BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

DOKTORA TEZİ

Nurten KILIÇ
Danışman
Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
İkinci Danışman
Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Kasım 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

Nurten KILIÇ

Danışman
Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

İkinci Danışman
Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Kasım 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Nurten KILIÇ tarafından hazırlanan "Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 19/11/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

İkinci Danışman : Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

		İmza
Başkan	: Prof. Dr. Dursun ESER Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi	
Üye	: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi	
Üye	: Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi	
Üye	: Doç. Dr. Başak KARPUZ Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi	
Üye	: Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi	

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. İbrahim EROL

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

19/11/2018

Nurten KILIÇ

ÖZET

Doktora Tezi

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

Nurten KILIÇ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

İkinci Danışman: Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan ve şimdiye dek yapılan bazı çalışmalardan söz edilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümler ise orijinal sonuçlara adanmıştır. Üçüncü bölümün ilk kısmında,

$$u'(t) + p(t)f\left(u(\sigma(t))\right) = 0$$

şeklinde ifade edilen birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemin çözümleri için yeni salınımlılık şartları elde edilmiştir. Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise,

$$u'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t)f_i\left(u(\sigma_i(t))\right) = 0$$

şeklinde birinci mertebeden lineer olmayan birkaç gecikme terimli diferensiyel denklemin çözümleri için elde edilen yeni salınımlılık koşullarına yer verilmiştir. Dördüncü bölümün ilk kısmında,

$$u'(t) - p(t)f\left(u(\sigma(t))\right) = 0$$

şeklinde ifade edilen birinci mertebeden lineer olmayan ileri diferensiyel denklemin çözümleri için yeni salınımlılık kriterleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümün ikinci kısmında ise,

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i\Big(u\big(\sigma_i(t)\big)\Big) = 0$$

şeklinde verilen birinci mertebeden lineer olmayan birkaç ileri terimli diferensiyel denklemin çözümleri için elde edilen yeni salınımlılık kriterlerine yer verilmiştir. Beşinci bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

2018, vii + 68 sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel denklem, Gecikmeli diferensiyel denklem, İleri diferensiyel denklem, Monoton gecikme, Monoton olmayan gecikme, Salınımlı çözüm, Salınımsız çözüm.

ABSTRACT
Ph.D. Thesis

OSCILLATION OF FIRST ORDER NONLINEAR
DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Nurten KILIÇ
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Umut Mutlu ÖZKAN
Co-Supervisor: Prof. Özkan ÖCALAN

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, we mention some basic notions and studies so far. Third and fourth chapters are devoted to our original results. In the third chapter, new oscillation conditions for the solutions of first order nonlinear delay differential equation given by

$$u'(t) + p(t)f\Big(u\big(\sigma(t)\big)\Big) = 0$$

are obtained. Also, new oscillation conditions for the solutions of first order nonlinear delay differential equation with several nonmonotone arguments given by

$$u'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t)f_i\Big(u\big(\sigma_i(t)\big)\Big) = 0$$

are offered. In the fourth chapter, new oscillation criteria for the solutions of first order nonlinear advanced differential equation given by

$$u'(t) - p(t)f\Big(u\big(\sigma(t)\big)\Big) = 0$$

are obtained. Then, new oscillation criteria for the solutions of first order nonlinear advanced differential equation with several nonmonotone arguments given by

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t)f_i\Big(u\big(\sigma_i(t)\big)\Big) = 0$$

are presented. In the fifth chapter, discussions and conclusions are given.

2018, vii + 68 page

Keywords: Differential equation. Delay differential equation, Advanced differential equation, Monotone argument, Nonmonotone argument, Oscillatory solution, Nonoscillatory solution.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim süresince çalışma prensibiyle bana örnek olan, engin bilgilerinden yararlandığım, her daim beni destekleyen, karşılaştığım her sorunda benim yanımda olup beni sabırla dinleyen, iyi bir akademisyen olmanın yanında iyi bir insan olmayı öğreten kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Özkan ÖCALAN'a, tez çalışmam boyunca yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN'a, Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK'e ve Doç. Dr. Başak KARPUZ'a, hayatım boyunca her konuda beni destekleyen annem Ayten KILIÇ, babam Ahmet KILIÇ ve kardeşim Eyüp KILIÇ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, bu tez çalışması boyunca desteklerinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Nurten KILIÇ
AFYONKARAHİSAR, 2018

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel sayılar
$\mathbb{R}^-$	Negatif Reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar
$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\mathbb{R}_+$	$[0, \infty)$
σ	Monoton olmayan gecikme
δ	Monoton gecikme
Π	Çarpım sembolü
Σ	Toplam sembolü
C	Sürekli fonksiyonların kümesi

1 GİRİŞ

Diferensiyel denklemler gerçek hayatta karşılaştığımız birçok heyecan verici problem için matematiksel model olarak rol oynamasının yanı sıra, sadece bilim ve teknoloji alanında değil, ekonomi, fizyoloji, savunma ve nüfus bilimi gibi bir çok alanda da karşımıza çıkmaktadır. Mühendislik ve matematik biliminin ortak konusu olması diferensiyel denklem gelişimini hızlandırmıştır. Yeni problemler ve yeni denklemlerin üretilmesine neden olmuştur.

Bilindiği üzere uygulamalı bilim dallarının birçoğunda ele alınan problemlerin matematiksel modellemesine bir diferensiyel denklem karşılık gelmektedir. Matematiksel modellemeler yapılırken gecikmeler ortaya çıkabilir. Ortaya çıkan bu gecikmeler göz önünde bulundurulursa, bu modellemeler adi diferensiyel denklemlerden farklı bir yapı sergilerler. Bu durumda gecikmeli ve ileri şeklinde gruplandırılan diferensiyel denklemler karşımıza çıkar.

Bir gecikmeli diferensiyel denklem, $\sigma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon, $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$ ve $\sigma(t) < t$ koşulları sağlanmak üzere

$$u'(t) = f(t, u(t), u(\sigma(t))) \tag{1.1}$$

şeklindedir. Yani bu tür denklemler, bilinmeyen bir fonksiyon ve onun en yüksek mertebeden türevi hariç diğer türevlerinin ya da daha çok gecikme değişkenlerine bağlı kalınarak ifade edilen diferensiyel denklemlerdir. Görüldüğü üzere $u'(t)$ nin değişim oranı sadece $u(t)$ değerine değil, aynı zamanda $u(\sigma(t))$ değerine de bağlıdır.

$$u'(t) + u(t-3) + u(t+\frac{1}{3}) = 0,$$

$$u'(t) + u(t+2) - 5 = 0,$$

$$u''(t) + 3u'(t) + u(t-\frac{3}{2}) = 1,$$

$$u''(t) - 4u'(t - \sin^2 t) - u(\frac{t}{2}) + t = 1$$

şeklindeki denklemler gecikmeli diferensiyel denklemlerdir.

Gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalar literatüre ilk olarak 1770 yılından sonra girmiştir. Ancak gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili yapılan sistematik ve kayda değer çalışmalar son 70 yılda ortaya çıkmıştır. Gecikmeli diferensiyel denklemler, fizik, biyoloji, ekonomi ve fizyoloji (işlev bilim) gibi bilim dallarında kullanım alanına sahiptirler. Ancak literatür tarandığında bu kullanım alanlarının çok daha geniş alana yayıldığını görmek mümkündür. Şimdi gecikmeli diferensiyel denklemlerin kullanıldığı fiziksel ve biyolojik sistemler üzerine örnekler vererek neden gecikmeli diferensiyel denklem teorisine ihtiyaç duyulduğunu açıklayalım.

Gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalara bakıldığında karşımıza çıkacak ilk problem, Driver'ın tuzlu su problemidir. Bir kabın içinde A litre tuzlu su bulunduğunu varsayalım. Bu kabın içine dakikada a litre saf su ilave edildiğini düşünelim. Karışım sürekli karıştırılıp, kabın altında bulunan bir musluktan yine dakikada a litre karışım dışarı aksın. $u(t)$, t anında karışımdaki tuz miktarını kilogram cinsinden göstersin. Karıştırma işleminin sürekli ve tank içinde homojen bir şekilde gerçekleştiğini kabul edersek, kap içinde 1 litre için $\frac{u(t)}{A}$(kg) oranında tuz bulunur. Dakikada a litre karışım kap içinden boşaldığına göre, belirli bir t anında kap içindeki tuz miktarının değişimi

$$u'(t) = -a\frac{u(t)}{A}$$

diferensiyel denklemi ile modellenebilir. Ancak Driver'ın belirttiği üzere, gerçekte karıştırma işlemi yapılırken kap içinde her yerde tuz oranı sabit olmayacağından homojen bir dağılım elde etmek asla mümkün olmayacaktır. Bu durumda t anında kap içinden boşalan tuz oranı da daha önceki bir andaki σ oranına bağlı olacaktır. Bu durumlar göz önüne alınarak sistem yeniden modellenirse,

$$u'(t) = -a\frac{u(t-\sigma)}{A}$$

gecikmeli diferensiyel denklemi elde edilir (Bildik 2012).

Gecikmeli diferensiyel denklemler tıp bilimi için de büyük ölçüde önem taşımaktadır. Amerikan Kanser Topluluğun araştırmalarına göre sadece Amerika'da her yıl bir milyonun üzerinde insana kanser teşhisi konulmakta ve 500.000'in üzerinde insan kanser yüzünden hayatını kaybetmektedir. Bu nedenle tüm dünyada bilim adamlarının kanser hücrelerinin çoğalması ile ilgili modelleme yapmaları çok olağandır. Bu konuda Villasana ve Radunskaya (2003) tarafından yapılan bir çalışma, kanser hücrelerinin çoğalması ve bağışıklık sistemi hücreleri ile bazı özel ilaçların kanser hücrelerinin çoğalması üzerindeki etkilerini inceleyen matematiksel bir modelleme vermektedir. Bu çalışmayı, diğer çalışmalardan ayıran en önemli nokta ise modelleme yapılırken gecikmeli diferensiyel denklem kullanılmasıdır.

Geri beslemeli kontrol sistemlerinin neredeyse tamamında gecikme mevcuttur. Bu nedenle kontrol sistemlerinin tasarımında gecikmeli diferensiyel denklem kullanılmaktadır. Gecikmeli diferensiyel denklem kullanılarak bir kontrol sisteminin modellenmesine ilk örneklerden biri de, Minorsky'nin II. Dünya Savaşı sırasında gemilerin dalgalardan dolayı sağa sola yalpalamasını engellemek için yapmış olduğu çalışmadır (Bildik 2012).

Gecikmeli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin bulunabilmesi için çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Belirli bir başlangıç fonksiyonu kabul edilerek çözümü aralıklar içerisinde bulduran adımlar yöntemi, sabit gecikmeli ve değişken gecikmeli durumlar için Euler yöntemi, tek adım yöntemi gibi yöntemler mevcuttur. Diğer taraftan gecikmeli diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini çok basit haller ve istisnai denilebilecek durumlar dışında hesaplamak mümkün değildir. Ancak gecikmeli diferensiyel denklemleri analitik olarak çözemesek bile denklemlerin davranışını görmeye ve buna göre denklemlerin çözümlerinin niteliğini belirlemeye ihtiyaç duyarız.

Gecikmeli diferensiyel denklemler teorisi son yıllarda hızlı bir gelişme yaşamaktadır ve lineer gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili literatürde çok sayıda çalışma mevcuttur. Ancak lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalar, lineer denklemlere oranla daha az sayıdadır. Özellikle bu tür denklemlerin salınımlılığı ile ilgili çok az sayıda çalışma yapılmıştır.

Salınımlılık teorisi ise geniş anlamda teknoloji, doğa ve sosyal bilimlerdeki uygulamalı problemlerden kaynaklanan salınımsal olayları inceleyen modern diferensiyel denklemler teorisinin önemli ve köklü bir dalıdır. Ayrıca salınım teorisinin kuramsal yönleri, belirli bir denkleme veya sisteme salınan (periyodik, hemen hemen periyodik vb.) çözümlerinin varlığını, yokluğunu ve bu tür çözümlerin asimptotik davranışlarını tanımlamaktadır. Diğer taraftan salınım teorisi, matematiksel biyolojide yer alan bazı denklemlerin çözümü için de büyük ölçüde önem arz etmektedir. Bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılık karakterizasyonları ile ilgili de birçok sonuca yer vermektedir. Şimdi

$$u'(t) + p(t)u(\sigma(t)) = 0 \tag{1.2}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (1.2) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması ile ilgili ilk sistematik çalışma Myshkis (1950) tarafından yapılmıştır. Eğer

$$\limsup_{t\to\infty} [t - \sigma(t)] < \infty \ \text{ ve } \liminf_{t\to\infty} [t - \sigma(t)] \liminf_{t\to\infty} p(t) > \frac{1}{e}$$

ise (1.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Koplatazde ve Chanturija (1982), (1.2) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için aşağıda verilen sonucu elde etmişlerdir. $\sigma(t)$ monoton olmayan yada azalmayan olmak üzere,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}.$$

Diğer taraftan eğer

$$\int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds \leq \frac{1}{e}$$

ise (1.2) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Gyóri ve Ladas (1991),

$$u'(t) + pu(t - \sigma) = 0 \tag{1.3}$$

denklemi için $p, \sigma \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

(i) (1.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlı,

(ii) $p\sigma > \frac{1}{e}$

ifadelerinin birbirine denk olduğunu söylemiştir.

Yukarıda verilen bilgiler ışığında, bu doktora tez çalışmasında birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli ve ileri diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık davranışları incelenmiş ve denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için yeni salınımlılık kriterleri elde edilmiştir. Elde edilen salınımlılık koşullarında, diğer koşullardan farklı olarak gecikme terimlerinin monoton olma zorunluluğu ortadan kaldırılmış ve böylece sonuçlar daha işlevsel hale getirilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak, birinci mertebeden gecikmeli ve ileri diferensiyel denklemler ile ilgili genel bir literatür bilgisine yer verilmiştir.

Daha sonra, $p(t) \geq 0$, $\sigma(t) \leq t$ ve $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ olmak üzere,

$$u'(t) + p(t)f(u(\sigma(t))) = 0$$

şeklinde birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemin çözümleri için yeni salınımlılık şartları elde edilmiştir.

Bu çalışmaya ek olarak, $1 \leq i \leq m$ için $p_i(t) \geq 0$, $\sigma_i(t) \leq t$ ve $u \neq 0$ için $uf_i(u) > 0$ olmak üzere,

$$u'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t)f_i(u(\sigma_i(t))) = 0$$

şeklinde birinci mertebeden lineer olmayan birkaç gecikme terimli diferensiyel denklemin çözümleri için yeni salınımlılık şartları elde edilmiştir.

Tez çalışmasının diğer bir bölümünde ise, $p(t) \geq 0$, $\sigma(t) \geq t$ ve $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ olmak üzere,

$$u'(t) - p(t)f(u(\sigma(t))) = 0$$

şeklinde birinci mertebeden lineer olmayan ileri diferensiyel denklemin çözümleri için elde edilen yeni salınımlılık kriterlerine yer verilmiştir.

Tüm bu çalışmalara ek olarak, $1 \leq i \leq m$ için $p_i(t) \geq 0$, $\sigma_i(t) \geq t$ ve $u \neq 0$ için $uf_i(u) > 0$ olmak üzere

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t)f_i(u(\sigma_i(t))) = 0$$

şeklinde birinci mertebeden lineer olmayan birkaç ileri terimli diferensiyel denklemin çözümleri için de yeni salınımlılık koşulları elde edilmiştir.

Son olarak tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir.

2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde sabit ve değişken katsayılı gecikmeli ve ileri diferensiyel denklemler ile ilgili salınımlılık teorisinde yer alan bazı temel tanım, teorem ve sonuçlara yer verilmiştir.

2.1 Gecikmeli Diferensiyel Denklemler

Birinci mertebeden bir lineer gecikmeli diferensiyel denklem $1 \leq i \leq m$, $\sigma_i(t) \leq t$ ve $p_i \in C\left[[t_0, \infty), \mathbb{R}\right]$ olmak üzere,

$$u'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t)u(\sigma_i(t)) = 0 \tag{2.1}$$

denklemi ile verilir.

$m = 1$ için (2.1) denklemi

$$u'(t) + p(t)u(\sigma(t)) = 0 \tag{2.2}$$

şeklini alır.

Birinci mertebeden bir lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklem ise $1 \leq i \leq m$, $\sigma_i(t) \leq t$ ve $p_i \in C\left[[t_0, \infty), \mathbb{R}\right]$ olmak üzere,

$$u'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t)f_i(u(\sigma_i(t))) = 0 \tag{2.3}$$

denklemi ile verilir.

$m = 1$ için (2.3) denklemi

$$u'(t) + p(t)f(u(\sigma(t))) = 0 \tag{2.4}$$

şeklini alır.

Tanım 2.1.1 $1 \leq i \leq m$ için $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$, $\sigma_i(t) = t - \sigma_i$ ve $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$ olmak üzere $t \geq t_1$ için u, $[t_1, \infty)$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir ve u, (2.1) denklemini sağlıyorsa $u \in C\left[[t_1 - \sigma, \infty), \mathbb{R}\right]$ fonksiyonu (2.1) denkleminin bir çözümüdür ve bu çözüm $[t_1, \infty)$ üzerinde bir çözüm olarak adlandırılır.

t_1 bir başlangıç noktası olmak üzere, $\phi \in C\left[\left[t_1-\sigma, t_1\right), \mathbb{R}\right]$ başlangıç fonksiyonu verilmiş olsun. Böylece (2.1) denklemi $t_1-\sigma \leq t \leq t_1$ için

$$u(t)=\phi(t) \tag{2.5}$$

olacak şekilde $[t_1, \infty)$ aralığında birtek u çözümüne sahiptir.

Tanım 2.1.2 Bir diferensiyel denklemin aşikar olmayan bir çözümü u olsun. Eğer u çözümü keyfi sayıda sıfıra sahipse, yani; $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} t_n=\infty$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisi vardır öyle ki $u(t_n)=0$ ise u çözümüne salınımlıdır denir. Aksi taktirde salınımlı değildir denir. Salınımlı olmayan bir çözüm, ergeç pozitif yada ergeç negatiftir. Yani, $\forall t>t_1$ için $u(t) \neq 0$ olacak biçimde bir t_1 vardır. Eğer denklemin her çözümü salınımlı ise denklemin tüm çözümleri salınımlıdır, salınımlı olmayan en az bir çözümü varsa denklemin çözümleri salınımlı değildir denir (Ladde *et al.* 1987).

Tanım 2.1.3 Aşikar olmayan bir u çözümü T herhangi bir sayı olmak üzere (T, ∞) aralığında işaret değiştiriyorsa u çözümüne salınımlıdır denir (Ladde *et al.* 1987).

$$u''(t)-u(-t)=0$$

diferensiyel denkleminin $u_1(t)=\sin t$ salınımlı çözümü, $u_2(t)=e^t+e^{-t}$ ise salınımlı olmayan bir çözümüdür.

Bazı salınımlılık durumları gecikmelerle oluşur. Örnek vermek gerekirse,

$$u'(t)+u(t)=0$$

ve

$$u''(t)-u(t)=0$$

diferensiyel denklemlerin çözümleri salınımlı olmamasına rağmen,

$$u'(t)+u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

ve

$$u''(t)-u(t-\pi)=0$$

gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümleri sırasıyla $u = \sin t$ ve $u = \cos t$ olduğundan salınımlıdır (Ladde *et al.* 1987).

Eğer bir u çözümü salınımlı değilse, u ergeç pozitif veya ergeç negatif olmak zorundadır. Yani, $t \geq T$ için $u(t)$ pozitif olacak şekilde $T \in \mathbb{R}$ vardır yada $t \geq T$ için $u(t)$ negatif olacak şekilde $T \in \mathbb{R}$ vardır.

Eğer bir gecikmeli diferensiyel denklemin salınımlı olmayan pozitif bir $u(t)$ çözümü mevcut ise, buna karşılık negatif bir $-u(t)$ çözümü de mevcuttur. Bu yüzden bir gecikmeli diferensiyel denklem salınımlı olmayan bir çözüme sahipse bu çözüm pozitif (negatif) bir çözümdür. Ayrıca, (2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır denildiğinde, her $t_1 \geq t_0$ başlangıç noktası ve her $\phi \in C\left[\left[t_1 - \sigma, t_1\right), \mathbb{R}\right]$ başlangıç fonksiyonu için, (2.1) ve (2.5) başlangıç değer probleminin tek çözümü olan u salınımlıdır anlamına gelmektedir. Yani u sonsuz çoklukta sıfıra sahiptir. Diğer taraftan (2.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözüme sahip olduğunu ispatlamak istediğimizde ise, (2.1) denkleminin pozitif (negatif) bir u çözümüne sahip olduğunu ispatlamamız yeterlidir.

Şimdi ilk olarak, monoton gecikme terimine sahip gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümleri için verilen salınımlılık koşullarını inceleyelim.

Aşağıda Gyori ve Ladas'ın (1991), gecikmeli diferensiyel denklemlerin bazı formları için elde etmiş oldukları salınımlılık koşullarına yer verilmiştir.

Teorem 2.1.1 $p, \sigma \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$u'(t) + pu(t - \sigma) = 0 \tag{2.6}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Böylece aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) (2.6) denkleminin her çözümü salınımlı,

(ii) $p\sigma > \frac{1}{e}$

(Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.1.2 $i = 1, 2, ..., m$ için p_i, $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$u'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i u(t - \sigma_i) = 0 \tag{2.7}$$

denkleminin her çözümünün salınımlı olması için yeter koşul

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \sigma_i > \frac{1}{e}$$

olmasıdır (Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.1.3 $p \in C\left[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+\right]$, $\sigma > 0$ olmak üzere

$$u'(t) + p(t)u(t-\sigma) = 0, \; t \geq t_0 \tag{2.8}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t-\sigma}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Eğer $p \in C\left[[t_0 - \sigma, \infty), \mathbb{R}^+\right]$, $\sigma > 0$ olmak üzere

$$\int_{t-\sigma}^{t} p(s)ds \leq \frac{1}{e}, \; t \geq t_0$$

ise (2.8) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahip olur (Györi and Ladas 1991).

Örnek 2.1.1

$$u'(t) + u\left(t - \frac{1}{e}\right) = 0 \tag{2.9}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $p = 1$, $\sigma = \frac{1}{e}$ olduğundan $p\sigma e = 1$ olur. Böylece Teorem 2.1.1 gereğince (2.9) gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Aşağıda verilen sonuç ise Ladas vd. (1972) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.1.4 (2.2) gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu durumda

$$t \geq t_0 \text{ için } \sigma(t) \leq t \text{ ve } \lim_{t \to \infty} \sigma(t) = \infty \tag{2.10}$$

olmak üzere, azalmayan $\sigma(t)$ fonksiyonu için

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > 1$$

ise (2.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladas *et al.* 1972).

Koplatadze ve Chanturija (1982) (2.2) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.5 (2.10) sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Diğer yandan

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds < \frac{1}{e}$$

ise (2.2) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir (Koplatadze and Chanturija 1982).

Şimdi monoton olmayan gecikme terimine sahip lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümleri için verilen salınımlılık koşullarını inceleyelim.

Braverman ve Karpuz (2011) tarafından aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 2.1.6 $t \geq t_0$ ve monoton olmayan $\sigma(t)$ fonksiyonu için $\delta(t) := \sup_{s\leq t}\sigma(s)$ olmak üzere,

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\delta(t)}^{t} p(s) \exp\left\{ \int_{\sigma(s)}^{\delta(t)} p(\xi)d\xi \right\} ds > 1$$

ise (2.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Braverman and Karpuz 2011).

Chatzarakis ve Öcalan (2016) monoton olmayan gecikme terimine sahip gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.7 (2.10) sağlansın. $\sigma(t)$ monoton olmayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\delta(t) := \sup_{s \le t} \sigma(s), \; t \ge 0 \tag{2.11}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\delta(t)}^{t} p(s) \exp\left\{ \int_{\sigma(s)}^{\delta(t)} p(\xi) d\xi \right\} ds > \frac{1}{e},$$

ise (2.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Chatzarakis and Öcalan 2016).

Yine aynı çalışmada aşağıdaki örneğe yer vermişlerdir.

Örnek 2.1.2

$$u'(t) + \frac{10}{11e} u(\sigma(t)) = 0, \; t \ge 0 \tag{2.12}$$

birinci mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel denklem verilmiş olsun. Burada

$$\sigma(t) = \begin{cases} t-1, \; t \in [3k, 3k+1] \\ -3t + 12k + 3, \; t \in [3k+1, 3k+2] \\ 5t - 12k - 13, \; t \in [3k+2, 3k+3] \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

şeklinde tanımlanmıştır. (2.11) den

$$\delta(t) := \sup_{s \le t} \sigma(s) = \begin{cases} t-1, \; t \in [3k, 3k+1] \\ 3k, \; t \in [3k+1, 3k+2.6] \\ 5t - 12k - 13, \; t \in [3k+2.6, 3k+3] \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

olur. $f : \mathbb{R}_0 \to [0, \infty)$ olmak üzere,

$$f(t) = \int_{\delta(t)}^{t} p(s) \exp\left\{ \int_{\sigma(s)}^{\delta(t)} p(\xi) d\xi \right\} ds$$

fonksiyonunu tanımlanmış olsun. Verilen f fonksiyonu en küçük değerini $t = 3k$ noktasında alır. Yani

$$
\begin{aligned}
f_{\min} &= \int_{\delta(3k)}^{3k} p(s) \exp\left\{ \int_{\sigma(s)}^{\delta(3k)} p(\xi) d\xi \right\} ds, \\
&= \frac{10}{11e} \int_{3k-1}^{3k} \exp\left\{ \frac{10}{11e} \int_{s-1}^{3k-1} d\xi \right\} ds, \\
&= \frac{10}{11e} \int_{3k-1}^{3k} \exp\left(\frac{10}{11e}(3k-s) \right) ds, \\
&= \exp(\frac{10}{11e}) - 1 \cong 0.397151967
\end{aligned}
$$

olur ve

$$
\liminf_{t\to\infty} \int_{\delta(t)}^{t} p(s) \exp\left\{ \int_{\sigma(s)}^{\delta(t)} p(\xi) d\xi \right\} ds \cong 0.397151967 > \frac{1}{e}
$$

olduğundan Teorem 2.1.7 nin tüm koşulları sağlanır. Böylece (2.12) denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur.

Diğer yandan,

$$
\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s) ds = \liminf_{t\to\infty} \int_{t-1}^{t} \frac{10}{11e} ds = \frac{10}{11e} < \frac{1}{e}
$$

elde edilir ve daha önce bilinen salınımlılık koşulu burada sağlanmaz (Chatzarakis and Öcalan 2016).

Şimdi birinci mertebeden lineer birkaç gecikme terimli

$$
u'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t) u(\sigma_i(t)) = 0 \tag{2.13}
$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. İlk olarak monoton gecikme terimlerine sahip birinci mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümleri için verilen salınımlılık koşullarını ve daha sonra monoton olmayan gecikme terimlerine sahip birinci mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümleri için verilen salınımlılık koşullarını ele alalım.

Fukagai ve Kusano'nun (1984) (2.13) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili yapmış olduğu çalışmaya aşağıda yer verilmiştir.

Teorem 2.1.8 $1 \leq i \leq m$, $t \geq t_0$ için $\sigma_i(t) \leq \sigma^*(t) \leq t$ olacak şekilde sürekli, azalmayan $\sigma^*(t)$ fonksiyonu mevcut ve $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma^*(t) = \infty$ olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma^*(t)}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.13) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Diğer taraftan $1 \leq i \leq m$, $t \geq t_0$ için $\sigma^*(t) \leq \sigma_i(t)$ olacak şekilde sürekli, azalmayan $\sigma^*(t)$ fonksiyonu mevcut, $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma^*(t) = \infty$ ve

$$\int_{\sigma^*(t)}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds \leq \frac{1}{e}$$

ise (2.13) denklemi salınımsız bir çözüme sahiptir (Fukagai and Kusano 1984).

Yine aynı çalışmada aşağıdaki örneğe yer vermişlerdir.

Örnek 2.1.3

$$u'(t) + \frac{1}{et}u\left(\frac{t}{e}\right) + \frac{1}{2et}u\left(\frac{t}{e^2}\right) = 0 \tag{2.14}$$

denklemi veilmiş olsun. Bu denklem, (2.13) denkleminin bir özel halidir. Burada $p_1(t) = \frac{1}{et}$, $p_2(t) = \frac{1}{2et}$, $\sigma_1(t) = \frac{t}{e}$ ve $\sigma_2(t) = \frac{t}{e^2}$ ve $1 \leq i \leq m$ için $\sigma_i(t) \leq \sigma^*(t) \leq t$ olacak şekilde $\sigma^*(t) = \frac{t}{e}$ olarak seçilebilir. Ayrıca

$$\int_{\sigma^*(t)}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds = \int_{\sigma^*(t)}^{t} (p_1(s) + p_2(s))ds = \int_{\frac{t}{e}}^{t} \left(\frac{1}{es} + \frac{1}{2es}\right) ds = \frac{3}{2e} > \frac{1}{e}$$

olduğundan Teorem 2.1.8 in tüm şartları sağlanır ve böylece verilen denklemin tüm çözümleri salınımlıdır (Fukagai and Kusano 1984).

Grammatikopoulos vd. (2000) (2.13) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.9 $1 \leq i \leq m$ için $\sigma_i(t)$ fonksiyonları azalmayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$\int_0^\infty |p_i(t) - p_j(t)|\, dt < \infty,\ 1 \leq i,\ j \leq m$$

ve

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{\sigma_i(t)}^{t} p_i(s) ds > 0,\ 1 \leq i \leq m$$

olsun. Eğer

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\liminf_{t \to \infty} \int_{\sigma_i(t)}^{t} p_i(s) ds \right) > \frac{1}{e}$$

ise (2.13) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Grammatikopoulos *et al.* 2000).

Teorem 2.1.10 $1 \leq i \leq m$ için $\sigma_i(t)$ fonksiyonları azalmayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$\int_0^\infty |p_i(t) - p_j(t)|\, dt < \infty,\ 1 \leq i,\ j \leq m$$

ve

$$\beta_i = \liminf_{t \to \infty} \int_{\sigma_i(t)}^{t} p_i(s) ds > 0,\ 1 \leq i \leq m$$

olsun. Eğer

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{e^{\beta_i \lambda}}{\lambda} : \lambda \in (0, \infty) \right\} > 1$$

ise (2.13) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Grammatikopoulos *et al.* 2000).

Örnek 2.1.4

$$u'(t) + u(t - \sigma) + u\left(t - \left(\frac{1}{e} - \sigma\right)\right) = 0 \qquad (2.15)$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $\sigma \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ sağlanır. Buna göre, daha önce verilen salınımlılık şartlarının sağlanmadığını ve son olarak ifade ettiğimiz teoremde bulunan salınımlılık şartının sağlandığını göstermek için,

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{e^{\sigma\lambda}}{\lambda}+\frac{e^{\left(\frac{1}{e}-\sigma\right)\lambda}}{\lambda}:\lambda\in(0,\infty)\right\}>1$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{e^{\sigma\lambda}}{\lambda}:\lambda\in(0,\infty)\right\}=\sigma e,$$

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{e^{\left(\frac{1}{e}-\sigma\right)\lambda}}{\lambda}:\lambda\in(0,\infty)\right\}=1-\sigma e$$

olduğundan ve $\frac{e^{\sigma\lambda}}{\lambda}$, $\frac{e^{\left(\frac{1}{e}-\sigma\right)\lambda}}{\lambda}$ ifadeleri minimum değerlerini farklı noktalarda aldığı için, gösterilmek istenilen eşitsizliğin geçerliliği açık olur. Böylece, teoremin tüm koşulları sağlanır ve denklemin tüm çözümleri salınımlı olur (Grammatikopoulos *et al.* 2000).

Infante vd.(2015), (2.13) denkleminin salınımlılık davranışı ile ilgili aşağıda verilen sonucu ve bu sonucu içeren örneği elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.11 $1\leq i\leq m$ olmak üzere monoton olmayan $\sigma_i(t)$ fonksiyonları için $\sigma_i(t)\leq\delta_i(t)\leq t$ olacak şekilde azalmayan $\delta_i\in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}\right)$ fonksiyonları mevcut olsun. Eğer

$$\limsup_{t\to\infty}\prod_{j=1}^{m}\left[\prod_{i=1}^{m}\int_{\delta_j(t)}^{t}p_i(s)\exp\left(\int_{\sigma_i(s)}^{\delta_i(t)}\sum_{i=1}^{m}p_i(\xi)\times\exp\left(\int_{\sigma_i(\xi)}^{\xi}\sum_{i=1}^{m}p_i(u)du\right)d\xi\right)ds\right]^{\frac{1}{m}}>\frac{1}{m^m}$$

ise (2.13) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Infante *et al.* 2015).

Örnek 2.1.5

$$u'(t)+p_1(t)u(\sigma_1(t))+p_2(t)u(\sigma_2(t))=0,\ t\geq0,\ p_1,\ p_2>0 \qquad (2.16)$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada

$$\sigma_1(t)=\begin{cases}t-1,\ t\in[3k,3k+1]\\-3t+12k+3,\ t\in[3k+1,3k+2]\\5t-12k-13,\ t\in[3k+2,3k+3]\end{cases}$$

ve

$$\sigma_2(t)=\begin{cases} t-2,\ t\in[3k,3k+1] \\ -t+6,\ t\in[3k+1,3k+2] \\ 3t-6k-8,\ t\in[3k+2,3k+3] \end{cases}$$

dır. Diğer taraftan

$$\delta_1(t)=\begin{cases} t-1,\ t\in[3k,3k+1] \\ 3k,\ t\in[3k+1,3k+2.6] \\ 5t-12k-13,\ t\in[3k+2.6,3k+3] \end{cases}$$

ve

$$\delta_2(t)=\begin{cases} t-2,\ t\in[3k,3k+1] \\ -3k-1,\ t\in\left[3k+1,3k+2.\overline{3}\right] \\ 3t-6k-8,\ t\in\left[3k+2.\overline{3},3k+3\right] \end{cases}$$

olarak seçilebilir.

$\sigma_1(t)\le t-1$ ve $\sigma_2(t)\le t-2$ olduğundan

$$\int\limits_{\sigma_1(t)}^{t} du \ge \int\limits_{t-1}^{t} du = 1 \text{ ve } \int\limits_{\sigma_2(t)}^{t} du \ge \int\limits_{t-2}^{t} du = 2$$

olur.

$P=p_1\exp(p_1+p_2)+p_2\exp(2p_1+2p_2)$ olsun. $t_n=3n+3$ olarak seçilirse

$$\limsup_{t\to\infty}\prod_{j=1}^{2}\left[\prod_{i=1}^{2}p_i\exp\left(\int\limits_{\sigma_i(s)}^{\delta_i(t)}\sum_{i=1}^{2}p_i\exp\left(\int\limits_{\sigma_i(\xi)}^{\xi}(p_1+p_2)du\right)d\xi\right)ds\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ge \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{2}\left(\prod_{i=1}^{2}\int\limits_{\delta_j(3k+3)}^{3k+3}p_i\exp\left(\int\limits_{\sigma_i(s)}^{\delta_i(3k+3)}\sum_{i=1}^{2}p_i\times\exp\left(\int\limits_{\sigma_i(\xi)}^{\xi}(p_1+p_2)du\right)d\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ge \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{2}\left(\int\limits_{\delta_j(3k+3)}^{3k+3}p_1\exp\left(\int\limits_{\sigma_1(s)}^{3k+2}Pd\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\int\limits_{\delta_j(3k+3)}^{3k+3}p_2\exp\left(\int\limits_{\sigma_2(s)}^{3k+1}Pd\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left[\begin{array}{l}\left(\int\limits_{3k+2}^{3k+3} p_1 \exp\left(\int\limits_{\sigma_1(s)}^{3k+2} Pd\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int\limits_{3k+2}^{3k+3} p_2 \exp\left(\int\limits_{\sigma_2(s)}^{3k+1} Pd\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left(\int\limits_{3k+1}^{3k+3} p_1 \exp\left(\int\limits_{\sigma_1(s)}^{3k+2} Pd\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int\limits_{3k+1}^{3k+3} p_2 \exp\left(\int\limits_{\sigma_2(s)}^{3k+2} Pd\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}}\end{array}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\begin{array}{l}\left(\int\limits_{3k+2}^{3k+3} p_1 \exp\left(\int\limits_{5s-12k-13}^{3k+2} Pd\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int\limits_{3k+2}^{3k+3} p_2 \exp\left(\int\limits_{3s-6k-8}^{3k+1} Pd\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left(\int\limits_{3k+1}^{3k+2} p_1 \exp\left(\int\limits_{-3s+12k+3}^{3k+2} Pd\xi\right)ds + \int\limits_{3k+2}^{3k+3} p_1 \exp\left(\int\limits_{5s-12k-13}^{3k+2} Pd\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ \quad \times \left(\int\limits_{3k+1}^{3k+2} p_2 \exp\left(\int\limits_{-s+6k}^{3k+1} Pd\xi\right)ds + \int\limits_{3k+2}^{3k+3} p_2 \exp\left(\int\limits_{3s-6k-8}^{3k+1} Pd\xi\right)ds\right)^{\frac{1}{2}}\end{array}\right] \\
&= : D(p_1, p_2)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca $p_1 = 0,1$ olsun. Buradan $p_2 \geq 0,158$ ise $D > \frac{1}{4}$ olur. Yani, verilen denklemde $p_1 = 0,1$ ve $p_2 \geq 0,158$ olduğunda Teorem 2.1.15 in tüm şartları sağlanır. Böylece (2.16) denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur. Denklemde verilen gecikme terimleri monoton olmadığı için Grammatikopoulos vd. (2000) tarafından verilen teorem bu örneğe uygulanamaz. Bu nedenle şimdi bu sonuç Fukagai'nin (1984) vermiş olduğu sonuç ile kıyaslanırsa; $\forall t > 0$ için $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t) \leq \delta_1(t)$ olduğundan $p_1 = 0,1$ ve $p_2 \geq 0,158$ seçersek,

$$
\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{\delta_1(t)}^{t} (p_1 + p_2) ds = p_1 + p_2 = 0,258 < \frac{1}{e}
$$

elde edilir. Yani, verilen denklem Fukagai'nin sonucuna göre salınımlı olmayan bir çözüme sahip olur (Infante *et al.* 2015).

2.2 İleri Diferensiyel Denklemler

Birinci mertebeden bir lineer ileri diferensiyel denklem $1 \leq i \leq m$, $\sigma_i(t) \geq t$ ve $p_i \in C\left[[t_0, \infty), \mathbb{R}\right]$ olmak üzere

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t) u(\sigma_i(t)) = 0 \tag{2.17}$$

denklemi ile verilir.

$m = 1$ için (2.17) denklemi

$$u'(t) - p(t)u(\sigma(t)) = 0 \tag{2.18}$$

denklemine dönüşür.

$T > 0$ olmak üzere $\sigma(t) = t + T$ alınırsa (2.18) denklemi

$$u'(t) - p(t)u(t+T) = 0, \ t \geq t_0 \tag{2.19}$$

şeklini alır.

Birinci mertebeden bir lineer olmayan ileri diferensiyel denklem ise $1 \leq i \leq m$, $\sigma_i(t) \geq t$ ve $p_i \in C\left[[t_0, \infty), \mathbb{R}\right]$ olmak üzere

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(u(\sigma_i(t))) = 0 \tag{2.20}$$

şeklindedir.

$m = 1$ için (2.20) denklemi

$$u'(t) - p(t) f(u(\sigma(t))) = 0 \tag{2.21}$$

denklemine dönüşür.

Aşağıda verilen teorem Ladas ve Stavroulakis (1982) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.2.1

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_{t}^{t+T} p(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.19) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladas and Stavroulakis 1982).

$p(t) \equiv p \in (0,\infty)$ olduğunda ise aşağıdaki koşul elde edilmiştir.

Teorem 2.2.2

(i) $u'(t)-pu(t+\sigma) \geq 0$, $t \geq t_0$ eşitsizliğinin ergeç hiç bir pozitif çözüme sahip olmaması,

(ii) $u'(t)-pu(t+\sigma) \leq 0$, $t \geq t_0$ eşitsizliğinin ergeç hiç bir negatif çözüme sahip olmaması,

(iii) $u'(t)-pu(t+\sigma) = 0$, $t \geq t_0$ denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$p\sigma > \frac{1}{e}$$

olmasıdır (Ladas and Stavroulakis 1982).

Aşağıda verilen sonuçlar ise Li ve Zhu (2002) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.2.3

$$p_k(t) \geq \frac{1}{e^k},\ q_k(t) \geq \frac{1}{e^k},\ t \geq t_1 + kT$$

ve

$$\int\limits_{t_1+kT}^{\infty} p(t)\left[\exp\left(e^{k-1}p_k(t) - \frac{1}{e}\right) - 1\right] dt = \infty$$

olacak şekilde $t_1 > t_0 + T$ ve k pozitif tamsayısı mevcut ise (2.19) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada

$$p_1(t) = \int\limits_{t}^{t+T} p(s)ds,$$

$$p_n(t) = \int\limits_{t}^{t+T} p(s)p_{n-1}(s)ds,\ n \geq 2,\ t \geq t_0$$

ve

$$q_1(t) = \int\limits_{t-T}^{t} p(s)ds,\ t \geq t_0 + T,$$

$$q_n(t) = \int\limits_{t-T}^{t} p(s) q_{n-1}(s) ds, \; n \geq 2, \; t \geq t_0 + nT$$

şeklindedir (Li and Zhu 2002).

Teorem 2.2.4

$$\liminf_{t\to\infty} p_k(t) > \frac{1}{e^k} \text{ ve } \liminf_{t\to\infty} q_k(t) > \frac{1}{e^k}$$

olacak şekilde pozitif bir k tamsayısı varsa (2.19) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. $p_k(t)$ ve $q_k(t)$ ifadeleri Teorem 2.2.3 teki gibi tanımlanmıştır (Li and Zhu 2002).

Örnek 2.2.1

$$u'(t) - \frac{1}{2e}(1 + \sin t) u(t + \pi) = 0, \; t \geq 0 \tag{2.22}$$

ileri diferensiyel denklemi verilmiş olsun. Burada $p(t) = \frac{1}{2e}(1+\sin t)$, $T = \pi$ şeklindedir. Böylece

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+T} p(s) ds = \liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+\pi} \frac{1}{2e}(1 + \sin s) ds = \frac{1}{2e}(\pi - 2) < \frac{1}{e}$$

olduğundan

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+T} p(s) ds > \frac{1}{e}$$

olma koşulu sağlanmaz. Ancak

$p_1(t) = \int\limits_{t}^{t+T} p(s) ds = \frac{1}{2e}(\pi + 2\cos t)$

$p_2(t) = \int\limits_{t}^{t+T} p(s) p_1(s) ds = \frac{\pi^2 + 2\pi \cos t - 4 \sin t}{4e^2}$

$p_3(t) = \int\limits_{t}^{t+T} p(s) p_2(s) ds = \frac{1}{8e^3}\left(\pi^3 - 2\pi + (2\pi^2 - 8)\cos t - 4\pi \sin t\right)$

$p_4(t) = \int\limits_{t}^{t+T} p(s) p_3(s) ds = \frac{1}{16e^4}\left[\pi^4 - 4\pi^2 - 2\pi + 2(\pi^3 - 6\pi)\cos t - 4(\pi^2 - 4)\sin t\right]$

olur ki;

$$\liminf_{t\to\infty} p_4(t) > \frac{22}{4e^4}$$

dır. Aynı zamanda

$$q_1(t) = \int_{t-T}^{t} p(s)ds = \tfrac{1}{2e}(\pi - 2\cos t)$$
$$q_2(t) = \int_{t-T}^{t} p(s)q_1(s)ds = \tfrac{1}{4e^2}(\pi^2 - 2\pi\cos t - 4\sin t)$$
$$q_3(t) = \int_{t-T}^{t} p(s)q_2(s)ds = \tfrac{1}{8e^3}\left(\pi^3 - 2\pi + (2\pi^2 - 8)\cos t - 4\pi\sin t\right)$$
$$q_4(t) = \int_{t-T}^{t} p(s)q_3(s)ds = \tfrac{1}{16e^4}\left[\pi^4 - 4\pi^2 - 2\pi + 2(\pi^3 - 6\pi)\cos t - 4(\pi^2 - 4)\sin t\right]$$

olacağından

$$\liminf_{t\to\infty} q_4(t) > \frac{22}{4e^4}$$

olur. Böylece, Teorem 2.2.4 gereğince (2.22) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Li and Zhu 2002).

Teorem 2.2.5 $p(t) \geq 0$, $t \geq t_0$, azalmayan $\sigma(t)$ fonksiyonu için $\sigma(t) \geq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$ olmak üzere

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t}^{\sigma(t)} p(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.18) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Ancak

$$\int_{t}^{\sigma(t)} p(s)ds \leq \frac{1}{e}$$

ise (2.18) denklemi salınımsız bir çözüme sahiptir (Fukagai and Kusano 1984).

Örnek 2.2.2 $a > 0$ ve α bir sabit olmak üzere

$$u'(t) + at^{\alpha}u(\log t) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denklemini ve

$$u'(t) - at^{\alpha}u(e^t) = 0$$

ileri diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $p(t) = at^{\alpha}$ ve $\sigma(t) = \log t$ alınırsa, gecikmeli diferensiyel denklem için

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds = \begin{cases}\infty, & \alpha \geq -1 \\ 0, & \alpha < -1\end{cases}$$

elde edilir.

Eğer $p(t) = at^{\alpha}$ ve $\sigma(t) = e^{t}$ alınırsa, ileri diferensiyel denklem için

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t}^{\sigma(t)} p(s)ds = \begin{cases}\infty, & \alpha \geq -1 \\ 0, & \alpha < -1\end{cases}$$

sonucu elde edilir. Böylece verilen her iki denklemin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \geq -1$ olmasıdır (Fukagai and Kusano 1984).

Örnek 2.2.3 $a > 0$ bir sabit olmak üzere

$$u'(t) + atu\left(t - \frac{1}{t}\right) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denklemini ve

$$u'(t) - atu\left(t + \frac{1}{t}\right) = 0$$

ileri diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $p(t) = at$ ve $\sigma(t) = t - \frac{1}{t}$ alınırsa, gecikmeli diferensiyel denklem için

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds = a$$

sonucu elde edilir. Eğer, $p(t) = at$ ve $\sigma(t) = t + \frac{1}{t}$ alınırsa, ileri diferensiyel denklem için

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t}^{\sigma(t)} p(s)ds = a$$

sonucu elde edilir. Böylece $a > \frac{1}{e}$ ise verilen denklemlerin tüm çözümleri salınımlı, $a \leq \frac{1}{e}$ ise verilen denklemlerin salınımlı olmayan çözümü vardır (Fukagai and Kusano 1984).

Teorem 2.2.6 $1 \le i \le m$ olmak üzere azalmayan $\sigma_i(t)$ fonksiyonları için,

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \int_{t}^{\sigma_{\min}(t)} p_i(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.17) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada, $\sigma_{\min}(t) = \min_{1\le i\le m} \{\sigma_i(s)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Ladde *et al.* 1987).

Teorem 2.2.7 $1 \le i \le m$, $t > t_0$ için $p_i(t) \ge 0$, $\sigma_i(t)$ fonksiyonları monoton olmayan gecikmeler ve $\sigma_i(t) > t$ olmak üzere,

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t}^{\varphi(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_i(t)}^{\sigma_i(s)} p_j(\xi)d\xi \right\} ds > 1$$

ise (2.17) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $t \ge 0$ için $\varphi_i(t) := \inf_{t\le s} \sigma_i(s)$ ve $\varphi(t) = \min_{1\le i\le m} \varphi_i(t)$ şeklinde tanımlanmıştır (Chatzarakis and Öcalan 2015).

Teorem 2.2.8 $1 \le i \le m$, $t > t_0$ için $p_i(t) \ge 0$, $\sigma_i(t)$ fonksiyonları monoton olmayan gecikmeler ve $\sigma_i(t) > t$ olmak üzere,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t}^{\varphi(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi_i(t)}^{\sigma_i(s)} p_j(\xi)d\xi \right\} ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.17) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $t \ge 0$ için $\varphi_i(t) := \inf_{t\le s} \sigma_i(s)$ ve $\varphi(t) = \min_{1\le i\le m} \varphi_i(t)$ şeklinde tanımlanmıştır (Chatzarakis and Öcalan 2015).

3 BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMI

Salımlılık teorisi ile ilgili çalışmalarda genellikle aşağıda belirtilen durumlar üzerinde durulmuştur:

(i) Salınımlı olmayan çözümün varlığı için yeter şartlar.

(ii) Her çözümün salınımlı olması için yeter şartlar.

Verilen bu durumlar için yapılan çalışmalar birbirinden farklıdır. İlk durum için sabit işaretli olan bir çözümün var olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda çeşitli sabit nokta teoremleri uygulanabilir yada salınımlı olmayan bir çözüme yakınsak, monoton bir dizi tanımlanabilir. İkinci durumda ise denklemin bazı çözümleri için bu yöntemlerin kullanılması uygun değildir. Bu yüzden çelişki yöntemi kullanılarak ispat yapılır. Yani verilen denkleme ait salınımlı olmayan bir çözümün varlığı kabul edilir ve bu denklemin parametreleri için kabul edilen şartların sağlandığı gösterilerek çelişki elde edilir.

Birinci mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlılık davranışı ile ilgili birçok çalışma olmasına rağmen birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlılık davranışı ile ilgili lineer denklemlere oranla daha az sayıda çalışma mevcuttur. Bu bölümde, öncelikle lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilecek ardından elde ettiğimiz sonuçlara yer verilecektir.

Teorem 3.1

$$u'(t) + p(t)f(u(\sigma(t))) = 0 \tag{3.1}$$

denkleminde bulunan f, p ve σ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın.

(i) $t \in \mathbb{R}_+$ için $\sigma(t) < t$, $\sigma \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ olsun. Ayrıca $\sigma(t)$, $\mathbb{R}_+$ üzerinde kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$,

(ii) $p(t)$ fonksiyonu bölgesel olarak integrallenebilir ve $p(t) \geq 0$,

(iii) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$, f artan bir fonksiyon ve $\lim\limits_{u\to 0} \frac{u}{f(u)} = N < \infty$ olsun.

Bu durumda

$$\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > N \tag{3.2}$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladde *et al.* 1987).

Sonuç 3.1 Teorem 3.1 f fonksiyonunun hem lineer hemde yarı lineer olma durumunu içerir. $N = 0$ olursa f fonksiyonu yarı lineer bir fonksiyon olur. Eğer

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{f(u)} = \infty$$

ise f fonksiyonu genelleştirilmiş süperlineer fonksiyon olarak adlandırılır (Ladde *et al.* 1987).

Örnek 3.1

$$u'(t) + (t-\sqrt{t})^3 t^{-2} u^3(t-\sqrt{t}) = 0,\ \ t \geq 2$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $t \to \infty$ iken

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds = \lim_{t\to\infty}\int\limits_{t-\sqrt{t}}^{t}\frac{(s-\sqrt{s})^3}{s^2}ds \to \infty$$

olmasına rağmen verilen denklem $u(t) = \frac{1}{t}$ salınımlı olmayan çözüme sahiptir (Ladde *et al.* 1987).

Teorem 3.2 (i), (ii) ve (iii) şartları sağlansın. Böylece

$$\liminf_{t\to\infty}\int\limits_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > \frac{N}{e} \tag{3.3}$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladde *et al.* 1987).

Örnek 3.2

$$u'(t) - \frac{2}{(e\ln\lambda)\,t}u(\lambda t) = 0,\ \ 0 < \lambda < 1$$

gecikmeli diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Buradan

$$\int\limits_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds = \int\limits_{\lambda t}^{t} -\frac{2}{(e\ln\lambda)\,s}ds = \frac{2}{e} > \frac{N}{e}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2 gereğince verilen denklemin tüm çözümleri salınımlı olur (Ladde *et al.* 1987).

Teorem 3.3 $t \geq t_0$ için $\sigma(t)$ azalmayan bir fonksiyon, $\sigma(t) \leq t$, $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$ ve $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$, f sürekli bir fonksiyon ve

$$N = \limsup_{u\to 0} \frac{|u|}{|f(u)|} < \infty$$

olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > \frac{N}{e} \tag{3.4}$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Fukagai and Kusano 1984).

Ladde vd. (1987), birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için elde etmiş oldukları koşulu aşağıda belirtilen sonuca genişletmişlerdir.

Teorem 3.4

$$u'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(u(\sigma_i(t))) = 0 \tag{3.5}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $1 \leq i \leq m$ olmak üzere,

(*i*) $t \in \mathbb{R}_+$ için $\sigma_i \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ olmak üzere $\sigma_i(t) < t$, $\sigma_i(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}_+$ üzerinde kesin olarak artan ve $\lim_{t\to\infty} \sigma_i(t) = \infty$,

(*ii*) $p_i(t)$ fonksiyonu bölgesel olarak integrallenebilir ve $p_i(t) \geq 0$,

(*iii*) $f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u \neq 0$ için $uf_i(u) > 0$, f_i fonksiyonları artan fonksiyonlar ve $\lim_{u\to 0} \frac{u}{f_i(u)} = N_i < \infty$

olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma^*(t)}^{t} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds \right) > \frac{N^*}{e} \tag{3.6}$$

veya

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\sigma^*(t)}^{t} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds \right) > N^* \tag{3.7}$$

ise (3.5) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $N^* = \max\{N_1, ..., N_m\}$ ve $\sigma^*(t) = \max\{\sigma_1(t), ..., \sigma_m(t)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Ladde *et al.* 1987).

Teorem 3.5 (3.5) denkleminin bir özel formu olan

$$u'(t) + p(t)f(u(\sigma_1(t)), ..., u(\sigma_m(t))) = 0 \tag{3.8}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $1 \le i \le m$ ve $t \ge a$ için $p(t)$ ve $\sigma_i(t)$ fonksiyonları $[a, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar, $p(t) \ge 0$, $\sigma_i(t) \le t$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma_i(t) = \infty$ olsun. Ayrıca $\mathbb{R}^m$ üzerinde $1 \le i \le m$ ve $u_1 u_i > 0$ için $u_1 f(u_1, ..., u_m) > 0$, sürekli $f(u_1, ..., u_m)$ fonksiyonu ve negatif olmayan α_i sabitleri için $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ olmak üzere,

$$N = \limsup_{\substack{u_i \to 0 \\ 1 \le i \le m}} \frac{|u_1|^{\alpha_1} ... |u_m|^{\alpha_m}}{|f(u_1, ..., u_m)|} < \infty$$

olsun. Diğer yandan $1 \le i \le m$ ve $t \ge a$ için $\sigma_i(t) \le \sigma^*(t) \le t$ olacak şekilde azalmayan $\sigma^*(t)$ fonksiyonu var ve

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma^*(t)}^{t} p(s)ds > \frac{N}{e}$$

ise (3.8) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Fukagai and Kusano 1984).

3.1 Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımı İçin Elde Edilen Kriterler

$$u'(t) + p(t)f(u(\sigma(t))) = 0 \tag{3.1.1}$$

birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli bir diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada, $p(t) \ge 0$, $\sigma(t) \ge 0$ ve

$$t \ge t_0 \text{ için } \sigma(t) \le t \text{ ve } \lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty, \tag{3.1.2}$$

$$f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ve } u \ne 0 \text{ için } uf(u) > 0 \tag{3.1.3}$$

olmak üzere, $\sigma(t)$ fonksiyonu için

$$\delta(t) := \sup_{s\leq t}\sigma(s) \tag{3.1.4}$$

tanımlayalım. Açık olarak $t \geq 0$ için $\sigma(t) \leq \delta(t)$ ve $\delta(t)$ azalmayan bir fonksiyon olur. Ayrıca

$$\limsup_{u\to 0}\frac{u}{f(u)} = N, \quad 0 \leq N < \infty \tag{3.1.5}$$

olsun. Böylece aşağıda verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 3.1.1 (3.1.2), (3.1.3) ve (3.1.5) sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > \frac{N}{e} \tag{3.1.6}$$

ise (3.1.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan pozitif bir $u(t)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Aynı şekilde negatif bir $-u(t)$ fonksiyonu da (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olarak kabul edilebilir. Ancak biz ispatımızı yalnızca $u(t)$ pozitif çözümü üzerinden yapacağız. O halde, her $t \geq t_1$ için $u(t)$, $u(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 \geq t_0$ mevcuttur. Ayrıca (3.1.1) denkleminden

$$u'(t) = -p(t)f(u(\sigma(t))) \leq 0, \; t \geq t_1$$

ifadesi elde edilir. Böylece $u(t)$ artmayan bir fonksiyon olur. (3.1.6) şartından

$$\int_a^{\infty} p(t)dt = \infty \tag{3.1.7}$$

eşitliği yazılır. Böylece (3.1.7) ifadesinin varlığı göz önünde bulundurulduğunda, (3.1.1) denkleminin tüm salınımsız çözümleri $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsadığından $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ elde edilir [Teorem 3.1.5, Ladde *et al.* (1987)]. $N > 0$ olsun. Diğer yandan (3.1.5) ifadesi yardımıyla

$$f(u(t)) \geq \frac{1}{2N}u(t), \; t \geq t_2 \tag{3.1.8}$$

olacak şekilde $t_2 > t_1$ seçebiliriz. Ayrıca

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds = \liminf_{t\to\infty} \int\limits_{\delta(t)}^{t} p(s)ds \tag{3.1.9}$$

eşitliğinin var olduğunu biliyoruz [Lemma 2.1.1, Erbe *et al.* (1995)]. Böylece (3.1.1) denklemi, $\sigma(t) \leq \delta(t)$, $u(t)$ artmayan bir fonksiyon olması ve (3.1.8) eşitsizliği yardımıyla

$$u'(t) + \frac{1}{2N} p(t) u(\delta(t)) \leq 0, \ t \geq t_3 \tag{3.1.10}$$

eşitsizliğine dönüşür. Ayrıca (3.1.6) ve (3.1.9) ifadelerinden

$$\int\limits_{\delta(t)}^{t} p(s)ds \geq c > \frac{N}{e}, \ t \geq t_3 \geq t_2 \tag{3.1.11}$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti mevcuttur. Böylece (3.1.11) eşitsizliğinden

$$\int\limits_{\delta(t)}^{t^*} p(s)ds > \frac{N}{2e} \text{ ve } \int\limits_{t^*}^{t} p(s)ds > \frac{N}{2e} \tag{3.1.12}$$

olacak şekilde $t^* \in (\delta(t), t)$ mevcuttur.

İlk olarak (3.1.10) eşitsizliği, $u(t)$ fonksiyonunun artmayan olması kullanılarak $\delta(t)$ den t^* a integre edilirse,

$$u(t^*) - u(\delta(t)) + \frac{1}{2N} \int\limits_{\delta(t)}^{t^*} p(s) u(\delta(s)) ds \leq 0,$$

$$u(t^*) - u(\delta(t)) + \frac{1}{2N} u(\delta(t^*)) \int\limits_{\delta(t)}^{t^*} p(s)ds \leq 0$$

elde edilir. Böylece (3.1.12) ifadesi yardımıyla

$$-u(\delta(t)) + \frac{1}{2N} u(\delta(t^*)) \frac{N}{2e} < 0 \tag{3.1.13}$$

bulunur.

(3.1.10) eşitsizliği t^* dan t ye integre edilirse,

$$u(t)-u(t^*)+\frac{1}{2N}\int_{t^*}^{t}p(s)u(\delta(s))ds\leq 0,$$

$$u(t)-u(t^*)+\frac{1}{2N}u(\delta(t))\int_{t^*}^{t}p(s)ds\leq 0$$

bulunur. Diğer yandan (3.1.12) ifadesi yardımıyla

$$-u(t^*)+\frac{1}{2N}u(\delta(t))\frac{N}{2e}<0 \tag{3.1.14}$$

olur. Böylece (3.1.13) ve (3.1.14) eşitsizlikleri birleştirildiğinde,

$$u(t^*)>u(\delta(t))\frac{1}{4e}>u(\delta(t^*))\left(\frac{1}{4e}\right)^2$$

ifadesi elde edilir ve

$$\frac{u(\delta(t^*))}{u(t^*)}<(4e)^2\,,\ t\geq t_4$$

olur. Ayrıca

$$z=\frac{u(\delta(t^*))}{u(t^*)}\geq 1 \tag{3.1.15}$$

olarak tanımlanırsa $1\leq z<(4e)^2$ olduğundan, z sınırlıdır.

Diğer taraftan (3.1.1) denklemi $u(t)$ ile bölünüp $\delta(t)$ den t ye integre edilirse,

$$\int_{\delta(t)}^{t}\frac{u'(s)}{u(s)}ds+\int_{\delta(t)}^{t}p(s)\frac{f(u(\sigma(s)))}{u(s)}ds=0,$$

$$\ln\frac{u(t)}{u(\delta(t))}+\int_{\delta(t)}^{t}p(s)\frac{f(u(\sigma(s)))}{u(\sigma(s))}\frac{u(\sigma(s))}{u(s)}ds=0$$

ifadeleri elde edilir. $u(t)$ artmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\ln\frac{u(t)}{u(\delta(t))}+\int_{\delta(t)}^{t}p(s)\frac{f(u(\sigma(s)))}{u(\sigma(s))}\frac{u(\delta(s))}{u(s)}ds\leq 0$$

olur. Ayrıca η, $t\to\infty$, $\eta\to\infty$ iken $\delta(t)<\eta<t$ olacak şekilde tanımlanırsa, $\delta(t)\to\infty$ olur. Böylece son eşitsizlik

$$\ln\frac{u(\delta(t))}{u(t)} \geq \frac{f(u(\sigma(\eta)))}{u(\sigma(\eta))}\frac{u(\delta(\eta))}{u(\eta)}\int\limits_{\delta(t)}^{t} p(s)ds \tag{3.1.16}$$

şeklini alır. Diğer taraftan (3.1.16) ifadesinin her iki tarafının alt limiti alınırsa $\ln z > \frac{z}{e}$ bulunur. Ancak, her $x > 0$ için $\ln x \leq \frac{x}{e}$ olduğundan bu durum imkansızdır. Böylece çelişki elde edilir.

Şimdi ise $N = 0$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda $\frac{u}{f(u)} > 0$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{f(u)} = 0 \tag{3.1.17}$$

olsun. (3.1.17) ifadesinden

$$\frac{u}{f(u)} < \epsilon$$

veya

$$\frac{f(u)}{u} > \frac{1}{\epsilon} \tag{3.1.18}$$

olacak şekilde $\epsilon > 0$ reel sayısı mevcuttur. Böylece $\sigma(t) \leq \delta(t)$, $u(t)$ artmayan ve $\delta(t)$ azalmayan fonksiyonlar olduğundan (3.1.1) denklemi, (3.1.18) ifadesi yardımıyla

$$u'(t) + \frac{1}{\epsilon}p(t)u(\delta(t)) \leq 0 \tag{3.1.19}$$

eşitsizliğine dönüşür.

(3.1.19) ifadesi $\delta(t)$ den t ye integre edilirse,

$$u(t) - u(\delta(t)) + \frac{1}{\epsilon}\int\limits_{\delta(t)}^{t} p(s)u(\delta(s))ds \leq 0,$$

$$-u(\delta(t)) + \frac{1}{\epsilon}u(\delta(t))\int\limits_{\delta(t)}^{t} p(s)ds \leq 0,$$

$$u(\delta(t)) - \frac{1}{\epsilon}u(\delta(t))\int\limits_{\delta(t)}^{t} p(s)ds \geq 0,$$

$$u(\delta(t))\left[1-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{\delta(t)}^{t}p(s)ds\right]\geq 0$$

$$\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{\delta(t)}^{t}p(s)ds<1$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan

$$1>\frac{c}{\epsilon}$$

veya

$$\epsilon>c$$

elde edilir. Ancak bu durum $\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{f(u)}=0$ olması ile çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.2 (3.1.2), (3.1.3), (3.1.5) ve (3.1.7) sağlansın. $0<N<\infty$ ve $\delta(t):=\sup\limits_{s\leq t}\sigma(s)$ olmak üzere, eğer

$$\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{\delta(t)}^{t}p(s)ds>N \tag{3.1.20}$$

ise (3.1.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan pozitif bir $u(t)$ çözümünün varlığını kabul edelim. O halde, her $t\geq t_1$ için $u(t)$, $u(\sigma(t))>0$ olacak şekilde $t_1\geq t_0$ mevcuttur. Ayrıca $u(t)$ artmayan bir fonksiyondur. Diğer taraftan (3.1.7) ifadesi ve Teorem 3.1.1 den $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=0$ olduğunu biliyoruz. (3.1.5) ifadesinden $\theta>1$ olmak üzere,

$$f(u(t))\geq\frac{1}{\theta N}u(t) \tag{3.1.21}$$

eşitsizliği yazılır.

Kabülden

$$\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{\delta(t)}^{t}p(s)ds=K>N$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır. Böylece $K > N$ olduğundan $N < \frac{K+N}{2} < K$ elde edilir. Diğer taraftan (3.1.1) denklemi, (3.1.21) ifadesi yardımıyla

$$u'(t) + \frac{1}{\theta N} p(t) u(\sigma(t)) \leq 0$$

şeklinde yazılır. $\delta(t) \geq \sigma(t)$ olduğundan son ifade

$$u'(t) + \frac{1}{\theta N} p(t) u(\delta(t)) \leq 0 \tag{3.1.22}$$

eşitsizliğine dönüşür.

(3.1.22) eşitsizliği, $u(t)$ fonksiyonunun artmayan ve $\delta(t)$ fonksiyonunun azalmayan olduğu düşünülerek $\delta(t)$ den t ye integre edilirse,

$$u(t) - u(\delta(t)) + \frac{1}{\theta N} \int_{\delta(t)}^{t} p(s) u(\delta(s)) ds \leq 0$$

veya

$$u(t) - u(\delta(t)) + \frac{1}{\theta N} u(\delta(t)) \int_{\delta(t)}^{t} p(s) ds \leq 0$$

eşitsizlikleri bulunur. Buradan

$$u(t) - u(\delta(t)) \left[1 - \frac{1}{\theta N} \int_{\delta(t)}^{t} p(s) ds \right] \leq 0$$

olur. Böylece yeterince büyük t ler için

$$\int_{\delta(t)}^{t} p(s) ds < \theta N$$

bulunur. Yani

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{\delta(t)}^{t} p(s) ds \leq \theta N$$

olur. $\theta > 1$ ve $\frac{K+N}{2N} > 1$ olduğundan bu ifade θ olarak seçilebilir. Elde edilen son eşitsizlikte $\theta = \frac{K+N}{2N} > 1$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\delta(t)}^{t} p(s)ds = K \leq \frac{K+N}{2}$$

bulunur. Ancak $K > \frac{K+N}{2}$ olduğundan çelişki elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.1 $\sigma(t)$ azalmayan bir fonksiyon olduğunda her t için $\sigma(t) = \delta(t)$ olur. Bu durumda (3.1.20) şartı

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > N \tag{3.1.23}$$

şartına dönüşür.

Örnek 3.1.1

$$u'(t) + \frac{1}{e}u(\sigma(t))\ln(10 + |u(\sigma(t))|) = 0,\ t > 0 \tag{3.1.24}$$

birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $\sigma(t)$ fonksiyonu,

$$\sigma(t) = \begin{cases} t-1, & t \in [3k, 3k+1] \\ -3t+12k+3, & t \in [3k+1, 3k+2] \\ 5t-12k-13, & t \in [3k+2, 3k+3] \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.1.4) yardımıyla

$$\delta(t) := \sup_{s\leq t} \sigma(s) = \begin{cases} t-1, & t \in [3k, 3k+1] \\ 3k, & t \in [3k+1, 3k+2.6] \\ 5t-12k-13, & t \in [3k+2.6, 3k+3] \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

fonksiyonunu elde ederiz. $p(t) = \frac{1}{e}$ ve $f(u) = u\ln(10+|u|)$ olarak seçilirse,

$$N = \limsup_{u\to 0} \frac{u}{f(u)} = \limsup_{u\to 0} \frac{u}{u\ln(10+|u|)} = \frac{1}{\ln 10}$$

ve

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds = \frac{1}{e} > \frac{N}{e} = \frac{1}{e\ln 10}$$

elde edilir. Yani Teorem 3.1.1 in tüm şartları sağlanır. Böylece (3.1.24) denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur.

3.2 Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Birkaç Gecikme Terimli Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımı İçin Elde Edilen Kriterler

$$u'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(u(\sigma_i(t))) = 0 \tag{3.2.1}$$

birinci mertebeden lineer olmayan birkaç gecikme terimli diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ için $p_i(t)$ ve $\sigma_i(t)$ negatif olmayan reel fonksiyonlar olmak üzere

$$1 \leq i \leq m \text{ için } \sigma_i(t) \leq t,\ t \geq t_0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} \sigma_i(t) = \infty, \tag{3.2.2}$$

$$1 \leq i \leq m,\ u \neq 0 \text{ için } f_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ ve } u f_i(u) > 0 \tag{3.2.3}$$

olsun. Diğer taraftan $1 \leq i \leq m$ için

$$\delta_i(t) := \sup_{s\leq t} \sigma_i(s),\ t \geq 0 \tag{3.2.4}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece, $1 \leq i \leq m$ için $\sigma_i(t) \leq \delta_i(t)$ ve $\delta_i(t)$ fonksiyonlarının azalmayan olduğu açıktır. Ayrıca $1 \leq i \leq m$ olmak üzere f_i fonksiyonları için

$$\limsup_{u\to 0} \frac{u}{f_i(u)} = N_i,\ 0 \leq N_i < \infty \tag{3.2.5}$$

olsun. Böylece bu şartlar altında aşağıda verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 3.2.1 (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.5) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\delta(t)}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds > \frac{N^*}{e} \tag{3.2.6}$$

ise (3.2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $N^* = \max\{N_i\}$ ve $\delta(t) = \min\{\delta_i(t)\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.2.1) denkleminin pozitif salınımsız bir $u(t)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Bu durumda $1 \leq i \leq m$, $\forall t \geq t_1$ için $u(t)$, $u(\sigma_i(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 \geq t_0$ mevcuttur. Ayrıca (3.2.1) denkleminden

$$u'(t) = -\sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(u(\sigma_i(t))) \leq 0,\ t \geq t_1$$

elde edilir. Böylece $u(t)$ artmayan bir fonksiyon olur. Ayrıca (3.2.6) şartından

$$\int_a^\infty \sum_{i=1}^m p_i(t)dt = \infty \tag{3.2.7}$$

olduğu görülür. Böylece (3.2.7) ifadesinin varlığı göz önünde bulundurulduğunda, (3.2.1) denkleminin tüm salınımsız çözümleri $t \to \infty$ iken sıfıra yakınsadığından $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ olur [Teorem 3.1.5, Ladde *et al.* (1987)]. Diğer taraftan $1 \le i \le m$ ve $t \ge t_2$ için (3.2.5) ifadesi yardımıyla,

$$f_i(u(t)) \ge \frac{1}{2N_i} u(t) \ge \frac{1}{2N^*} u(t) \tag{3.2.8}$$

olacak şekilde $t_2 > t_1$ seçilebilir. $N^* > 0$ olduğunu kabul edelim. (3.2.1) denklemi, $1 \le i \le m$ için $\sigma_i(t) \le \delta(t)$ ve $u(t)$ artmayan bir fonksiyon olduğu için (3.2.8) yardımıyla,

$$u'(t) + \frac{1}{2N^*} \sum_{i=1}^m p_i(t) u(\delta(t)) \le 0, \ t \ge t_3 \tag{3.2.9}$$

eşitsizliğine dönüşür. Ayrıca (3.2.6) ifadesinden

$$\int_{\delta(t)}^{t} \sum_{i=1}^m p_i(s)ds \ge c > \frac{N^*}{e}, \ t \ge t_3 \ge t_2 \tag{3.2.10}$$

olacak şekilde $c > 0$ reel sayısı mevcuttur. Böylece (3.2.10) ifadesinden,

$$\int_{\delta(t)}^{t^*} \sum_{i=1}^m p_i(s)ds > \frac{N^*}{2e} \text{ ve } \int_{t^*}^{t} \sum_{i=1}^m p_i(s)ds > \frac{N^*}{2e} \tag{3.2.11}$$

olacak şekilde her $t \ge t_3$ için $t^* \in (\delta(t), t)$ mevcuttur. Ayrıca (3.2.9) ifadesi, $u(t)$ fonksiyonunun artmayan olduğu göz önünde bulundurularak $\delta(t)$ den t^* a integre edilirse,

$$u(t^*) - u(\delta(t)) + \frac{1}{2N^*} \int_{\delta(t)}^{t^*} \sum_{i=1}^m p_i(s) u(\delta(s)) ds \le 0,$$

$$u(t^*) - u(\delta(t)) + \frac{1}{2N^*} u(\delta(t^*)) \int_{\delta(t)}^{t^*} \sum_{i=1}^m p_i(s) ds \le 0$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece (3.2.11) yardımıyla

$$-u(\delta(t)) + \frac{1}{2N^*}u(\delta(t^*))\frac{N^*}{2e} < 0 \tag{3.2.12}$$

bulunur. Diğer yandan (3.2.9) ifadesi t^* dan t ye integre edilirse,

$$u(t) - u(t^*) + \frac{1}{2N^*}\int_{t^*}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)u(\delta(s))ds \leq 0,$$

$$u(t) - u(t^*) + \frac{1}{2N^*}u(\delta(t))\int_{t^*}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)ds \leq 0$$

eşitsizlikleri elde edilir. Dolayısıyla (3.2.11) yardımıyla

$$-u(t^*) + \frac{1}{2N^*}u(\delta(t))\frac{N^*}{2e} < 0 \tag{3.2.13}$$

olur. Diğer taraftan (3.2.12) ve (3.2.13) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse,

$$u(t^*) > \frac{1}{4e}u(\delta(t)) > \left(\frac{1}{4e}\right)^2 u(\delta(t^*))$$

ifadesi elde edilir ve böylece

$$\frac{u(\delta(t^*))}{u(t^*)} < (4e)^2,\ t \geq t_4$$

bulunur. Buradan

$$z = \frac{u(\delta(t^*))}{u(t^*)} \geq 1$$

olarak tanımlanırsa $1 \leq z < (4e)^2$ olduğundan, z sınırlı olur. Diğer taraftan (3.2.1) denklemi $u(t)$ ile bölünüp $\delta(t)$ den t ye integre edilirse,

$$\int_{\delta(t)}^{t}\frac{u'(s)}{u(s)}ds + \int_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\frac{f_i(u(\sigma_i(s)))}{u(s)}ds = 0,$$

$$\ln\frac{u(t)}{u(\delta(t))} + \int_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\frac{f_i(u(\sigma_i(s)))}{u(s)}ds = 0,$$

$$\ln\frac{u(t)}{u(\delta(t))}+\int\limits_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\frac{f_i(u(\sigma_i(s)))}{u(\sigma_i(s))}\frac{u(\sigma_i(s))}{u(s)}ds=0$$

ifadeleri elde edilir. $1\le i\le m$ için $\sigma_i(t)\le\delta(t)$ olduğu için son ifadeden

$$\ln\frac{u(t)}{u(\delta(t))}+\int\limits_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\frac{f_i(u(\sigma_i(s)))}{u(\sigma_i(s))}\frac{u(\delta(s))}{u(s)}ds\le 0$$

olur. Diğer taraftan η, $t\to\infty$, $\eta\to\infty$ iken $\delta(t)<\eta<t$ olacak şekilde tanımlanırsa, $\delta(t)\to\infty$ olur. Böylece son eşitsizlik

$$\ln\frac{u(\delta(t))}{u(t)}\ge\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i(u(\sigma_i(\eta)))}{u(\sigma_i(\eta))}\frac{u(\delta(\eta))}{u(\eta)}\int\limits_{\delta(t)}^{t}p_i(s)ds \tag{3.2.14}$$

eşitsizliğine dönüşür. Ayrıca (3.2.14) ifadesinin her iki tarafının alt limiti alınırsa $\ln z>\frac{z}{e}$ bulunur. Ancak her $x>0$ için $\ln x\le\frac{x}{e}$ olduğundan bu durum imkansızdır. Böylece çelişki elde edilir.

Şimdi $N^*=0$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda $\frac{u}{f_i(u)}>0$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{f_i(u)}=0 \tag{3.2.15}$$

olsun. (3.2.15) ifadesinden $1\le i\le m$ için

$$\frac{u}{f_i(u)}<\epsilon_i<\epsilon^*$$

veya

$$\frac{f_i(u)}{u}<\frac{1}{\epsilon^*} \tag{3.2.16}$$

olur. Burada $\max\limits_{1\le i\le m}\{\epsilon_i\}=\epsilon^*>0$ keyfi bir reel sayıdır. Böylece (3.2.1) denklemi, $1\le i\le m$ için $\sigma_i(t)\le\delta(t)$, $u(t)$ artmayan bir fonksiyon ve $\delta(t)$ azalmayan bir fonksiyon olduğu için (3.2.16) ifadesi yardımıyla,

$$u'(t)+\frac{1}{\epsilon^*}\sum_{i=1}^{m}p_i(t)u(\delta(t))\le 0 \tag{3.2.17}$$

eşitsizliğine dönüşür.

(3.2.17) ifadesi $\delta(t)$ den t ye integre edilirse,

$$u(t) - u(\delta(t)) + \frac{1}{\epsilon^*}\int_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m} p_i(s)u(\delta(s))ds \leq 0,$$

$$-u(\delta(t)) + \frac{1}{\epsilon^*}u(\delta(t))\int_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds \leq 0,$$

$$u(\delta(t)) - \frac{1}{\epsilon^*}u(\delta(t))\int_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds \geq 0,$$

$$u(\delta(t))\left[1 - \frac{1}{\epsilon^*}\int_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds\right] \geq 0,$$

$$\frac{1}{\epsilon^*}\int_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds < 1$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan

$$1 > \frac{c}{\epsilon^*}$$

veya

$$\epsilon^* > c$$

olduğu görülür. Ancak bu durum $\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{f_i(u)} = 0$ olması ile çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.2 (3.2.2), (3.2.3), (3.2.5) ve (3.2.7) sağlansın. $0 < N^* < \infty$ olmak üzere, eğer

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds > N^* \tag{3.2.18}$$

ise (3.2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $N^* = \max\{N_i\}$ ve $\delta(t) = \min\{\delta_i(t)\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.2.1) denkleminin pozitif salınımsız bir $u(t)$ çözümünün varlığını kabul edelim. $1 \leq i \leq m$ ve her $t \geq t_1$ için $u(t)$, $u(\sigma_i(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 \geq t_0$ mevcuttur. Ayrıca $u(t)$ artmayan bir fonksiyondur. Diğer taraftan (3.2.7) ifadesi ve Teorem 3.2.1 gereğince $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ olur. $\theta > 1$ olmak üzere (3.2.5) ifadesinden

$$f_i(u(t)) \geq \frac{1}{\theta N_i} u(t) \geq \frac{1}{\theta N^*} u(t) \tag{3.2.19}$$

eşitsizliği yazılır.

Kabülden

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\delta(t)}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds = K > N^*$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti mevcuttur. Böylece $K > N^*$ olduğundan $N^* < \frac{K+N^*}{2} < K$ elde edilir. Diğer taraftan (3.2.19) yardımıyla, (3.2.1) denklemi

$$u'(t) + \frac{1}{\theta N^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(t) u(\sigma_i(t)) \leq 0$$

eşitsizliğine dönüşür. $1 \leq i \leq m$ için $\sigma_i(t) \leq \delta(t)$ ve $u(t)$ artmayan olduğundan son eşitsizlik

$$u'(t) + \frac{1}{\theta N^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(t) u(\delta(t)) \leq 0 \tag{3.2.20}$$

şeklinde yazılır.

$u(t)$ fonksiyonunun artmayan ve $\delta(t)$ fonksiyonunun azalmayan olduğu düşünülerek, (3.2.20) eşitsizliği $\delta(t)$ den t ye integre edilirse,

$$u(t) - u(\delta(t)) + \frac{1}{\theta N^*} \int_{\delta(t)}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) u(\delta(s)) ds \leq 0$$

veya

$$u(t) - u(\delta(t)) + \frac{1}{\theta N^*} u(\delta(t)) \int_{\delta(t)}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds \leq 0$$

ifadeleri elde edilir. Buradan

$$u(t)-u(\delta(t))\left[1-\frac{1}{\theta N^*}\int\limits_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)ds\right]\leq 0$$

olur. Böylece yeterince büyük t ler için

$$\int\limits_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)ds<\theta N^*$$

olur. Yani

$$\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)ds\leq\theta N^*$$

bulunur. $\theta>1$ ve $\frac{K+N^*}{2N^*}>1$ olduğu için bu ifade θ olarak seçilebilir. Bu durumda $\theta=\frac{K+N^*}{2N^*}>1$ ifadesi son bulunan eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{\delta(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)ds=K\leq\frac{K+N^*}{2}$$

olur. Ancak $K>\frac{K+N^*}{2}$ olduğundan çelişki elde edilir ve ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.1

$$u'(t) + \frac{1}{e}u(\sigma_1(t))\ln(10 + |u(\sigma_1(t))|) + \frac{2}{e}u(\sigma_2(t))\ln(8 + |u(\sigma_2(t))|) = 0,\ t > 0 \quad (3.2.21)$$

birinci mertebeden lineer olmayan birkaç gecikme terimli diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $1 \leq i \leq m$ için $\sigma_i(t)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} t-1, & t \in [3k, 3k+1] \\ -3t+12k+3, & t \in [3k+1, 3k+2] \\ 5t-12k-13, & t \in [3k+2, 3k+3] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\sigma_2(t) = \sigma_1(t) - 2 = \begin{cases} t-3, & t \in [3k, 3k+1] \\ -3t+12k+1, & t \in [3k+1, 3k+2] \\ 5t-12k-15, & t \in [3k+2, 3k+3] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ayrıca (3.2.4) yardımıyla,

$$\delta_1(t) := \sup_{s \leq t} \sigma_1(s) = \begin{cases} t-1, & t \in [3k, 3k+1] \\ 3k, & t \in [3k+1, 3k+2.6] \\ 5t-12k-13, & t \in [3k+2.6, 3k+3] \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\delta_2(t) := \sup_{s \leq t} \sigma_2(s) = \begin{cases} t-3, & t \in [3k, 3k+1] \\ 3k-2, & t \in [3k+1, 3k+2.6] \\ 5t-12k-15, & t \in [3k+2.6, 3k+3] \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

ifadeleri elde edilir. Böylece

$$\delta(t) = \min_{1 \leq i \leq 2} \{\delta_i(t)\} = \delta_2(t)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $p_1(t) = \frac{1}{e}$, $p_2(t) = \frac{2}{e}$ ve $f_1(u) = u\ln(10 + |u|)$, $f_2(u) = u\ln(8 + |u|)$ olarak alınırsa;

$$N_1 = \limsup_{u \to 0} \frac{u}{f_1(u)} = \limsup_{u \to 0} \frac{u}{u\ln(10 + |u|)} = \frac{1}{\ln 10},$$

$$N_2 = \limsup_{u \to 0} \frac{u}{f_2(u)} = \limsup_{u \to 0} \frac{u}{u\ln(8 + |u|)} = \frac{1}{\ln 8}$$

ve

$$\max\{N_1, N_2\} = N^* = \frac{1}{\ln 8}$$

bulunur. Böylece

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{\delta(t)}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds = \frac{9}{e} > \frac{N^*}{e} = \frac{1}{e\ln 8}$$

bulunur. Yani Teorem 3.2.1 in tüm şartları sağlanır ve (3.2.21) denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur.

4 BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN İLERİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMI

Bu bölümde birinci mertebeden lineer olmayan ileri diferensiyel denklemlerle ilgili yapılan çalışmalardan bahsedilecek ardından elde ettiğimiz salınımlılık koşullarına yer verilecektir.

Fukagai ve Kusano (1984) birinci mertebeden lineer olmayan ileri diferensiyel denklem için aşağıdaki salınımlılık kriterini elde etmişlerdir.

Teorem 4.1

$$u'(t) + p(t)f(u(\sigma(t))) = 0, \ t \geq t_0 \tag{4.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $p(t) \leq 0$, $\sigma(t)$ azalmayan fonksiyon olmak üzere $\sigma(t) \geq t$, $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$ ve

$$N = \limsup_{|u|\to\infty} \frac{|u|}{|f(u)|} < \infty$$

olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_t^{\sigma(t)} [-p(s)ds] > \frac{N}{e} \tag{4.2}$$

ise (4.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Fukagai and Kusano 1984).

Yine aynı çalışmada aşağıdaki örneğe yer vermişlerdir.

Örnek 4.1

$$u'(t) - \frac{t^m}{2\log(1+2t)} u(2t) \log\left[1 + |u(2t)|\right] = 0, \quad m \text{ sabit} \tag{4.3}$$

ileri diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $p(t) = -\frac{t^m}{2\log(1+2t)}$, $\sigma(t) = 2t$, $f(u) = u\log(1+|u|)$ şeklindedir. Böylece

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{|u|}{|f(u)|} = \lim_{|u|\to\infty} \frac{u}{u\log(1+|u|)} = 0$$

bulunur. Diğer yandan

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t}^{\sigma(t)}[-p(s)ds]=\begin{cases}\infty, & m>-1\\ 0, & m\leq -1\end{cases}$$

olur. Böylece $m>-1$ ise denklemin tüm çözümleri salınımlıdır. $m=-1$ olduğunda ise denklem $u(t)=t$ şeklinde salınımsız bir çözüme sahip olur (Fukagai and Kusano 1984).

Teorem 4.2

$$u'(t)+p(t)f(u(\sigma_1(t)),...,u(\sigma_m(t)))=0 \tag{4.4}$$

ileri diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $1\leq i\leq m$ ve $t\geq a$ için $p(t)$ ve $\sigma_i(t)$ fonksiyonları $[a,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar, $p(t)\leq 0$, $\sigma_i(t)$ fonksiyonları için $\sigma_i(t)\geq t$ ve $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma_i(t)=\infty$ olsun. Ayrıca $\mathbb{R}^m$ üzerinde $1\leq i\leq m$ ve $u_1u_i>0$ için $u_1f(u_1,...,u_m)>0$, sürekli $f(u_1,...,u_m)$ fonksiyonu ve negatif olmayan β_i sabitleri için $\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i=1$ olmak üzere

$$N=\limsup_{\substack{|u_i|\to\infty\\ 1\leq i\leq m}}\frac{|u_1|^{\beta_1}\ldots|u_m|^{\beta_m}}{|f(u_1,...,u_m)|}<\infty$$

olsun. Diğer yandan $1\leq i\leq m$ ve $t\geq a$ için $t\leq\sigma^*(t)\leq\sigma_i(t)$ olacak şekilde azalmayan $\sigma^*(t)$ fonksiyonu var ve

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t}^{\sigma^*(t)}[-p(s)]\,ds>\frac{N}{e} \tag{4.5}$$

ise (4.4) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Fukagai and Kusano 1984).

Örnek 4.2

$$u'(t)-at^m\,[u(2t)]^{\frac{1}{3}}\,[u(4t)]^{\frac{2}{3}}=0,\ a>0 \text{ ve } m \text{ sabit}$$

ileri diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $p(t)=-at^m$, $f(u_1,u_2)=u_1^{\frac{1}{3}}u_2^{\frac{2}{3}}$ ve $\sigma_1(t)=2t$, $\sigma_2(t)=4t$ şeklindedir. Diğer yandan $1\leq i\leq m$ için $t\leq\sigma^*(t)\leq\sigma_i(t)$ olacak şekilde azalmayan $\sigma^*(t)=2t$ fonksiyonunu seçebiliriz. Ayrıca $\beta_1=\frac{1}{3}$, $\beta_2=\frac{2}{3}$ ve $\sum\limits_{i=1}^{2}\beta_i=\beta_1+\beta_2=1$ olur. Böylece verilen teoremin tüm şartları sağlanır ve

$$\int_{t}^{\sigma^*(t)} [-p(s)]\, ds = \begin{cases} \infty & , m > -1 \\ a\log 2 & , m = -1 \end{cases}$$

ifadesi elde edilir. Yani $m \geq -1$ olursa verilen denklemin tüm çözümleri salınımlı olur (Fukagai and Kusano 1984).

Ladde vd. (1987),

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(u(\sigma_i(t))) = 0 \tag{4.6}$$

denklemini ele almış ve aşağıda verilen salınımlılık koşulunu elde etmişlerdir.

Teorem 4.3 $1 \leq i \leq m$ için

(i) $\sigma_i(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\sigma_i(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}_+$ üzerinde kesin olarak artan ve $\sigma_i(t) > t$, $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$,

(ii) $p_i(t) \geq 0$, $p_i(t)$ fonksiyonları bölgesel olarak integrallenebilir,

(iii) $f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u \neq 0$ için $uf_i(u) > 0$, f_i fonksiyonları artan fonksiyonlar ve

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{u}{f_i(u)} = N_i > 0$$

olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t}^{\sigma^*(t)} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds \right) > \frac{N^*}{e} \tag{4.7}$$

veya

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t}^{\sigma^*(t)} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds \right) > N^* \tag{4.8}$$

ise (4.6) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $N^* = \max\{N_i\}$ ve $\sigma^*(t) = \min\{\sigma_i(s)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Ladde *et al.* 1987).

4.1 Birinci Mertebeden Lineer Olmayan İleri Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımı İçin Elde Edilen Kriterler

$$u'(t) - p(t)f(u(\sigma(t))) = 0,\ t \geq t_0 \tag{4.1.1}$$

birinci mertebeden lineer olmayan ileri diferensiyel denklemi göz önüne alalım. $p(t)$ ve $\sigma(t)$ negatif olmayan reel fonksiyonlar,

$$t \geq t_0 \text{ için } \sigma(t) \geq t \text{ ve } \lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty, \tag{4.1.2}$$

$$f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ve } u \neq 0 \text{ için } uf(u) > 0 \tag{4.1.3}$$

olmak üzere $\sigma(t)$ fonksiyonu için

$$\delta(t) := \inf_{s\geq t} \sigma(s),\ t \geq 0 \tag{4.1.4}$$

olacak şekilde $\delta(t)$ tanımlayalım. Açık olarak $t \geq 0$ için $\sigma(t) \geq \delta(t)$ ve $\delta(t)$ azalmayan bir fonksiyon olur. Ayrıca

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{u}{f(u)} = N,\ 0 \leq N < \infty \tag{4.1.5}$$

olsun. Böylece bu şartlar altında aşağıda verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1 (4.1.2), (4.1.3) ve (4.1.5) sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{\sigma(t)} p(s)ds > \frac{N}{e} \tag{4.1.6}$$

ise (4.1.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (4.1.1) denkleminin pozitif salınımsız bir $u(t)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Bu durumda $t \geq t_1$ için $u(t)$, $u(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 > t_0$ vardır. Ayrıca, (4.1.1) denkleminden

$$u'(t) = p(t)f(u(\sigma(t))) \geq 0,\ t \geq t_1$$

olduğundan $u(t)$ azalmayan bir fonksiyon olur. (4.1.6) şartından

$$\int_a^{\infty} p(t)dt = \infty \tag{4.1.7}$$

yazılır. (4.1.7) ifadesinden, (4.1.1) denkleminin tüm salınımsız çözümleri $t \to \infty$ iken sonsuza yakınsar. Yani, $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ olur [Teorem 3.1.6, Ladde *et al.* (1987)]. Şimdi $N > 0$ olsun. (4.1.5) ifadesi yardımıyla $t \geq t_2$ için

$$f(u(t)) \geq \frac{1}{2N} u(t) \tag{4.1.8}$$

olacak şekilde $t_2 > t_1$ vardır. Diğer yandan Öcalan ve Özkan (2016) tarafından yapılan çalışmada,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{\sigma(t)} p(s)ds = \liminf_{t\to\infty} \int_t^{\delta(t)} p(s)ds \tag{4.1.9}$$

eşitliğinin var olduğunu biliyoruz. (4.1.1) denklemi, $\sigma(t) \geq \delta(t)$, $u(t)$ ve $\delta(t)$ azalmayan fonksiyonlar olduğu için (4.1.8) ifadesi yardımıyla

$$u'(t) - \frac{1}{2N} p(t) u(\delta(t)) \geq 0,\ t \geq t_3 \tag{4.1.10}$$

eşitsizliğine dönüşür. Ayrıca (4.1.6) ve (4.1.9) ifadelerinden

$$\int_t^{\delta(t)} p(s)ds \geq c > \frac{N}{e},\ t \geq t_3 \geq t_2 \tag{4.1.11}$$

olacak şekilde $c > 0$ mevcuttur. Böylece (4.1.11) ifadesinden her $t \geq t_3$ için

$$\int_t^{t^*} p(s)ds > \frac{N}{2e} \text{ ve} \int_{t^*}^{\delta(t)} p(s)ds > \frac{N}{2e} \tag{4.1.12}$$

olacak şekilde $t^* \in (t, \delta(t))$ mevcuttur.

İlk olarak (4.1.10) eşitsizliği t den t^* a integre edilirse,

$$u(t^*) - u(t) - \frac{1}{2N} \int_t^{t^*} p(s) u(\delta(s)) ds \geq 0$$

veya

$$u(t^*) - u(t) - \frac{1}{2N} u(\delta(t)) \int_{t}^{t^*} p(s) ds \geq 0$$

ifadeleri elde edilir. Böylece (4.1.12) ifadesi yardımıyla,

$$u(t^*) - \frac{1}{2N} u(\delta(t)) \frac{N}{2e} > 0 \tag{4.1.13}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.1.10) eşitsizliği t^* dan $\delta(t)$ ye integre edilirse,

$$u(\delta(t)) - u(t^*) - \frac{1}{2N} \int_{t^*}^{\delta(t)} p(s) u(\delta(s)) ds \geq 0$$

veya

$$u(\delta(t)) - u(t^*) - \frac{1}{2N} u(\delta(t^*)) \int_{t^*}^{\delta(t)} p(s) ds \geq 0$$

ifadelerine ulaşılır. Böylece (4.1.12) ifadesi yardımıyla,

$$u(\delta(t)) - \frac{1}{2N} u(\delta(t^*)) \frac{N}{2e} > 0 \tag{4.1.14}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.13) ve (4.1.14) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde ise

$$u(t^*) > u(\delta(t)) \frac{1}{4e} > u(\delta(t^*)) \left(\frac{1}{4e} \right)^2$$

olur. Buradan

$$\frac{u(\delta(t^*))}{u(t^*)} < (4e)^2, \ t \geq t_4$$

ifadesi elde edilir.

$$z = \frac{u(\delta(t^*))}{u(t^*)} \geq 1$$

şeklinde tanımlanırsa $1 \leq z < (4e)^2$ olduğundan, z sınırlıdır.

Ayrıca (4.1.1) denklemi $u(t)$ ile bölünüp t den $\delta(t)$ ye integre edilirse,

$$\int_{t}^{\delta(t)} \frac{u'(s)}{u(s)} ds - \int_{t}^{\delta(t)} p(s) \frac{f(u(\sigma(s)))}{u(s)} ds = 0,$$

$$\ln\frac{u(\delta(t))}{u(t)}-\int_{t}^{\delta(t)}p(s)\frac{f(u(\sigma(s)))}{u(\sigma(s))}\frac{u(\sigma(s))}{u(s)}ds=0$$

ifadeleri elde edilir. $u(t)$ azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\ln\frac{u(\delta(t))}{u(t)}-\int_{t}^{\delta(t)}p(s)\frac{f(u(\sigma(s)))}{u(\sigma(s))}\frac{u(\delta(s))}{u(s)}ds\geq 0$$

olur. Diğer taraftan η, $t\to\infty$, $\eta\to\infty$ iken $t<\eta<\delta(t)$ olacak şekilde tanımlanırsa, $\delta(t)\to\infty$ olur. Böylece son eşitsizlik

$$\ln\frac{u(\delta(t))}{u(t)}-\frac{f(u(\sigma(\eta)))}{u(\sigma(\eta))}\frac{u(\delta(\eta))}{u(\eta)}\int_{t}^{\delta(t)}p(s)ds\geq 0$$

veya

$$\ln\frac{u(\delta(t))}{u(t)}\geq\frac{f(u(\sigma(\eta)))}{u(\sigma(\eta))}\frac{u(\delta(\eta))}{u(\eta)}\int_{t}^{\delta(t)}p(s)ds \tag{4.1.15}$$

ifadelerine dönüşür. Böylece (4.1.15) ifadesinin her iki tarafının alt limiti alınırsa $\ln z>\frac{z}{e}$ bulunur. Ancak her $x>0$ için $\ln x\leq\frac{x}{e}$ olduğu için bu durum imkansızdır. Böylece çelişki elde edilir.

Şimdi $N=0$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda $\frac{u}{f(u)}>0$ ve

$$\lim_{|u|\longrightarrow\infty}\frac{u}{f(u)}=0 \tag{4.1.16}$$

olduğundan (4.1.16) ifadesi yardımıyla

$$\frac{u}{f(u)}<\epsilon$$

veya

$$\frac{f(u)}{u}>\frac{1}{\epsilon} \tag{4.1.17}$$

olacak şekilde $\epsilon>0$ keyfi reel sayısı mevcuttur. Böylece (4.1.1) denklemi, $\delta(t)\leq\sigma(t)$ ve $u(t)$ ve $\delta(t)$ azalmayan fonksiyonlar olduğu için, (4.1.17) ifadesi yardımıyla

$$u'(t) - \frac{1}{\epsilon} p(t) u(\delta(t)) \geq 0 \tag{4.1.18}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Şimdi (4.1.18) ifadesi t den $\delta(t)$ ye integre edilirse,

$$u(\delta(t)) - u(t) - \frac{1}{\epsilon} \int_t^{\delta(t)} p(s) u(\delta(s)) ds \geq 0,$$

$$u(\delta(t)) - \frac{1}{\epsilon} u(\delta(t)) \int_t^{\delta(t)} p(s) ds \geq 0 \tag{4.1.19}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.1.11) ve (4.1.19) ifadelerinden

$$1 > \frac{c}{\epsilon}$$

veya

$$\epsilon > c$$

olur. Ancak bu durum $\lim\limits_{|u| \longrightarrow \infty} \frac{u}{f(u)} = 0$ olması ile çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 4.1.2 (4.1.2), (4.1.3), (4.1.5) ve (4.1.7) sağlansın. $0 < N < \infty$ ve $\delta(t) := \inf\limits_{s \geq t} \sigma(s)$ olmak üzere, eğer

$$\limsup_{t \to \infty} \int_t^{\delta(t)} p(s) ds > N \tag{4.1.20}$$

ise (4.1.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (4.1.1) denkleminin pozitif salınımsız bir $u(t)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Bu durumda $t \geq t_1$ için $u(t)$, $u(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 > t_0$ vardır. Ayrıca $u(t)$ azalmayan bir fonksiyondur. (4.1.7) ifadesi ve Teorem 4.1.1 den $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = \infty$ olur. $\theta > 1$ olmak üzere (4.1.5) ifadesinden

$$f(u(t)) \geq \frac{1}{\theta N} u(t) \tag{4.1.21}$$

eşitsizliği yazılır.

Kabülden

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{\delta(t)} p(s)ds = K > N$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti mevcuttur. Böylece $K > N$ olduğundan $N < \frac{K+N}{2} < K$ elde edilir. (4.1.1) denklemi, (4.1.21) yardımıyla

$$u'(t) - \frac{1}{\theta N} p(t)u(\sigma(t)) \geq 0$$

eşitsizliğine dönüşür. $\sigma(t) \geq \delta(t)$ ve $u(t)$ azalmayan olduğundan, elde edilen son eşitsizlik

$$u'(t) - \frac{1}{\theta N} p(t)u(\delta(t)) \geq 0 \tag{4.1.22}$$

şeklinde yazılır. Böylece (4.1.22) eşitsizliği t den $\delta(t)$ ye integre edilirse,

$$u(\delta(t)) - u(t) - \frac{1}{\theta N} \int_t^{\delta(t)} p(s)u(\delta(s))ds \geq 0,$$

$$u(\delta(t)) - \frac{1}{\theta N} u(\delta(t)) \int_t^{\delta(t)} p(s)ds \geq 0,$$

$$u(\delta(t)) \left[1 - \frac{1}{\theta N} \int_t^{\delta(t)} p(s)ds \right] \geq 0$$

bulunur. Yani

$$\int_t^{\delta(t)} p(s)ds < \theta N$$

elde edilir. Buradan

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{\delta(t)} p(s)ds \leq \theta N$$

olur. $\theta > 1$ ve $\frac{K+N}{2N} > 1$ olduğu için bu ifade θ olarak seçilebilir. Böylece $\theta = \frac{K+N}{2N} > 1$ ifadesi son bulunan eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{\delta(t)} p(s)ds = K \leq \frac{K+N}{2}$$

ifadesi elde edilir. Ancak $K > \frac{K+N}{2}$ olduğundan çelişki elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1 $\sigma(t)$ azalmayan bir fonksiyon olduğunda her t için $\sigma(t) = \delta(t)$ olur. Bu durumda (4.1.20) koşulu

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{\sigma(t)} p(s)ds > N \tag{4.1.23}$$

koşuluna dönüşür.

Örnek 4.1.1

$$u'(t) - \frac{3}{e} u(\sigma(t)) \ln(3 + |u(\sigma(t))|) = 0, \ t > 0 \tag{4.1.24}$$

birinci mertebeden lineer olmayan ileri diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $\sigma(t)$ fonksiyonu,

$$\sigma(t) = \begin{cases} 4t - 6k - 2, & t \in [2k+1, 2k+2] \\ -2t + 6k + 10, & t \in [2k+2, 2k+3] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca (4.1.4) yardımıyla,

$$\delta(t) := \inf_{s\geq t} \sigma(s) = \begin{cases} 4t - 6k - 2, & t \in [2k+1, 2k+1.5] \\ 2k + 4, & t \in [2k+1.5, 2k+3] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

ifadesi elde edilir. Burada $p(t) = \frac{3}{e}$ ve $f(u) = u \ln(3 + |u|)$ olarak alınırsa,

$$N = \limsup_{|u|\to\infty} \frac{u}{f(u)} = \limsup_{|u|\to\infty} \frac{u}{u\ln(3+|u|)} = 0$$

olur. Böylece $t = 2k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{\sigma(t)} p(s)ds = \frac{3}{e} > \frac{N}{e}$$

olup Teorem 4.1.1 in tüm şartları sağlanır ve (4.1.24) denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur.

4.2 Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Birkaç İleri Terimli Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımı İçin Elde Edilen Kriterler

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(u(\sigma_i(t))) = 0 \tag{4.2.1}$$

birinci mertebeden lineer olmayan birkaç ileri terimli diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ için $p_i(t)$ ve $\sigma_i(t)$ negatif olmayan reel fonksiyonlar olmak üzere,

$$1 \leq i \leq m \text{ için } \sigma_i(t) \geq t, \ t \geq t_0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} \sigma_i(t) = \infty, \tag{4.2.2}$$

$$1 \leq i \leq m, \ u \neq 0 \text{ için } f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ve } u f_i(u) > 0 \tag{4.2.3}$$

olsun. Diğer taraftan

$$\delta_i(t) := \inf_{s \geq t} \sigma_i(s), \ t \geq 0 \tag{4.2.4}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan, $1 \leq i \leq m$ için $\delta_i(t) \leq \sigma_i(t)$ ve $\delta_i(t)$ fonksiyonlarının azalmayan olduğu açıkca görülebilir. Ayrıca $1 \leq i \leq m$ olmak üzere f_i fonksiyonları için

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{u}{f_i(u)} = N_i, \ 0 \leq N_i < \infty \tag{4.2.5}$$

olsun. Böylece bu şartlar altında aşağıda verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1 (4.2.2), (4.2.3) ve (4.2.5) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds > \frac{N^*}{e} \tag{4.2.6}$$

ise (4.2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $N^* = \max\{N_i\}$ ve $\delta(t) = \max\{\delta_i(t)\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (4.2.1) denkleminin pozitif salınımsız bir $u(t)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Böylece $1 \leq i \leq m$ ve $t \geq t_1$ için $u(t)$, $u(\sigma_i(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 > t_0$ vardır. Ayrıca (4.2.1) denkleminden

$$u'(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(u(\sigma_i(t))) \geq 0$$

olduğundan $u(t)$ azalmayan bir fonksiyon olur. (4.2.6) şartından

$$\int_a^\infty \sum_{i=1}^{m} p_i(t) dt = \infty \tag{4.2.7}$$

yazılır. (4.2.7) ifadesinden, (4.2.1) denkleminin tüm salınımsız çözümleri $t \to \infty$ iken sonsuza yakınsadığından $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ olur [Teorem 3.1.6, Ladde *et al.* (1987)]. $N > 0$ olsun. (4.2.5) ifadesi yardımıyla $1 \leq i \leq m$ ve $t \geq t_2$ için

$$f_i(u(t)) \geq \frac{1}{2N_i} u(t) \geq \frac{1}{2N^*} u(t) \tag{4.2.8}$$

olacak şekilde $t_2 > t_1$ vardır. $1 \leq i \leq m$ için $\sigma_i(t) \geq \delta(t)$, $u(t)$ ve $\delta(t)$ azalmayan fonksiyonlar olduğu için (4.2.1) ve (4.2.8) ifadelerinden

$$u'(t) - \frac{1}{2N^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(t) u(\delta(t)) \geq 0 \tag{4.2.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca (4.2.6) ifadesinden

$$\int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds \geq c > \frac{N^*}{e} \tag{4.2.10}$$

olacak şekilde $c > 0$ mevcuttur. Böylece (4.2.10) ifadesinden her $t \geq t_3$ için

$$\int_t^{t^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds > \frac{N^*}{2e} \text{ ve } \int_{t^*}^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds > \frac{N^*}{2e} \tag{4.2.11}$$

olacak şekilde $t^* \in (t, \delta(t))$ mevcuttur.

İlk olarak (4.2.9) eşitsizliği t den t^* a integre edilirse,

$$u(t^*) - u(t) - \frac{1}{2N^*} \int_t^{t^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) u(\delta(s)) ds \geq 0$$

veya

$$u(t^*) - u(t) - \frac{1}{2N^*} u(\delta(t)) \int_t^{t^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds \geq 0$$

ifadeleri elde edilir. Diğer taraftan (4.2.11) ifadesi yardımıyla

$$u(t^*) - \frac{1}{2N^*}u(\delta(t))\frac{N^*}{2e} > 0 \tag{4.2.12}$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca (4.2.9) eşitsizliği t^* dan $\delta(t)$ ye integre edilirse,

$$u(\delta(t)) - u(t^*) - \frac{1}{2N^*}\int_{t^*}^{\delta(t)}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)u(\delta(s))ds \geq 0$$

veya

$$u(\delta(t)) - u(t^*) - \frac{1}{2N^*}u(\delta(t^*))\int_{t^*}^{\delta(t)}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)ds \geq 0$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.2.11) ifadesi yardımıyla

$$u(\delta(t)) - \frac{1}{2N^*}u(\delta(t^*))\frac{N^*}{2e} > 0 \tag{4.2.13}$$

eşitsizliği bulunur. (4.2.12) ve (4.2.13) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde ise

$$u(t^*) > u(\delta(t))\frac{1}{4e} > u(\delta(t^*))\left(\frac{1}{4e}\right)^2,$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\frac{u(\delta(t^*))}{u(t^*)} < (4e)^2\,,\ t \geq t_4$$

olur.

$$z = \frac{u(\delta(t^*))}{u(t^*)} \geq 1$$

olarak tanımlanırsa $1 \leq z < (4e)^2$ olduğundan, z sınırlıdır.

Daha sonra (4.2.1) denklemi $u(t)$ ile bölünüp t den $\delta(t)$ ye integre edilirse,

$$\int_{t}^{\delta(t)}\frac{u'(s)}{u(s)}ds - \int_{t}^{\delta(t)}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\frac{f_i(u(\sigma_i(s)))}{u(s)}ds = 0,$$

$$\ln\frac{u(\delta(t))}{u(t)} - \int_{t}^{\delta(t)}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\frac{f_i(u(\sigma_i(s)))}{u(\sigma_i(s))}\frac{u(\sigma_i(s))}{u(s)}ds = 0$$

ifadeleri elde edilir. $u(t)$ azalmayan ve $1 \leq i \leq m$ için $\delta(t) \leq \sigma_i(t)$ olduğundan

$$\ln\frac{u(\delta(t))}{u(t)}-\int\limits_t^{\delta(t)}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\frac{f_i(u(\sigma_i(s)))}{u(\sigma_i(s))}\frac{u(\delta(s))}{u(s)}ds\geq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca η, $t\to\infty$, $\eta\to\infty$ iken $t<\eta<\delta(t)$ olacak şekilde tanımlanırsa, $\delta(t)\to\infty$ olur. Böylece son eşitsizlik

$$\ln\frac{u(\delta(t))}{u(t)}-\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i(u(\sigma_i(\eta)))}{u(\sigma_i(\eta))}\frac{u(\delta(\eta))}{u(\eta)}\int\limits_t^{\delta(t)}p_i(s)ds\geq 0$$

veya

$$\ln\frac{u(\delta(t))}{u(t)}\geq\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i(u(\sigma_i(\eta)))}{u(\sigma_i(\eta))}\frac{u(\delta(\eta))}{u(\eta)}\int\limits_t^{\delta(t)}p_i(s)ds \tag{4.2.14}$$

şekline dönüşür. Böylece (4.2.14) ifadesinin her iki tarafının alt limiti alınırsa $\ln z>\frac{z}{e}$ elde edilir. Ancak her $x>0$ için $\ln x\leq\frac{x}{e}$ olduğu için bu durum imkansızdır. Böylece çelişki elde edilir.

Şimdi $N^*=0$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda $\frac{u}{f_i(u)}>0$ ve

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{u}{f_i(u)}=0 \tag{4.2.15}$$

olduğundan (4.2.15) ifadesi yardımıyla

$$\frac{u}{f_i(u)}<\epsilon_i<\epsilon^*$$

veya

$$\frac{f_i(u)}{u}>\frac{1}{\epsilon^*} \tag{4.2.16}$$

olur. Burada $\max\limits_{1\leq i\leq m}\{\epsilon_i\}=\epsilon^*>0$ keyfi bir reel sayıdır. Böylece (4.2.1) denklemi, $1\leq i\leq m$ için $\delta(t)\leq\sigma_i(t)$, $u(t)$ ve $\delta(t)$ azalmayan fonksiyonlar olduğundan ve (4.2.16) ifadesi yardımıyla

$$u'(t)-\frac{1}{\epsilon^*}\sum_{i=1}^{m}p_i(t)u(\delta(t))\geq 0 \tag{4.2.17}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Şimdi (4.2.17) ifadesi t den $\delta(t)$ ye integre edilirse,

$$u(\delta(t)) - u(t) - \frac{1}{\epsilon^*}\int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) u(\delta(s)) ds \geq 0,$$

$$u(\delta(t)) - \frac{1}{\epsilon^*} u(\delta(t)) \int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds \geq 0 \qquad (4.2.18)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.2.10) ve (4.2.18) ifadelerinden

$$1 > \frac{c}{\epsilon^*}$$

veya

$$\epsilon^* > c$$

bulunur. Ancak bu durum $\lim\limits_{|u|\to\infty} \frac{u}{f_i(u)} = 0$ olması ile çelişir ve teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 4.2.2 (4.2.2), (4.2.3), (4.2.5) ve (4.2.7) sağlansın. $0 < N^* < \infty$ olmak üzere, eğer

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds > N^* \qquad (4.2.19)$$

ise (4.2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $N^* = \max\{N_i\}$ ve $\delta(t) = \max\{\delta_i(t)\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (4.2.1) denkleminin pozitif salınımsız bir $u(t)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Bu durumda $t \geq t_1$ için $u(t)$, $u(\sigma_i(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 > t_0$ vardır. Ayrıca $u(t)$ azalmayan bir fonksiyondur. (4.2.7) ifadesi ve Teorem 4.2.1 den $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \infty$ olur. $\theta > 1$ olmak üzere (4.2.5) ifadesinden

$$f_i(u(t)) \geq \frac{1}{\theta N_i} u(t) \geq \frac{1}{\theta N^*} u(t) \qquad (4.2.20)$$

eşitsizliği yazılır.

Kabülden

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) ds = K > N^*$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti mevcuttur. Böylece $K > N^*$ olduğundan $N^* < \frac{K+N^*}{2} < K$ elde edilir. (4.2.20) eşitsizliği yardımıyla, (4.2.1) denklemi

$$u'(t) - \frac{1}{\theta N^*}\sum_{i=1}^{m} p_i(t)u(\sigma_i(t)) \geq 0$$

eşitsizliğine dönüşür. Ayrıca $1 \leq i \leq m$ için $\sigma_i(t) \geq \delta(t)$ ve $u(t)$ azalmayan olduğu için, elde edilen son eşitsizlik

$$u'(t) - \frac{1}{\theta N^*}\sum_{i=1}^{m} p_i(t)u(\delta(t)) \geq 0 \tag{4.2.21}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece elde edilen (4.2.21) eşitsizliği t den $\delta(t)$ ye integre edilirse,

$$u(\delta(t)) - u(t) - \frac{1}{\theta N^*}\int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)u(\delta(s))ds \geq 0,$$

$$u(\delta(t)) - \frac{1}{\theta N^*}u(\delta(t))\int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds \geq 0,$$

$$u(\delta(t))\left[1 - \frac{1}{\theta N^*}\int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds\right] \geq 0$$

olur. Buradan

$$\int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds < \theta N^*$$

bulunur. Yani

$$\limsup_{t\to\infty}\int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds \leq \theta N^*$$

olur. $\theta > 1$ ve $\frac{K+N^*}{2N^*} > 1$ olduğu için bu ifade θ olarak seçilebilir. Bu durumda $\theta = \frac{K+N^*}{2N^*} > 1$ ifadesi son bulunan eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\limsup_{t\to\infty}\int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds = K \leq \frac{K+N^*}{2}$$

ifadesi elde edilir. Ancak $K > \frac{K+N^*}{2}$ olduğundan çelişki elde edilir ve ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.1

$$u'(t) - \frac{2}{e}u(\sigma_1(t))\log(5+|u(\sigma_1(t))|) - \frac{4}{e}u(\sigma_2(t))\log(7+|u(\sigma_2(t))|) = 0,\ t \geq 1 \quad (4.2.22)$$

ileri diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $1 \leq i \leq m$ için $\sigma_i(t)$ fonksiyonları,

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} 4t-6k-2, & t \in [2k+1, 2k+2] \\ -2t+6k+10, & t \in [2k+2, 2k+3] \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\sigma_2(t) = \sigma_1(t)+2 = \begin{cases} 4t-6k, & t \in [2k+1, 2k+2] \\ -2t+6k+12, & t \in [2k+2, 2k+3] \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Ayrıca, (4.2.4) yardımıyla,

$$\delta_1(t) := \inf_{t \leq s} \sigma_1(s) = \begin{cases} 4t-6k-2, & t \in [2k+1, 2k+1.5] \\ 2k+4, & t \in [2k+1.5, 2k+3] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\delta_2(t) := \inf_{t \leq s} \sigma_2(s) = \begin{cases} 4t-6k, & t \in [2k+1, 2k+1.5] \\ 2k+6, & t \in [2k+1.5, 2k+3] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

ifadeleri elde edilir. Böylece

$$\delta(t) = \max_{1 \leq i \leq 2} \{\delta_i(t)\} = \delta_2(t)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $p_1(t) = \frac{2}{e}$, $p_2(t) = \frac{4}{e}$ ve $f_1(u) = u\log(5+|u|)$, $f_2(u) = u\log(7+|u|)$ olarak alınırsa,

$$N_1 = \limsup_{|u|\to\infty} \frac{u}{f_1(u)} = \limsup_{|u|\to\infty} \frac{u}{u\log(5+|u|)} = 0,$$

$$N_2 = \limsup_{|u|\to\infty} \frac{u}{f_2(u)} = \limsup_{|u|\to\infty} \frac{u}{u\log(7+|u|)} = 0$$

ve

$$\max\{N_1, N_2\} = N^* = 0$$

bulunur. Böylece $t = 2k+3$, $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{\delta(t)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds = \frac{18}{e} > \frac{N^*}{e}$$

olur. Yani Teorem 4.2.1 in tüm şartları sağlanır ve (4.2.22) denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur.

5 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

$$u'(t) + p(t)f(u(\sigma(t))) = 0 \tag{5.1}$$

birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $p(t) \geq 0$, $\sigma(t) \geq 0, \sigma(t)$ monoton olması gerekmeyen gecikme ve

$$t \geq t_0 \text{ için } \sigma(t) \leq t \text{ ve } \lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty,$$

$$f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ve } u \neq 0 \text{ için } uf(u) > 0$$

olsun. Ayrıca

$$\limsup_{u\to 0} \frac{u}{f(u)} = N, \quad 0 \leq N < \infty$$

olmak üzere (5.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için aşağıdaki koşullar elde edilmiştir.

(i)

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds > \frac{N}{e},$$

(ii) $0 < N < \infty$ ve $\delta(t) := \sup_{s\leq t} \sigma(s)$ olmak üzere,

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\delta(t)}^{t} p(s)ds > N.$$

Elde edilen bu sonuçlar ile "Oscillation of Nonlinear Delay Differential Equations with Non-Monotone Arguments" isimli makale çalışması hazırlanmış ve "International Journal of Analysis and Applications" adlı dergide yayınlanmıştır.

Birinci mertebeden lineer olmayan ileri diferensiyel denklemi göz önüne alalım.

$$u'(t) - p(t)f(u(\sigma(t))) = 0, \tag{5.2}$$

$p(t) \geq 0$, $\sigma(t) \geq 0, \sigma(t)$ monoton olması gerekmeyen gecikme,

$$t \geq t_0 \text{ için } \sigma(t) \geq t \text{ ve } \lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty,$$

$$f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ve } u \neq 0 \text{ için } uf(u) > 0$$

olsun. Ayrıca

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{u}{f(u)} = N, \quad 0 \leq N < \infty$$

olmak üzere (5.2) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için aşağıdaki koşullar elde edilmiştir.

(i)

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{\sigma(t)} p(s)ds > \frac{N}{e},$$

(ii) $0 < N < \infty$ ve $\delta(t) := \inf_{s\geq t} \sigma(s)$ olmak üzere,

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{\delta(t)} p(s)ds > N.$$

Buradan elde edilen sonuçlar ile "Oscillatory Behaviour of Non-Linear Advanced Differential Equations with Non-Monotone Argument" isimli makale çalışması hazırlanmış ve Acta Mathematica Universitatis Comenianae adlı dergide yayına kabul edilmiştir.

Birinci mertebeden lineer olmayan birkaç gecikme terimli diferensiyel denklemi göz önüne alalım.

$$u'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(u(\sigma_i(t))) = 0, \tag{5.3}$$

burada $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ için $p_i(t) \geq 0$, $\sigma_i(t) \geq 0$, $\sigma_i(t)$ monoton olması gerekmeyen gecikmeler olmak üzere,

$$1 \leq i \leq m \text{ için } \sigma_i(t) \leq t, \ t \geq t_0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} \sigma_i(t) = \infty,$$

$$1 \leq i \leq m, \ u \neq 0 \text{ için } f_i \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ ve } uf_i(u) > 0$$

olsun. Ayrıca $1 \leq i \leq m$ için

$$\limsup_{u\to 0} \frac{u}{f_i(u)} = N_i, \ 0 \leq N_i < \infty$$

olmak üzere (5.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için aşağıdaki şartlar elde edilmiştir. $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ için

(i)

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{\delta(t)}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds > \frac{N^*}{e},$$

(ii) $0 < N^* < \infty$ olmak üzere,

$$\limsup_{t\to\infty} \int\limits_{\delta(t)}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)ds > N^*,$$

burada $\delta_i(t) := \sup_{t\geq s} \sigma_i(s)$, $N^* = \max\{N_i\}$ ve $\delta(t) = \min\{\delta_i(t)\}$ şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen bu salınımlılık koşulları ile birlikte "Oscillatory Behaviour for Nonlinear Delay Differential Equations with Several Non-Monotone Arguments" isimli makale çalışması hazırlanmış ve yayına sunulmuştur. Ayrıca "Lineer Olmayan Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılık Davranışı" isimli BAPK proje çalışması başlatılmıştır ve "On Oscillation of Nonlinear Differential Equations" isimli sözlü bildirimiz IJAS (2018) isimli konferansta sunulmuştur.

Birinci mertebeden lineer olmayan birkaç ileri terimli diferensiyel denklemi göz önüne alalım.

$$u'(t) - \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(u(\sigma_i(t))) = 0, \tag{5.4}$$

burada $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ için $p_i(t) \geq 0$, $\sigma_i(t) \geq 0$, $\sigma_i(t)$ monoton olması gerekmeyen gecikmeler olmak üzere,

$$1 \leq i \leq m \text{ için } \sigma_i(t) \geq t,\ t \geq t_0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} \sigma_i(t) = \infty,$$

$$1 \leq i \leq m,\ u \neq 0 \text{ için } f_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ ve } u f_i(u) > 0$$

olsun. Ayrıca $1 \leq i \leq m$ için

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{u}{f_i(u)} = N_i,\ 0 \leq N_i < \infty$$

olmak üzere (5.4) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için aşağıdaki şartlar elde edilmiştir. $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ için

(i)

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t}^{\delta(t)}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)ds > \frac{N^*}{e},$$

(ii) $0 < N^* < \infty$ olmak üzere,

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t}^{\delta(t)}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)ds > N^*,$$

burada $\delta_i(t) := \inf_{s\geq t}\sigma_i(s)$, $N^* = \max\{N_i\}$ ve $\delta(t) = \max\{\delta_i(t)\}$ şeklinde tanımlanmıştır. Burada elde ettiğimiz sonuçlar ise makale çalışması olarak derlenip yayına sunulmak üzere hazırlanmaktadır.

Birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerle ilgili yapılan önceki çalışmalarda gecikme terimlerinin monoton olması söz konusu idi ancak elde ettiğimiz sonuçlar ile birlikte gecikme terimlerinin monoton olma şartı kaldırıldı. Böylece elde edilen yeni salınımlılık kriterleri ile birlikte monoton olmayan gecikmeleri içeren birinci mertebeden lineer olmayan gecikmeli ve ileri diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı gösterildi.

6 KAYNAKLAR

Arino, O., Gyori, I. and Jawhari, A. (1984). Oscillation criteria in delay equations. *Journal of Differential Equations*, **53:** 115-123.

Berezansky, L. and Braverman, E. (2011). On some constants for oscillation and Stability of delay equations. *Proceedings of the American Mathematical Society,* **139** (11)**:** 4017-4026.

Bildik, N. (2012). Bilim ve Teknolojide Gelişmişliğin Matematiksel Temeli. Celal Bayar Üniversitesi.

Braverman, E. and Karpuz, B. (2011). On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays. *Applied Mathematics and Computation*, **218:** 3880-3887.

Chatzarakis, G. E. and Öcalan Ö. (2016). Oscillations of differential equations with non-monotone retarded arguments. *LMS Journal of Computation and Mathematics,* **19** (1)**:** 98-104.

Chatzarakis, G. E. and Öcalan Ö. (2015). Oscillations of differential equations with several non-monotone arguments. *Dynmical Systems,* **30** (3)**:** 310-323.

Elbert, A. and Stavroulakis, I. P. (1990). Oscillations of first order differential equations with deviating arguments. University of Ioannina T. R. No. 172. Recent trends in differential equations, 163-178, World Sci. Ser. Appl. Anal., 1, World Sci. Publishing Co. (1992).

Elbert, A. and Stavroulakis, I. P. (1995). Oscillation and non-oscillation criteria for delay differential equations. *Proceeding of the American Mathematical Society,* **123:** 1503-1510.

Erbe, L. H., Kong, Q. and Zhang, B. G. (1995). Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Marcel Dekker, New York.

Erbe, L. H. and Zhang, B. G. (1988). Oscillation of first order linear differential equations with deviating arguments. *Differential Integral Equations,* **1:** 305-314.

Fukagai, N. and Kusano, T. (1984). Oscillation theory of first order functional differential equations with deviating arguments. *Annali di Matematica Pura ed Applicata,* **136:** 95-117.

Gopalsamy, K. (1992). Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Kluwer Academic Publishers.

Grammatikopoulos, M. K., Koplatadze, R. G. and Stavroulakis, I. P. (2003). On the oscillation of solutions of first order differential equations with retarded arguments. *Georgian Mathematical Journal,* **10:** 63-76.

Gyori, I. and Ladas, G. (1991). Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. Clarendon Press, Oxford.

Hunt, B. R. and Yorke, J. A. (1984). When all solutions $x' = \sum q_i(t)x(t - T_i(t))$ oscillate. *Journal of Differential Equations,* **53:** 139-145.

Koplatadze, R. G. and Chanturija, T. A. (1982). Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating arguments. *(Russian), Differentsial'nye Uravneniya*, **8:** 1463-1465.

Kulenovic, M. R. and Grammatikopoulos, M. K. (1988). Some Comparison and Oscillation Results for First-Order Differential Equations and Inequalities with a Deviating Argument. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **131:** 67-84.

Kusano, T. (1982). On Even Order Functional-Differential Equations with Advanced and Retarded Arguments. *Journal of Differential Equations,* **45:** 75-84.

Ladas, G. (1979). Sharp conditions for oscillations caused by delay. *Applicable Analysis,* **9:** 93-98.

Ladas, G., Laskhmikantham, V. and Papadakis, J. S. (1972). Oscillation of high-order retarded differential equations generated by retarded arguments. Delay and Functional Differential Equations and Their Applications. Academic Press, New York, 219-231.

Ladas, G. and Stavroulakis, I. P. (1982). Oscillation Caused by Several Retarded and Advanced Arguments. *Journal of Differential Equations,* **44:** 134-152.

Ladde, G. S., Laskhmikantham, V. and Zhang, B. G. (1987). Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 110, Marcel Dekker, Inc., New York.

Li, X. and Zhu, D. (2002). Oscillation and Nonoscillation of Advanced Differential Equations with Variable Coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.,* **269:** 462-488.

Myshkis, A. D. (1950). Linear Homogeneous Differential Equations of First Order with Deviating Arguments. *(Russian), Uspekhi Matematicheskikh Nauk,* **5:** 160-162.

Öcalan, Ö. and Özkan, U. M. (2016). Oscillations of Dynamic Equations on Time Scales with Advanced Arguments. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations,* **6** (4): 275-284.

Öcalan, Ö., Kılıç, N., Şahin, S. and Özkan, U. M. (2017). Oscillation of Nonlinear Delay Differential Equation with Non-Monotone Arguments. *International Journal of Analysis and Applications,* **14** (2):147-154.

Öcalan, Ö., Kılıç, N. and Özkan, U. M. (2018). Oscillatory Behaviour of Nonlinear Advanced Differential Equations with Non-Monotone Argument. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae,* yayına kabul edildi.

Tang, X. H. (2004). Oscillation of First Order Delay Differential Equations with Distributed Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **289:** 367-378.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Nurten KILIÇ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Afyonkarahisar / 27.06.1990
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	:	nurten.kilic@dpu.edu.tr

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi, 2008.
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2012.
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik ABD., 2014.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Isparta- Yalvaç Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, $2014 - 2016$

Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,

Matematik Bölümü, 2016−

Yayınları (SCI ve Diğer):

Öcalan, Ö., **Kılıç, N.**, Şahin, S. and Özkan, U. M. (2017). Oscillation of Nonlinear Delay Differential Equation with Non-Monotone Arguments. *International Journal of Analysis and Applications,* **14** (2):147-154.

Öcalan, Ö., **Kılıç, N.** and Özkan, U. M. (2018). Oscillatory Behaviour of Nonlinear Advanced Differential Equations with Non-Monotone Argument. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae,* yayına kabul edildi.

Projeler

Lineer Olmayan Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılık Davranışı.

Bildiriler

On Oscillation of Nonlinear Differential Equations, Özet Bildiri- Sözlü Sunum, IJAS 2018 (Paris-France).