}{2}[f(tx+(1-t)y)+f(ty+(1-t)x)]\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $[a,b]x[a,b]$ de integre edilirse:

$$\int_a^b\int_a^b\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy\leq\int_b^a\int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da gösterir ki $F\left(\frac{1}{2}\right)\leq F(t)$ dir. ■

(iv) İki katlı integraller için Jensen eşitsizliği kullanılırsa;

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy\geq f\left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy\right)=\frac{1}{2}f(a+b)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

(v) f nin $(0,1)$ deki konveksliğinden ve $t_2\geq t_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ için;

$$\frac{F(t_2)-F(t_1)}{t_2-t_1}\geq F_t'(t_1)=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f_t'(t_1x+(1-t_1)y)(x-y)dxdy$$

dir. f nin $[a,b]$ deki konveksliğinden;

$$\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(t_1x+(1-t_1)y)}{\frac{x+y}{2}-(t_1x+(1-t_1)y)}\geq f_t'(t_1x+(1-t_1)y)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(t_1x+(1-t_1)y)\geq f_t'(t_1x+(1-t_1)y)(x-y)\left(\frac{1-2t_1}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $\forall x,y\in[a,b]$ ve $t_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ için eşitsizlik;

$$(x-y)f_t'(t_1x+(1-t_1)y) \geq \left(\frac{1-2t_1}{2}\right) f(t_1x+(1-t_1)y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu eşitsizlik $[a,b]x[a,b]$ de integre edilirse;

$$\int_a^b \int_a^b (x-y)f_t'(t_1x+(1-t_1)y)dxdy$$

$$\geq \left(\frac{1-2t_1}{2}\right) \int_a^b \int_a^b f(t_1x+(1-t_1)y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) dxdy$$

$$= F_t' \geq \left(\frac{1-2t_1}{2}\right)\left(F_t'(t_1) - F_t'(t_2)\right) \geq 0$$

elde edilir. Bu da f nin $\left[\frac{1}{2},1\right]$ de monoton artan olduğunu gösterir. F nin $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ deki monoton artanlığı da (i) den kolayca gösterilebilir.

(vi) Basit bir hesaplamadan;

$$H(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\int_a^b f(tx+(1-t)y)dy\right)dx$$

olduğu görülür. Jensen integral eşitsizliği kullanılırsa;

$$H(t) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\int_a^b f(tx+(1-t)y)dy\right)dx, \qquad t \in [0,1]$$

olur ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.3 $f: C \subseteq X \to \mathbb{R}$, C alt cümlesine ait X lineer uzayında konveks bir fonksiyon olsun. $a,b \in C$ değişkenleri için $F(a,b): [0,1] \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlansın. O halde:

$$F(a,b)(t) = \frac{1}{2}\left[f(ta+(1-t)b) + f\left((1-t)a+tb\right)\right], \qquad t \in [0,1]$$

dir. Buradan aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) $F(a,b)\left(\sigma+\frac{1}{2}\right) = F(a,b)\left(\frac{1}{2}-\sigma\right), \qquad \sigma \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$

(ii) $sup_{\boldsymbol{t}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]} F(a,b)(t) = F(a,b)(0) = F(a,b)(1) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$

(iii) $inf_{\boldsymbol{t}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]} F(a,b)(t) = F(a,b)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

(iv) $F(a,b)$ dönüşümü $[0,1]$ de konvekstir.

(v) $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (4.2.4)$$

(vi) $p_i \geq 0$ olmak üzere $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ olmak üzere $t_i \in [0,1]$ için;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq F(a,b)\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i F(a,b)(t_i) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (4.2.5)$$

dir. Bu da Hadamard eşitsizliğinin farklı bir sonucudur. Üstelik $X = \mathbb{R}$ alınırsa $C \subseteq \mathbb{R}$ olur. $a, b \in C$ ve $a < b$ olmak üzere:

(vii) $F(a,b)$**,** $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ de monoton azalan, $\left[\frac{1}{2},1\right]$ de monoton artandır.

(viii)

$$\int_a^b F(a,b)(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

özdeşliği geçerlidir.

(ix)
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

durumunda Hadamard eşitsizliği geçerlidir.

(x) f, $[a,b]$ de diferansiyellenebilir ise;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{b-a}{2}\left(f'(b)-f'(a)\right)$$

dır (Pachpatte 2005a).

İspat:

(i) Basit bir hesaplamadan;

$$F(a,b)\left(\sigma+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} f\left(\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)a + \left(1-\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)\right)b\right) \\ +f\left(\left(1-\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)\right)a + \left(\sigma+\frac{1}{2}\right)b\right) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2}-\sigma\right)b + f\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)a + f\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)b\right] \quad (1)$$

$$F(a,b)\left(\frac{1}{2}-\sigma\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} f\left(\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)a + \left(1-\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\right)b\right) \\ +f\left(\left(1-\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\right)a + \left(\frac{1}{2}-\sigma\right)b\right) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2}-\sigma\right)b + f\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)a + f\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)b\right] \quad (2)$$

dir. (1) ve (2) denklemleri birbirilerine eşit olduklarından ispat tamamlanır. ■

(ii) f nin konveksliği kullanılırsa;

$$\sup_{t\in[0,1]} F(a,b)(t) \leq \frac{1}{2}[tf(a) + (1-t)f(b) + (1-t)f(a) + tf(b)] = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir. Buradan:

$$F(a,b)(0) = F(a,b)(1) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olduğu açıkça görülmektedir. Böylece hipotez kanıtlanır. ■

(iii) Aynı şekilde f nin konveksliğinden;

$$\inf_{t\in[0,1]} F(a,b)(t) \geq f\left[\frac{ta + (1-t)b + (1-t)a + tb}{2}\right] = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir ve böylece hipotez kanıtlanır. ■

(iv) $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere $\alpha + \beta = 1$ ve $t_1, t_2 \in [0,1]$ dir. O halde:

$$F(a,b)(\alpha t_1 + \beta t_2) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} f\big(\alpha(t_1 a + (1-t_1)b) + \beta(t_2 a + (1-t_2)b)\big) \\ +f(\alpha(1-t_1)a + t_1 b) + \beta\big((1-t_2)a + t_2 b\big) \end{array}\right]$$

$$= \alpha F(a,b)(t_1) + \beta F(a,b)(t_2)$$

dir. Bu da f nin [0,1] aralığında konveks olduğunu gösterir. ■

(v) $F(a,b)$ nin $[0,1]$ deki konveksliğinden, aynı aralıkta integrallenebilirliğinden ve (ii) ve (iii) den;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 F(a,b)(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir. Basit bir hesaplamadan;

$$\int_0^1 F(a,b)(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)\, dt$$

$$= \int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır. ■

(vi) (4.2.5) deki ilk eşitsizlik ve (iii) den;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq F(a,b)\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i t_i\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)]\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i t_i\right) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

dir. $F(a,b)$ dönüşümüne Jensen eşitsizliği uygulanırsa;

$$F(a,b)\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i t_i\right) = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i F(a,b)(t_i)$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

(vii) $F(a,b)$ nin $(0,1)$ deki konveksliğinden ve $\forall t_2 > t_1$ için $t_1, t_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ olmak üzere:

$$\frac{F(a,b)(t_2)-F(a,b)(t_1)}{t_2-t_1} \geq F'(a,b)(t_1)$$

$$= \frac{b-a}{2}[f'_+(t_1 b + (1-t_1)a) - f'_-(t_1 a + (1-t_1)b)]$$

dir. $t_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ den $(1-t_1)a + t_1 b \geq t_1 a + (1-t_1)b$ dir. Çünkü f'_+ (a,b)'de monoton artandır. Sonuç olarak;

$$f'_+(t_1 b + (1-t_1)a) \geq f'_-(t_1 a + (1-t_1)b)$$

olduğu açıkça görülür. Böylece $F(a,b)$ de monoton artandır ve (ii) den benzer şekilde $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ de monoton artan olduğu gösterilebilir. Aynı şekilde $F(a,b)$ nin $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de monoton azalan olduğu gösterilebilir. ■

(viii) Basit bir hesaplamadan;

$$\int_a^b F(a,b)(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\big((1-t_1)a + t_1 b + f(t_1 a + (1-t_1)b)\big)dt\right] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

dir ve hipotez kanıtlanır. ■

(ix) (v) ve (viii) birlikte kullanılırsa ispat tamamlanır. ■

(x) Eğer f, $[a,b]$ de diferansiyellenebilir ise;

$$\begin{aligned} &f(ta+(1-t)b) \le tf(a+(1-t)f(b)) \\ &\Rightarrow f(ta+(1-t)b)-f(a) \le tf(a)+f(b)-t(b)-f(a) \\ &\Rightarrow f(ta+(1-t)b)-f(a) \le -f(a)(1-t)+f(b)(1-t) \\ &\Rightarrow f(ta+(1-t)b)-f(a) \le (1-t)(f(b)-f(a)) \\ &\Rightarrow f(ta+(1-t)b)-f(a) \le (1-t)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(b-a) \\ &\Rightarrow f(ta+(1-t)b) \le (1-t)(b-a)f'(a)+f(a) \end{aligned}$$

dir. Aynı şekilde;

$$f\big((1-t)a+tb\big) \le t(b-a)f'(a)+f(a)$$

olduğu kolayca görülebilir. $\forall t \in [0,1]$ için;

$$F(a,b)(t) \ge f(a)+\frac{b-a}{2}f'(a)$$

dır. Benzer bir biçimde;

$$F(a,b)(t) \ge f(b)-\frac{b-a}{2}f'(b)$$

olduğu gösterilebilir. ■

Teorem 4.2.4 $f: I \to \mathbb{R}$, I da M-Lipschitzian dönüşümü ve $a,b \in I$ olmak üzere $a<b$ olsun. O halde:

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{M}{4}(b-a) \tag{4.2.6}$$

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{M}{3}(b-a) \tag{4.2.7}$$

dir. Burada M, Lipschitzian sabitidir (Dragomir *et. al.* 2000).

İspat: $t \in [0,1]$ olsun. O halde $a,b \in I$ için;

$$|tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)f(b))| = 2t(1-t)M|b-a| \tag{4.2.8}$$

dir. Eğer $t=\frac{1}{2}$ olarak seçilirse;

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{M}{2}|b-a| \tag{4.2.9}$$

elde edilir. (4.2.9) da $a=ta+(1-t)b$ ve $b=(1-t)a+tb$ olarak alınırsa sırasıyla;

$$\left|\frac{f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a))}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{M}{2}|b-a||2t-1| \qquad (4.2.10)$$

dir. (4.2.10) eşitsizliği $[0,1]$ aralığından integre edilirse;

$$\left|\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)bdt+\int_0^1 f(tb+(1-t)a))dt\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{M}{2}|b-a|\int_0^1|2t-1|dt\Rightarrow\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{M}{4}|b-a|$$

olur ve (4.2.6) nın ispatı tamamlanır. (4.2.8) eşitsizliğinden $\forall t\in[0,1]$; $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere:

$$|tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)f(b))|=2t(1-t)M|b-a|$$

dir. Bu eşitsizlik $[0,1]$ de integre edilirse;

$$\left|f(a)\int_0^1 tdt+f(b)\int_0^1(1-t)dt-\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt\right|\leq 2M(b-a)\int_0^1 t(1-t)dt$$

ve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{M}{3}|b-a|$$

olur ve (4.2.9) un ispatı tamamlanır. ■

Diğer Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler Bullen (1978), Hammer (1957-1958), Pachpatte (2000), Pachpatte (2003a) tarafından verilmiştir.

5. OSTROWSKI TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde birçok araştırmacı tarafından son dönemlerde incelenen bazı Ostrowski tipi eşitsizlikler verilecektir. Dragomir (1999) tarafından Lipschitzian dönüşümleri için Ostrowski tipi eşitsizlikler verilmiştir.

Teorem 5.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ye $[a,b]$ de Lipschitzian dönüşümü olmak üzere:

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$$

dir. $\forall x,y\in[a,b]$ ve $L\geq 0$ için;

$$\left|\int_a^b f(t)dt - f(x)(b-a)\right| \leq L(b-a)^2\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \tag{5.1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\frac{1}{4}$ en iyi sabittir (Dragomir 1999).

İspat: Riemann-Stieltjes integrali kullanılırsa;

$$\int_a^x (t-a)df(t) = f(x)(b-a) - \int_a^x f(t)dt$$

$$\int_x^b (t-b)df(t) = f(x)\,(b-a) - \int_x^b f(t)dt$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlik birleştirilirse;

$$f(x)(b-a) - \int_a^b f(t)dt = \int_a^x (t-a)df(t) + \int_x^b (t-b)df(t) \tag{5.2}$$

olur. Şimdi $\Delta_n: a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b$ arasında bir dizi olsun ve $\tau(\Delta_n)\to 0$'a giderken $n\to\infty$ olur. Burada $\tau(\Delta_n) := max_{i\in[0,1,\ldots,n-1]}\left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right)$ ve $\xi_i^{(n)} \in \left[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}\right]$ dir. Eğer $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ ye $[a,b]$ de Riemann integrallenebilir ve $\tau:[a,b]\to\mathbb{R}$ de L-Lipschitzian dönüşümü ise o halde:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b p(x)d\tau x\right| &= \lim_{\tau(\Delta_n)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} p\left(\xi_i^{(n)}\right)\left[\tau\left(x_{i+1}^{(n)}\right)-\tau\left(x_i^{(n)}\right)\right] \\ &\leq \lim_{\tau(\Delta_n)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left|p\left(\xi_i^{(n)}\right)\right|\left(x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}\right)\left[\frac{\tau\left(x_{i+1}^{(n)}\right)-\tau\left(x_i^{(n)}\right)}{x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)}}\right]\end{aligned}$$

$$\leq L \lim_{\tau(\Delta_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left|p\left(\xi_i^{(n)}\right)\right| \left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right) = L \int_a^b |p(x)|dx \tag{5.3}$$

dir. (5.3) de $[a, x]$ ve $[x, b]$ ye integral uygulanırsa;

$$\left|\int_a^x (t-a)df(t) + \int_x^b (t-b)df(t)\right| \leq \left|\int_a^x (t-a)df(t)\right| + \left|\int_x^b (t-b)df(t)\right|$$

$$\leq L\left[\left|\int_a^x |t-a|\, dt\right| + \int_x^b |t-b|dt\right.$$

$$= L(b-a)^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \tag{5.4}$$

elde edilir. (5.4) ten (5.2) özdeşliği aracılığıyla (5.1) eşitsizliği geçerlidir.

Şimdi (5.1) eşitsizliği $C > 0$ şartında altında geçerli olsun. O halde:

$$\left|\left|\int_a^b f(t)dt - f(x)(b-a)\right| \leq L(b-a)^2 \left[C + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]\right| \tag{5.5}$$

dir. $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ için (5.5) te $f(x) = x$ olsun. O halde:

$$\left|\int_a^b tdt - x(b-a)\right| \leq L(b-a)^2 \left[C + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

$$(b-a)\left|\frac{a+b}{2} - x\right| \leq L(b-a)^2 \left[C + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

$$\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \left[C + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)$$

elde edilir. $x = a$ için;

$$\frac{b-a}{2} \leq \left[C + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a) = \frac{1}{2} \leq C + \frac{1}{4} \Longrightarrow C = \frac{1}{4}$$

tür. Böylece C nin en iyi sabit olduğu da gösterilmiş olur. ■

Hatırlatma 5.1 f dönüşümü (a,b) de diferansiyellenebilir ve f' de (a,b) de sınırlı olduğunda $\|f\|_\infty = sup_{x\in(a,b)}|f'(t)| < \infty$ olur. O halde (5.1) de L yerine $\|f\|_\infty$ da konulabilir. Dragomir ve Wang (1997) Ostrowski tipi eşitsizliği başka bir biçimde ispatlamışlardır. ■

Teorem 5.2 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ye (a,b) de diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $a < b$ dir. Kabul edilsin ki f' $[a,b]$ de integrallenebilir ve $\gamma \le f'(x) \le \Gamma$ olsun. $\forall x \in [a,b]$ ve $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ için;

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma - \gamma) \quad (5.6)$$

dır (Dragomir and Wang 1997).

İspat: $p(x,t)$ fonksiyonu;

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & t \in [a,x] \\ t-b, & t \in [x,b] \end{cases} \quad (5.7)$$

şeklinde tanımlansın. $p(x,t)$ dönüşümü $[a,b]$ de integrallenirse:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt &= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)f'(t)dt + \int_x^b (t-b)f'(t)dt\right] \\ &= f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \end{aligned} \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.7) den;

$$x - b \le p(x,t) \le x - a$$

eşitsizliği yazılabilir. $p(x,.)$ ve $f'(c)$ ye Grüss eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)dt\right) \right| \\ &\le \frac{1}{4}(x-a+b-x)(\Gamma-\gamma) = \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma) \end{aligned} \quad (5.9)$$

sonucu elde edilir. Şimdi (5.9) un sol tarafındaki integralleri hesaplansın. Bu durumda:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt = x - \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)dt = \frac{1}{b-a}(f(b)-f(a))$$

olarak bulunur. Son olarak bunları yerine koyarsak istenilen (5.6) eşitsizliği elde edilir.■

Hatırlatma 5.2 (5.6) da sırasıyla $x = \frac{a+b}{2}$ ve $x = b$ alınırsa;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{b-a}\big(f(b)-f(a)\big)\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{4}(b-a) \quad (5.10)$$

$$f(b) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{b-a}\big(f(b)-f(a)\big)\left(\frac{b-a}{2}\right) \le \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma) \quad (5.11)$$

elde edilir. ■

Teorem 5.3 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ye mutlak sürekli bir fonksiyon ve $f' \in L_2[a,b]$ de türevlenebilirdir. O halde:

$$\left|(b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)|f(b)-f(a)| - \int_a^b f(t)dt\right| \le \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}}\sqrt{\sigma(f')} \quad (5.12)$$

dir. Burada $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ en iyi sabittir ve

$$\sigma(f') = (b-a)\left[\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2 - \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2\right]$$

dir (Ujevic 2004).

İspat: $p(x,t)$ (5.7) den tanımlansın ve bu fonksiyonun $[a,b]$ de integralini alınsın. Böylece;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt = x - \frac{a+b}{2} \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)dt = \frac{1}{b-a}(f(b)-f(a)) \quad (5.15)$$

integralleri elde edilir. (5.13)-(5.15) ten;

$$\int_a^b \left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]\left[f'(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right]dt$$

$$= \int_a^b \left[p(x,t)f'(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(s)ds - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)f'(t)ds \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b p(x,s)ds\right)\left(\int_a^b f'(s)ds\right) \right]$$
$$= \int_a^b p(x,t)f'(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b p(x,t)f'(s)dsdt$$
$$- \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b p(x,s)f'(t)dsdt$$
$$+ \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \left(\int_a^b p(x,s)ds \int_a^b f'(s)ds\right)dt$$

elde edilir. Şimdi son özdeşliğin sağ tarafındaki integraller hesaplansın. O halde:

$$\int_a^b p(x,t)f'(t)dt = (b-a)f(x) - \int_a^b f(t)dt$$
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b p(x,t)f'(s)dsdt = (f(b)-f(a))\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b p(x,s)f'(t)dsdt = (f(b)-f(a))\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$
$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \left(\int_a^b p(x,s)ds \int_a^b f'(s)ds\right)dt = (f(b)-f(a))\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

sonuçları elde edilir. Öte yandan;

$$\left|\int_a^b \left[p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]\left[f'(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right]\right|$$
$$\leq \left\|p(x,.) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right\|_2 \left\|f' - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right\|_2 \qquad (5.17)$$

dir. Aynı şekilde;

$$\left\|p(x,.) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right\|_2^2 = \frac{(b-a)^3}{12} \qquad (5.18)$$
$$\left\|f' - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds\right\|_2^2 = \frac{(f(b)-f(a))^2}{b-a} \qquad (5.19)$$

olarak hesaplanabilir. (5.16)-(5.19) dan kolaylıkla (5.12) eşitsizliği elde edilir.

$$\left|(b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)|f(b)-f(a)| - \int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \left\| p(x,.) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds \right\|_2 \left\| f' - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(s)ds \right\|_2$$

eşitsizliği göz önüne alınsın. Buradan (5.18) ve (5.19) ifadelerinin karekökü alınırsa;

$$\sqrt{\frac{(b-a)^3}{12}} = \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\|f'\|_2^2 - \frac{(f(b)-f(a))^2}{b-a}} = \sqrt{\sigma(f')}$$

olur. Bu özdeşlikler (5.17) de yerine konulduğundan istenilen eşitsizlik elde edilir. Şimdi (5.12) nin kesinlikle geçerli olduğu gösterilmelidir. $x \in [0,1]$ için;

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & t \in [0,x] \\ \frac{1}{2}t^2 - t + x, & t \in [x,1] \end{cases} \tag{5.20}$$

biçiminde tanımlansın. Bu fonksiyon mutlak süreklidir ve aynı zamanda sürekli parçalı bir polinom fonksiyonudur. Şimdi kabul edilsin ki $C > 0$ şartı altında (5.12) geçerli olsun. Buradan:

$$\left|(b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\big(f(b)-f(a)\big) - \int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq C(b-a)^{\frac{3}{2}}\left[\|f'\|_2^2 - \frac{\big(f(b)-f(a)\big)^2}{(b-a)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.21}$$

elde edilir. $a = 0$ ve $b = 1$ seçilir ve *f* de (5.20) den tanımlanırsa;

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt = x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}$$

tür. Ayrıca;

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = \frac{1}{2}t^2, \qquad f(x) = x^2$$

seçildiğinde (5.21) in sol tarafı $\frac{1}{12}$ olur. Aynı şekilde (5.21) in sağ tarafı da $\frac{C}{2\sqrt{3}}$ bulunur ve bundan dolayı $C \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$ olur ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.4 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ye I^0 da diferansiyellenebilir bir dönüşüm (I^0, I nın içi) ve $a,b\in I$ olmak üzere $a<b$ dir. Eğer $\gamma,\Gamma\in\mathbb{R}$ sabitleri için $\gamma\le f'(t)\le\Gamma$ şartı sağlanıyorsa, $\forall t\in[a,b]$ olmak üzere *f'* de $[a,b]$ de integrallenebilir ise;

$$\left|f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(b)-f(a)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\le\frac{b-a}{2}(S-\gamma) \quad (5.22)$$

$$\left|f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(b)-f(a)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\le\frac{b-a}{2}(\Gamma-S) \quad (5.23)$$

dir. Burada $S=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dır (Pachpatte 2012).

İspat: $p(x,t)$ (5.7) den tanımlansın. Kısmi integrasyon kullanılırsa;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \quad (5.24)$$

olur. Benzer şekilde;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt=x-\frac{a+b}{2} \quad (5.25)$$

$$\int_a^b f'(t)dt=f(b)-f(a) \quad (5.26)$$

dır. (5.24)-(5.26) dan;

$$f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(b)-f(a)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f'(t)dt\int_a^b f'(t)dt \quad (5.27)$$

$$R_n(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f'(t)dt\int_a^b f'(t)dt \quad (5.28)$$

olur. $C\in\mathbb{R}$ keyfi sabiti için;

$$R_n(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b (f'(t)-C)\left[p(x,t)-\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]dt \quad (5.29)$$

halini alır. Buradan:

$$\int_a^b\left[p(x,t)-\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]dt=0 \quad (5.30)$$

sonucuna ulaşılır. İlk olarak (5.29) da $C=\gamma$ seçilirse;

$$R_n(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b (f'(t)-\gamma)\left[p(x,t)-\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds\right]dt$$

olur ve

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{b-a} \max_{t\in[a,b]} \left| p(x,t) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right| \int_a^b |f'(t) - \gamma| dt \qquad (5.31)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan:

$$\max_{t\in[a,b]} \left| p(x,t) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right| = \frac{b-a}{2} \qquad (5.32)$$

$$\int_a^b |f'(t) - \gamma| dt = f(b) - f(a) - \gamma(b-a) = (S-\gamma)(b-a)$$

olur. (5.31) den;

$$|R_n(x)| \leq \frac{b-a}{2}(S-\gamma) \qquad (5.33)$$

elde edilir. (5.27), (5.28) ve (5.33) den kolaylıkla (5.22) elde edilir. Diğer eşitsizlik için (5.29) da $C = \Gamma$ olarak alınsın. O halde:

$$R_n(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f'(t) - \Gamma) \left[p(x,t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b p(x,s) ds \right] dt$$

olur ve

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{b-a} \max_{t\in[a,b]} \left| p(x,t) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right| \int_a^b |f'(t) - \Gamma| dt \qquad (5.34)$$

olduğu görülür. Buradan:

$$\int_a^b |f'(t) - \Gamma| dt = (\Gamma - S)(b-a) \qquad (5.35)$$

elde edilir. (5.32), (5.34) ve (5.35) ten;

$$|R_n(x)| \leq \frac{b-a}{2}(\Gamma - S) \qquad (5.36)$$

olduğu kolayca görülebilir. (5.27), (5.28) ve (5.36) dan (5.23) elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.5 $I \subseteq \mathbb{R}$ de bir açık aralık olmak üzere $a, b \in I$ ve $a < b$ dir. $f: I \to \mathbb{R}$ ye diferansiyellenebilir bir fonksiyon $\ni \gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$, $\forall t \in [a,b]$ ve $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ ise:

$$\left| (b-a) \left[\frac{\alpha}{2}\big(f(b) - f(a)\big) + (1-\alpha) f(x) - \gamma(1-\alpha)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b f(t) dt \right] \right|$$

$$\leq (S-\gamma) \max\left\{ \alpha \frac{b-a}{2}, x - a - \alpha \frac{b-a}{2}, b - x - \alpha \frac{b-a}{2} \right\} (b-a) \qquad (5.37)$$

$$\left|(b-a)\left[\frac{\alpha}{2}\big(f(b)-f(a)\big)+(1-\alpha)f(x)-\Gamma(1-\alpha)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)dt\right]\right|$$

$$\leq (\Gamma-S)max\left\{\alpha\frac{b-a}{2}, x-a-\alpha\frac{b-a}{2}, b-x-\alpha\frac{b-a}{2}\right\}(b-a) \tag{5.38}$$

dir. Burada $S=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ve $a+\alpha\frac{b-a}{2}\leq x\leq b-\alpha\frac{b-a}{2}$ dir (Pachpatte 2012).

İspat: $k(x,t)$ dönüşümü;

$$k(x,t)=\begin{cases} t-\left(a+\alpha\dfrac{b-a}{2}\right), & t\in[a,x] \\ t-\left(b-\alpha\dfrac{b-a}{2}\right), & t\in[x,b] \end{cases} \tag{5.39}$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyona kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\int_a^b k(x,t)f'(t)dt=(b-a)\left[\left((1-\alpha)f(x)+\frac{\alpha}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right)\right]-\int_a^b f(t)dt \tag{5.40}$$

elde edilir. Aynı şekilde;

$$\int_a^b k(x,t)dt=(b-a)(1-\alpha)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \tag{5.41}$$

olarak bulunur. $C\in\mathbb{R}$ de bir sabit olsun. (5.40) ve (5.41) den;

$$\int_a^b k(x,t)|f'(t)-C|dt=\int_a^b k(x,t)f'(t)dt-C\int_a^b k(x,t)dt$$

$$=(b-a)\left[\frac{\alpha}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\alpha)f(x)-C(1-\alpha)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt \tag{5.42}$$

dir. Eğer (5.42) de $C=\gamma$ seçilirse;

$$(b-a)\left[\frac{\alpha}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\alpha)f(x)-\gamma(1-\alpha)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt$$

$$=\int_a^b k(x,t)|f'(t)-\gamma|dt \tag{5.43}$$

elde edilir. Öte yandan;

$$\left|\int_a^b k(x,t)|f'(t)-\gamma|dt\right|\leq \max_{t\in[a,b]}|k(x,t)|\int_a^b |f'(t)-\gamma|dt \tag{5.44}$$

$$\max_{t\in[a,b]}|k(x,t)|=max\left\{\alpha\frac{b-a}{2}, x-a-\alpha\frac{b-a}{2}, b-x-\alpha\frac{b-a}{2}\right\} \tag{5.45}$$

$$\left|\int_a^b |f'(t)-\gamma|dt\right|=(S-\gamma)(b-a) \tag{5.46}$$

olduğu kolayca görülebilir. (5.43)-(5.46) dan (5.37) geçerlidir. Eğer (5.42) de $C=\Gamma$

seçilirse;

$$(b-a)\left[\frac{\alpha}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+(1-\alpha)f(x)-\Gamma(1-\alpha)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]-\int_a^b f(t)dt$$

$$=\int_a^b k(x,t)|\Gamma-f'(t)|dt \tag{5.47}$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\int_a^b |\Gamma-f'(t)|dt=(\Gamma-S)(b-a) \tag{5.48}$$

dir. (5.45), (5.47) ve (5.48) den kolaylıkla (5.38) elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.1 Teorem 5.5 teki şartlar altında;

$$\left|f(x)(b-a)-\gamma(b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq (S-\gamma)\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{5.49}$$

$$\left|f(x)(b-a)-\Gamma(b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq (S-\gamma)\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{5.50}$$

eşitsizlikleri vardır (Pachpatte 2012).

İspat: (5.37) ve (5.38) de $\alpha=0$ seçilirse;

$$\left|f(x)(b-a)-\gamma(b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)dt\right|\leq (S-\gamma)max\{0,x-a,b-x\} \quad (*)$$

halini alır. Burada:

$$max\{\,x-a,b-x\}=\frac{1}{2}[b-a+|2x-a-b|]=\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|$$

dir. Yukardaki ifade;

$$max\{A,B\}=\frac{1}{2}[A+B+|A-B|], \qquad A,B\in\mathbb{R} \tag{5.51}$$

özdeşliği kullanılarak elde edilmiştir. (5.51) ifadesi $(*)$ denkleminde yerine koyulursa; (5.37) eşitsizliği elde edilir.

$$\left|f(x)(b-a)-\Gamma(b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)dt\right|\leq (\Gamma-S)max\{0,x-a,b-x\}$$

ifadesi yukardakine benzer şekilde ispatlanabilir. ■

Sonuç 5.2 Teorem 5.5 teki şartlar altında;

$$\left|\frac{b-a}{2}|f(a)+f(b)|-\int_a^b f(t)dt\right| \leq (S-\gamma)\frac{(b-a)^2}{2} \tag{5.52}$$

$$\left|\frac{b-a}{2}|f(a)+f(b)|-\int_a^b f(t)dt\right| \leq (\Gamma-S)\frac{(b-a)^2}{2} \tag{5.53}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Pachpatte 2012).

İspat: (5.37) ve (5.38) de $\alpha = 1$ alınırsa $x = \frac{a+b}{2}$ olur ve

$$\left|(b-a)\left[\frac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)-\int_a^b f(t)dt\right]\right| \leq (S-\gamma)(b-a)$$

olduğu biliniyor. Burada:

$$max\left\{\frac{b-a}{2}, x-\frac{a+b}{2}, -\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right\} = \frac{b-a}{2}$$

dir. Bu ifade yerine yazılırsa (5.52) eşitsizliği elde edilir. Aynı yöntemle (5.53) eşitsizliği de elde edilebilir. ■

Sonuç 5.3 Teorem 5.5 teki şartlar altında;

$$\left|(b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{4}\right)+\frac{1}{2}f(x)-\frac{x}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq (S-\gamma)\left[\frac{b-a}{4}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{5.54}$$

$$\left|(b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{4}\right)+\frac{1}{2}f(x)-\frac{x}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq (\Gamma-S)\left[\frac{b-a}{4}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right](b-a) \tag{5.55}$$

dır (Pachpatte 2012).

İspat: (5.37) ve (5.38) de $\alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa;

$$\left|(b-a)\left[\frac{\alpha}{2}\big(f(b)-f(a)\big)+(1-\alpha)f(x)-\gamma(1-\alpha)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(t)dt\right]\right|$$
$$\leq (S-\gamma)max\left\{\alpha\frac{b-a}{2}, x-a-\alpha\frac{b-a}{2}, b-x-\alpha\frac{b-a}{2}\right\}(b-a)$$

elde edilir. (5.37) ifadesinde;

$$max\left\{\frac{b-a}{4}, x-\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}-x\right\}$$

$$= max\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{4}+x-\frac{3a+b}{4}\right)+\left|\frac{b-a}{4}-\left(x-\frac{3a+b}{4}\right)\right| \\ ,\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{4}+\frac{a+3b}{4}-x\right)+\left|\frac{b-a}{4}-\left(\frac{a+3b}{4}-x\right)\right|\end{array}\right\}$$

$$= max\left\{\frac{1}{2}\left(x-a+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|,\frac{1}{2}\left(b-x+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{b-a}{4}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|$$

elde edilir. Aynı şeyler (5.38) için de yapılarak sonuca ulaşılabilir. ■

5.1 İki Fonksiyonun Çarpımını İçeren Ostrowski Eşitsizlikleri

Bu bölümde Pachpatte (2002, 2005b, 2006a, 2007) tarafından verilen ve yakın zamanda yaygın olarak kullanılan Ostrowski tipi eşitssizlikler verilmiştir.

Teorem 5.1.1 $f, g \in C^1(|a,b|, \mathbb{R})$ ve $a < b$ dir. O halde $\forall x \in [a,b]$ için;

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2}[g(x)F + f(x)G]\right| \leq \frac{1}{4}\left[|g(x)|\int_a^b |f'(t)|dt + |f(x)|\int_a^b |g'(t)|dt\right] \tag{4.1.1}$$

$$|f(x)g(x) - |g(x)F + f(x)G| + FG| \leq \frac{1}{4}\left(\int_a^b |f'(t)|dt\right)\left(\int_a^b |g'(t)|dt\right) \tag{4.1.2}$$

dir. Burada:

$$F = \frac{f(a) + f(b)}{2}, \qquad G = \frac{g(a) + g(b)}{2}$$

dir. $\frac{1}{4}$, (4.1.1) ve (4.1.2) için en iyi sabittir (Pachpatte 2006a).

İspat: Hipotezlerden;

$$f(x) - F = \frac{1}{2}\left[\int_a^x f'(t)dt - \int_x^b f'(t)dt\right] \tag{4.1.3}$$

$$g(x) - G = \frac{1}{2}\left[\int_a^x g'(t)dt - \int_x^b g'(t)dt\right] \tag{4.1.4}$$

özeşlikleri vardır (Pachpatte 2002).

Sırasıyla (4.1.3) ve (4.1.4) ün her iki yanı $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılır ve bulunan özdeşlikler yeniden düzenlenirse;

$$f(x)g(x) - \frac{1}{2}[f(x).G + g(x).F]$$
$$\leq \frac{1}{4}\left[g(x)\left(\int_a^x f'(t)dt - \int_x^b f'(t)dt\right) + f(x)\left(\int_a^x g'(t)dt - \int_x^b g'(t)dt\right)\right] \tag{4.1.5}$$

elde edilir. (4.1.5) te mutlak değerin özellikleri kullanılırsa;

$$\left|f(x).g(x) - \frac{1}{2}[f(x).G + g(x).F]\right| \leq \frac{1}{4}\left[|g(x)|\int_a^b |f'(t)|dt + |f(x)|\int_a^b |g'(t)|dt\right]$$

elde edilir. Bu da istenilen (4.1.4) eşitsizliğidir. (4.1.3) ve (4.1.4) ün sağ ve sol tarafları taraf tarafa çarpılırsa;

$$f(x).g(x) - [f(x).G + g(x).F] + FG$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\int_a^x f'(t)dt + \int_x^b f'(t)dt\right)\left(\int_a^x g'(t)dt + \int_x^b g'(t)dt\right)\right] \qquad (4.1.6)$$

bulunur. (4.1.6) dan ve mutlak değerin özelliklerinden;

$$|f(x)g(x) - |g(x)F + f(x)G| + FG| \leq \frac{1}{4}\left(\int_a^b |f'(t)|dt\right)\left(\int_a^b |g'(t)|dt\right)$$

elde edilir ve bu da istenilen (4.1.2) eşitsizliğidir.

Şimdi $\frac{1}{4}$ sabitinin (4.1.1) ve (4.1.2) eşitsizlikleri için en iyi sabit olduğu gösterilsin. Bunun için (4.1.1) ve (4.1.2) eşitsizlikleri $c > 0$ ve $k > 0$ için geçerli olsun. Buradan $\forall x \in [a, b]$ için;

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2}[g(x)F + f(x)G]\right| \leq c\left[|g(x)|\int_a^b |f'(t)|dt + |f(x)|\int_a^b |g'(t)|dt\right] \qquad (4.1.7)$$

$$|f(x)g(x) - |g(x)F + f(x)G| + FG| \leq k\left(\int_a^b |f'(t)|dt\right)\left(\int_a^b |g'(t)|dt\right) \qquad (4.1.8)$$

eşitsizlikleri elde edilir (4.1.7) ve (4.1.8) de $g(x) = x$ seçilirse buradan:

$f'(x).g'(x) = 1$, $F = G = \frac{a+b}{2}$ olur. O halde basit bir hesaplamadan;

$$F = \frac{f(a) + f(b)}{2}, \qquad G = \frac{g(a) + g(b)}{2}$$

olmak üzere;

$$\left|x - \frac{1}{2}(a + b)\right| \leq 2c(b - a) \qquad (4.1.9)$$

$$\left|x\big(x - (a + b)\big) + \left(\frac{a + b}{2}\right)^2\right| \leq k(b - a)^2 \qquad (4.1.10)$$

elde edilir. $x = b$ alınırsa (4.1.9) da $C \geq \frac{1}{4}$ ve (4.1.10) dan $k \geq \frac{1}{4}$ olduğu kolayca görülür. Bu da (4.1.1) ve (4.1.2) de $\frac{1}{4}$ ün en iyi sabit olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır. ■

Hatırlatma 5.1.1 (5.1.5) ve (5.1.6) nın her iki yanı $(b-a)$ ya bölünür, $[a,b]$ de x'e göre integrallenir ve Teorem 5.1.1 in ispatı takip edilirse;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{2(b-a)}\left[G\int_a^b f(x)dx + F\int_a^b g(x)dx\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{4(b-a)}\left[\left(\int_a^b |g(x)|dx\right)\left(\int_a^b |f'(x)|dx\right) + \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)\left(\int_a^b |g'(x)|dx\right)\right] \quad (5.1.11)$$

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{2(b-a)}\left[G\int_a^b f(x)dx + F\int_a^b g(x)dx - FG\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{4(b-a)}\left(\int_b^a |f'(x)|dx\right)\left(\int_a^b |g'(x)|dx\right) \quad (5.1.12)$$

elde edilir. (5.1.11) ve (5.1.12) diye adlandırılan eşitsizlikler bilinen Grüss ve Cebysev eşitsizlikleriyle ilişkilidir (Grüss 1935, Cebysev 1882). ■

Teorem 5.1.2 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ye $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de diferansiyellenebilir ve $f',g':(a,b)\to\mathbb{R}$, (a,b) de sınırlı olsunlar. O halde:

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy + f(x)\int_a^b g(y)dy\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\{|g(x)|\|f'\|_\infty + |f(x)|\|g'\|_\infty\}\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a) \quad (5.1.13)$$

ve

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy + f(x)\int_a^b g(y)dy\right] + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)g(y)dy\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right] \quad (5.1.14)$$

eşitsizlikleri elde edilir (Pachpatte 2005a).

İspat: $\exists x,y\in[a,b]$ için;

$$f(x)-f(y) = \int_x^y f'(t)dt \quad (5.1.15)$$

$$g(x)-g(y) = \int_x^y g'(t)dt \quad (5.1.16)$$

özdeşlikleri geçerlidir. (5.1.15) ve (5.1.16) eşitsizliklerinin her iki yanı sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılır ve taraf tarafa toplanırsa;

$$2f(x)g(x) - [g(x)f(y) + f(x)g(y)] = g(x)\int_x^y f'(t)dt + f(x)\int_x^y g'(t)dt \quad (5.1.17)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.1.17) nin her iki yanı $[a,b]$ aralığında y ye göre integrallenir ve bulunan özdeşlik yeniden düzenlenirse;

$$\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b \left\{g(x)\int_x^y f'(t)dt + f(x)\int_x^y g'(t)dt\right\}dy$$

$$\leq \frac{1}{2}\{|g(x)|\|f'\|_\infty + |f(x)|\|g'\|_\infty\}\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a) \quad (5.1.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da istenilen (5.1.13) eşitsizliğidir. Şimdi (5.1.15) ve (5.1.16) nın her iki yanı taraf tarafa çarpılırsa;

$$f(x)g(x) - [f(x)g(y) + f(y)g(x)] + f(y)g(y) = \left(\int_x^y f'(t)dt\right)\left(\int_x^y g'(t)dt\right) \quad (5.1.19)$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. (5.1.19) un her iki yanı $[a,b]$ de y ye göre integrallenir ve yeniden düzenlenirse;

$$f(x)g(x) - \frac{1}{b-a}\left[f(x)\int_a^b g(y)dy + g(x)\int_a^b f(y)dy\right]$$

$$+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)g(y)dy$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left\{\left(\int_x^y f'(t)dt\right)\left(\int_x^y g'(t)dt\right)\right\}dy \quad (5.1.20)$$

bulunur. (5.1.20) den ve mutlak değerin özelliklerinden istenilen (5.1.14) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.1.3 $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ye mutlak sürekli bir fonksiyon ve $p > 1$ için $f', g' \in L_p[a,b]$ olsun. O halde:

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_b^a f(t)dt + f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{2(b-a)}\left[|g(x)|\|f'\|_p + |f(x)|\|g'\|_p\right]\left(B(x)\right)^{\frac{1}{q}} \quad (5.1.23)$$

ve

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_b^a f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\right|$$
$$\leq\frac{1}{(b-a)^2}\|f'\|_p\|g'\|_p\big(B(x)\big)^{\frac{2}{q}} \tag{5.1.24}$$

dur. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir (Pachpatte 2005a).

İspat: Hipotezden;

$$p(x,t)=\begin{cases}t-a, & t\in[a,x]\\ t-b, & t\in[x,b]\end{cases}$$

fonksiyonu geçerlidir (Pachpatte 2005). Buradan:

$$f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt \tag{5.1.25}$$

$$g(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)g'(t)dt \tag{5.1.26}$$

dir. (5.1.25) ve (5.1.26) nin her iki yanı sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılır ve bulunan özdeşlikler yeniden düzenlenirse;

$$f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right]$$
$$=\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b p(x,t)f'(t)dt+f(x)\int_a^b p(x,t)g'(t)dt\right] \tag{5.1.27}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.1.27) de mutlak değerin özelliklerini ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa;

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right|$$
$$\leq\frac{1}{2(b-a)}\left[|g(x)|\int_a^b|p(x,t)||f'(t)|dt+|f(x)|\int_a^b|p(x,t)||g'(t)|dt\right]$$
$$\leq\frac{1}{2(b-a)}\begin{bmatrix}|g(x)|\left(\int_b^a|p(x,t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_b^a|f'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\ +|f(x)|\left(\int_b^a|p(x,t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_b^a|g'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} \left(\int_b^a |p(x,t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left[|g(x)| \|f'\|_p + |f(x)| \|g'\|_p \right] \qquad (5.1.28)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Burada:

$$\int_b^a |p(x,t)|^q dt = \frac{1}{q+1} [(x-a)^{q+1} + (b-x)^{q+1}] = B(x) \qquad (5.1.29)$$

olduğu kolayca hesaplanabilir. (5.1.30) eşitliği (5.1.29) eşitsizliği içinde kullanılırsa istenilen (5.1.23) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi (5.1.26) ve (5.1.27) nin sağ ve sol tarafları taraf tarafa çarpılırsa;

$$f(x)g(x) - \frac{1}{b-a} \left[g(x) \int_a^b f(t)dt + f(x) \int_a^b g(t)dt \right] + \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)dt \right)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2} + \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b p(x,t) f'(t)dt \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b p(x,t) g'(t)dt \right) \qquad (5.1.30)$$

elde edilir. (5.1.30) dan, mutlak değerin özelliklerinden ve Hölder integral eşitsizliğinden;

$$\left| f(x)g(x) - \frac{1}{b-a} \left[g(x) \int_a^b f(t)dt + f(x) \int_a^b g(t)dt \right] \right|$$

$$+ \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)dt \right)$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_b^a |p(x,t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_b^a |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_b^a |p(x,t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_b^a |g'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2} \|f'\|_p \|g'\|_p (B(x))^{\frac{2}{q}}$$

elde edilir. Bu da istenilen (5.1.24) eşitsizliğidir.

Hatırlatma 5.1.2 (5.1.23) te $g(x) = 1$ alınırsa buradan $g'(x) = 0$ olur. Basit bir hesaplamadan $\forall x \in [a,b]$ için;

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{(q+1)^{\frac{1}{q}}} \left[\left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{q+1} + \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{q+1} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p \qquad (5.1.31)$$

dir. (5.1.32) olarak adlandırılan eşitsizlik Dragomir ve Wang (1998) tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir (Pachpatte 2005a). ■

Teorem 5.1.4 $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ ye $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de diferansiyellenebilir ve $f', g': [a,b] \to \mathbb{R}$; (a,b) de sınırlı olsun. O halde:

$$\left| g(x)L[f(x)] + f(x)L[g(x)] - g(x)\int_a^b f(t)dt - f(x)\int_a^b f(t)dt \right|$$
$$\leq [|g(x)|\|f'\|_\infty + |f(x)|\|g'\|_\infty]M(x) \tag{5.1.32}$$

$$\left| L[f(x)]L[g(x)] - L[g(x)]\int_a^b f(t)dt - L[f(x)]\int_a^b g(t)dt \right.$$
$$\left. + \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt\right) \right| \leq \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \big(M(x)\big)^2 \tag{5.1.33}$$

dir. Burada $a + \alpha\frac{b-a}{2} \leq x \leq b - \alpha\frac{b-a}{2}$; $\alpha \in [0,1]$ arasındadır. Ayrıca;

$$M(x) = \frac{1}{4}(b-a)^2[\alpha^2 + (\alpha-1)^2] + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{5.1.34}$$

olarak tanımlanmıştır (Pachpatte 2003a).

İspat: Hipotezden;

$$L[f(x)] - \int_a^b f(t)dt = \int_a^b k(x,t)f'(t)dt \tag{5.1.35}$$

$$L[g(x)] - \int_a^b g(t)dt = \int_a^b k(x,t)g'(t)dt \tag{5.1.36}$$

özdeşlikleri vardır (Pachpatte 2005).

(5.1.36) ve (5.1.37) nin her iki yanı sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılır ve bulunan özdeşlikler yeniden düzenlenirse;

$$g(x)L[f(x)] + f(x)\, L[g(x)] - g(x)\int_a^b f(t)dt - f(x)\int_a^b g(t)dt$$
$$= g(x)\int_a^b k(x,t)f'(t)dt + f(x)\int_a^b k(x,t)g'(t)dt \tag{5.1.38}$$

elde edilir. (5.1.38) den ve mutlak değerin özelliklerinden;

$$\left| g(x)L[f(x)] + f(x)\, L[g(x)] - g(x)\int_a^b f(t)dt - f(x)\int_a^b g(t)dt \right|$$
$$\leq |g(x)|\int_a^b |k(x,t)||f'(t)|dt + |f(x)|\int_a^b |k(x,t)||g'(t)|dt$$
$$= [|g(x)|\|f'\|_\infty + |f(x)|\|g'\|_\infty]\int_a^b |k(x,t)|dt$$

$$= [|g(x)|\|f'\|_\infty + |f(x)|\|g'\|_\infty]M(x)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu da istenilen (5.1.33) eşitsizliğidir. Şimdi (5.1.36) ve (5.1.37) taraf tarafa çarpılırsa kolayca (5.1.34) eşitsizliğine ulaşılır ve ispat tamamlanır. ■

5.2 Ostrowski-Grüss Tipi Eşitsizlikler

Bu bölümde son dönemlerde Pachpatte (2004a,2007b) ve Cerone vd. (1999) tarafından verilen bazı Ostrowski-Grüss tipi eşitsizlikler tanıtılacaktır. Keyfi $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ için;

$$S(f,g)=f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}[g(x)]\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt-\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[Fg(x)+Gf(x)]$$

$$H(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)$$
$$-\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[Fg(x)+Gf(x)]dx$$

olarak verilmiştir. Burada:

$$F=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\qquad G=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

dır (Pachpatte 2007b).

Teorem 5.2.1 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ye mutlak sürekli fonksiyon ve $f',g'\in L_2[a,b]$ dir. O halde:

$$|S(f,g)|\ \le\frac{b-a}{4\sqrt{3}}\left(\left[|g(x)|\left(\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2-F^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}+|f(x)|\left[|g(x)|\left(\frac{1}{b-a}\|g'\|_2^2-G^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right)\qquad(5.2.1)$$

$$|H(f,g)|\le\frac{1}{4\sqrt{3}}\int_a^b\left[|g(x)|\left(\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2-F^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}dx$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\int_a^b\left[|f(x)|\left(\frac{1}{b-a}\|g'\|_2^2-G^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}dx\qquad(5.2.2)$$

dir (Pachpatte 2005a).

Teorem 5.2.2 Teorem 5.2.1 deki tüm şartlar geçerli olsun. $\gamma,\Gamma,\phi,\Phi,\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma\le f'(x)\le\Gamma,\ \phi\le g'(x)\le\Phi$ dir. O halde:

$$|S(f,g)|\le\frac{b-a}{8\sqrt{3}}[|g(x)|(\Gamma-\gamma)+|f(x)|(\Phi-\phi)]\qquad(5.2.3)$$

$$|H(f,g)|\le\frac{1}{8\sqrt{3}}\int_a^b[(\Gamma-\gamma)+|f(x)|(\Phi-\phi)]dx\qquad(5.2.4)$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: (Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.2.2) $p(x,t)$ fonksiyonu;

$$p(x,t)=\begin{cases}t-a, & t\in[a,x]\\ t-b, & t\in[x,b]\end{cases}$$

olarak tanımlansın. İyi bilinen Korkine eşitsizliği kullanılırsa $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ için;

$$T(f,g)=\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (f(t)-f(s))(g(t)-g(s))dtds$$

eşitsizliği elde edilir (Mitrinovic *et. al*. 1993, Pachpatte 2005a).

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)dt\right)$$

$$=\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (p(x,t)-p(x,s))(f'(t)-f'(s))dtds \tag{5.2.5}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Basit bir hesaplamadan:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt=x-\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)dt=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

özdeşlikleri elde edilir. Ayrıca;

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (p(x,t)-p(x,s))(f'(t)-f'(s))dtds$$

$$=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)dt-F\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \tag{5.2.6}$$

özdeşliği vardır. Benzer şekilde;

$$g(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b g'(t)dt-G\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (p(x,t)-p(x,s))(g'(t)-g'(s))dtds \tag{5.2.7}$$

olduğu da kolayca gösterilebilir. Şimdi (5.2.6) ve (5.2.7) sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılır taraf tarafa toplanır ve bulunan özdeşlikler yeniden düzenlenirse;

$$S(f,g)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} g(x)\dfrac{1}{2(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b\int_a^b \big(p(x,t)-p(x,s)\big)\big(f'(t)-f'(s)\big)dtds \\ +f(x)\dfrac{1}{2(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b\int_a^b (p(x,t)-p(x,s))(g'(t)-g'(s))dtds \end{array}\right] \tag{5.2.8}$$

özdeşliği elde edilir. (5.2.8) den ve mutlak değerin özelliklerinden;

$$|S(f,g)| \le \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} |g(x)|\dfrac{1}{2(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b\int_a^b \left|\left(p(x,t)-p(x,s)\right)\right|\left|\left(f'(t)-f'(s)\right)\right| dtds \\ +|f(x)|\dfrac{1}{2(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b\int_a^b \left|\left(p(x,t)-p(x,s)\right)\right|\left|\left(g'^{(t)}-g'(s)\right)\right| dtds \end{array}\right] \qquad (5.2.9)$$

eşitsizliği elde edilir. Çift katlı integraller için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa;

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \left|\left(p(x,t)-p(x,s)\right)\right|\left|\left(f'(t)-f'(s)\right)\right| dtds$$

$$\le \left(\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \left|\left(p(x,t)-p(x,s)\right)\right|^2 dtds\right)^{\frac{1}{2}} x \left(\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \left|\left(f'(t)-f'(s)\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.2.10)$$

dir. Ayrıca Grüss-Cebysev eşitsizliğinden yararlanarak;

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (p(x,t)-p(x,s))^2 dtds = \frac{1}{b-a}\int_a^b p^2(x,t)dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right)^2$$

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \left(p(x,t)-p(x,s)\right)^2 dtds = \frac{1}{b-a}\int_a^b p^2(x,t)dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)^2 \qquad (5.2.11)$$

ve

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \left(f'(t)-f'(s)\right)^2 dtds = \frac{1}{b-a}\int_a^b p^2(x,t)dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt\right)^2$$

$$= \frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2 - F^2 \qquad (5.2.12)$$

özdeşlikleri elde edilir. (5.2.11) ve (5.2.12) ; (5.2.10) un içinde kullanılırsa;

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |p(x,t)-p(x,s)||f'(t)-f'(s)| dtds$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)\left(\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2 - F^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.2.13)$$

elde edilir. Benzer şekilde:

$$\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |p(x,t)-p(x,s)||f'(t)-f'(s)| dtds \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)\left(\frac{1}{b-a}\|g'\|_2^2 - G^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.2.14)$$

olduğu kolayca hesaplanabilir. (5.2.13) ve (5.2.14); (5.2.9) da kullanılırsa istenilen

(5.2.1) eşitsizliği elde edilir. Şimdi (5.2.8) in her iki yanı $[a, b]$ de x e göre integrallenir ve $(b-a)$ ya bölünürse;

$$H(f,g) = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \frac{g(x)}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b \left[\big(p(x,t) - p(x,s)\big)\big(f'(t) - f'(s)\big) dtds \right.$$
$$\left. + \frac{f(x)}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b \big(p(x,t) - p(x,s)\big)\big(g'(t) - g'(s)\big) dtds \right] dx \qquad (5.2.15)$$

(5.2.15) ten ve mutlak değerin özelliklerinden;

$$|H(f,g)| \leq \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \frac{g(x)}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b \left[|p(x,t) - p(x,s)||f'(t) - f'(s)| dtds \right.$$
$$\left. + \frac{f(x)}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |p(x,t) - p(x,s)||g'(t) - g'(s)| dtds \right] dx \qquad (5.2.16)$$

elde edilir. (5.2.13) ve (5.2.14) ; (5.2.16) nın içinde kullanılırsa istenilen (5.2.2) eşitsizliği de ispatlanır ve Teorem 5.2.1 in ispatı tamamlanır.

Teorem 5.2.2 nin ispatı için Grüss eşitsizliği kullanılırsa;

$$0 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f'(t)|^2 dt - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |f'(t)| dt \right)^2 \leq \frac{1}{4} (\Gamma - \gamma)^2$$

eşitsizliği bu şekilde gösterilebilir. Bu eşitsizliğin orta kısmı $T(f,f)$ olarak adlandırılır. $T(f,f)$ aynı zamanda;

$$T(f,f) \leq \frac{1}{4} (\Gamma - \gamma)^2$$

şeklinde de yazılabilir. Sonuç olarak;

$$0 \leq \frac{1}{b-a} \|f'\|_2^2 - F^2 \leq \frac{1}{4} (\Gamma - \gamma)^2 \qquad (5.2.17)$$

dir. Benzer şekilde;

$$0 \leq \frac{1}{b-a} \|g'\|_2^2 - G^2 \leq \frac{1}{4} (\Gamma - \gamma)^2 \qquad (5.2.18)$$

eşitsizliğinin varlığına kolayca ulaşılabilir. (5.2.17) ve (5.2.18) ; (5.2.1) ve (5.2.2) de kullanılırsa istenilen (5.2.3) ve (5.2.4) eşitsizlikleri elde edilir ve böylece Teorem 5.2.2 nin de ispatı tamamlanmış olur. ■

Hatırlatma 5.2.1 (5.2.1) ve (5.2.2) de $g(x)=1$ alınırsa buradan $g'(x)=0$ olur. O halde basit bir hesaplamadan;

$$\left|F(x)-\frac{b-E(x)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2-\frac{1}{(b-a)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir (Barnett *et. al.* 2000). Ayrıca;

$$0\leq H(f,g)\leq\frac{1}{4\sqrt{3}}\int_a^b\left(\frac{1}{b-a}\|f'\|_2^2-\frac{1}{(b-a)^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

tir (Barnett *et. al.* 2000).

Teorem 5.2.3 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ye $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de iki kez diferansiyellenebilir olsun ve kabul edilsin ki $f'':(a,b)\to\mathbb{R}$ ye $\forall x\in(a,b)$ için $\phi\leq f''(x)\leq\Phi$ şartı sağlansın. O halde:

$$\left|f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)+\left[\frac{(b-a)^2}{24}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{1}{8}(\Phi-\phi)\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^2 \quad (5.2.19)$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: Hipotezden;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)-f(x) \quad (5.2.20)$$

özdeşliği vardır (Pachpatte 2005a). Burada $k:[a,b]x[a,b]\to\mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonu:

$$k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(t-a)^2}{2}, & t\in[a,x]\\ \dfrac{(t-b)^2}{2}, & t\in[x,b]\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca $k(x,t)$ çekirdeğinden yaralanarak (5.2.20) özdeşliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. Diğer yandan k çekirdeğinin;

$$0\leq k(x,t)\leq\begin{cases}\dfrac{(b-x)^2}{2}, & x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right)\\ \dfrac{(b-x)^2}{2}, & x\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]\end{cases} \quad (5.2.21)$$

eşitsizliğini de sağladığı söylenebilir. $f'(.)$ ve $k(x,.)$ dönüşümlerine Grüss integral eşitsizliği uygulanırsa;

$$\left| \frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f''(t)dt\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\Phi-\phi)x\begin{cases}\dfrac{(b-x)^2}{2}, & x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right) \\ \dfrac{(b-x)^2}{2}, & x\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]\end{cases} \tag{5.2.22}$$

eşitsizliği elde edilir. Aşağıdaki özdeşlik te kolayca gösterilebilir.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)dt = \frac{1}{6}[(x-a)^3+(b-x)^3]$$

Son özdeşliğin sağ tarafı hesaplandığında;

$$(x-a)^3+(b-x)^3 = (b-a)\left[\frac{(b-a)^2}{4}+3\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

elde edilir. Bu veri $\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)dt$ de yerine yazıldığında;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)dt = (b-a)\left[\frac{(b-a)^2}{24}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

olur. (5.2.22) kullanılırsa;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt - (b-a)\frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{24}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\Phi-\phi)x\begin{cases}\dfrac{(b-x)^2}{2}, & x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right) \\ \dfrac{(b-x)^2}{2}, & x\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]\end{cases} \tag{5.2.23}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.2.20)-(5.2.23) kullanılırsa (5.2.19) elde edilir ■

Sonuç 5.2.1 f, Teorem (5.2.3) teki gibi olsun. (5.2.19) da $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)\big(f'(b)-f'(a)\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{32}(\Phi-\phi)(b-a)^2 \quad (5.2.23)$$

‘’kesin olmayan orta nokta eşitsizliği’’ elde edilir (Pachpatte 2005a).

Hatırlatma 5.2.2 Klasik orta nokta eşitsizliği;

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{24}(b-a)^2\|f''\|_\infty \tag{5.2.25}$$

şeklinde belirtilebilir. Burada $\|f''\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}|f''(t)| < \infty$ dur. Eğer;

$\Phi - \phi \leq \frac{4}{3}\|f''\|_\infty$ olarak alınırsa (5.2.24) olarak adlandırılan eşitsizlik (5.2.25) ten daha kullanışlıdır. $0 \leq \phi \leq \Phi$ eşitsizliğinin doğru olması $\Phi - \phi \leq \frac{4}{3}\|f''\|_\infty$ için yeterli bir şarttır (Pachpatte 2005a).

Sonuç 5.2.2 f, Teorem 5.2.3 teki gibi olsun. O halde:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{12}(b-a)\big(f'(b)-f'(a)\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{8}(\Phi-\phi)(b-a)^2 \quad (5.2.26)$$

kesin olmayan trapezoid eşitsizlik geçerlidir (Pachpatte 2005a).

İspat: (5.2.19) da $x = a$ ve $x = b$ alınırsa;

$$\left|f(a) + \frac{(b-a)}{2}f''(a) + \frac{(b-a)}{6}\big(f'(b)-f'(a)\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{8}(\Phi-\phi)(b-a)^2 \quad (5.2.27)$$

ve

$$\left|f(b) - \frac{(b-a)}{2}f''(b) + \frac{(b-a)}{6}\big(f'(b)-f'(a)\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{8}(\Phi-\phi)(b-a)^2 \quad (5.2.28)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (5.2.27) ve (5.2.28) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanır ve sonrasında üçgen eşitsizliği uygulanırsa istenilen (5.2.23) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.2.4 $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ ye (a,b) de iki defa diferansiyellenebilir dönüşümler ve $f'', g'': (a,b) \to \mathbb{R}$ türevleri de sınırlı fonksiyonlar olsun. O halde:

$$\left|2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\text{x}\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) - \left[g(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)g'(x)\right]\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\right|$$

$$\leq E(x)\left[\|f'\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |g(t)|dt\right) + \|g'\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|dt\right)\right] \quad (5.2.30)$$

ve

$$\left|\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)g(x) + \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(fg)'(x) - 2f(x)g(x)\right|$$

$$\leq E(x)[\|f'\|_\infty|g(x)| + \|g'\|_\infty|f(x)|] \quad (5.2.31)$$

dir. Burada:

$$E(x) = \frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (5.2.32)$$

olarak tanımlamıştır (Pachpatte 2005a).

Teorem 5.2.5 f,g Teorem 5.2.4 teki gibi olsun. O halde:

$$\left|\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)f(x)+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)g(x)-2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\right.$$

$$-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\right]+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\left.+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\right|$$

$$\leq L(x)\left[\|f'\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)+\|g'\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\right] \qquad (5.2.33)$$

dir ve

$$\left|2f(x)g(x)-\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)g(x)\right\}\right.$$

$$\left.\mathrm{x}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\right\}\right|$$

$$\leq L(x)[\|f'\|_\infty|g(x)|+\|g'\|_\infty|f(x)|] \qquad (5.2.34)$$

dir. Burada:

$$L(x)=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}+\frac{1}{4}\right]^2+\frac{1}{12}\right\}(b-a)^2$$

olarak tanımlanmıştır (Pachpatte 2005a).

İspat: Hipotezden;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt=f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)+\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt \qquad (5.2.36)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt=g(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)g'(x)+\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)g''(t)dt \qquad (5.2.37)$$

özdeşlikleri geçerlidir (Pachpatte 2005a).

Burada $k(x,t)$ Teorem 5.2.3 ün ispatında tanımlandığı gibidir. (5.2.36) ve (5.2.37) nin her iki yanı sırasıyla $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt$ ve $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ ile çarpılır ve elde edilen özdeşlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)=\left[\left(f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\right.$$

$$+\left(g(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)g'(x)\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)$$
$$+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)$$
$$+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)g''(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\Bigg] \qquad (5.2.38)$$

dir. (5.2.38) den ve mutlak değerin özelliklerinden;

$$\Bigg|2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)-\left(f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)$$

$$\left(g(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)g'(x)\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\Bigg|$$

$$\leq\left(\|f''\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |g(t)|dt\right)+\|g''\|_\infty\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|dt\right)\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |k(x,t)|dt\right) \qquad (5.2.39)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca burada;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |k(x,t)|dt=\frac{1}{24}(b-a)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \qquad (5.2.40)$$

dir. $\forall x\in[a,b]$ için (5.2.39) un içinde (5.2.40) kullanılırsa istenilen (5.2.30) eşitsizliği elde edilir. Şimdi (5.2.36) ve (5.2.37) nin sağ taraflarındaki $f(x)$ ve $g(x)$ sabit kalır; geriye kalan ifadeler sol tarafa atılırsa;

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt \qquad (5.2.36')$$

$$g(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)g'(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)g''(t)dt \qquad (5.2.37')$$

özdeşliklerinin var olduğu görülür. (5.2.36’) ve (5.2.37’) ifadelerinin her iki tarafı sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılır ve elde edilen sonuçlar taraf tarafa toplanırsa;

$$2f(x)g(x)=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)g(x)+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)f(x)$$
$$-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)f''(t)dt\right)g(x)-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b k(x,t)g''(t)dt\right)f(x) \qquad (5.2.41)$$

özdeşliği elde edilir. (5.2.41) den ve mutlak değerin özelliklerinden ve (5.2.40) tan istenilen (5.2.31) eşitsizliği elde edilir ve Teorem 5.2.4 ün ispatı tamamlanır.

Teorem 5.2.5 ispatı için $\forall x \in [a,b]$ olmak üzere;

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b p(x,t)p(t,s)f''(s)dsdt \qquad (5.2.42)$$

$$g(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt + \frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b p(x,t)p(t,s)g''(s)dsdt \qquad (5.2.43)$$

özdeşlikleri yazılabilir (Pachpatte 2005a).

Burada:

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & t \in [a,x] \\ t-b, & t \in [x,b] \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır. (5.2.42) ve (5.2.43) ün her iki yanı sırasıyla $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt$ ve $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ ile çarpılır ve bulunan özdeşlikler yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} & f(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) + g(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) \\ &\quad + \frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b p(x,t)p(t,s)f''(s)dsdt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b p(x,t)p(t,s)g''(s)dsdt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \qquad (5.2.44) \end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. (5.2.44) ten ve mutlak değerin özelliklerinden;

$$\begin{aligned} &\Bigg| f(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) + g(x)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \\ &\quad -2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) \\ &\quad - \frac{g(b)-g(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\Bigg| \end{aligned}$$

$$\leq \left(\|f''\|_{\infty} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |g(t)| dt \right) + \|g''\|_{\infty} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)| dt \right) \right)$$

$$\text{x} \left(\left(\frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |p(x,t)||p(t,s)| ds dt \right) \right)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte;

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |p(x,t)||p(t,s)| ds dt = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2}{(b-a)^2} + \frac{1}{4} \right]^2 + \frac{1}{12} \right\} (b-a)^2$$

olduğu hesaplanıp yerine konulduğunda istenilen (5.2.33) eşitsizliği elde edilir. Diğer eşitsizlik te bir önceki teoremin ispatı takip edilerek yapılabilir ve böylece ispat tamamlanır (Dragomir and Barnett 1998). ■

5.3 Yüksek Mertebeden Ostrowski Eşitsizlikleri

Bu bölümde Cerone ve Dragomir (2000), Matic vd. (2001), Pachpatte (2004b, 2006b) tarafından verilen n-kere diferansiyellenebilir bazı Ostrowski tipi eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 5.3.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ye bir dönüşüm olsun $\ni f^{(n-1)}$, $[a,b]$ de mutlak sürekli ve $f^{(n)}\in L_\infty[a,b]$ dir. O halde $\forall x\in[a,b]$ için;

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f_k(x)\right|$$
$$\le\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right]\le\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\qquad(5.3.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}\left|f^{(n)}(t)\right|<\infty$ dur (Cerone and Dragomir 2000).

İspat: Hipotezden;

$$\int_a^b f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f_k(x)+(-1)^n\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)dt\qquad(5.3.2)$$

özdeşliği geçerlidir (Pachpatte 2005a).

Burada:

$$E_n(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(t-a)^n}{n!}, & t\in[a,x]\\[2mm] \dfrac{(t-b)^n}{n!}, & t\in[x,b]\end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır. (5.3.2) den ve mutlak değerin özelliklerinden;

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f_k(x)\right|$$
$$=\left|\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)dt\right|\le\left\|f^{(n)}\right\|_\infty\int_a^b|E_n(x,t)|dt$$
$$=\left[\int_a^x\frac{(t-a)^n}{n!}dt+\int_x^b\frac{(t-b)^n}{n!}dt\right]=\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right]$$

elde edilir ve (5.3.1) eşitsizliğin birinci kısmı ispatlanmış olur. Eşitsizliğin ikinci kısmını ispatı için;

$$(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}<(b-a)^{n+1}$$

eşitsizliğinin varlığını tümevarım yöntemiyle göstermek yeterli olacaktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. ■

Hatırlatma 5.3.1 (5.3.1) eşitsizliğinde $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa;

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1+(-1)^k}{(k+1)!}\right]\left(\frac{(b-a)^{k+1}}{2^{k+1}}\right)f_k\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{2^n(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{5.3.3}$$

eşitsizliği elde edilir (Pachpatte 2005a). ■

Teorem 5.3.2 $f: I\to\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. Burada $I\subseteq\mathbb{R}$ dir. Kabul edilsin ki f, I^0(I nın içi) diferansiyellenebilir ve $a,b\in I^0$ olsun. Ayrıca $a<b$ dir. $f^{(n)}$ $[a,b]$ de integrallenebilir ve $\gamma\leq f^{(n)}\leq\Gamma$, $\forall x\in[a,b]$ olarak alınsın. Burada γ,Γ∈ ℝ dir. O halde:

$$\begin{aligned}R_n(x)=f(x)&+\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f_k(x)\\&+\frac{(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)(b-a)^2}\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right]\\&-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

özdeşliği geçerlidir. Sonuç olarak $\forall x\in[a,b]$ için;

$$|\,R_n(x)|\leq\frac{\Gamma-\gamma}{2(n)!}\left[\frac{(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)}-\left(\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.3.5}$$

eşitsizliği elde edilir (Pachpatte 2005a).

İspat: (5.3.2) eşitsizliğinde $k=0$ elemanı dışarı çıkarılırsa;

$$\int_a^b f(t)dt=(b-a)f(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f_k(x)+(-1)^n\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)dt$$

veya

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt=f(x)&+\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f_k(x)\\&-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\frac{(-1)^{n+1}}{b-a}\int_a^b E_n(x,t)f^{(n)}(t)dt\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda;

$$\int_a^b E_n(x,t)dt = \frac{(x-a)^{n+1}-(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

dir. Burada:

$$\frac{(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ve

$$\int_a^b f^{(n)}(t)dt = f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)$$

dır. Buradan;

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(b-a)^2}\left(\int_a^b E_n(x,t)dt\right)\int_a^b f^{(n)}(t)dt$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(b-a)^2}\left(\frac{(-1)^{n+1}(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right)\left(f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right)$$

$$= \frac{(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\,(b-a)^2}\left(f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right) \qquad (5.3.7)$$

elde edilir. (5.3.6) ve (5.3.7) birlikte kullanılırsa istenilen $R_n(x)$ özdeşliği elde edilir. Şimdi ise;

$$|\,R_n(x)| \leq \frac{1}{2}(\Gamma-\gamma)\sqrt{T\big(E_n(x,.),E_n(x,.)\big)} \qquad (5.3.8)$$

eşitsizliği yazılabilir (Pachpatte 2005a). Ayrıca;

$$\int_a^b E^2(x,t)dt = \frac{(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)}$$

olduğu kolayca hesaplanabilir. Aynı zamanda;

$$T\big(E_n(x,.),E_n(x,.)\big) = \frac{1}{(n!)^2}\left[\frac{(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)} - \left(\frac{(x-a)^{n+1}-(b-x)^{n+1}}{(b-a)(n+1)!}\right)^2\right] \qquad (5.3.9)$$

dir. (5.3.8) ve (5.3.9) birlikte kullanılırsa istenilen (5.3.1) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.3.3 $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ ye $[a,b]$ de sürekli ve (a,b) de n-kere diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $f^{(n)}, g^{(n)}: (a,b) \to \mathbb{R}$ ye (a,b) de sınırlı olduğunda;

$$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}\left|f^{(n)}(t)\right| < \infty \text{ ve } \left\|g^{(n)}\right\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}\left|g^{(n)}(t)\right| < \infty$$

eşitlikleri geçerlidir. O halde:

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}[g(x)I_0 + f(x)J_0] - \frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\sum_{k=1}^{n-1} I_k + f(x)\sum_{k=1}^{n-1} J_k\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{2(n+1)!}\left[|g(x)|\left\|f^{(n)}\right\|_\infty + |f(x)|\left\|g^{(n)}\right\|_\infty\right]\left[\frac{(x-a)^{n+1} + (b-x)^{n+1}}{b-a}\right] \quad (5.3.10)$$

eşitsizliği geçerlidir (Pachpatte 2004b).

Burada:

$$I_k = \frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k)}(y)(x-y)^k dy, \qquad I_0 = \int_a^b f(y)dy$$

$$J_k = \frac{1}{k!}\int_a^b g^{(k)}(y)(x-y)^k dy, \qquad J_0 = \int_a^b g(y)dy$$

$$F_k(x) = \left(\frac{n-k}{k!}\right)\left(\frac{f^{(k-1)}(a)(x-a)^k - f^{(k-1)}(b)(x-a)^k}{b-a}\right)$$

$$G_k(x) = \left(\frac{n-k}{k!}\right)\left(\frac{g^{(k-1)}(a)(x-a)^k - g^{(k-1)}(b)(x-a)^k}{b-a}\right)$$

dır (Pachpatte 2005a).

İspat: $x \in [a,b]$ ve $y \in (a,b)$ olsun. Milovanovic ve Pecaric (1976) tarafından verilen Taylor formülünün Lagrange formu kullanılırsa;

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-y)^n \quad (5.3.11)$$

ve

$$g(x) = g(y) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + \frac{1}{n!}g^{(n)}(\sigma)(x-y)^n \quad (5.3.12)$$

özdeşlikleri elde edilir.

Burada $\xi = y + \alpha(x-y)$, $(0 < \alpha < 1)$ ve $\sigma = y + \beta(x,y)$, $(0 < \beta < 1)$ dir. $F_k(x)$ ve $G_k(x)$ teoremin ifadesinde tanımlandığı gibidir. I_k ve J_k nın tanımından ve kısmi integrasyonu kullanarak;

$$f(x)(b-a)-\int_a^b f(y)dy-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k)}(y)\,(x-y)^k dy=\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n)}(\xi)(x-y)^n$$

özdeşliği elde edilir (Milovanovic and Pecaric 1976).

I_k özdeşliğinde kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$I_0+\sum_{k=1}^{n-1} I_k \ = nI_0-(b-a)\sum_{k=1}^{n-1} F_k \tag{5.3.13}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$J_0+\sum_{k=1}^{n-1} J_k \ = nJ_0-(b-a)\sum_{k=1}^{n-1} G_k \tag{5.3.14}$$

olarak bulunur. (5.3.11) ve (5.3.12) nin her iki tarafı sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılır ve bulunan özdeşlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{aligned} f(x)g(x)=&\frac{1}{2}g(x)f(y)+\frac{1}{2}f(x)g(y)+\frac{1}{2}g(x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k \\ &+\frac{1}{2}f(x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k+\frac{1}{2n!}g(x)f^{(n)}(\xi)(x-y)^n \\ &+\frac{1}{2n!}f(x)g^{(n)}(\sigma)(x-y)^n \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

özdeşliği elde edilir. Bu özdeşlik $[a,b]$ de y ye göre integrallenirse;

$$\begin{aligned} f(x)g(x)=&\frac{1}{2(b-a)}[g(x)I_0+f(x)J_0] \\ &+\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\sum_{k=1}^{n-1} I_k \ +f(x)\sum_{k=1}^{n-1} J_k\right] \\ &+\frac{1}{2(b-a)}\frac{1}{n!}\left[g(x)\int_a^b f^{(n)}(\xi)(x-y)^n dy+f(x)\int_a^b g^{(n)}(\sigma)(x-y)^n dy\right] \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

elde edilir. (5.3.16) dan ve mutlak değerin özelliklerinden;

$$\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}[g(x)I_0+f(x)J_0]-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\sum_{k=1}^{n-1} I_k \ +f(x)\sum_{k=1}^{n-1} J_k\right]\right|$$

$$\leq\frac{1}{2(b-a)}\frac{1}{n!}\left[|g(x)|\left\|f^{(n)}\right\|_\infty+|f(x)|\left\|g^{(n)}\right\|_\infty\right]\int_a^b |(x-y)^n|dy$$

eşitsizliği elde edilir. Burada:

$$\int_a^b |(x-y)^n|dy = \frac{1}{n+1}[(x-a)^{n+1} + (b-x)^{n+1}]$$

olarak hesaplanıp yerine konursa istenilen (5.3.10) eşitsizliği ispatlanır ve ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.3.1 $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ ye $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de diferansiyellenebilir ve $f', g': [a,b] \to \mathbb{R}$ ye (a,b) de sınırlı olduğunda $\|f'\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}|f'(t)| < \infty$ ve benzer şekilde $\|g'\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}|g'(t)| < \infty$ geçerlidir. O halde:

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}[g(x)I_0 + f(x)J_0]\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[|g(x)|\|f^{(n)}\|_\infty + |f(x)|\|g^{(n)}\|_\infty\right]\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)$$

eşitsizliği geçerli olur. ($\forall x \in [a,b]$) Burada I_0 ve J_0 Teorem 5.3.3 ten tanımlanmıştır (Pachpatte 2005a). ■

Teorem 5.3.4 (P_n) harmonik bir polinom dizisi, $P_n' = P_{n-1},\ n \geq 1$, $P_0 = 1$ dir. Burada $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ olsun $\ni$ $f^{(n-1)}$ ve $g^{(n-1)}$, $n \geq 1$ için mutlak sürekli; $f^{(n)}, g^{(n)} \in L_p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$ dur. O halde:

$$\left|g(x)B[f(x)] + f(x)B[g(x)] - \frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(t)dt + f(x)\int_a^b g(t)dt\right]\right|$$
$$\leq D(n,p,x)\left[|g(x)|\|f^{(n)}\|_p + |f(x)|\|g^{(n)}\|_p\right] \tag{5.3.17}$$

ve

$$\left|B[f(x)]B[g(x)] - \frac{1}{b-a}\left[B[g(x)]\int_a^b f(t)dt + B[f(x)]\int_a^b g(t)dt\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\right|$$
$$\leq [D(n,p,x)]^2\left(\|f^{(n)}\|_p + \|g^{(n)}\|_p\right) \tag{5.3.18}$$

$\forall x \in [a,b]$ için eşitsizlikler geçerlidir (Pachpatte 2006b). Burada $\|.\|_p$, L_p uzayında bir normdur ve ayrıca;

$$B[.] = \frac{1}{n}\left[(.) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k P_k(h)(.)^k(x) + \sum_{k=1}^{n}\overline{(..)_k}\right],$$

$$D(n,p,x)=\frac{1}{n(b-a)}\|P_{n-1}e(.,x)\|_{p'}, \tag{5.3.19}$$

$$e(t,x)=\begin{cases} t-a, & t\in[a,x] \\ t-b, & t\in[x,b] \end{cases}$$

dir (Pachpatte 2005a).

İspat: Hipotezden;

$$B[f(x)]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt=\frac{(-1)^{n-1}}{n(b-a)}\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)f^{(n)}(t)dt \tag{5.3.20}$$

$$B[g(x)]-\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt=\frac{(-1)^{n-1}}{n(b-a)}\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)g^{(n)}(t)dt \tag{5.3.21}$$

özdeşlikleri geçerlidir (Pachpatte 2005a).

$\forall x\in[a,b]$ için (5.3.20) ve (5.3.21) in her iki yanı sırasıyla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpılır ve elde edilen sonuçlar taraf tarafa toplanırsa;

$$g(x)B[f(x)]+f(x)B[g(x)]-\frac{1}{b-a}\left(g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\int_a^b g(t)dt\right)$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n(b-a)}\left[g(x)\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)f^{(n)}(t)dt+f(x)\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)g^{(n)}(t)dt\right] \tag{5.3.22}$$

özdeşliği elde edilir. (5.3.22) den ve mutlak değerin özellikleriyle beraber Hölder integral eşitsizliğinden;

$$\left|g(x)B[f(x)]+f(x)B[g(x)]-\frac{1}{b-a}\left(g(x)\int_a^b f(t)dt+f(x)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\right|$$
$$\le\frac{1}{n(b-a)}\left[|g(x)|\int_a^b\left|P_{n-1}(t)e(t,x)f^{(n)}(t)\right|dt+|f(x)|\int_a^b\left|P_{n-1}(t)e(t,x)g^{(n)}(t)\right|dt\right]$$
$$\le\frac{1}{n(b-a)}\left[|g(x)|\left\{\int_a^b|P_{n-1}(t)e(t,x)|^{p'}dt\right\}^{\frac{1}{p'}}\left\{\int_a^b\left|f^{(n)}(t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\right.$$
$$\left.+|f(x)|\left\{\int_a^b|P_{n-1}(t)e(t,x)|^{p'}dt\right\}^{\frac{1}{p'}}\left\{\int_a^b\left|g^{(n)}(t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\right]$$
$$=\frac{1}{n(b-a)}\|P_{n-1}(t)e(t,x)\|_{p'}\left\{|g(x)|\left\|f^{(n)}\right\|_p+|f(x)|\left\|g^{(n)}\right\|_p\right\}$$

özdeşliği elde edilir. Bu da istenilen (5.3.17) eşitsizliğidir. Şimdi (5.3.20) ve (5.3.21) taraf tarafa çarpılırsa;

$$B[f(x)]B[g(x)]-\frac{1}{b-a}\left(B[g(x)]\int_a^b f(t)dt+B[f(x)]\int_a^b g(t)dt\right)$$
$$+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)$$
$$=\frac{(-1)^{2n-2}}{n^2(b-a)^2}\left\{\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)f^{(n)}(t)dt\right\}\left\{\int_a^b P_{n-1}(t)e(t,x)g^{(n)}(t)dt\right\} \qquad (5.3.23)$$

özdeşliği elde edilir. (5.3.23) ten ve mutlak değerin özellikleriyle birlikte Hölder eşitsizliğinden;

$$\Bigg|B[f(x)]B[g(x)]-\frac{1}{b-a}\left(B[g(x)]\int_a^b f(t)dt+B[f(x)]\int_a^b g(t)dt\right)$$
$$+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)\Bigg|$$
$$\leq\frac{1}{n^2(b-a)^2}\left\{\int_a^b \left|P_{n-1}(t)e(t,x)f^{(n)}(t)\right|dt\right\}\left\{\int_a^b \left|P_{n-1}(t)e(t,x)g^{(n)}(t)\right|dt\right\}$$
$$\leq\frac{1}{n^2(b-a)^2}\left[\left\{\int_a^b |P_{n-1}(t)e(t,x)|^{p'}dt\right\}^{\frac{1}{p'}}\left\{\int_a^b \left|f^{(n)}(t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\right.$$
$$\left.\text{x}\left\{\int_a^b |P_{n-1}(t)e(t,x)|^{p'}dt\right\}^{\frac{1}{p'}}\left\{\int_a^b \left|g^{(n)}(t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\right]=\{D(n,p,x)\}^2\left[\left\|f^{(n)}\right\|_p+\left\|g^{(n)}\right\|_p\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da elde edilmek istenen (5.3.18) eşitsizliğidir ve ispat tamamlanır. ■

Hatırlatma 5.3.2 (5.3.17) de $g(t)=1$ alınırsa, $g^{(n-1)}(t)=0,\ n\geq 2$ olursa:

$$\left|B[f(x)]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\ D(n,p,x)\left\|f^{(n)}\right\|_p$$

şeklinde Ostrowski tipi eşitsizliklerin değişik bir varyasyonu elde edilir (Dedic *et. al.* 2003). ■

5.4 Ayrık Ostrowski Eşitsizlikleri

Bu bölümde Pachpatte (2002, 2005c, 2006a, 2007c) tarafından verilmiş olan ayrık Ostrowski eşitsizliklerine değinilecektir.

Teorem 5.4.1 $\{x_i\}$, $i = 0,1,\dots,n, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere reel sayılarda bir dizi olsun. O halde:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} x_i - n\left(\frac{x_0 + x_n}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}n\sum_{i=0}^{n-1}|(x_{i+1} + x_i)\Delta x_i| \tag{5.4.1}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - n\left(\frac{x_0^2 + x_n^2}{2}\right) \leq n\sum_{i=0}^{n-1}|(x_{i+1} + x_i)\Delta x_i|\right| \tag{5.4.2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Pachpatte 2002). Burada $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ dir.

İspat: Aşağıdaki özdeşliklerin;

$$x_i = x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta x_j \tag{5.4.3}$$

$$x_i = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \Delta x_{j+1} \tag{5.4.4}$$

$$x_i^2 = x_0^2 + \sum_{j=0}^{i-1}(x_{j+1} + x_j)\Delta x_j \tag{5.4.5}$$

$$x_i^2 = x_n^2 - \sum_{j=0}^{i-1}(x_{j+1} + x_j)\Delta x_j \tag{5.4.6}$$

şeklinde olduğu kolayca gösterilebilir (Pachpatte 2002).

(5.4.3) ve (5.4.4) taraf tarafa toplandığında;

$$x_i = \frac{x_0 + x_n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \Delta x_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \Delta x_j \tag{5.4.7}$$

elde edilir. Aynı şekilde (5.4.5) ve (5.4.6) taraf tarafa toplandığında ise;

$$x_i^2 = \frac{x_0^2 + x_n^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(x_{j+1} + x_j)\Delta x_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1} + x_j)\Delta x_j \tag{5.4.8}$$

özdeşliği elde edilir. (5.4.7) ve (5.4.8) in her iki yanı $i = 0$ dan $(n-1)$ e kadar toplanırsa elementer satır işlemlerinden istenilen (5.4.1) ve (5.4.2) eşitsizlikleri elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.4.2 $\{u_i\}$ ve $\{v_i\}$, $i = 1, \dots, n,\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere reel sayılarda birer dizi olsun. O halde:

$$\left|u_i v_i - \frac{1}{2}[v_i U + u_i V]\right| \leq \frac{1}{4}\left[|v_i| \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta u_j| + |u_i| \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta v_j|\right] \tag{5.4.9}$$

$$\left|u_i v_i - \frac{1}{2}[v_i U + u_i V] + UV\right| \leq \frac{1}{4}\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta u_j|\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta v_j|\right)\right] \tag{5.4.10}$$

dir. Burada:

$$U = \frac{u_1 + u_n}{2}, \qquad V = \frac{v_1 + v_n}{2}$$

olarak tanımlanmıştır ve Δ ileri fark operatörüdür (Pachpatte 2005).

İspat: Hipotezden;

$$u_i - U = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{i-1} \Delta u_j - \sum_{j=0}^{n-1} \Delta u_j\right] \tag{5.4.11}$$

$$v_i - V = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{i-1} \Delta v_j - \sum_{j=0}^{n-1} \Delta v_j\right] \tag{5.4.12}$$

özdeşlikleri geçerlidir (Pachpatte 2002).

(5.4.11) ve (5.4.12) nin her iki yanı sırasıyla v_i ve u_i ile çarpılır ve bulunan özdeşlikler yeniden düzenlenirse istenilen (5.4.9) eşitsizliği elde edilir. İkinci eşitsizliğin ispatı için (5.4.11) ve (5.4.12) eşitsizliklerinin sağ ve sol tarafları taraf tarafa çarpılırsa (5.4.10) eşitsizliğinin ispatı kolayca yapılabilir. ■

Teorem 5.4.3 $\{u_k\}$ ve $\{v_k\}$, $k = 1,2,\dots,n$ olmak üzere reel sayılarda bir sonlu dizi olsun. Öyle ki $max_{1\le k\le n-1}\{|\Delta u_k|\} = A$, $max_{1\le k\le n-1}\{|\Delta v_k|\} = B$ dir. Burada A, B negatif olmayan reel sabitlerdir. O halde:

$$\left|u_k v_k - \frac{1}{2n}\left[v_k \sum_{i=1}^{n} u_i + u_k \sum_{i=1}^{n} v_i\right]\right| \le \frac{1}{2}[|v_k|A + |u_k|B]H_n(k) \tag{5.4.13}$$

$$\left|u_k v_k - \frac{1}{n}\left[v_k \sum_{i=1}^{n} u_i + u_k \sum_{i=1}^{n} v_i\right] + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)\right| \le AB\{H_n(k)\}^2 \tag{5.4.14}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Pachpatte 2007c). Burada:

$$H_n(k) = \sum_{i=1}^{n} |D_n(k,i)\Delta u_i| \,, \qquad D_n(k,i) = \begin{cases} \dfrac{i}{n}, & 1 \le i \le k-1 \\ \dfrac{i}{n} - 1, & k \le i \le n \end{cases}$$

dir (Pachpatte 2005).

İspat: Hipotezden;

$$u_k - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n-1} D_n(k,i)\Delta u_i \tag{5.4.15}$$

$$v_k - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n-1} D_n(k,i)\Delta v_i \tag{5.4.16}$$

özdeşlikleri geçerlidir. (5.4.15) ve (5.4.16) nın her iki yanı sırasıyla v_k ve u_k ile çarpılıp, bulunan özdeşlikler yeniden düzenlenirse;

$$u_k v_k - \frac{1}{2n}\left[v_k \sum_{i=1}^{n} u_i + u_k \sum_{i=1}^{n} v_i\right] = \frac{1}{2}\left[v_k \sum_{i=1}^{n-1} D_n(k,i)\Delta u_i + u_k \sum_{i=1}^{n-1} D_n(k,i)\Delta v_i\right] \tag{5.4.17}$$

özdeşliği elde edilir. (5.4.17) den ve mutlak değerin özelliklerinden;

$$\left|u_k v_k - \frac{1}{2n}\left[v_k \sum_{i=1}^{n} u_i + u_k \sum_{i=1}^{n} v_i\right]\right| \le \frac{1}{2}\left[|v_k| \sum_{i=1}^{n-1} |D_n(k,i)||\Delta u_i| \Big| |u_k| \sum_{i=1}^{n-1} |D_n(k,i)||\Delta v_i|\right]$$

elde edilir. Teoremin ifadesinde $max_{1\le k\le n-1}\{|\Delta u_k|\} = A$, $max_{1\le k\le n-1}\{|\Delta v_k|\} = B$ olarak verilmişti. Bu ifadeler son yazılan eşitsizlikte yerine konulursa istenilen (5.4.13) eşitsizliği elde edilir. Şimdi (5.4.15) ve (5.4.16) taraf tarafa çarpılırsa;

$$u_k v_k - \frac{1}{n}\left[v_k \sum_{i=1}^{n} u_i + u_k \sum_{i=1}^{n} v_i\right] + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n-1} D_n(k,i)\Delta u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} D_n(k,i)\Delta v_i\right) \quad (5.4.18)$$

özdeşliği meydana gelir. (5.4.18) den ve mutlak değerin özelliklerinden istenilen (5.4.14) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Hatırlatma 5.4.1 (5.4.13) te $v_k = 1$ alınırsa buradan $\Delta v_k = 0$ olur. $k = 1,2,\ldots,n$ için basit bir hesaplamadan;

$$\frac{1}{2}\left[\max_{1\le n\le k-1}\{|\Delta u_k|\}\right] H_n(k) \quad (5.4.19)$$

elde edilir. Ayrıca;

$$H_n(k) = \sum_{i=1}^{n-1} |D_n(k,i)| = \frac{1}{n}\left[\frac{n^2-1}{4} + \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2\right]$$

dir (Dragomir 2002).

Teorem 5.4.4 $N_{a,b} = \{a, a+1, \ldots, a+n = b\}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ olsun. $f(t), g(t), h(t)$, $N_{a,b}$ üzerinde reel değerli fonksiyonlar ve $t \notin N_{a,b}$ ve $|\Delta f(t) \le M_1|, |\Delta g(t) \le M_2|$ aynı şekilde $|\Delta h(t) \le M_3|$ iken sıfırdırlar. Burada $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{R}^+$ dır. O halde:

$$\left|f(t)g(t)h(t) - \frac{1}{3(b-a)}\left[g(t)h(t)\sum_{s=a}^{b-1} f(s) + h(t)f(t)\sum_{s=a}^{b-1} g(s) + f(t)g(t)\sum_{s=a}^{b-1} h(s)\right]\right|$$
$$\le \frac{1}{3}[|g(t)||h(t)|M_1 + |h(t)||f(t)|M_2 + |f(t)||g(t)|M_3]B(t)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada:

$$B(t) = \left[\frac{1}{2} + \left|t - \frac{a+b}{2}\right|\right] \quad (5.4.20)$$

dir (Pachpatte 2005).

İspat: $\exists t, s \in N_{a,b}$ için;

$$f(t) - f(s) = \sum_{m=s}^{t-1} \Delta f(m) \quad (5.4.21)$$

$$g(t) - g(s) = \sum_{m=s}^{t-1} \Delta g(m) \quad (5.4.22)$$

$$h(t) - h(s) = \sum_{m=s}^{t-1} \Delta h(m) \quad (5.4.23)$$

özdeşlikleri kolayca elde edilebilir (Pachpatte 2005).

(5.4.21), (5.4.22) ve (5.4.23) ün her iki yanı sırasıyla $g(t)h(t)$, $h(t)f(t)$ ve $f(t)g(t)$ ile çarpılır ve bulunan özdeşlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$3f(t)g(t)h(t) - [g(t)h(t)f(s) + f(t)h(t)g(s) + f(t)g(t)h(s)]$$
$$= g(t)h(t)\sum_{m=s}^{t-1}\Delta f(m) + f(t)h(t)\sum_{m=s}^{t-1}\Delta g(m) + f(t)g(t)\sum_{m=s}^{t-1}\Delta h(m) \qquad (5.4.24)$$

elde edilir. (5.4.24) ün her iki yanı $s = a$ dan $b - 1$ e kadar toplam sembolü altına alınır ve yeniden düzenlenir ve mutlak değere alınırsa istenilen (5.4.20) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

6. KAYNAKLAR

Barnett, N. S., Dragomir, S.S. and Sofo, A. (2000). Better bounds for an inequality of Ostrowski type with applications. RGMIA Research Report Collection, **3:**(1), 113–122.

Beesack, P.R. (1983). On inequalities complementary to Jensen's, Canada Journal of Mathematics, **35:**324–338.

Beesack, P.R. and Pecaric, J.E. (1985). On Jessen's inequality for convex functions, Journal Mathematics Analysis and Application, **110:**536–552.

Beesack, P.R. and Pecaric, J.E. (1986). On Jessen's inequality for convex functions, II. Journal Mathematics Analysis Application, **118:**125–144.

Bennett, G. (1988). Some elementary inequalities. Quartely Journal of Mathematics Qxford, **39:**385–400.

Boas, R.P. Jr. (1970). The Jensen–Steffensen inequality. University Beograd Publications Elektrotehnic Fakulty Serial Mathematics Fizik, Nos 302–319, 1–8.

Bullen, P.S. (1978). Error estimates for some elementary quadrature rules. University Beograd Publications Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. Nos 602–633, 97–103.

Cebysev, P.L. (1882). Sur les expressions approximatives des integrales definies par les aures prises entre les memes limites. Proceedings Mathematical Society Charkov, **2:**93–98.

Cerone, P., Dragomir, S.S. and Roumelotis, J. (1999). An inequality of Ostrowski-Grüss type for twice differentiable mappings and applications in numerical integration. Kyungpook Mathematics Journal, **39:**333–341.

Cerone, P. Dragomir S.S. and Roumelotis J. (1999). Some Ostrowski-type inequalities for *n*-time differentiable mappings and applications. Demonstratio Mathematics, **32 (4):**697–712.

Ciesielski, Z. (1958). A note on some inequalities of Jensen's type. Annales Polonici Mathematici, **4:**269–274.

Dedic, Lj, Pecaric, J. and Ujevic, N. (2003). On generalizations of Ostrowski inequality and some related results. Czechoslovak Mathematical Journal, **53 (128):**173–189.

Dragomir, S.S. (1990). Two refinements of Hadamard's inequalities. College Science Paper Faculty Science Kragujevac, **11:**23–26.

Dragomir, S.S. and Ionescu N.M. (1990), On some inequalities for convexdominated functions, Analysis Numerical Theory Approximately, **19:** 21–27.

Dragomir, S.S., Pecaric, J.E. and Sándor, J. (1990). A note on the Jensen–Hadamard inequalities. Analysis Numerical Theory Approximately, **19:**29–34.

Dragomir, S.S. (1992a). Some integral inequalities for differentiable convex functions. Contribute Secondary Mathematical Technology Science, **13:** 13–17.

Dragomir, S.S. (1992b). Two mappings in connection to Hadamard's inequalities. Journal Mathematical Analysis and Application, **167:**49–56.

Dragomir, S.S. and Ionescu, N.M. (1992). Some remarks on convex functions. Analysis Numerical Theory Approximately, **21:**31–36.

Dragomir, S.S. and Miloševic, D.M. (1992). A sequence of mappings connected with Jensen's inequality and applications. Mathematics Vesnik, **44:**113–121.

Dragomir, S.S. (1993), Refinements of Hadamard's inequality for isotonic linear functionals. Tamkang Journal of Mathematics, **24:**101–106.

Dragomir, S.S., Pecaric, J.E. and Persson, L, (1994). Some inequalities of Hadamard type, Research Report No. **13:**Departments Applications Mathematics. Lulea University of Technology.

Dragomir, S.S. and Wang, S. (1997),. An inequality of Ostrowski-Grüss type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules. Computers Mathematical Applications, **33 (11):**15–20.

Dragomir, S.S. and Barnett, N.S. (1998). An Ostrowski type inequality for mappings whose second derivatives are bounded and applications. RGMIA Research Report Collection, **1 (2):**69–77.

Dragomir, S.S. and Wang, S. (1998). A new inequality of Ostrowski's type in *Lp* norm. Indian Journal of Mathematics, **40 (3):**299–304.

Dragomir, S.S. (1999). On the Ostrowski integral inequality for Lipschitzian mappings and applications. Computers and Mathematical Applications, 38 **(11-12):**33–37.

Dragomir, S.S., Cho, Y.J. and Kim, S.S. (2000). Inequalities of Hadamard's type for Lipschitzian mappings and their applicaitions. Journal Mathematics Analysis and Applications, **245:**489–501.

Dragomir, S.S. (2002). The discrete version of Ostrowski's inequality in normed linear spaces. Jensen's Inequality Pure and Application Mathematics, **3 (1):**Art. 2.

Fuchs, L. (1947). A new proof of an inequality of Hardy–Littlewood–Pólya. Mathematicki Tidsskrate, **13:**53–54.

Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pecaric, J.E. (1997). Hadamard's inequalities for r-convex functions. Journal Mathematics Analysis and Applications, **215:**461–470.

Gruss, G. (1935). Uber das Maximum des absoluten Betrages von

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx,$$

Mathematics Z, **39:**215–226.

Godunova, E.K. and Levin, V.I. (1985). Neravenstva dlja funkcii shirokogo klassa soderzhashchego vypuklye, monotonnye nekotorye drugie vidy funkcii. Vychisly Math Fiziki, Mežvuzov Sub Nauc Trudov, MGPL, Moscow, pp. 138–142.

Hadamard, J. (1893), Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Journal of Mathematics Pures Applications. **9:**171–215

Hammer, P.C. (1957/1958). The mid-point method of numerical integration. Mathematics Magician, **31:**193–195.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Pólya, G. (1934). Inequalities, Cambridge University Press.

Hildebrant, T.H. (1963). A mean Stieltjies type integrals. Dean Blackburn Priest, Volume **44:**No. 1, 291–297

Hölder, O. (1889). Über einen Mittelwerthssatz. Nachricten von der Gesselschaft der Wissenschaften zu Göttingen, pp. 38–47.

Jensen, J.L.W.V. (1905). Om konvexe Funktioner og Uligheder Mellem Middelværdier. Nyt Tidsskrate Mathematics, **16B:**49–69.

Jensen, J.L.W.V. (1906). Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Mathematica, **30:**175–193.

Jessen, B. (1931). Bemærkninger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelærdier, I. Mathematics Tidsskrate, **B:**17–28.

Lieb, E. and Thirring, W. (1976). Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities. Studies in Mathematical Physics (Lieb E., Stmon S. and Wightman A., Eds), Princeton University Press, Princeton, NJ, pp. 269–303.

Lupaş, A. (1976). A generalization of Hadamard's inequality for convex functions. University Beograd Publications Elektrotehnical Fakulty Series Mathematics Fizik Nos 544–576, 115–121.

Maligranda, L., Pecaric, J.E. and Persson, L.E. (1994). On some inequalities of the Grüss–Barnes and Borell type. Journal Mathematical Analysis and Applications, **187:**306–323.

Matic, M., Pecaric, J.E. and Ujevic, N. (2000). Improvement and further generalization of inequalities of Ostrowski-Grüss type. Computers Mathematical Applications **39:**161–175.

McShane, E.J. (1937). Jensen's inequality. Bulletin American Mathematic Society, **43:**521–527.

Milovanovic, G.V. and Pecaric, J.E. (1976), On generalization of the inequality of Ostrowski, A., and some related applications. University Beograd Publications Elektric Fakulty Series Mathematic Fizik, No 544-No **576:**155–158.

Mitrinovi´c, D.S. (1970). Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin–New York.

Mitrinovic, D.S. and Lackovic, I.B. (1985). Hermite and convexity, Aequationes Mathematics, **28:**225–232.

Mitrinovic, D.S., Pecaric, J.E. and Fink, A.M. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Mulholland, H.P. (1932). The generalization of certain inequality theorems involving Powers. Proceedings of London Mathematic Society, **33:**481–516.

Mond, B. and Pecaric, J.E. (1993). Remarks on Jensen’s inequality for operatör convex functions. Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodwska Sectio, **A XLVII:**96–103.

Mond, B. and Pecaric, J.E. (1994). Inequalities for semi-convex matrix functions. Journal Mathematics Analysis and Applications **185:**367–377.

Pachpatte, B.G. (2000). On some integral inequalities involving convex functions. RGMIA Research Report Collection, **3(3):**487–492.

Pachpatte, B.G. (2002). A note on Ostrowski type inequalities. Demonstratio Mathematics, **35:**27-30.

Pachpatte, B.G. (2003a). On some inequalities for convex functions. RGMIA Research Report Collection, **6(3):**1–9.

Pachpatte, B.G. (2003b). New integral inequalities for differentiable functions. Tamkang Journal of Mathematics, **34 (3):**249–253.

Pachpatte, B.G. (2004a). New inequalities of Ostrowski type for twice differentiable mappings. Tamkang Journal of Mathematics, **35 (3):**219–226.

Pachpatte, B.G. (2004b). On a new generalization of Ostrowski's inequality. Jensen's Inequality Pure and Applied Mathematics, **5 (2):**Art. 36.

Pachpatte, B.G. (2005a). 57 Shri Niketan Colony Near Abhinay Talkies Aurangabad 431 001 Maharashtra India, Volume **67:**pp. 12.

Pachpatte, B.G. (2005b). A note on Ostrowski like inequalities. Jensen's Inequality Pure and Applied Mathematic, **6 (4):**Art. 114.

Pachpatte, B.G. (2005c). New Ostrowski and Grüss type inequalities. Analale Stiintifice University Alexandroau Ioan Cuza Iasi Math. **LI:**377–386.

Pachpatte, B.G. (2006). New Ostrowski type inequalities involving the product of two functions. Jensen's Inequality Pure and Applied Mathematic, **7 (3):**Art. 104.

Pachpatte, B.G. (2006a). A note on integral inequalities involving product of two functions. Jensen's Inequality Pure and Applied Mathematic, **7 (2):**Art. 78.

Pachpatte, B.G. (2007a). On a new generalization of Ostrowski type inequality. Tamkang Journal of Mathematics, **38 (4):**335–339.

Pachpatte, B.G. (2007b). New inequalities of Ostrowski-Grüss type. Face Mathematic No. **38:**97–104.

Pachpatte, B.G. (2007c). New discrete Ostrowski-Grüss like inequalities. Facta University (Nis) Serial Mathematic Information, **22 (1):**15–20.

Pecaric, J.E. (1981). Inverse of Jensen–Steffensen's inequality. Glasnik Matematicki, **16:**229–233.

Pecaric, J.E. (1982). A short proof of a variant of Jensen's inequality. Journal Mathematics Analysis Applications, **87:**278–280.

Pecaric, J.E. (1984). On some inequalities for functions with nondecreasing increments. Journal Mathematics Analysis and Applications, **98:**188–197.

Pecaric J.E. and Dragomir, S.S. (1991). A generalization of Hadamard's inequality for isotonic linear functionals. Radovi Mathematicki,**7:**103–107.

Pecaric, J.E. (1992). Notes on convex functions, General Inequalities. International Series Numerical Mathematics, Volume **6:**pp. 449–454.

Pecaric, J.E., Proschan, F. and Tong, Y.L. (1992). Convex Functions, Partial Ordering, and Statistical Applications. Academic Press, San Diego, CA.

Pecaric, J.E. (1993). On Jensen inequality for *C–J* -convex functions. Commentraii Mathematicki, **33:**111–118.

Pecaric, J.E. (1994). Remarks on an inequality of Sabler, S., Journal Mathematics Analysis and Applications, **184:**19–21.

Popoviciu, T. (1944). Les fonctions convexes. Actualités Science Industrute. No. **992:**Paris.

Popoviciu, T. (1964). La simplicité du rest dans certaines formules de quadrature. Mathematica (Cluj), **6:**157–184.

Roberts, A.W. and Varberg, D.E. (1973). Convex Functions. Academic Press, New York and London.

Steffensen, J.F. (1919). On certain inequalities and method of approximation. Journal Institute Actuaries, **51:**274–297.

Stolz, O. (1893). Grundzüge der Differential und Integralrechnung, Volume **1:**Leipzig, pp. 35–36.

Ujevic, N. (2004). Sharp inequalities of Simpson type and Ostrowski type. Computers and Mathematical Applications, **48:**145–151.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yusuf ERDEM
Doğum Yeri ve Tarihi : Eskişehir 1991
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta) : 05412207935/mateyus26@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Eskişehir Yunus Emre Lisesi, (2006-2009)
Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik, (2011-2014)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : A101 Afyon Bölge Depo (2014-2016)
Ayza Fen Lisesi (Devam ediyor)