ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Begüm HİÇYILMAZ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2013

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE

Begüm HİÇYILMAZ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2013

TEZ ONAY SAYFASI

Begüm HİÇYILMAZ tarafından hazırlanan "Armendariz Halkalar Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 13/06/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Başkan : Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ

Üye : Doç. Dr. Muhittin BAŞER

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
......./....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

13/06/2013

Begüm Hiçyılmaz

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ARMENDARİZ HALKALAR ÜZERİNE

Begüm HİÇYILMAZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

Bu çalışma, üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmı için ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramların tanımları ve bazı teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümün; birinci kısmında, Armendariz halkalar tanıtılarak özellikleri incelenmiş ve bir halkanın Armendariz olması için bazı karakterizasyonlar verilmiştir. İkinci kısmında, Armendariz olmayan halka örnekleri verilmiş ve bu halkaların Armendariz olan alt halkaları incelenmiştir. Son olarak üçüncü kısımda, Armendariz halka sınıfının diğer halka sınıflarıyla arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

2013, v+57 sayfa

Anahtar Kelimeler : Armendariz halka, inmiş halka, aşikar genişleme, matris halkası, polinom halkası

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON ARMENDARIZ RINGS

Begüm HİÇYILMAZ
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA

This thesis consists of three chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter introduces with the preliminaries, definitions and necessary theorems that will be required for later use. The first part of third chapter introduces Armendariz rings and analyses properties of these rings to give characterizations for being an Armendariz rings. Second part gives examples of rings which are not Armendariz, and examines subrings of these rings which are Armendariz. Finally, the relationships between Armendariz rings and other rings are investigated.

2013, v+57 pages

Key Words : Armendariz ring, reduced ring, trivial extension, matrix ring, polynomial ring.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak kendimi geliştirmeme katkı sağlayan çok değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA'ya ve hocam Sayın Doç. Dr. Muhittin BAŞER'e, tez yazım aşaması süresince ilgi ve desteğini hiç eksik etmeyen, engin bilgi ve görüşlerini paylaşarak yol gösteren Sayın Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ'ye, ayrıca tez yazım aşamasındaki yardımlarından dolayı Sayın Dr. Başak KARPUZ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Begüm HİÇYILMAZ

AFYONKARAHİSAR, 2013

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
A_f	f polinomunun tüm katsayılarının kümesi
α	R'nin bir endomorfizması
$\bar{\alpha}$	R'nin bir α endomorfizmasının genişletilmişi
C_R	Bir R halkasının regüler elemanlarının kümesi
E_{ij}	Matris birimleri
$\mathrm{Im}\theta$	Bir θ halka homomorfizmasının görüntüsü
$\mathrm{Ker}\theta$	Bir θ halka homomorfizmasının çekirdeği
$l_R(X)$	X'in sol sıfırlayanı
$M_n(R)$	R üzerindeki nxn tipindeki tüm matrislerin halkası
M_R	Sağ R modül
$r_R(X)$	X'in sağ sıfırlayanı
$\mathrm{rad}(R)$	Bir R halkasının asal radikali
R	Herhangi bir halka
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[\mid x \mid]$	R üzerindeki formal kuvvet serilerinin halkası
$R[x;\alpha]$	R'nin skew polinom halkası
$R[\mid x;\alpha \mid]$	R üzerindeki skew kuvvet serilerinin halkası
$R[x;\alpha,\delta]$	R halkasının Ore genişlemesi
$R(+)_hM$	R halkasının M modülü ile Nagata genişlemesi
$T(R,M)=R(+)M$	R halkasının M modülü ile aşikar genişlemesi
$UTM_n(R)$	R üzerindeki $n\times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası

1 GİRİŞ

Armendariz halka kavramı; 1997'de tanımlanmasının ardından pek çok yazar tarafından günümüze kadar araştırılan, genişletilen popüler bir konu olmuştur. 1997'de Rege ve Chhawchharia bu kavramı ilk ortaya atan kişilerdir. R bir halka ve $R[x]$; R halkası üzerindeki polinomlar halkası olmak üzere $R[x]$'deki $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ve $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ polinomları için $f(x)g(x) = 0$ iken her i, j için $a_ib_j = 0$ oluyorsa R halkasını *Armendariz* olarak adlandırmışlardır. Bu ismi vermelerinin nedeni, 1974'de ilk olarak inmiş (sıfırdan farklı üstel sıfır (nilpotent) eleman bulundurmayan) bir halkanın bu özelliği sağladığını E. P. Armendariz'in göstermiş olmasıdır. Bu anlamda Armendariz halkalar inmiş halkaların bir genişlemesidir. Armendariz halka fikri ise; bir halkanın sıfır bölenleri ile polinom halkasının sıfır bölenleri arasındaki ilişkinin anlaşılması bakımından önemlidir. Çoğunun bu tez çalışmasında da özetlendiği Armendariz halkaların değişik özelliklerinin ve karakterizasyonlarının incelendiği (Rege and Chhawchharia, 1997), (Anderson and Camillo, 1998), (Kim and Lee, 2000), (Huh et al., 2002), (Lee and Wong, 2003), (Lee and Zhou, 2004) pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda; Armendariz bir R halkasının $R[x]$ polinom halkası, $R[x; \alpha]$ skew polinom halkası, $M_n(R)$ matris halkası, $UTM_n(R)$ üst üçgensel matris halkası, R/I bölüm halkası, $T(R, R)$ aşikar genişlemesi, $Q(R)$ klasik kesirler halkası ve eRe genişmesi, gibi bazı genişlemelerinin de Armendariz olup olmadığı ya da hangi koşullar altında Armendariz olduğu farklı yaklaşımlarla incelenmiştir.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde; bu çalışma için gerekli olan bazı temel kavramların tanımlarına ve bazı özelliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümün birinci kısmında Armendariz halkalar tanımlanmış ve tezin hazırlanmasında kullanılan yayınların tarih sırası dikkate alınarak Armendariz halkaların sağladığı bir takım özellikler ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Daha açık bir ifadeyle Armendariz halkaların alt halkalarının Armendariz olduğu, inmiş halkaların Armendariz olduğu (fakat bu gerektirmenin tersinin doğru olmadığı), inmiş halkaların aşikar genişlemelerinin Armendariz olduğu (fakat Armendariz halkaların aşikar genişlemelerinin Armendariz olmadığı), Armendariz halkaların polinom halkalarının Armendariz olduğu (fakat Armendariz halkaların skew polinom halkalarının Armendariz olmadığı), bölüm halkası Armendariz iken hangi koşul altında halkanın kendisinin Armendariz olduğu, Armendariz halkaların eşkare (idempotentleri) elemanları yardımıyla oluşturulan genişlemelerinin Armendariz olduğu gibi bazı özellikler gösterilmiştir.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünün ikinci kısmında ise Armendariz olmayan halkalara örnekler verilerek bu halkaların bazı alt halkalarının Armendariz olduğu gösterilmiştir. Son olarak Armendariz halkaların inmiş (reduced), Gaussian, abelyan, terslenebilir (reversible), yarıdeğişmeli (semicommutative), Baer ve $p.p$-halka gibi bazı halka sınıflarıyla ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca bir R halkasının abelyan olma özelliği $R[x]$ polinom halkası ve $R[[x]]$ formal kuvvet seriler halkasına koşulsuz olarak taşınırken Baer ya da $p.p$-halka olma özelliklerinin $R[x]$ polinom halkası ve $R[[x]]$ formal kuvvet seriler halkasına taşınmasının Armendarizlik koşulu altında gerçeleştiği gösterilmiştir. Ayrıca bir R halkasının klasik kesirler halkası yardımıyla Armendariz olması için bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Çalışmamızda kullanılan kaynakların tamamına kaynaklar bölümünde yer verilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilecek ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan bazı halka sınıfları tanıtılacaktır. Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe R birimli bir halkadır. Halkanın toplamaya göre etkisiz elemanı 0 ve çarpımsal birimi 1 ile gösterilecektir.

2.1 Genel Tanımlar

Tanım 2.1.1 R bir halka ve P, R'nin kendisinden farklı bir ideali olsun. R'nin A, B idealleri için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa, P'ye R'nin *asal ideali* denir.

Tanım 2.1.2 R'nin tüm asal ideallerinin arakesitine R'nin *asal radikali* denir ve

$$\mathrm{rad}(R) = \cap\{P : \ P \text{ asal ideal}\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 X bir R halkasının bir alt kümesi olsun.$\{A_i : \ i \in I\}$, R'nin X'i kapsayan tüm (sol) ideallerinin ailesi olsun. Bu durumda $\cap_{i\in I} A_i$ ideali X *tarafından üretilen (sol) ideal* olarak adlandırılır ve (X) ile gösterilir. X kümesinin elemanları (X) idealinin *üreteçleri* (generators) olarak adlandırılır. Eğer $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sonlu ise (X) idealine *sonlu üretilmiş* (finitely generated) denir. Eğer $X = \{x\}$ ise yani bir tek eleman tarafından üretiliyorsa *temel ideal* (principal ideal) olarak adlandırılır. Her ideali temel ideal olan halkaya *temel ideal halkası* denir. Bir tamlık bölgesi (değişmeli sıfır bölensiz halka) aynı zamanda bir temel ideal halkası ise *temel ideal bölgesi* adı verilir.

Tanım 2.1.4 R bir halka ve ${}_RM_R$ bir bimodül olsun. R'nin M ile *aşikar genişlemesi* (trivial extension) olarak adlandırılan $R(+)M$ kümesi;

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$$

ile tanımlanan işlemlerle bir halkadır. Bu halka $T(R, M)$ (ya da $R(+)M$) ile gösterilir. Bu halka aynı zamanda $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}$ formundaki tüm matrislerin halkasına izomorftur. Yani

$$T(R, M) = R(+)M \cong \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R, m \in M \right\}$$

dir.

Tanım 2.1.5 R değişmeli bir halka, $h : R \to R$ bir halka homomorfizması ve M bir R-modül olsun. *R ile M'nin Nagata genişlemesi* olarak adlandırılan $R \oplus M$ kümesi

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, h(r_1)m_2 + r_2 m_1)$$

ile tanımlı işlemlerle (değişmeli olmayan) bir halka yapısındadır. Bu halka $R(+)_h M$ ile gösterilir. Özel olarak h halkanın birim endomorfizması olarak alınırsa

$$R(+)_h M = R(+)M = T(R, M)$$

olduğu açıktır.

Teorem 2.1.6 (Çin Kalan Teoremi) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ her $i \neq j$ için $A_i + A_j = R$ olacak şekilde bir R halkasının idealleri olsun. $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$ ise, bu durumda

$$b \equiv b_i \quad (\mathrm{mod} A_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

olacak şekilde $b \in R$ vardır. Bundan başka b elemanı $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ idealinin kongrüans modülüne göre tek olarak belirlidir. Ayrıca

$$R/(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cong R/A_1 \times R/A_2 \times \ldots \times R/A_n$$

dir.

2.2 Polinom Halkaları

R bir halka olmak üzere R üzerindeki $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ biçimindeki tüm polinomların kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır ve bu halka $R[x]$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1 R bir halka olmak üzere

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i : \ a_i \in R \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte bir halkadır. Bu halka R üzerindeki *kuvvet serilerinin halkası*(formal power series ring) olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2 R bir halka olmak üzere

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i : \ a_i \in R \ (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir}) \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır ve bu halka *Laurent polinomlar halkası* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.3 R bir halka ve $\alpha : R \longrightarrow R$ bir halka endomorfiması olsun. Bir $\delta : R \longrightarrow R$ toplamsal dönüşümü; her $a, b \in R$ için

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$$

özelliğini sağlarsa, bu durumda δ dönüşümüne R'nin bir *α-türevi* (α-derivation) denir.

Tanım 2.2.4 R bir halka; α, R'nin bir endomorfizması ve δ, R'nin bir α-türevi olsun. R halkasının $R[x; \alpha, \delta]$ *Ore genişlemesi*; bilinen toplama ve herhangi bir $a \in R$ için

$$xa = \alpha(a)x + \delta(a)$$

ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Eğer δ, R'nin sıfır endomorfizması ise, bu durumda $R[x; \alpha, 0]$ yerine $R[x; \alpha]$ yazılır ve bu halka *endomorfizma tipinin bir Ore genişlemesi* (ya da *skew polinom halkası*) olarak adlandırılır. Diğer bir ifadeyle $R[x; \alpha]$ kümesi polinomlardaki bilinen toplama işlemi ve

$$xa = \alpha(a)x$$

ile tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. $R[[x; \alpha]]$ halkası ise *skew kuvvet seriler halkası* olarak adlandırılır.

Özel olarak α, R'nin birim endomorfizması ve δ, R'nin sıfır endomorfizması olarak alınırsa $R[x; I_R, 0] = R[x]$ olacağı açıktır.

2.3 Matris Halkaları

Bu bölümde bir R halkasından elde edilen bazı özel tipteki matris halkaları tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.1 R bir halka olmak üzere R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi, matrislerdeki toplama ve çarpma işlemlerine göre toplamsal birimi $n \times n$ tipindeki sıfır matrisi, çarpımsal birimi ise $n \times n$ tipindeki birim matris olan bir halkadır. Burada sıfır matrisi O ile birim matrisi ise I_n ile gösterilecektir. R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası

$$M_n(R) = \{[a_{ij}]_{n\times n} : \ a_{ij} \in R\}$$

ile gösterilecektir. R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm üst üçgensel matrislerin halkası ise

$$UTM_n(R) = \{[a_{ij}]_{n\times n} : \ a_{ij} \in R \ \text{ ve } \ i > j \ \text{ iken } \ a_{ij} = 0\}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.2 Herhangi bir R halkası üzerinde i. satır j. sütunundaki bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan matrislere *matris birimleri* (matrix units) denir ve E_{ij} ile gösterilir. Örneğin herhangi bir R halkası üzerindeki tüm 2×2 tipindeki matris birimleri

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 2.3.3 Herhangi bir $A \in M_n(R)$ için, $RA = \{rA : \ r \in R\}$ olsun. $n \geq 2$ için $\{E_{i,j} : \ 1 \leq i, j \leq n\}$ matris birimleri kümesi olmak üzere, $V = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ olsun. $n = 2k \geq 2$ çift sayısı için,

$$A_n^e(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+i}^{n} RE_{i,j}, \quad B_n^e(R) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=k+i-1}^{n} RE_{i,j}$$

ve $n = 2k + 1 \geq 3$ tek sayısı için,

$$A_n^o(R) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=k+i}^{n} RE_{i,j}, \quad B_n^o(R) = \sum_{i=1}^{k+2} \sum_{j=k+i-1}^{n} RE_{i,j}$$

olarak tanımlanır. Diğer taraftan

$$\begin{array}{lll} n = 2k \text{ için} & A_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-1} + A_n^e(R), \\ & B_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-2} + B_n^e(R), \\ n = 2k+1 \text{ için} & A_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-1} + A_n^o(R), \\ & B_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-2} + B_n^o(R) \end{array}$$

olarak tanımlanır. Örneğin,

$$A_4(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a & b \\ 0 & a_1 & a_2 & c \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a, b, c \in R \right\},$$

$$B_4(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a & b & c \\ 0 & a_1 & d & r \\ 0 & 0 & a_1 & s \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1, a, b, c, d, r, s \in R \right\},$$

$$A_5(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a & b & c \\ 0 & a_1 & a_2 & d & r \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & s \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a, b, c, d, r, s \in R \right\},$$

$$B_5(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a & b & c & d \\ 0 & a_1 & r & s & t \\ 0 & 0 & a_1 & u & v \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1, a, b, c, d, r, s, t, u, v, w \in R \right\}$$

şeklindedir (Lee ve Zhou 2004).

2.4 Klasik Sağ Kesirler Halkası

Tanım 2.4.1 R bir halka olsun. $s \in R$ olmak üzere her $0 \neq r \in R$ için $rs \neq 0$ ve $sr \neq 0$ ise s'ye *regüler* eleman denir. Başka bir ifadeyle bir $r \in R$ için $rs = 0$ veya $sr = 0$ iken $r = 0$ oluyorsa s'ye *regüler* eleman denir.

Bir halkanın birimi regüler eleman iken sıfırı regüler eleman değildir. Ayrıca bir R halkasının tersinir elemanları da regülerdir. Gerçekten; $s \in R$ tersinir olsun. $r \in R$ olmak üzere $rs = 0$ olduğunu kabul edelim. s tersinir olduğundan $rss^{-1} = 0s^{-1}$ olur. Buradan $r = 0$ olup s regülerdir. Fakat bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}$ halkasında 2 regüler eleman fakat tersinir değildir. Bundan başka bir tamlık bölgesinde sıfırdan farklı her eleman regülerdir.

Tanım 2.4.2 S, R'nin çarpımsal alt monoidi (birimli ve birleşmeli) olmak üzere

(i) $\nu : R \to Q$ homomorfizması her $s \in S$ için $\nu(s)$ tersinir olacak şekilde vardır.

(ii) Q'nun her elemanı $s \in S$ ve $r \in R$ için $[\nu(s)]^{-1}\nu(r)$ formundadır.

özellikleri sağlanırsa Q halkasına *R'nin S'ye göre kesirlerinin halkası* denir.

Lemma 2.4.3 $S = \{r \in R : \; r \;\text{ regüler eleman}\}$ kümesi R'nin bir çarpımsal alt monoididir.

İspat $r_1, r_2 \in S$ alalım. $r_1 r_2 \in S$ yani $r_1 r_2$ regüler olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $r(r_1 r_2) = 0$ olsun. R halkası birleşmeli olduğundan $(rr_1)r_2 = 0$ olup r_2 regüler eleman olduğundan $rr_1 = 0$'dır. r_1 regüler eleman olduğundan $r = 0$ bulunur. Benzer olarak $(r_1 r_2)r = 0$ olsun. R halkası birleşmeli olduğundan $r_1(r_2 r) = 0$ olup r_1 regüler olduğundan $r_2 r = 0$ olur. r_2 regüler eleman olduğundan $r = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $r_1 r_2 \in S$ bulunur. $1_R \in S$ ve S'de birleşme özelliği var olduğundan S, R'nin çarpımsal monoididir. $\square$

Tanım 2.4.4 $S = \{r \in R : \; r \;\text{ regüler eleman}\}$ olmak üzere birebir olan $\varphi : R \to Q$ dönüşümü varsa Q'ya R'nin *klasik sağ kesirler halkası* denir.

Tanım 2.4.5 S, R'nin bir alt monoidi olsun. Bu durumda

(i) Herhangi $s_1 \in S$ ve $r_1 \in R$ için $s_2 r_1 = r_2 s_1$ olacak şekilde $s_2 \in S$ ve $r_2 \in R$ vardır.

(ii) $r \in R$ ve $s \in S$ için $rs = 0$ ise $s'r = 0$ olacak şekilde $s' \in S$ vardır.

özellikleri sağlanırsa S'ye bir *Dominator* (ya da Ore) küme denir.

Önerme 2.4.6 R, S'ye göre kesir halkasına sahipse S Ore kümedir.

2.5 Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda Armendariz halkalarla ilişkileri olan bazı halka sınıflarının tanımları verilecek ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 2.5.1 Bir R halkasının bir a elemanı için $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa a elemanı *üstel sıfır* (nilpotent) olarak adlandırılır. Bu özelliği sağlayan en küçük n doğal sayısına da a elemanının *üstel sıfırlık indeksi* (nilpotency index) denir. Bir R halkasının her bir elemanı üstel sıfır olan bir N idealine *nil ideal* denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.5.2 Bir R halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir e elemanına *eşkare* (idempotent) denir. Birimli bir halka her zaman 0 ve 1 eşkarelerine sahiptir. R halkasının bir e eşkare elemanı R'nin merkezinde ise, yani her $a \in R$ için $ae = ea$ oluyorsa e eşkare elemanı *merkezil eşkare* (central idempotent) olarak adlandırılır (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.5.3 Bir R halkasının tüm eşkareleri merkezil ise R halkası *abelyan* olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.4 Bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için $a^2 = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R'ye *inmiş* (reduced) halka denir. İnmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğu açıktır.

Tanım 2.5.5 Habeb 1990'da; $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa R halkasını *sıfır değişmeli* (zero commutative) olarak adlandırmıştır. Cohn 1999'da bu özelliği sağlayan halkaları *terslenebilir* (reversible) adı altında incelemiştir. Terslenebilir halkalar aynı zamanda 1999'da Anderson ve Camillo tarafından *sıfır çarpımlar değişir* (zero products commute) özelliğine sahip halkalar olarak ZC_2 adı altında çalışılmıştır. Ayrıca 1977'de Krempa ve Niewieczerzal bu özelliği sağlayan halkalara C_0 *halka* adını vermişlerdir.

R halkası inmiş ise terslenebilirdir. Gerçekten; R'nin inmiş olduğunu kabul edelim. R'nin terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = baba = 0$ olup R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. Dolayısıyla R terslenebilirdir.

Tanım 2.5.6 $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa R halkası *simetrik* (symetric) olarak adlandırılır (Lambek 1971). Anderson ve Camillo 1999'da simetrik halkalar için ZC_3 notasyonunu kullanarak bu halka sınıfının özelliklerini incelemiştir.

Her inmiş halka simetriktir (Shin 1973). Şimdi bunu gösterelim; $a, b, c \in R$ için $abc = 0$ olsun. Bu eşitlik sağdan b ile çarpılırsa $abcb = 0$ olur. R terslenebilir olduğundan $bcba = 0$ bulunur. Son eşitlik sağdan c ile çarpılırsa $bcbac = 0$ elde edilir. R terslenebilir olduğundan $cbacb = 0$ olur. Bu durumda $(cba)^2 = cbacba = 0$ ve R inmiş olduğundan $cba = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $acb = 0$ bulunur. Böylece R simetriktir. Fakat simetrik olup ta, inmiş olmayan halka sınıfları da vardır (Anderson ve Camillo 1999).

Değişmeli halkaların simetrik olduğu açıktır. Simetrik halkaların terslenebilir olduğu da kolayca gösterilebilir; $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Buradan $1ab = 0$ olup R simetrik olduğundan $1ba = ba = 0$ elde edilir. Fakat bu gerektirmenin tersi doğru olmayabilir (Anderson ve Camillo 1999) ve (Marks 2002).

Tanım 2.5.7 $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken $aRb = 0$ oluyorsa R halkası *yarıdeğişmeli* (semicommutative) olarak adlandırılır (Shin 1973). Bir R halkasının yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul her bir $a \in R$ için $r_R(a)$ sağ sıfırlayan (ya da $l_R(a)$ sol sıfırlayan) kümesinin R'nin bir ideali olmasıdır. Shin yarıdeğişmeli halkalar için *SI özelliğine* sahip halkalar adını da kullanmıştır. Yarıdeğişmeli halkalar aynı zamanda Habep tarafından *zero insertive* adı altında 1990 yılında çalışılmıştır.

Her terslenebilir halka yarıdeğişmelidir. Gerçekten; $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R ters- lenebilir olduğundan $ba = 0$ olur. Bu eşitlik sağdan herhangi bir $r \in R$ ile çarpılırsa $bar = 0$ olur. Buradan R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ elde edilir. Böylece $aRb = 0$, yani R halkası yarıdeğişmelidir.

Diğer taraftan her yarıdeğişmeli halka abelyan halkadır. Şimdi bunu gösterelim: $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $e(1-e) = 0$'dır. R halkası yarıdeğişmeli olduğundan $eR(1-e) = 0$ olur. Bu durumda herhangi bir $r \in R$ için $er(1-e) = 0$ bulunur. Buradan $ere = er$ elde edilir. Diğer taraftan $(1-e)e = 0$'dır. R halkası yarıdeğişmeli olduğundan $(1-e)Re = 0$ olur. Bu durumda herhangi bir $r \in R$ için $(1-e)re = 0$

bulunur. Buradan $ere = re$ elde edilir. Sonuç olarak herhangi bir $r \in R$ için $er = re$ olduğundan e eşkare elemanı merkezildir, yani R halkası abelyandır.
Böylece yukarıda tanımları verilen halka sınıfları için aşağıdaki gerektirmeler vardır. Fakat genel olarak bu gerektirmelerin herbirinin tersi doğru değildir.

$$R \text{ inmiş} \Rightarrow R \text{ simetrik} \Rightarrow R \text{ terslenebilir} \Rightarrow R \text{ yarıdeğişmeli} \Rightarrow R \text{ abelyan}$$

Tanım 2.5.8 $a \in R$ için $aRa = 0$ iken $a = 0$ oluyorsa R halkası *yarıasal* (semiprime) olarak adlandırılır. Yarıasal halkaların sınıfının, inmiş halkaların sınıfı tarafından kapsandığı çok açıktır.

Tanım 2.5.9 R bir halka olmak üzere R'nin boştan farklı her alt kümesinin sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretiliyorsa, yani her bir $\emptyset \neq X \subseteq R$ alt kümesi için $r_R(X) = eR$ (ya da $l_R(X) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası *Baer* olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.10 R bir halka olmak üzere R'nin her bir temel sağ ideali projektif ya da denk olarak R'nin her bir elemanının sağ (ya da sol) sıfırlayanı bir eşkare eleman tarafından üretiliyorsa, yani her bir $a \in R$ elemanı için $r_R(a) = eR$ (ya da $l_R(a) = Rf$) olacak şekilde bir $e^2 = e \in R$ (ya da $f^2 = f \in R$) varsa R halkası *sağ p.p* (ya da *sol p.p*) olarak adlandırılır. R halkası hem sağ *p.p* hem de sol *p.p* ise kısaca *p.p-halka* olarak adlandırılır.
Baer halkaların *p.p*-halka olduğu açıktır. Bundan başka abelyan sağ (sol) *p.p*-halkalar inmiş halkalardır.

Tanım 2.5.11 R bir halka olmak üzere $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa $a \in R$ elemanına *von Neumann regüler* denir. R halkasının her elemanı von Neumann regüler ise R halkası *von Neumann regüler* olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.12 R bir halka olmak üzere her bir $a \in R$ için $a = a^2b$ olacak şekilde $b \in R$ varsa R halkası *strongly regüler* olarak adlandırılır.

Lemma 2.5.13 R halkasının strongly regüler olması için gerek ve yeter koşul R'nin von Neumann regüler ve inmiş olmasıdır.

İspat R strongly regüler olsun. Öncelikle R'nin inmiş olduğunu gösterelim. $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. R strongly regüler olduğundan $a \in R$ için $a = a^2b$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. Buradan $a = a^2b = 0b = 0$ olduğundan R inmiştir. Şimdi R'nin von Neumann regüler olduğunu gösterelim. $a = a^2b$ olduğu kullanılarak $(aba - a)^2 = (aba - a)(aba - a) = aba^2ba - aba^2 - a^2ba + a^2 = aba^2 - aba^2 = 0$ elde edilir. R inmiş olduğundan $aba - a = 0$ olup $a = aba$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. Böylece R von Neumann regülerdir.

Tersine R'nin von Neumann regüler ve inmiş olduğunu kabul edelim. $a \in R$ alalım. R von Neumann regüler olduğundan $a = aba$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. $(a - a^2b)^2 = (a - a^2b)(a - a^2b) = a^2 - a^3b - a^2ba + a^2ba^2b = a^2 - a^3b - aaba + aabaab = a^2 - a^3b - a^2 - a^3b = 0$ olup R inmiş olduğundan $a - a^2b = 0$'dır. Bu durumda $a = a^2b$ olacak şekilde $b \in R$ bulunduğundan R strongly regülerdir. □

Lemma 2.5.14 R strongly regüler ise R'nin herhangi bir A ideali için R/A strongly regüler ve inmiştir.

İspat R strongly regüler olsun. $r + A \in R/A$ alalım. Bu durumda $r \in R$ olup R strongly regüler olduğundan $r = r^2b$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. Buradan $r + A = r^2b + A = (r^2 + A)(b + A)$ olacak şekilde $b + A \in R/A$ var olduğundan R/A strongly regülerdir. Şimdi R/A'nın inmiş olduğunu gösterelim. $r + A \in R/A$ için $(r + A)^2 = A$ olsun. R/A strongly regüler olduğundan $r + A \in R/A$ için $r + A = (r + A)^2(b + A)$ olacak şekilde $b + A \in R/A$ vardır. Bu durumda $r + A = (r + A)^2(b + A) = (r^2 + A)(b + A) = A(b + A) = A$ olup $r \in A$ bulunur. Böylece R/A inmiştir. □

Tanım 2.5.15 R birimli değişmeli bir halka olmak üzere $f \in R[x]$ için f'nin A_f *içeriği* (*content'i*) f'nin katayıları tarafından üretilen R'nin idealidir. $f, g \in R[x]$ için $A_{fg} \subseteq A_f A_g$ özelliği her zaman sağlanır. Tsang 1965'te; her $f, g \in R[x]$ için $A_{fg} = A_f A_g$ oluyorsa R halkasını *Gaussian* olarak adlandırmıştır.

3 ARMENDARİZ HALKALAR

Bu bölümde ilk olarak Armendariz halka sınıfı tanıtılarak özellikleri verilecektir. Ayrıca bir halkanın Armendariz olması için bazı karakterizasyonlar ifade edilecektir. Bununla birlikte Armendariz olmayan matris halkalarının Armendariz olan bazı alt halkaları incelenecektir. Bundan başka Armendariz halkaların diğer halka sınıflarıyla aralarındaki ilişkiler araştırılacaktır.

3.1 Armendariz Olan Halkalar

Çalışmamızın bu bölümünde; 1997 yılında Rege ve Chhawchharia'nın Armendariz halka kavramını tanıtmasından bugüne kadar Armendariz halkalarla ilgili, farklı yazarlar tarafın-dan elde edilen, bazı özellikler ayrıntılı bir biçimde incelenecektir. Ayrıca Armendariz halkaların diğer halka sınıflarıyla aralarındaki ilişkiler araştırılacaktır.

Tanım 3.1.1 $f(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ ve $g(x) = b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n \in R[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ iken her bir i, j için $a_ib_j = 0$ oluyorsa R halkası *Armendariz* olarak adlandırılır (Rege and Chhawchharia, 1997).

Lemma 3.1.2 Armendariz halkaların alt halkaları da Armendariz'dir.

İspat R Armendariz ve $S \leqslant R$ olsun. S'nin Armendariz olduğunu gösterelim. $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ ve $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \in S[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olsun. Her i, j için $a_i, b_j \in S$ ve $S \leqslant R$ olduğundan $a_i, b_j \in R$'dir. R Armendariz olduğundan $f(x)g(x) = 0$ ise her i, j için $a_ib_j = 0$'dır. Bundan dolayı S Armendariz'dir. □

Lemma 3.1.3 Bir R halkası inmiş ise Armendariz'dir (Armendariz, 1974).

İspat Kabul edelim ki R inmiş bir halka olsun. R'nin Armendariz olduğunu gösterelim. $f(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ ve $g(x) = b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(x)g(x) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_2b_0+a_1b_1+$

$a_0b_2)x^2+(a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3)x^3+\ldots+(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\ldots+a_1b_{n-1}+a_0b_n)x^n = 0$ olduğundan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$a_0b_0 = 0 \tag{3.1}$$

$$a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \tag{3.2}$$

$$a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0 \tag{3.3}$$

$$a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3 = 0 \tag{3.4}$$

$$\vdots$$

$$a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \ldots + a_1b_{n-1} + a_0b_n = 0 \tag{3.5}$$

(3.1)'den $a_0b_0 = 0$ olup (R inmiş olduğundan R terslenebilirdir) buradan $b_0a_0 = 0$ olur. Ayrıca R inmiş olduğundan R yarıdeğişmelidir. Böylece $a_0b_0 = 0$'dan $a_0Rb_0 = 0$ bulunur. (3.2) eşitliği sağdan b_0 ile çarpılırsa $a_0b_1b_0 + a_1b_0^2 = 0$ olur. Bu durumda $a_1b_0^2 = 0$ dır. Yani $a_1b_0b_0 = 0$ olup R terslenebilir olduğundan dolayı $b_0a_1b_0 = 0$ olur. $(a_1b_0)^2 = a_1b_0a_1b_0 = 0$ ve R inmiş olduğundan $a_1b_0 = 0$ elde edilir. Bu ifade (3.2) eşitliğinde yerine yazılırsa $a_0b_1 = 0$ bulunur. (3.3) eşitliği sağdan b_0 ile çarpılırsa $a_2b_0^2 + a_1b_1b_0 + a_0b_2b_0 = 0$ ve buradan $a_2b_0^2 = 0$ olur. Yani $a_2b_0b_0 = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $b_0a_2b_0 = 0$ olur. $(a_2b_0)^2 = a_2b_0a_2b_0 = 0$ olup R inmiş olduğundan $a_2b_0 = 0$ bulunur. Bu ifade (3.3) eşitliğinde yerine yazılırsa $a_1b_1+a_0b_2 = 0$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliği sağdan b_1 ile çarparsak $(a_1b_1)^2 + a_0b_2b_1 = 0$ olup $a_1b_1^2 = 0$ olur. Yani $a_1b_1b_1 = 0$ olup R terslenebilir olduğundan $b_1a_1b_1 = 0$ olur. $(a_1b_1)^2 = a_1b_1a_1b_1 = 0$ olup R inmiş olduğundan $a_1b_1 = 0$ elde edilir. Bu durumda $a_0b_2 = 0$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse her i, j için $a_ib_j = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak R Armendariz'dir. □

Rege ve Chhawchharia 1997'de, yukarıdaki lemmanın tersinin her zaman doğru olmadığını aşağıdaki önermeyi ispatlayarak göstermişlerdir.

Önerme 3.1.4 n bir tam karenin katı olan bir doğal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkası inmiş değildir fakat Armendarizdir.

İspat p bir asal sayı olmak üzere $n = p^m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının inmiş olmadığı açıktır. Şimdi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$'nin Armendariz olduğunu gösterelim.

$\overline{f(x)} = (a_0 + n\mathbb{Z}) + (a_1 + n\mathbb{Z})x + \ldots + (a_k + n\mathbb{Z})x^k = (a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k) + n\mathbb{Z} = f(x) + n\mathbb{Z}$ ve $\overline{g(x)} = (b_0 + n\mathbb{Z}) + (b_1 + n\mathbb{Z})x + \ldots + (b_l + n\mathbb{Z})x^l = (b_0 + b_1x + \ldots + b_lx^l) + n\mathbb{Z} = g(x) + n\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$' de $\overline{f(x)g(x)} = \overline{0}$ olacak şekilde polinomlar olsun. Bu durumda $f(x)g(x) + n\mathbb{Z} = (n\mathbb{Z})[x]$ olup $f(x)g(x) \in (n\mathbb{Z})[x]$'dir. Yani $n \mid f(x)g(x)$'dir. $n = p^m$ ve p asal olduğundan $f^{'}(x) = a_0^{'} + a_1^{'}x + \ldots + a_k^{'}x^k$ ve $g^{'}(x) = b_0^{'} + b_1^{'}x + \ldots + b_l^{'}x^l$ katsayıları p tarafından bölünemeyen en büyük ortak bölen polinomlar olmak üzere $f(x) = p^r f^{'}(x)$ ve $g(x) = p^s g^{'}(x)$ yazılır. Bu eşitliklerden $a_i = p^r a_i^{'}$ ve $b_j = p^s b_j^{'}$ elde edilir. Buradan $r + s \geq m$ olduğu açıktır. Böylece her i ve j için $n = p^m$ olduğu göz önüne alınarak $\overline{a_i}\overline{b_j} = (a_i + n\mathbb{Z})(b_j + n\mathbb{Z}) = a_ib_j + n\mathbb{Z} = p^r a_i^{'} p^s b_j^{'} + n\mathbb{Z} = p^{r+s} a_i^{'} b_j^{'} + n\mathbb{Z} = p^{r+s} a_i^{'} b_j^{'} + p^m\mathbb{Z} = p^m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} = \overline{0}$ bulunur. Sonuç olarak p asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ Armendariz'dir.
n bir doğal sayı ise her bir p_k asal sayı olmak üzere $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_i^{e_i}$ yazılabilir. Çin kalan teoreminden $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2^{e_2}\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}$' dir. Yukarıda gösterildiği gibi her bir $\mathbb{Z}/p_k^{e_k}\mathbb{Z}$ Armendariz olduğundan $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Armendariz'dir. □

Aşağıdaki teorem, Önerme 3.1.4'ün bir genellemesi olduğundan benzer bir ispata sahiptir.

Teorem 3.1.5 R değişmeli bir P.I.D. (temel ideal bölgesi) ve A, R'nin bir ideali ise, bu durumda R/A bölüm halkası Armendariz'dir (Rege and Chhawchharia, 1997).

Teorem 3.1.6 R bir bölge (domain), A; R' nin bir ideali ve R/A Armendariz olsun. Bu durumda $T(R, R/A)$ Armendariz'dir (Rege and Chhawchharia, 1997).

İspat R bir bölge ve A; R' nin bir ideali olsun. $R/A = \{r + A \mid r \in R\}$'nın Armendariz olduğunu kabul edelim. $T(R, R/A) = \{(r, s + A) \mid r, s \in R\}$ kümesi R/A'nın R ile aşikar genişlemesi olmak üzere $f(x) = \sum_{i=0}^{m}(a_i, \overline{u_i})x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n}(b_j, \overline{v_j})x^j \in (T(R, R/A))[x]$ alalım. $(T(R, R/A))[x] \cong T(R[x], (R/A)[x])$ olduğu göz önüne alınarak $f(x) = (a_0, \overline{u_0}) + (a_1, \overline{u_1})x + \ldots + (a_m, \overline{u_m})x^m = ((a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m), (\overline{u_0} + \overline{u_1}x + \ldots + \overline{u_m}x^m))$ biçiminde yazılabileceğinden $f_0(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in R[x]$ ve $\overline{f_1(x)} = \overline{u_0} + \overline{u_1}x + \ldots + \overline{u_m}x^m \in (R/A)[x]$ olmak üzere $f(x) = (f_0(x), \overline{f_1(x)})$ olur.

Benzer olarak $g(x) = (g_0(x), \overline{g_1(x)})$ yazılabilir. $f(x)g(x) = 0$ olduğundan

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \tag{3.6}$$

$$\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = \overline{0} \tag{3.7}$$

eşitlikleri elde edilir.

1.Durum: (3.6) eşitliğinde $f_0(x) = 0$ (yani her i için $a_i = 0$) ise (3.7) eşitliğinden $\overline{f_1(x)g_0(x)} = \overline{0}$ bulunur. R/A Armendariz olduğundan her i, j için $\overline{u_i b_j} = \overline{0}$ bulunur. Bu durumda her i, j için $(a_i, \overline{u_i})(b_j, \overline{v_j}) = (a_i b_j, \overline{a_i v_j + u_i b_j}) = (0b_j, \overline{0v_j + 0}) = (0, \overline{0}) = 0$ olup ispat tamamlanır.

2.Durum: (3.6) eşitliğinde $g_0(x) = 0$ (yani her j için $b_j = 0$) ise (3.7) eşitliğinden $\overline{f_0(x)g_1(x)} = \overline{0}$ bulunur. R/A Armendariz olduğundan her i, j için $\overline{a_i v_j} = \overline{0}$ bulunur. Bu durumda her i, j için $(a_i, \overline{u_i})(b_j, \overline{v_j}) = (a_i b_j, \overline{a_i v_j + u_i b_j}) = (a_i 0, \overline{0 + u_i 0}) = (0, \overline{0}) = 0$ olup ispat tamamlanır. □

Rege ve Chhawchharia 1997'de yukarıdaki teoremin özel bir durumu olarak aşağıdaki sonucu vermişlerdir.

Sonuç 3.1.7 Her bir n doğal sayısı için $T(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ Armendariz'dir.

İspat $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi sıfır bölensiz bir halka ve her bir n doğal sayısı için $n\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{Z}$'nin bir ideali olduğu açıktır. Her bir n doğal sayısı için $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$'nin Armendariz olduğu Önerme 3.1.4'ten biliniyor. Buna göre Teorem 3.1.6'dan $T(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$'nin Armendariz olduğu açıktır. □

Teorem 3.1.6'dan R sıfır bölensiz bir halka iken $T(R, R)$'nin Armendariz olduğu sonucu çıkarılabilir. Bu sonuç ise inmiş halkalara aşağıdaki gibi genişletilebilir. Fakat daha önce teoremin ispatı için gerekli olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1.8 Bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in inmiş olmasıdır.

İspat $R[x]$'in inmiş olduğunu kabul edelim. R'nin inmiş olduğunu gösterelim. Bunun için $a \in R$ olmak üzere $a^2 = 0$ olsun. $a \in R \subseteq R[x]$ olduğundan $a \in R[x]$'dir. $R[x]$ inmiş olduğundan $a^2 = 0$ ise $a = 0$ olup ispat tamamlanır. Tersine R inmiş olsun.

$R[x]$'in inmiş olduğunu gösterelim. $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$ olmak üzere $(f(x))^2 = 0$ olsun. Bu durumda

$$a_0^2 = 0 \tag{3.8}$$

$$a_0a_1 + a_1a_0 = 0 \tag{3.9}$$

$$a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = 0 \tag{3.10}$$

$$a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 = 0 \tag{3.11}$$

$$a_0a_4 + a_1a_3 + a_2a_2 + a_3a_1 + a_4a_0 = 0 \tag{3.12}$$

$$\vdots$$

$$a_0a_n + a_1a_{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_1 + a_na_0 = 0 \tag{3.13}$$

eşitlikleri elde edilir. R inmiş olduğu için (3.8) eşitliğinden $a_0 = 0$ olarak bulunur. (3.10) eşitliğinde $a_0 = 0$ yazılırsa $a_1^2 = 0$ ve buradan da R inmiş olduğundan $a_1 = 0$ olur. (3.12) eşitliğinde ise $a_0 = 0$ ve $a_1 = 0$ yazıldığında $a_2^2 = 0$ ve R inmiş olduğundan dolayı $a_2 = 0$ olarak bulunur. Bu şekilde devam edilecek olursa her i için $f(x)$'in katsayıları olan $a_i = 0$ olur. Böylece $R[x]$ inmiştir. $\square$

Önerme 3.1.9 R halkası inmiş ise, bu durumda $T(R, R)$ Armendariz'dir (Rege and Chhawchharia, 1997).

İspat R inmiş bir halka olsun. $T(R, R)$'nin Armendariz olduğunu gösterelim.

$$(T(R, R))[x] \cong T(R[x], R[x])$$

olduğu kullanılarak

$$f_0(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i, f_1(x) = \sum_{i=0}^{m} u_ix^i, g_0(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j, g_1(x) = \sum_{j=0}^{n} v_jx^j$$

olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = (f_0(x), f_1(x)), g(x) = (g_0(x), g_1(x)) \in T(R[x], R[x])$ alalım. $f(x)g(x) = 0$ olmasından

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \tag{3.14}$$

$$f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x) = 0 \tag{3.15}$$

eşitlikleri elde edilir. R inmiş olduğundan Lemma 3.1.8'den $R[x]$ inmiştir. O halde (3.14)'ten $g_0(x)f_0(x) = 0$ olur. (3.15) eşitliği soldan $g_0(x)$ ile çarpılırsa

$g_0(x)f_1(x)g_0(x) = 0$ elde edilir. Buradan $(f_1(x)g_0(x))^2 = 0$ olup $R[x]$ inmiş olduğundan $f_1(x)g_0(x) = 0$ bulunur. Bu sonuç (3.15) eşitliğinde yerine yazılırsa $f_0(x)g_1(x) = 0$ olur.

$$f_0(x)g_0(x) = 0, \quad f_0(x)g_1(x) = 0, \quad f_1(x)g_0(x) = 0$$

eşitlikleri kullanılarak R Armendariz olduğundan her bir i, j için

$$a_ib_j = 0, \quad a_iv_j = 0, \quad u_ib_j = 0$$

bulunur. Böylece her i, j için $(a_i, u_i)(b_j, v_j) = (a_ib_j, a_iv_j + u_ib_j) = (0, 0+0) = 0$ olur. Sonuç olarak $T(R, R)$ Armendariz'dir. □

Teorem 3.1.6'nın bir genişlemesi olan aşağıdaki önermenin ispatı yukarıdaki ispata benzer olarak yapılır.

Önerme 3.1.10 R inmiş bir halka ve R/A inmiş olacak biçimde A, R'nin bir ideali olsun. Bu durumda $T(R, R/A)$ Armendariz'dir (Rege and Chhawchharia, 1997).

Sonuç 3.1.11 R strongly regüler bir halka olmak üzere R'nin herbir A ideali için $T(R, R/A)$ Armendariz'dir (Rege and Chhawchharia, 1997).

İspat R strongly regüler olduğundan Lemma 2.5.13'ten R inmiş ve R'nin herhangi bir A ideali için Lemma 2.5.14'ten R/A inmiştir. Böylece Önerme 3.1.10'dan $T(R, R/A)$'nın Armendariz olduğu açıktır. □

Önerme 3.1.12 K bir cisim, $h : K \to K$ bir cisim monomorfizması ve V bir K-vektör uzayı olsun. Bu durumda $K(+)_hV$ Armendariz'dir (Rege and Chhawchharia, 1997).

İspat h homomorfizması yardımıyla doğal olarak $h : K[x] \to K[x]$ halka homomorfizması tanımlıdır. $V[x]$ modülü $K[x]$ üzerinde burulmasız (torsion free) olan bir modüldür. Buna göre $(K(+)_hV)[x] \cong K[x](+)_hV[x]$ olduğu göz önüne alınarak $f_0(x), g_0(x) \in K[x]$ ve $f_1(x), g_1(x) \in V[x]$ olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = (f_0(x), f_1(x))$, $g(x) = (g_0(x), g_1(x)) \in (K(+)_hV)[x]$ polinomlarını alalım. $f(x)g(x) = 0$ olduğundan

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \tag{3.16}$$

$$h(f_0(x))g_1(x) + g_0(x)f_1(x) = 0 \tag{3.17}$$

eşitlikleri elde edilir. $f(x) = 0$ veya $g(x) = 0$ ise (aynı anda $f_0(x), f_1(x) = 0$ veya $g_0(x), g_1(x) = 0$ olacağından) ispat açıktır. Şimdi diğer durumları inceleyelim:

1.Durum: $f_0(x) = 0$, fakat $f_1(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda $h(f_0(x)) = 0$ olup (3.17) eşitliğinden $g_0(x)f_1(x) = 0$ bulunur. $V[x]$ modülü $K[x]$ üzerinde burulmasız olduğundan $g_0(x) = 0$ elde edilir.

2.Durum: $g_0(x) = 0$, fakat $g_1(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda $h(f_0(x))g_1(x) = 0$ olup 1.Duruma benzer olarak $h(f_0(x)) = 0$ bulunur. h birebir olduğundan $f_0(x) = 0$ olur. Böylece $f(x) = (0, f_1(x))$ ve $g(x) = (0, g_1(x))$ biçiminde olmak zorundadır. Sonuç olarak her iki durum için de $K(+)_h V$ halkasının Armendariz olduğu elde edilir. □

Sonuç 3.1.13 K bir cisim ve V bir K-vektör uzayı ise, bu durumda $V \neq 0$ iken $K(+)V = T(K, V)$ aşikar genişlemesi inmiş olmayan değişmeli Armendariz bir halkadır (Rege and Chhawchharia, 1997).

İspat Önerme 3.1.12'de h birim dönüşüm olarak alınırsa $K(+)_h V = T(K, V)$ olacağı için ispat açıktır. □

Anderson ve Camillo 1998'de bir R halkası üzerindeki Armendarizlik koşulunu aşağıdaki gibi daha genel olarak ifade etmişlerdir.

Önerme 3.1.14 Armendariz olan bir R halkasını göz önüne alalım. $f_1 f_2 \dots f_n = 0$ olacak şekilde $f_1, f_2, \dots, f_n \in R[x]$ ise, bu durumda a_i'ler f_i'lerin katsayıları olmak üzere $a_1 a_2 \dots a_n = 0$'dır.

İspat R Armendariz bir halka ve a_i'ler f_i'nin katsayıları olmak üzere $f_1, f_2, \dots, f_n \in R[x]$ için $f_1 f_2 \dots f_n = 0$ olsun. Bu durumda $f_1(f_2 \dots f_n) = 0$ olur. R Armendariz olduğundan $f_2 \dots f_n$'in herhangi bir b katsayısı için $a_1 b = 0$ bulunur. $a_1 f_2 \dots f_n = 0$ ise $(a_1 f_2)(f_3 \dots f_n) = 0$'dır. R Armendariz olduğundan $f_3 \dots f_n$'in herhangi c katsayısı için $(a_1 a_2)c = 0$ olur. Bu şekilde devam edilirse $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ bulunur. □

Anderson ve Camillo 1998'de, bir halkanın Armendariz olması için aşağıdaki gibi bir karakterizasyon vermişlerdir.

Teorem 3.1.15 Bir R halkasının Armendariz olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in Armendariz olmasıdır.

İspat $R[x]$'in Armendariz olduğunu kabul edelim. Bu durumda $R \leq R[x]$ olup, Armendariz halkaların alt halkaları da Armendariz olduğundan, R Armendariz'dir. Diğer taraftan R Armendariz bir halka olsun. $R[x]$'in Armendariz olduğunu gösterelim. $f(t) = f_0 + f_1 t + \ldots + f_n t^n, g(t) = g_0 + g_1 t + \ldots + g_m t^m \in (R[x])[t]$ olmak üzere $f(t)g(t) = 0$ olduğunu kabul edelim. Her bir i, j için $f_i g_j = 0$ olduğunu gösterelim. der kısaltması polinomların derecesini göstermek ve sıfır polinomunun derecesi 0 olmak üzere

$$k = \text{der}f_0 + \text{der}f_1 + \ldots + \text{der}f_n + \text{der}g_0 + \text{der}g_1 + \ldots + \text{der}g_m$$

olsun. $f(x^k) = f_0 + f_1 x^k + \ldots + f_n x^{kn}$, $g(x^k) = g_0 + g_1 x^k + \ldots + g_m x^{km} \in R[x]$ olur. f_i (sırasıyla g_j)'nin katsayılarının kümesi $f(x^k)$ (sırasıyla $g(x^k)$)'nın katsayılarının kümesine eşittir. Bundan dolayı $f(x^k), g(x^k) \in R[x]$ olur. Kabulden $f(t)g(t) = 0$ ve x, R'nin elemanları ile yer değiştirdiğinden $f(x^k)g(x^k) = 0$ olur. R Armendariz olduğundan f_i'nin herbir katsayısı g_j'nin herbir katsayısını sıfırlar. Buradan her i, j için $f_i g_j = 0$ olur. Böylece $R[x]$ Armendariz'dir. $\square$

Teorem 3.1.15'ten R Armendariz iken R'nin skew polinom halkasının Armendariz olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bunun doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.16 $\mathbb{Z}_2$, 2 modülüne göre kalan sınıflarının halkası olsun. Bileşensel toplama ve çarpma işlemleriyle $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkasını göz önüne alalım. $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ diyelim. R'nin değişmeli ve inmiş olduğu açıktır. Bundan dolayı R Armendariz'dir. R'nin $(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha((\bar{a}, \bar{b})) = (\bar{b}, \bar{a})$ ile tanımlı $\alpha : R \to R$ endomorfizmasını göz önüne alalım. α'nın bir otomorfizma olduğu kolayca görülebilir. Şimdi $R[x;\alpha]$'nın Armendariz olmadığını gösterelim. Bunun için $f(y) = (\bar{1}, \bar{0}) + [(\bar{1}, \bar{0})x]y, g(y) = (\bar{0}, \bar{1}) + [(\bar{1}, \bar{0})x]y \in R[x;\alpha][y]$ olsun. $f(y)g(y) = 0$ dır. Gerçekten; $f(y)g(y) = (\bar{1}, \bar{0})(\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{0})[(\bar{1}, \bar{0})x]y + [(\bar{1}, \bar{0})x]y(\bar{0}, \bar{1}) + [(\bar{1}, \bar{0})x]y[(\bar{1}, \bar{0})x]y = (\bar{0}, \bar{0}) + [(\bar{1}, \bar{0})x + (\bar{1}, \bar{0})\alpha(\bar{0}, \bar{1})x]y + [(\bar{1}, \bar{0})\alpha(\bar{1}, \bar{0})x^2]y^2 = (\bar{0}, \bar{0}) + [(\bar{1}, \bar{0})x + (\bar{1}, \bar{0})(\bar{1}, \bar{0})x]y + [(\bar{1}, \bar{0})(\bar{1}, \bar{0})x^2]y^2 = (\bar{0}, \bar{0}) + (\bar{0}, \bar{0})xy + (\bar{0}, \bar{0})x^2y^2 = 0$' dır. Fakat $(\bar{1}, \bar{0})[(\bar{1}, \bar{0})x] = (\bar{1}, \bar{0})x \neq 0$'dır. Bundan dolayı $R[x;\alpha]$ Armendariz değildir.

Sonuç 3.1.17 R Armendariz bir halka ve $\{X_\alpha\}$; R üzerinde elemanlarla yer değişebilen bilinmeyenlerin herhangi bir kümesi olsun. Bu durumda $R[\{X_\alpha\}]$'nın herhangi bir alt halkası da Armendariz'dir (Anderson and Camillo, 1998).

İspat Öncelikle $R[\{X_\alpha\}]$'nın Armendariz olduğunu gösterelim. $f,g \in R[\{X_\alpha\}][T]$ olmak üzere $fg = 0$ olsun. $\{X_\alpha\}$'nın uygun bir sonlu $\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_n}\}$ alt kümesi için $f,g \in R[\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_n}\}][T]$ olur. R Armendariz olduğundan Teorem 3.1.15'ten $R[\{X_{\alpha_1}\}]$ Armendariz'dir. $R[\{X_{\alpha_1}\}]$ Armendariz olduğundan Teorem 3.1.15'ten $R[\{X_{\alpha_1}\}][\{X_{\alpha_2}\}]$ Armendariz'dir. Bu şekilde devam edilerek $R[X][Y] \cong R[XY]$ olduğu göz önüne alınarak $R[\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_n}\}]$'nın Armendariz olduğu ispatlanır. $R[\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_n}\}]$ Armendariz olduğundan dolayı $f,g \in R[\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_n}\}]$ için $fg = 0$ ise f'nin her bir a_i katsayısı ve g'nin her bir b_j katsayısı için $a_ib_j = 0$ olur. Böylece $R[\{X_\alpha\}]$ Armendariz'dir. Armendariz bir halkanın her alt halkası Armendariz olduğu için $R[\{X_\alpha\}]$'nın her bir alt halkası da Armendariz'dir. □

Anderson ve Camillo 1998'de Önerme 3.1.14 ve Sonuç 3.1.17'yi birleştirerek Armendariz halkaların aşağıdaki gibi bir karakterizasyonu elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.18 Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(1) R Armendarizdir.

(2) $\{X_\alpha\}$, R üzerindeki değişebilen bilinmeyenlerin herhangi bir kümesi olmak üzere
$f_1f_2\ldots f_n = 0$ olacak biçimde $f_1, f_2, \ldots, f_n \in R[\{X_\alpha\}]$ ise, bu durumda a_i'ler f_i'nin katsayıları olmak üzere $a_1a_2\ldots a_n = 0$'dır.

İspat (2) $\Rightarrow$ (1) $R[\{X_\alpha\}]$'dan alınan n tane polinomun çarpımı sıfır iken, katsayılarının çarpımı da sıfır olduğundan özel olarak $R[\{X_\alpha\}]$'dan iki polinom için de (yani $f(x), g(x) \in R[\{X_\alpha\}]$ için) $f(x)g(x) = 0$ ise a_i'ler $f(x)$'in katsayısı ve b_j'ler $g(x)$'in katsayısı olmak üzere $a_ib_j = 0$ olur. Bundan dolayı R Armendariz'dir.
(1) $\Rightarrow$ (2) R Armendariz olsun. $f_1, f_2, \ldots, f_n \in R[\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_n}\}]$ olmak üzere a_i'ler f_i'nin katsayıları olsun. Her bir f_i polinomu $R[\{X_{\alpha_m}\}]$' deki bir polinom olarak $f_i = \sum f_{i_j}(X_{\alpha_m})^j \in R[\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_{m-1}}\}][X_{\alpha_m}]$ biçiminde yazılabilir. Sonuç 3.1.17'den $R[\{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_{m-1}}\}]$ Armendariz olduğundan $j_1, j_2, \ldots, j_n$'in herhangi seçimi için $f_{1_{j_1}} f_{2_{j_2}} \ldots f_{n_{j_n}} = 0$ olur. Her bir a_i uygun f_{i_j}'nin bir katsayısı olduğundan Önerme 3.1.14 gereğince $a_1a_2\ldots a_n = 0$ olur. □

Aşağıdaki teorem Armendariz olan bir halkaya örnek teşkil eder.

Teorem 3.1.19 R bir halka ve $n \geq 2$ bir doğal sayı olsun. Bu durumda $R[X]/(x^n)$'in Armendariz olması için gerek ve yeter koşul R'nin inmiş olmasıdır (Anderson and Camillo, 1998).

İspat x^n, $R[X]$'in her elemanı ile değişmeli olduğu için $(x^n) = \{f(x)x^n : f(x) \in R[X]\}$ kümesi $R[X]$'in merkezindedir. $\overline{x} = x + (x^n)$ olmak üzere

$$R[x]/(x^n) = \left\{a_0 + a_1\overline{x} + \ldots + a_{n-1}\overline{x}^{n-1} : a_i \in R\right\}$$

biçiminde yazılabilir.
($\Rightarrow$) $R[X]/(X^n)$ Armendariz olsun. R'nin inmiş olduğunu göstermek için ("$a^2 = 0$ iken $a = 0 \implies a^n = 0$ iken $a = 0$" özelliğinden yararlanarak) $r \in R$ ve $r^n = 0$ olduğunu kabul edelim. $f(x) = r - \bar{x}t$, $g(x) = r^{n-1} + r^{n-2}\bar{x}t + \ldots + (\bar{x})^{n-1}t^{n-1} \in (R[X]/(x^n))[t]$ olmak üzere $f(x)g(x) = (r - \bar{x}t)(r^{n-1} + r^{n-2}\bar{x} + \ldots + (\bar{x})^{n-1}t^{n-1}) = r^n - (\bar{x})^n t^n = 0$ olup $R[X]/(x^n)$ Armendariz olduğundan $f(x)$ ve $g(x)$'in her bir katsayısının çarpımı 0'dır. Böylece $r(\bar{x})^{n-1} = 0$ bulunur. Buradan $r(x + (x^n))^{n-1} = 0$ yani $r(x^{n-1} + (x^n)) = 0$'dır. Bu durumda $(r + (x^n))(x^{n-1} + (x^n)) = 0$ olup $rx^{n-1} + (x^n) = 0 + (x^n)$ yazılırsa $rx^{n-1} \in (x^n)$ olur. Bu durumda $rx^{n-1} = x^n h(x)$ olacak şekilde $h(x) \in R[X]$ vardır. $rx^{n-1} = x^n(c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k)$ ve buradan $rx^{n-1} = c_0x^n + c_1x^{n+1} + \ldots + c_kx^{n+k}$ olup $r = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R inmiştir.
($\Leftarrow$) Tersine R inmiş olsun.
$R[X]/(x^n)$'in Armendariz olduğunu gösterelim. $R[X]/(x^n)$'de $\bar{x} = x + (x^n) = u$ ile gösterelim. u, R'nin elemanları ile yer değişir ve $u^n = (\bar{x})^n = (x + (x^n))^n = x^n + (x^n) = (x^n) = 0$'dır. $f_i, g_j \in R[u]$ olmak üzere $f = f_0 + f_1t + \ldots + f_nt^n, g = g_0 + g_1t + \ldots + g_mt^m \in (R[u])[t]$ için $fg = 0$ olsun. $f_i(u) = a_{i_0} + a_{i_1}u + \ldots + a_{i_{n-1}}u^{n-1} \in R[u]$ için $f = (a_{0_0} + a_{0_1}u + \ldots + a_{0_{n-1}}u^{n-1}) + (a_{1_0} + a_{1_1}u + \ldots + a_{1_{n-1}}u^{n-1})t + \ldots + (a_{n_0} + a_{n_1}u + \ldots + a_{n_{n-1}}u^{n-1})t^n = (a_{0_0} + a_{1_0}t + \ldots + a_{n_0}t^n) + (a_{0_1} + a_{1_1}t + \ldots + a_{n_1}t^n)u + \ldots + (a_{0_{n-1}} + a_{1_{n-1}}t + \ldots + a_{n_{n-1}}t^n)u^{n-1} = f_0 + f_1u + \ldots + f_{n-1}u^{n-1}$ biçiminde yazılabildiğinden $f_i \in R[t]$ olmak üzere $f = f_0 + f_1u + \ldots + f_{n-1}u^{n-1} \in (R[t])[u]$ olur. $g_j \in R[t]$ olmak üzere $g = g_0 + g_1u + \ldots + g_{n-1}u^{n-1} \in (R[t])[u]$ olduğu benzer olarak gösterilebilir. Kabulden $fg = (f_0 + f_1u + \ldots + f_{n-1}u^{n-1})(g_0 + g_1u + \ldots + g_{n-1}u^{n-1}) =$

$f_0g_0+(f_0g_1+f_1g_0)u+(f_0g_2+f_1g_1+f_2g_0)u^2+\ldots+(f_0g_{n-1}+\ldots+f_{n-1}g_0)u^{n-1}=0$'dır. $i+j\geq n$ ise $u^{i+j}=0$ olacağından f_iu^i'nin katsayıları g_ju^j'nin katsayılarını sıfırlar. $i+j<n$ ise $f_i,g_j\in R[t]$ için f_i'nin katsayıları g_j'nin katsayılarını sıfırlar. Bu durumda f'nin katsayıları g'nin katsayılarını sıfırlamış olur. Sonuç olarak $R[u]=R[X]/(x^n)$ Armendariz'dir. □

Anderson ve Camillo 1998'de, (aşağıda verilecek olan) Teorem 3.1.22'de bir halkanın Armendariz olması için bazı karakterizasyonlar vermişlerdir. Öncelikle bu teoremin ispatında kullanılacak olan aşağıdaki iki lemmayı verelim.

Lemma 3.1.20 R von Neumann regüler bir halka olmak üzere, $R[x]$'te iki lineer polinomun çarpımı sıfır iken bu polinomların katsayılarının çarpımı sıfır oluyorsa her $a,b\in R$ için $br(a)\cap ar(b)=0$'dır.

İspat R von Neumann regüler bir halka olmak üzere, $R[x]$'de iki lineer polinomun çarpımı sıfır iken bunların katsayılarının çarpımı sıfır olsun. $br(a)\cap ar(b)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda en az bir $0\neq c\in br(a)\cap ar(b)$ vardır. Buradan $0\neq c\in br(a)$ ve $0\neq c\in ar(b)$'dir. Yani $0\neq c=bt$ olacak şekilde $t\in r(a)$ ve $0\neq c=as$ olacak şekilde $s\in r(b)$ vardır. O halde $0\neq c=bt=as$ olacak şekilde $t\in r(a)$ ve $s\in r(b)$ vardır. $bt=as$ olup $as-bt=0$'dır. Şimdi $f(x)=a-bx$ ve $g(x)=t+sx$ polinomları $R[x]$'de iki lineer polinomdur. Ayrıca $f(x)g(x)=(a-bx)(t+sx)=at+(as-bt)x-(bs)x^2=0$'dır. Fakat $bt\neq 0$ olması kabülümüz ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Sonuç olarak $br(a)\cap ar(b)=0$'dır. □

Lemma 3.1.21 e ile f von Neumann regüler bir R halkasının iki idempotenti olsun. Bu durumda $fe=0$ ise, $ef=0$'dır.

İspat e ve f bir R halkasının iki idempotenti olmak üzere $fe=0$ olsun. Lemma 3.1.20'de "b" yerine "e" ve "a" yerine "$1-f$" alalım. Bu durumda $r(a)=fR$ ve $r(b)=(1-e)R$'dir. Gerçekten $x\in r(a)$ ise $ax=0$ yani $(1-f)x=0$'dır. Buradan $x-fx=0$ olup $x=fx\in fR$' dir. Yani $r(a)\subset fR$ bulunur. $y\in fR$ alalım. Bu durumda $y=fr$ olacak şekilde $r\in R$ vardır. Buradan $(1-f)y=(1-f)fr$ yazarsak $ay=fr-fr=0$'dan $ay=0$ olur. Yani $y\in r(a)$ olup $fR\subset r(a)$'dır. Böylece $r(a)=fR$'dir.

$x \in r(b)$ ise $bx = 0$ yani $ex = 0$'dır. Aynı zamanda $-ex = 0$'dır. Buradan $x - ex = x$ yazılırsa $x = (1-e)x \in (1-e)R$ olur. Yani $r(b) \subset (1-e)R$'dir. $y \in (1-e)R$ alalım. Bu durumda $y = (1-e)r$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Bu eşitliği soldan e ile çarparsak $ey = e(1-e)r$ olur. Düzenlersek $by = er - er = 0$ olup $by = 0$ bulunur Yani $y \in r(b)$ olup $(1-e)R \subset r(b)$'dir. Sonuç olarak $r(b) = (1-e)R$' dir. Lemma 3.1.20'den $br(a) \cap ar(b) = 0$ olduğundan $0 = br(a) \cap ar(b) = efR \cap (1-f)(1-e)R$'dir. $ef = (1-f)(1-e)(-f) \in (1-f)(1-e)R$ ve $ef \in efR$ olduğundan $ef \in efR \cap (1-f)(1-e)R = 0$'dır. Bu durumda $ef = 0$ bulunur. □

Teorem 3.1.22 Von Neumann regüler bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(1) R Armendariz.

(2) R inmiş.

(3) R'den katsayılı iki lineer polinomun çarpımı sıfır ise bunların katsayılarının çarpımı sıfırdır.

(Anderson and Camillo, 1998).

İspat (2) $\Rightarrow$ (1) ve (1) $\Rightarrow$ (3) gerektirmelerinin doğru olduğu açıktır. (3) $\Rightarrow$ (2)'yi ispatlamamız yeterlidir. Bunun için de Goodearl tarafından 1991'de ispatlanan Lemma 3.1 ve Teorem 3.2'den yararlanacağız.
(3) $\Rightarrow$ (2) $R[x]$'de iki lineer polinomun çarpımı sıfır iken bunların katsayılarının çarpımı sıfır olsun. Herhangi $e \in R$ eşkare elemanı ve herhangi bir $r \in R$ için

$$\begin{aligned} x^2 =& (e + er(1-e))(e + er(1-e)) \\ =& e + er(1-e) + er(1-e)e + er(1-e)er(1-e) \\ =& e + er - ere + ere - ere = e + er(1-e) \\ =& x \end{aligned}$$

olduğundan $x = e + er(1-e)$ eşkare elemandır. Ayrıca

$$(1-e)x = (1-e)(e + er(1-e)) = (1-e)e + (1-e)er(1-e) = e - e = 0$$

olduğundan Lemma 3.1.21'den $x(1-e) = 0$ olur. Bu durumda $e(1-e) + er(1-e) = 0$ yani $er(1-e) = 0$ elde edilir. Bu durumda $eR(1-e) = 0$ bulunur. Böylece R inmiştir. □

Şimdi, bir R halkasının bir I ideali ve halkanın bu ideal yardımı ile elde edilen homomorfik görüntüsü Armendariz iken, R halkasının Armendariz olup olmadığına dair örnekler üzerinde duralım.

Özel olarak R inmiş bir halka olsun. Sonuç 3.1.6'dan $T = T(R,R)$ aşikar genişlemesi Armendariz'dir. $T = T(R,R) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix} : r, s \in R \right\}$ aşikar genişlemesinin asal radikali $P(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : r \in R \right\}$'dir. Ayrıca $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin P(T)$ olduğundan $P(T)$; T'nin birimsiz bir idealidir. $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ ve $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m$ polinomları $P(T)[x]$'de $f(x)g(x) = O$ olacak şekilde polinomlar olmak üzere her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & r_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\beta_j = \begin{pmatrix} 0 & s_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ biçiminde olduğundan

$$\alpha_i \beta_j = \begin{pmatrix} 0 & r_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & s_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olur. Böylece $P(T)$ birimsiz Armendariz bir halkadır. Bu durumda Armendarizlik tanımı birimsiz halkalar üzerinde de geçerli olur. Bundan başka $\varphi\left(\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix}\right) = r$ ile tanımlı $\varphi : T \to R$ dönüşümü $\mathrm{Ker}\varphi = P(T)$ olan bir epimorfizmadır. Bu durumda I. izomorfizma teoremi gereğince $T/P(T) \cong R$'dir. R inmiş olduğundan Armendariz'dir. Bundan dolayı $T/P(T)$ Armendariz'dir.

R abelyan halka ve $P(R)$; R'nin asal radikali olmak üzere $R/P(R)$ ve $P(R)$ Armendariz iken R'nin Armendariz olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bunun doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.23 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a - b \equiv c \equiv 0 \pmod 2 \right\}$ olsun. O zaman R'nin asal radikali

$$P(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : c \equiv 0 \pmod 2 \right\}$$

dir. $P(R)$'nin Armendariz olduğu açıktır. Ayrıca R'nin eşkare elemanları sadece $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$'dır. Bu elemanlar aynı zamanda merkezil olduğundan R abelyandır.

$$\begin{aligned} R/P(R) = & \{x + P(R) :\ x \in R\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} + P(R) :\ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in R \right\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(R) :\ a - b \equiv c \equiv 0 \pmod{2} \right\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + P(R) :\ a - b \equiv 0 \pmod{2} \right\} \\ \cong & \{(a,b) :\ a - b \equiv 0 \pmod{2}\} \end{aligned}$$

$((a,b))^2 = (a,b)(a,b) = (a^2, b^2) = 0$ iken $a = 0$ ve $b = 0$ olduğundan $(a,b) = (0,0)$'dır. Böylece $R/P(R)$ inmiştir. Bundan dolayı $R/P(R)$ Armendariz'dir. Şimdi R'nin Armendariz olmadığını gösterelim.

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \ \text{ ve } \ g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \in R[x]$$

polinomları için $f(x)g(x) = 0$ olur. Fakat $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ olduğundan R Armendariz değildir.

Bundan başka R'nin sıfırdan farklı her I öz ideali için I ve R/I Armendariz iken R'nin Armendariz olup olmadığından şüphe edilebilir. Fakat Kim ve Lee 2000'de aşağıdaki örneği vererek bunun olmadığını göstermişlerdir.

Örnek 3.1.24 F bir cisim olsun ve $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkasını göz önüne alalım. R'nin Armendariz olmadığını daha önce belirtmiştik. Şimdi R'nin sıfırdan farklı bir I öz ideali için I'nın ve R/I'nın Armendariz olduğunu gösterelim. R'nin sıfırdan farklı öz idealleri sadece

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}' dır.$$

İlk olarak $I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ idealini göz önüne alalım. $R/I \cong F$ ve F inmiş olduğundan R/I inmiştir. Bundan dolayı R/I Armendariz'dir.Şimdi I'nın Armendariz olduğunu gösterelim. $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\beta_j = \begin{pmatrix} c_j & d_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ ve $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m \in I[x]$ olsun. $f(x)g(x) = O$ olduğunu kabul edelim.
Bu durumda;

$$\alpha_0\beta_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0c_0 & a_0d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olmasından dolayı $a_0c_0 = 0 = a_0d_0$ dır. Kabul edelim ki $\alpha_0 \neq O$ ve $\beta_0 \neq O$ olsun. Bu durumda $\alpha_0 \neq O$ ise $a_0 \neq 0$ veya $b_0 \neq 0$'dır. $a_0 \neq 0$ ise $c_0 = 0 = d_0$ ise $\beta_0 = O$ olduğundan çelişki elde edilir. Böylece $a_0 = 0$ ve $b_0 \neq 0$ olmalıdır.
Bu durumda;

$$\alpha_0\beta_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$\alpha_0\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$\vdots$$

$$\alpha_0\beta_m = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_m & d_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olduğundan her $0 \leq j \leq m$ için $\alpha_0\beta_j = O$ elde edilir.
Bu ifade $f(x)g(x) = O$ olmasında kullanılarak $\alpha_1\beta_0 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ bulunur. Bu durumda $a_1c_0 = 0 = a_1d_0$ olur. Kabul edelim ki $\alpha_1 \neq O$ ve $\beta_0 \neq O$ olsun. Bu durumda $\alpha_1 \neq O$ ise $a_1 \neq 0$ veya $b_1 \neq 0$ dır. $a_1 \neq 0$ ise $c_0 = 0 = d_0$ olacağından $\beta_0 = O$ olur. Ve bu bir çelişkidir. Bu nedenle $a_1 = 0$ ve $b_1 \neq 0$ olmalıdır.

Bu durumda;

$$\alpha_1\beta_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$
$$\alpha_1\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1\beta_m = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_m & d_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olduğundan her $0 \leq j \leq m$ için $\alpha_1\beta_j = O$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her i, j için $\alpha_i\beta_j = O$ olur. Böylece I Armendariz'dir.

$J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ olsun. $R/J \cong F$ ve F inmiş olduğundan R/J inmiştir. Bundan dolayı R/J Armendariz'dir. Yukarıda I'nın Armendariz olduğunun gösterilmesine benzer olarak J'nin Armendariz olduğu da gösterilebilir.

Son olarak $K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun.

$$\begin{aligned} R/K =& \{A + K : \ A \in R\} \\ =& \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + K : \ a, b, c \in F \right\} \\ =& \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + K : \ a, b, c \in F \right\} \\ =& \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + K : \ a, c \in F \right\} \\ \cong& F \oplus F \end{aligned}$$

olup $F \oplus F$ inmiş olduğundan R/K inmiştir. Bundan dolayı R/K Armendariz'dir. $K^2 = O$ olduğundan K'dan alınan iki elemanın çarpımı daima sıfırdır. Bundan dolayı K Armendariz'dir.

Yukarıdaki örnekte R'nin herhangi bir I öz ideali için I ve R/I Armendariz iken R'nin Armendariz olmadığı gösterildi. Fakat 2002'de Huh ve diğerleri "I'nın Armendariz olması" yerine "I'nın inmiş olması" koşulunu alarak yani daha güçlü bir koşul ilave ederek aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 3.1.25 Bir R halkası ve R'nin uygun bir I ideali için R/I'nın Armendariz olduğunu kabul edelim. I inmiş ise, bu durumda R Armendariz'dir.

İspat Öncelikle $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ iken $bIb \subseteq I$ olduğundan $(bIa)^2 = 0$ ve I inmiş olduğundan $bIa = 0$ olduğuna dikkat edelim. R/I'nın Armendariz ve I'nın inmiş olduğunu kabul edelim. R'nin Armendariz olduğunu gösterelim. Bunun için $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ polinomlarını göz önüne alalım. R/I Armendariz olduğundan her i, j için $a_i b_j \in I$'dır. Her i, j için $a_i b_j = 0$ olduğunu $m \geq 0$ olmak üzere m üzerinde tümevarım uygulayarak gösterelim. $m = 0$ için ispat açıktır. $m \geq 1$ olduğunu kabul edelim. İddia ediyoruz ki her $j \in \{0, 1, 2, \ldots n\}$ için $a_0 b_j = 0$'dır. Varsayalım ki uygun bir j için $a_0 b_j \neq 0$ olsun. $a_0 b_k \neq 0$ özelliğini sağlayan en küçük sayı k olsun. Bu durumda $j \in \{0, 1, \ldots k-1\}$ için $a_0 b_j = 0$ olur. İspatın başında bahsedilen ifadeden dolayı $b_j I a_0 = 0$ bulunur.

$$(a_{k-j} b_j)(a_0 b_k)^2 = a_{k-j} b_j (a_0 b_k) a_0 b_k \in a_{k-j} b_j I a_0 b_k = a_{k-j}(b_j I a_0) b_k = 0$$

olduğundan $(a_{k-j} b_j)(a_0 b_k)^2 = 0$ bulunur. $f(x)g(x) = 0$ eşitliğinden elde edilen x^k'lı terimin katsayısı

$$a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = a_0 b_k + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k-j} b_j = 0$$

olur. Bu eşitlik sağ taraftan $(a_0 b_k)^2$ ile çarpılırsa $(a_0 b_k)(a_0 b_k)^2 + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k-j} b_j (a_0 b_k)^2 = 0$ olup $(a_0 b_k)^3 = 0$ bulunur. $a_0 b_k \in I$ ve I inmiş olduğundan $a_0 b_k = 0$ elde edilir. Bu ise $a_0 b_k \neq 0$ olması ile çelişir. O halde her $j \in 0, 1, 2 \ldots, n$ için $a_0 b_j = 0$ olmalıdır. Buradan $f_1(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_m x^{m-1}$ olmak üzere $f_1(x) g(x) = 0$ bulunur. Fakat $f_1(x)$'in derecesi m'den daha küçük olduğu için tümevarım hipotezinden, $1 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ olmak üzere her i, j için $a_i b_j = 0$ olur. Bundan dolayı $0 \leq i \leq m$ ve $0 \leq j \leq n$ olmak üzere her i, j için $a_i b_j = 0$ olup ispat tamamlanır. □

Lemma 3.1.26 Herhangi bir aşikar olmayan $e \in R$ eşkare elemanı için R Armendariz ise eRe Armendariz'dir.

İspat R Armendariz olsun. $p(x) = er_0e + er_1ex + \ldots + er_nex^n$ ve $q(x) = es_0e + es_1ex + \ldots + es_mex^m \in eRe[x]$ için $p(x)q(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. Aynı zamanda $p(x), q(x) \in R[x]$ ve R Armendariz olduğundan her i, j için $er_ies_je = 0$'dır. Sonuç olarak eRe Armendariz'dir. $\square$

Herhangi aşikar olmayan $e \in R$ eşkaresi için yukarıdaki ifadenin tersi olan "eRe Armendariz iken R Armendariz midir?" sorusu akla gelebilir. Fakat aşağıdaki örnek bunun genelde doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.27 $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ ve $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}$ olsun. R'nin Armendariz olmadığı açıktır. R'nin birimden farklı aşikar eşkare elemanları

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \text{ve} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

dir. Sadece $e_1 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$ eşkare elemanı için e_1Re_1' nin Armendariz olduğunu göstere-

lim.

$$\begin{aligned} e_1Re_1 &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

ve $\mathbb{Z}_2$ inmiş olduğundan e_1Re_1 inmiştir. Bundan dolayı e_1Re_1 Armendariz'dir. Benzer olarak e_2Re_2, e_3Re_3 ve e_4Re_4'nin Armendariz olduğu gösterilebilir.

R Armendariz iken herhangi bir $e \in R$ eşkare elemanı için eRe Armendariz'dir, fakat $M_n(R)$ halkası Armendariz olmadığından "Armendarizlik" özelliği Morita değişmez (invaryant) bir özellik değildir.
Huh ve diğerleri 2002'de; Kim ve Lee'nin 2000'de ispatladıkları Lemma 3.1.26'yı aşağıdaki gibi genelleştirmişlerdir.

Önerme 3.1.28 Abelyan bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(1) R Armendariz'dir

(2) R'nin her e eşkare elemanı için eR ve $(1-e)R$ Armendariz'dir.

(3) R'nin uygun bir e eşkare elemanı için eR ve $(1-e)R$ Armendariz'dir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) eR ve $(1-e)R$ halkaları R'nin alt halkaları olduğundan açıktır. (2) $\Rightarrow$ (3) ispatı aşikardır. (3) $\Rightarrow$ (1) olduğunu gösterelim. eR ve $(1-e)R$ Armendariz olsun. R'nin Armendariz olduğunu gösterelim. $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ polinomlarını alalım. Uygun bir $e^2 = e \in R$ için sırasıyla $(eR)[x]$ ve $((1-e)R)[x]$'te $f_1(x) = ef(x)$, $g_1(x) = eg(x)$ ve $f_2(x) = (1-e)f(x)$, $g_2(x) = (1-e)g(x)$ polinomlarını göz önüne alalım. Bu durumda R abelyan olduğundan e merkezildir. Buradan $0 = f(x)g(x) = f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)$ olup $(eR)[x]$ de $f_1(x)g_1(x) = 0$ ve $((1-e)R)[x]$ de $f_2(x)g_2(x) = 0$' dır. Kabulden her i, j için $a_i b_j e = 0$ ve $a_i b_j (1-e) = 0$ olur. Böylece her i, j için $a_i b_j = a_i b_j + a_i b_j e - a_i b_j e = a_i b_j e + a_i b_j (1-e) = 0 + 0 = 0$ olduğundan R Armendariz'dir. □

3.2 Armendariz Olmayan Halkalar

Rege ve Chhawchharia 1997'de, herhangi bir birimli halka üzerinde $n \geq 2$ olmak üzere $M_n(R)$ halkasının Armendariz olmadığını, aşağıdaki örneği vererek göstermişlerdir.

Örnek 3.2.1 R herhangi bir halka olmak üzere $M_n(R)[x]$'de $f(x) = E_{12}x + E_{11}$ ve $g(x) = E_{11}x - E_{21}$ polinomları göz önüne alındığında $f(x)g(x) = O$'dır. Fakat $E_{11}E_{11} = E_{11} \neq O$ olduğundan $M_n(R)$ matris halkası Armendariz değildir.

2000 yılında Kim ve Lee bu ifadeyi aşağıdaki gibi daha da genelleştirmişlerdir.

Örnek 3.2.2 R bir halka olsun. $n \geq 2$ olmak üzere R halkası üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin $UTM_n(R)$ halkası Armendariz değildir. Bu halkaların Armendariz olmadığını göstermek için R halkası üzerindeki 2×2 tipindeki üst üçgensel matrislerin $UTM_2(R)$ halkasının Armendariz olmadığını göstermek yeterlidir. R üzerindeki 2×2 tipinde üst üçgensel matrislerin halkası

$$UTM_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : \ a, b, c \in R \right\}$$

olmak üzere $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x, g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \in$ $(UTM_2(R))[x]$ için $f(x)g(x) = 0$'dır. Fakat $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ olduğundan $UTM_2(R)$ Armendariz değildir. Lemma 3.1.2 gereğince R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası Armendariz değildir.

Fakat aşağıdaki örnekte de görülebileceği gibi 3×3 tipindeki üst üçgensel matrisler halkasının Armendariz olan alt halkaları bulunabilir.

Önerme 3.2.3 R inmiş bir halka olsun. Bu durumda

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in R \right\}$$

halkası Armendariz'dir (Kim and Lee, 2000)

İspat Öncelikle $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S$ elemanları için toplama ve çarpmayı aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)(a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1a_2, a_1b_2+b_1a_2, a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2, a_1d_2+d_1a_2)$$

Bundan dolayı $S[x]$'deki her polinom $R[x]$'deki uygun $p_i(x)$ polinomları için $(p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ formunda yazılabilir. $S[x]$'deki

$$f(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \quad \text{ve} \quad g(x) = (g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x))$$

polinomları için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \tag{3.18}$$

$$f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x) = 0 \tag{3.19}$$

$$f_0(x)g_2(x) + f_1(x)g_3(x) + f_2(x)g_0(x) = 0 \tag{3.20}$$

$$f_0(x)g_3(x) + f_3(x)g_0(x) = 0 \tag{3.21}$$

eşitlikleri elde edilir. Lemma 3.1.8'den R inmiş olduğundan dolayı $R[x]$ inmiş olup buradan da $R[x]$ terslenebilirdir. Bu durumda (3.18) eşitliğinden $g_0(x)f_0(x) = 0$'dır. (3.19) eşitliği sağdan $f_0(x)$ ile çarpılırsa $f_0(x)g_1(x)f_0(x) + f_1(x)g_0(x)f_0(x) = f_0(x)g_1(x)f_0(x) = 0$ olur ki buradan $f_0(x)g_1(x) = 0$ bulunur. Bu ifade (3.19)'da yerine yazılırsa $f_1(x)g_0(x) = 0$ elde edilir. (3.21) eşitliği sağdan $f_0(x)$ ile çarpılırsa $f_0(x)g_3(x)f_0(x) + f_3(x)g_0(x)f_0(x) = f_0(x)g_3(x)f_0(x) = 0$ olup buradan $f_0(x)g_3(x) = 0$ elde edilir. Bu eşitlik (3.21)'de yerine yazılırsa $f_3(x)g_0(x) = 0$ olur. (3.20) eşitliği sağdan $f_0(x)$ ile çarpılırsa

$$f_0(x)g_2(x)f_0(x) + f_1(x)g_3(x)f_0(x) + f_2(x)g_0(x)f_0(x) = f_0(x)g_2(x)f_0(x) = 0$$

olduğundan $f_0(x)g_2(x) = 0$ bulunur. Bu ifade (3.20)'de yerine yazılırsa $f_1(x)g_3(x) + f_2(x)g_0(x) = 0$ olur. Bu eşitlik sağdan $f_1(x)$ ile çarpılırsa

$$f_1(x)g_3(x)f_1(x) + f_2(x)g_0(x)f_1(x) = f_1(x)g_3(x)f_1(x) = 0$$

olduğundan $f_1(x)g_3(x) = 0$ bulunur. Bu ifade (3.20) eşitliğinde yazılırsa $f_2(x)g_0(x) = 0$ olur. Şimdi

$$f_0(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad f_1(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i, \quad f_2(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i, \quad f_3(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i$$

$$g_0(x) = \sum_{j=0}^{m} a'_j x^j, \quad g_1(x) = \sum_{j=0}^{m} b'_j x^j, \quad g_2(x) = \sum_{j=0}^{m} c'_j x^j, \quad g_3(x) = \sum_{j=0}^{m} d'_j x^j$$

olmak üzere

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m}\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} x^i, \quad g(x)=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix} a_{j'} & b_{j'} & c_{j'} \\ 0 & a_{j'} & d_{j'} \\ 0 & 0 & a_{j'} \end{pmatrix} x^j$$

polinomlarını göz önüne alalım. Önceki sonuçlardan her i, j için

$$a_i a_{j'} = 0, \quad a_i b_{j'} = 0, \quad b_i a_{j'} = 0, \quad a_i d_{j'} = 0$$

$$d_i a_{j'} = 0, \quad a_i c_{j'} = 0, \quad b_i d_{j'} = 0, \quad c_i a_{j'} = 0$$

bulunur. Sonuç olarak her i, j için

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{j'} & b_{j'} & c_{j'} \\ 0 & a_{j'} & d_{j'} \\ 0 & 0 & a_{j'} \end{pmatrix} = O$$

olduğundan S Armendariz'dir. $\square$

S bir inmiş halka olmak üzere

$$R_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : \ a, a_{ij} \in S \right\}$$

halkasını göz önüne alalım. Önerme 3.2.3'e göre, $n \geq 4$ için R_n'in Armendariz olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnekte görüleceği gibi R_n'in Armendariz olmadığını Kim ve Lee 2000'de kanıtlamışlardır.

Örnek 3.2.4 R herhangi bir halka olmak üzere $R_4[x]$ halkasında $f(x) = E_{12} + (E_{12} - E_{13})x$ ve $g(x) = E_{34} + (E_{24} + E_{34})x$ polinomları için $f(x)g(x) = O$'dır. Fakat $E_{12}E_{24} = E_{14} \neq O$ olduğundan dolayı R_4 Armendariz değildir.

Önerme 3.2.3'ün bir sonucu olan (Rege ve Chhawchharia tarafından 1997 yılında ispatlanan) aşağıdaki sonucun ispatını daha basit bir biçimde verebiliriz.

Sonuç 3.2.5 R bir inmiş halka olsun. Bu durumda $T(R, R)$ aşikar genişlemesi Armendariz'dir (Kim and Lee, 2000).

İspat R bir inmiş halka olsun. $T(R,R) \cong \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix} : a,b \in R \right\}$ olduğu biliniyor. $\left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix} : a,b \in R \right\}$ halkası ile $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a,b \in R \right\}$ halkası arasında $r \mapsto a, s \mapsto b$ tanımlanarak bir izomorfizma kurulabilir. Bundan dolayı

$$T(R,R) \cong U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a,b \in R \right\}$$

olur. U; Önerme 3.2.3'teki S'nin bir alt halkasıdır. S Armendariz olduğundan U Armendariz'dir. Bundan dolayı $T(R,R)$ Armendariz'dir. $\square$

Sonuç 3.2.5'e bakılarak R Armendariz iken $T(R,R)$'nin Armendariz olmasından şüphe edilebilir. Fakat aşağıdaki örnekte de görülebileceği gibi R Armendariz iken $T(R,R)$ Armendariz olmayabilir (Kim and Lee, 2000).

Örnek 3.2.6 T inmiş bir halka olsun. Bu durumda Sonuç 3.2.5'ten

$$T(T,T) \cong R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a,b \in T \right\}$$

halkası Armendariz'dir.

$$S = T(R,R) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & K \\ 0 & A \end{pmatrix} : A,K \in R \right\}$$

halkasının Armendariz olmadığını gösterelim. Bunun için $S[x]$'te

$$f(x) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} x$$

ve

$$g(x) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} x$$

polinomlarını göz önüne alalım. $f(x)g(x) = O$ olmasına rağmen

$$\begin{aligned} A_0 B_1 &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq O \end{aligned}$$

olduğundan S Armendariz değildir. Dolayısıyla R Armendariz halkasının $T(R, R)$ aşikar genişlemesi Armendariz değildir.

Lee ve Wong 2003'te aşağıdaki lemmayı ispatladıktan sonra Kim ve Lee'nin 2000'de ispatladıkları "R inmiş $\Rightarrow T(R, R)$ Armendariz" ifadesini genelleştirerek ispatını (daha zekice) farklı bir biçimde vermişlerdir.

Lemma 3.2.7 Kabul edelim ki herhangi bir R halkası için $a^2 = 0 = b^2$ ve $ab = ba \neq 0$ olacak şekilde $a, b \in R$ elemanları var olsun. Bu durumda R Armendariz değildir (Lee and Wong, 2003).

İspat Herhangi bir R halkası için $a^2 = 0 = b^2$ ve $ab = ba \neq 0$ olacak şekilde $a, b \in R$ elemanlarının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(x) = a+bx, g(x) = a-bx \in R[x]$ polinomları için $f(x)g(x) = O$'dır. Fakat $ab \neq 0$ olduğundan R Armendariz değildir. □

Teorem 3.2.8 Bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul $T(R, R)$'nin Armendariz olmasıdır (Lee and Wong, 2003).

İspat R halkası inmiş iken $T(R,R)$'nin Armendariz olduğu Sonuç 3.2.5'ten açıktır. Tersine, kabul edelim ki R halkası inmiş olmasın. Bu durumda $u^2 = 0$ olacak şekilde $0 \neq u \in R$ vardır. $S = T(R,R) \cong \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix} : r, s \in R \right\}$ olsun. $A = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ elemanlarını alalım. $A^2 = 0 = B^2$ olduğu açıktır. Ayrıca $u \neq 0$ olduğundan $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ olup Lemma 3.2.7'den S Armendariz değildir. Böyle $T(R,R)$ Armendariz değildir. □

Bir R halkası için, R Armendariz iken her alt halkasının da Armendariz olduğunu daha önce belirtmiştik. Ayrıca R halkasının Armendariz olan alt halkalarının herhangi bir $\{S_t\}_t$ zinciri için $\bigcup_t S_t$ kümesinin R'nin Armendariz olan bir alt halkası olduğu açıktır. Bundan dolayı bir R halkasının her Armendariz alt halkası R'nin uygun bir maksimal Armendariz alt halkasında kapsanır. Anderson ve Camillo 1998'de (Teorem 3.1.19'da görüldüğü gibi) "herhangi $n \geq 2$ için R'nin inmiş olması için gerek ve yeter koşul $R[x]/(x^n)$'in Armendariz olmasıdır" ispatlamışlardır. Burada $R[x]/(x^n)$'in $UTM_n(R)$'nin bir alt halkası olan $RI_n + RV + RV^2 + \ldots + RV^{n-1}$ halkasına izomorf olduğuna dikkat edilmelidir. Kim ve Lee 2000'de (Örnek 3.2.2) herhangi bir $n \geq 2$ için $UTM_n(R)$'nin Armendariz olmadığını fakat Önerme 3.2.3'te inmiş olan bir R halkası için $UTM_3(R)$'nin bir alt halkası olan $S = RI_3 + RE_{1,2} + RE_{1,3} + RE_{2,3}$ halkasının Armendariz olduğunu göstermişlerdir. Bundan dolayı inmiş bir R halkası için $UTM_n(R)$'nin tüm bilinen Armendariz alt halkalarını kapsayan $UTM_n(R)$'nin en büyük (geniş) Armendariz alt halkasını bulabiliriz. Bunun için öncelikle Bölüm 2.3'te verilen bazı notasyonları hatırlatalım:

Herhangi bir $A \in M_n(R)$ için, $RA = \{rA : r \in R\}$ olsun. $n \geq 2$ için $\{E_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n\}$ matris birimleri kümesi olmak üzere,

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$$

olsun.

$n = 2k \geq 2$ çift sayısı için,

$$A_n^e(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+i}^{n} RE_{i,j}, \quad B_n^e(R) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=k+i-1}^{n} RE_{i,j}$$

ve $n = 2k + 1 \geq 3$ tek sayısı için,

$$A_n^o(R) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=k+i}^{n} RE_{i,j}, \quad B_n^o(R) = \sum_{i=1}^{k+2} \sum_{j=k+i-1}^{n} RE_{i,j}$$

olarak tanımlanır. Diğer taraftan

$$\begin{array}{ll} n = 2k \text{ için} & A_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-1} + A_n^e(R), \\ & B_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-2} + B_n^e(R), \\ n = 2k+1 \text{ için} & A_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-1} + A_n^o(R), \\ & B_n(R) = RI_n + RV + \ldots + RV^{k-2} + B_n^o(R) \end{array}$$

olarak tanımlanır.

Aşağıda Armendariz olmayan bazı matris halkası örnekleri verilmiştir.

Örnek 3.2.9 R bir halka olsun.

(1) $n = 2k \geq 2$ için $B_n^e(R)$ Armendariz değildir.

(2) $n = 2k + 1 \geq 3$ için $B_n^o(R)$ Armendariz değildir.

(3) $n \geq 2$ için $B_n(R)$ Armendariz değildir.

Gerçekten:

(1) $B_n^e(R)[x]$'de $[E_{1,k} + (E_{1,k} - E_{1,k+1})x][E_{k+1,n} + (E_{k,n} + E_{k+1,n})x] = O$'dır, fakat $E_{1,k}(E_{k,n} + E_{k+1,n}) = E_{1,n} \neq O$'dır.

(2) $B_n^o(R)[x]$'de $[E_{1,k+1} + (E_{1,k+1} - E_{1,k+2})x][E_{k+2,n} + (E_{k+1,n} + E_{k+2,n})x] = O$'dır, fakat $E_{1,k+1}(E_{k+1,n} + E_{k+2,n}) = E_{1,n} \neq O$'dır.

(3) (1) ve (2)'den açıktır.

Lee ve Zhou'nun 2004'te ispatladıkları aşağıdaki teorem inmiş olan bir R halkası üzerindeki $M_n(R)$ matris halkasının Armendariz olan bazı alt halkalarını vermektedir.

Teorem 3.2.10 R inmiş bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) Her $n = 2k + 1 \geq 3$ için $A_n(R)$ Armendariz'dir.

(2) Her $n = 2k \geq 4$ için $A_n(R) + RE_{1,k}$ Armendariz'dir.

Bu teoremin bir sonucu olarak, Anderson ve Camillo tarafından 1998'de ispatlanan, Teorem 3.1.19'un ispatı basit bir şekilde Lee ve Zhou tarafından 2004'te aşağıdaki gibi verilmiştir.

Sonuç 3.2.11 R bir halka ve $n \geq 2$ bir doğal sayı olsun. Bu durumda $R[X]/(x^n)$'in Armendariz olması için gerek ve yeter koşul R'nin inmiş olmasıdır (Lee and Zhou, 2004).

İspat R halkasının inmiş olduğunu kabul edelim.

$$V_n(R) = RI_n + RV + RV^2 + \ldots + RV^{n-1}$$

olsun. Bu durumda

$$A_2(R) \cong RI_n + RV^{n-1} \subseteq V_n(R) \subseteq A_n(R)$$

dir. Ayrıca $\theta(r_0I_n + r_1V + r_2V^2 + \ldots + r_{n-1}V^{n-1}) = (r_0 + r_1x + r_2x^2 \ldots + r_{n-1}x^{n-1}) + (x^n)$ ile tanımlanan bir

$$\theta : V_n(R) \to R[x]/(x^n)$$

halka izomorfizması vardır. Böylece R inmiş olduğundan Teorem 3.2.10'dan $A_n(R)$ ve buradan $n > 2$ için $V_n(R) \cong R[x]/(x^n)$ Armendariz'dir. $n = 2$ durumu için ispat Sonuç 3.2.5'ten açıktır.

Tersine $R[x]/(x^n)$ Armendariz olsun. Bu durumda $A_2(R)$ Armendariz olup Teorem 3.2.8'den R'nin inmiş olduğu açıktır. □

Uyarı 3.2.12 İnmiş bir R halkası ve $n \geq 2$ için, $UTM_n(R)$ bir tek maksimal Armendariz alt halkaya sahip değildir.

Önerme 3.2.13 R inmiş bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) $A_2(R)$, $UTM_2(R)$'nin bir maksimal Armendariz alt halkasıdır.

(2) $A_3(R)$, $UTM_3(R)$'nin bir maksimal Armendariz alt halkasıdır.

(Lee and Zhou, 2004).

İspat Sadece (2) durumu incelememiz yeterlidir. Kabul edelim ki $A_3(R)$ halkası $UTM_3(R)$'nin maksimal Armendariz alt halkası olmasın Yani $A_3(R) \subsetneqq T \subseteq UTM_3(R)$ olacak şekilde Armendariz olan bir T alt halkası var olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \notin A_3(R)$$

olacak şekilde bir

$$a_1E_{11} + a_2E_{22} + a_3E_{33} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \in T$$

elemanı vardır.

1. Durum: $a_1 \neq a_2$ ise $a = a_1 - a_2 \neq 0$ olup $s, t \in R$ için

$$A = aE_{11} + sE_{33} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, B = aE_{22} + tE_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \in T\text{' dir.}$$

$st = 0$ ise: $T[x]$' de $f(x) = A + aE_{12}x$ ve $g(x) = B - aE_{12}x$ polinomlarını göz önüne alalım.

$$f(x)g(x) = (A + aE_{12}x)(B - aE_{12}x) = O$$

dır. Fakat $(aE_{12})B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^2E_{12} \neq O$ olması T' nin Armendariz olması ile çelişir.

$st \neq 0$ ise: $0 \neq AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & st \end{pmatrix} = stE_{33} \in T$'dir.

$T[x]$'de $f(x) = stE_{12} - stE_{23}x$ ve $g(x) = stE_{33} + stE_{23}x$ polinomları için $f(x)g(x) = O$ olur. Ama $stE_{12}stE_{23} = \begin{pmatrix} 0 & st & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & st \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & st \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$

olması T'nin Armendariz olması ile çelişir.

O halde $a_1 = a_2$ olmalıdır.

2. Durum: $a_1 = a_2 \neq a_3$ ise $b = a_3 - a_1 \neq 0$'dır.

$$A = bE_{11} + bE_{22} = \begin{pmatrix} a_3 - a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 - a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (-b)E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 - a_3 \end{pmatrix} \in T$$

dir. $T[x]$'de

$$f(x) = A + (A + E_{13})x = \begin{pmatrix} a_3 - a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 - a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 - a_1 & 0 & 1 \\ 0 & a_3 - a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

ve

$$g(x) = B + (B + E_{13})x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 - a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 - a_3 \end{pmatrix} x$$

polinomlarını göz önüne alalım. $f(x)g(x) = O$'dır. Fakat

$$A(B + E_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 - a_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olması T'nin Armendariz olması ile çelişir. Sonuç olarak $a_1 = a_2 = a_3$ bulunur.

Bu durumda $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \notin A_3(R)$ olması bir çelişkidir. O halde $A_3(R)$ halkası $UTM_n(R)$'nin maksimal Armendariz alt halkasıdır. $\square$

Aşağıdaki iki önermede verilen Armendariz halkalar, Teorem 3.2.10'da verilmiş olan, $M_n(R)$'nin "göreceli maksimal" Armendariz alt halkalarından bazılarıdır.

Önerme 3.2.14 R inmiş bir halka ve $n = 2k + 1 \geq 5$ olsun. Bu durumda $A_n(R)$ halkası $A_n(R) + RE_{1,k}$ halkasının bir maksimal Armendariz alt halkasıdır (Lee and Zhou, 2004).

İspat R inmiş bir halka iken Teorem 3.2.10(1)'den $A_n(R)$ halkası Armendarizdir. Kabul edelim ki $A_n(R)$ halkası $A_n(R)+RE_{1k}$ nin maksimal Armendariz alt halkası olmasın. Yani $A_n(R) \subsetneqq T \subseteq A_n(R)+RE_{1k}$ olacak şekilde $A_n(R)+RE_{1k}$'nın Armendariz bir T alt halkası var olsun. $a \neq b$ olmak üzere $aE_{1,k}+b(E_{2,k+1}+E_{3,k+2}+\ldots+E_{k+2,n}) \in T$'dir. Böylece $c=a-b \neq 0$ olmak üzere ($cE_{1k} \notin A_n(R)$ iken) $cE_{1k} \in T$'dir. $T[x]$'te $[cE_{1,k}+c(E_{1,k}-E_{1,k+1})x][E_{k+1,n}+(E_{k,n}+E_{k+1,n})x]=O$'dır. Fakat $cE_{1,k}(E_{k,n}E_{k+1,n})=cE_{1,n} \neq O$ olması T'nin Armendariz olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $A_n(R)$ halkası $A_n(R)+RE_{1k}$'nin maksimal Armendariz alt halkasıdır. □

Önerme 3.2.15 R inmiş bir halka ve $n=2k \geq 4$ olsun. Bu durumda $A_n(R)+RE_{1,k}$ halkası $A_n(R)+RE_{1,k}+RE_{k+1,n}$ halkasının bir maksimal Armendariz alt halkasıdır (Lee and Zhou, 2004).

İspat R inmiş bir halka olmak üzere $S=A_n(R)+RE_{1k}$ olsun. Teorem 3.2.10(2)'den S'nin Armendariz olduğunu açıktır. S halkasının $A_n(R)+RE_{1,k}+RE_{k+1,n}$'nin maksimal Armendariz bir alt halkası olmadığını kabul edelim. Bu durumda $S \subsetneqq T \subseteq A_n(R)+RE_{1k}+RE_{k+1n}$ olacak şekilde $A_n(R)+RE_{1,k}+RE_{k+1,n}$'nin Armendariz bir T alt halkası var olsun. Bu durumda $a \neq b$ olmak üzere $a(E_{2,k+1}+\ldots+E_{k,n-1})+bE_{k+1,n} \in T$ vardır. Böylece $c=a-b \neq 0$ olmak üzere $cE_{k+1,n} \in T$'dir. $[cE_{1,k}+c(E_{1,k}-E_{1,k+1})x][cE_{k+1,n}+(cE_{k,n}+cE_{k+1,n})x]=O$'dır. Fakat $cE_{1k}(cE_{kn}+cE_{k+1n})=c^2E_{1n} \neq O$ olması T' nin Armendariz olması ile çelişir. Sonuç olarak S maksimal Armendariz alt halkadır. □

Önerme 3.2.14'ten $n=2k+1 \geq 5$ için $A_n(R)+RE_{1,k}$ halkası Armendariz değildir. Bu durum $n=2k \geq 4$ için $A_n(R)+RE_{1,k}$'nin Armendariz olması ile ilginç bir çelişki oluşturur.

Önerme 3.2.16 R inmiş bir halka olsun. Bu durumda $i=1,2,3$ için $A_4(R)+RE_{i,i+1}$ halkası $B_4(R)$ halkasının bir maksimal Armendariz alt halkasıdır (Lee and Zhou, 2004).

3.3 Armendariz Halkaların Diğer Halka Sınıflarıyla İlişkisi

Armendariz halka sınıfı ile inmiş halka sınıfı arasındaki ilişki Lemma 3.1.3'te verilmiştir. Bundan başka Armendariz halkaların Gaussian, abelyan, Baer, $p.p$-halka ve yarıdeğişmeli halka sınıfları arasındaki ilişkiler de incelenecektir.

Önerme 3.3.1 R değişmeli bir halka olmak üzere R halkası Gaussian ise Armendariz'dir (Anderson and Camillo, 1998).

İspat R Gaussian bir halka olsun. R'nin Armendariz olduğunu gösterelim. $f, g \in R[x]$ için $fg = 0$ olsun. Bu durumda $A_{fg} = 0$ olup R Gaussian olduğundan $0 = A_{fg} = A_f A_g$ eşitliği sağlanır. $A_f A_g = 0$ olduğundan f'nin katsayıları ile g'nin katsayılarının çarpımı sıfır olur. Böylece R Armendariz'dir. $\square$

Teorem 3.3.2 R değişmeli bir halka olsun. R'nin Gaussian olması için gerek ve yeter koşul R'nin her homomorfik görüntüsünün Armendariz olmasıdır (Anderson and Camillo, 1998).

İspat R Gaussian olsun. I, R'nin herhangi bir ideali olmak üzere $\eta_I : R \to R/I$ kanonik epimorfizması vardır. $\eta_I(R) = R/I$,R' nin homomorfik görüntüsüdür. R Gaussian olduğundan R/I Gaussian'dır. Bir önceki önermeden R/I'nın (yani R' nin her homomorfik görüntüsünün) Armendariz olduğunu söyleyebiliriz. Tersine R'nin her homomorfik görüntüsünün Armendariz olduğunu kabul edelim. $f, g \in R[X]$ olsun. Bu durumda A_{fg}, R'nin bir idealidir. Kabulden R/A_{fg} Armendariz'dir. Bundan dolayı

$$(R/A_{fg})[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} (r_i + A_{fg}) x^i : r_i \in R \right\}$$

olmak üzere $\bar{f}, \bar{g} \in (R/A_{fg})[x]$ polinomları için $\bar{f}\bar{g} = \bar{0}$ ise R/A_{fg} Armendariz olduğundan $\bar{f}$'nin katsayıları $\bar{g}$'nin katsayılarını sıfırlar. Yani her i, j için $(a_i + A_{fg})(b_j + A_{fg}) = A_{fg}$ ise $a_i b_j + A_{fg} = A_{fg}$ olup buradan $a_i b_j \in A_{fg}$'dir. Sonuç olarak $A_f A_g \subseteq A_{fg}$'dir. Diğer yandan $A_{fg} \subseteq A_f A_g$ kapsamı her zaman sağlandığından $A_f A_g = A_{fg}$ bulunur. Böylece R Gaussian'dır. $\square$

Lemma 3.3.3 Armendariz halkalar abelyandır (Kim and Lee, 2000).

İspat R Armendariz bir halka olsun. R'nin abelyan olduğunu gösterelim. Bunun için $e^2 = e \in R$ olmak üzere her $r \in R$ için $er = re$ olduğunu göstermeliyiz. Bir $r \in R$ için $f = e + er(1-e)$ olsun.

$$\begin{aligned}
f^2 &= ff \\
&= (e + er(1-e))(e + er(1-e)) \\
&= e + er(1-e) + er(1-e)e + er(1-e)er(1-e) \\
&= e + er - ere + ere - ere \\
&= e + er(1-e) \\
&= f
\end{aligned}$$

olduğundan f eşkare elemandır.

$$(1-e)f = (1-e)(e + er(1-e)) = (1-e)e + (1-e)er(1-e) = e - e = 0$$

olduğundan Lemma 3.1.21'den $f(1-e) = 0$'dır.

$$0 = f(1-e) = [e+er(1-e)](1-e) = e(1-e)+er(1-e) = e-e+er-ere = er-ere$$

olduğundan $er = ere$ bulunur. Diğer taraftan bir $r \in R$ için $f' = (1-e) + (1-e)re$ olsun.

$$\begin{aligned}
(f')^2 &= f'f' \\
&= [(1-e) + (1-e)re][(1-e) + (1-e)re] \\
&= (1-e) + (1-e)re + (1-e)re(1-e) + (1-e)re(1-e)re \\
&= 1 - e + re - ere \\
&= (1-e) + (1-e)re \\
&= f'
\end{aligned}$$

olduğundan $f^{'}$ eşkare elemandır.

$$ef' = e[(1-e) + (1-e)re] = e(1-e) + e(1-e)re = e - e + ere - ere = 0$$

olup Lemma 3.1.21'den $f'e = 0$' dır. Bu durumda

$$0 = f'e = [(1-e) + (1-e)re]e = (1-e)e + (1-e)re = e - e + re - ere = re - ere$$

olduğundan $re = ere$ bulunur. Sonuç olarak her $r \in R$ için $er = re$ olduğundan R'deki her eşkare merkezildir. Yani R abelyandır. $\square$

Huh ve diğerleri 2002'de; aşağıdaki lemmayı ispatladıktan sonra Lemma 3.3.3'ün ispatını farklı bir biçimde vermişlerdir.

Lemma 3.3.4 R Armendariz bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) $a, b, c \in R$ ve uygun bir $n \geq 1$ tam sayısı için $ab = 0$ ve $ac^n b = 0$ ise, bu durumda $acb = 0$'dır.

(2) $a, b, c \in R$ ve uygun bir $n \geq 1$ tam sayısı için $ab = 0$ ve c^n merkezil ise, bu durumda $acb = 0$'dır.

İspat (1) $a, b, c \in R$ ve uygun bir $n \geq 1$ tam sayısı için $ab = 0$ ve $ac^n b = 0$ olduğunu kabul edelim. $R[x]$'de $f(x) = a(1 - cx)$ ve $g(x) = (1 + cx + c^2x^2 + \ldots + c^{k-1}x^{k-1})b$ polinomlarını göz önüne alalım. $f(x)g(x) = 0$ olduğu açıktır. R Armendariz olduğundan $acb = 0$ elde edilir.
(2) c^n merkezil olduğundan (1)'den açıktır. $\square$

Sonuç 3.3.5 Armendariz halkalar abelyandır (Huh et al, 2002).

İspat R Armendariz bir halka olsun. $e^2 = e \in R$ alalım. $r \in R$ olmak üzere Lemma 3.3.4'de $a = e$, $b = 1 - e$ ve $c = er(1 - e)$ olarak alınırsa $ab = 0$ ve $ac^2b = 0$ olduğu açıktır. Lemma 3.3.4 gereğince $acb = e[er(1 - e)](1 - e) = er(1 - e) = 0$ olup $er = ere$ bulunur. Benzer şekilde $a_1 = 1 - e$, $b_1 = e$ ve $c_1 = (1 - e)re$ alınırsa $a_1b_1 = 0$ ve $ac_1^2b = 0$ olduğu açıktır. Yine Lemma 3.3.4 gereğince $a_1c_1b_1 = (1 - e)[(1 - e)re]e = (1 - e)re = 0$ olup $re = ere$ elde edilir. Sonuç olarak her $r \in R$ için $er = re$ olduğundan e eşkare elemanı merkezil olup R abelyandır. $\square$

Lemma 3.3.4'ün başka bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.3.6 R Armendariz bir halka olmak üzere R'nin merkezi $Z(R)$ olsun. N; R'nin bir iki yanlı nil ideali ise, bu durumda $Z(R)+N$ halkası R'nin hem Armendariz hem de yarıdeğişmeli olan bir alt halkasıdır (Huh et al. 2002).

Lemma 3.3.7 R halkası abelyan bir halka olsun. Bu durumda

(1) $R[x]$'deki her eşkare eleman R'dedir ve $R[x]$ abelyandır.

(2) $R[[x]]$'deki her eşkare eleman R'dedir ve $R[[x]]$ abelyandır. (Kim and Lee, 2000)

İspat $R[x]$ polinom halkası $R[[x]]$ kuvvet seriler halkasının bir alt halkası olduğundan (2)'yi ispatlamak yeterlidir. $R[[x]]$'de $f^2 = f$ olacak şekilde bir $f(x) = e_0 + e_1x + \ldots + e_nx^n + \ldots$ polinomunu alalım. $f^2 = f$ olduğundan

$$e_0^2 = e_0 \tag{3.22}$$

$$e_0e_1 + e_1e_0 = e_1 \tag{3.23}$$

$$e_0e_2 + e_1e_1 + e_2e_0 = e_2 \tag{3.24}$$

$$\vdots$$

$$e_0e_k + e_1e_{k-1} + \ldots + e_ke_0 = e_k \tag{3.25}$$

$$\vdots$$

eşitlikleri elde edilir. (3.22) eşitliğinde $e_0^2 = e_0 \in R$ ve R abelyan olduğundan e_0 merkezildir. (3.23) eşitliği soldan e_0 ile çarpılırsa $e_0^2e_1 + e_0e_1e_0 = e_0e_1 = e_0e_1 + e_0e_1e_0 = e_0e_1$ olup $e_0e_1e_0 = 0$ olur. e_0 merkezil olduğundan $e_0e_1e_0 = e_0e_0e_1 = e_0^2e_1 = e_0e_1 = 0$ bulunur. Bu ifade (3.23)' te yerine yazılırsa $e_1e_0 = e_1$ olur. e_0 merkezil olduğundan $e_1e_0 = e_0e_1 = e_1 = 0$ elde edilir. (3.24) eşitliği soldan e_0 ile çarpılırsa

$$e_0^2e_2 + e_0e_1^2 + e_0e_2e_0 = e_0e_2 = e_0e_2 + e_0e_2e_0 = e_0e_2$$

olup $e_0e_2e_0 = 0$'dır. e_0 merkezil olduğundan $e_0e_2e_0 = e_0e_0e_2 = e_0^2e_2 = e_0e_2 = 0$ olur. Bu ifade (3.24) eşitliğinde yerine yazılırsa $e_2e_0 = e_2$ olur. e_0 merkezil olduğundan $e_2e_0 = e_0e_2 = e_2 = 0$ bulunur. Bu şekilde devam edilerek tümevarımla her $1 \leq i \leq k$ için $e_k = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(k+1)$. terimin katsayısı

$$e_0e_{k+1} + e_1e_k + e_2e_{k-1} + \ldots + e_ke_1 + e_{k+1}e_0 = e_{k+1}$$

dır. Bu eşitlik soldan e_0 ile çarpılırsa $e_0^2e_{k+1} + e_0e_1e_k + \ldots + e_0e_ke_1 + e_0e_{k+1} + e_0 = e_0e_{k+1}$ olup $e_0e_{k+1}e_0 = 0$ olur. e_0 merkezil olduğundan $e_0e_{k+1}e_0 = e_0e_0e_{k+1} =$

$e_0^2e_{k+1} = e_0e_{k+1} = 0$ bulunur. Bu ifade yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa $e_{k+1}e_0 = e_{k+1}$ olur. e_0 merkezil olduğundan $e_{k+1}e_0 = e_0e_{k+1} = e_{k+1} = 0$'dır. Sonuç olarak $f(x)$ polinomunda her $i \geq 1$ için $e_i = 0$ olup $f(x) = e_0 \in R$'dir. Böylece $R[[x]]$'teki her idempotent R'dedir.

Şimdi $R[[x]]$'in abelyan olduğunu gösterelim. Bunun için $R[[x]]$'deki her eşkare elemanın merkezil olduğunu göstermeliyiz. $f \in R[[x]]$ eşkare bir eleman olsun. $f(x) = e_0 \in R$ olduğunu gösterdik. $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m + \ldots \in R[[x]]$ olmak üzere e_0 merkezil olduğundan $f(x)g(x) = e_0(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m + \ldots) = e_0b_0 + e_0b_1x + \ldots + e_0b_mx^m + \ldots = b_0e_0 + b_1e_0x + \ldots + b_me_0x^m + \ldots = (b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m + \ldots)e_0 = g(x)f(x)$ bulunur. Böylece her $f(x)$ merkezil olup $R[[x]]$ abelyandır. □

Şimdi bir R halkası Baer (ya da *p.p*)-halka iken Armendarizlik koşulu altında $R[x]$ polinom halkasının da Baer (ya da *p.p*)-halka olduğunu göstermeden önce aşağıdaki iki lemmayı verelim.

Lemma 3.3.8 R bir Baer halka ise, bu durumda R bir *p.p* halkadır (Kim and Lee, 2000).

Lemma 3.3.9 R bir abelyan sağ *p.p* halka ise, bu durumda R inmiş bir halkadır (Kim and Lee, 2000).

Teorem 3.3.10 R bir Armendariz halka olsun. Bu durumda R'nin *p.p* halka olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in *p.p* halka olmasıdır (Kim and Lee, 2000).

İspat ($\Rightarrow$) R p.p halka olsun. $R[x]$'in p.p halka olduğunu gösterelim. Bunun için her bir $p(x) \in R[x]$ için $r_{R[x]}(p(x)) = e(x)R[x]$ olacak şekilde $e^2(x) = e(x) \in R[x]$ eşkare elemanının var olduğunu göstermeliyiz. $p(x) = a_0 + a_1(x) + \ldots + a_mx^m \in R[x]$ olsun. R p.p halka olduğundan her $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ için $r_R(a_i) = e_iR$ olacak şekilde $e_i^2 = e_i \in R$ eşkare elemanı vardır. Yani her bir $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ için $a_ie_iR = 0$'dır. Lemma 3.3.3'ten R Armendariz olduğundan abelyandır. Ayrıca Lemma 3.3.7'den R abelyan olduğundan $R[x]$'deki her idempotent R' dedir. Bundan dolayı her $e(x) \in R[x]$ eşkare elemanı için $e(x) = e \in R$'dir. R abelyan olduğundan her e_i eşkare elemanı merkezildir. $e = e_0e_1e_2 \ldots e_m$ olsun.

$$e^2 = (e_0e_1e_2 \ldots e_m)^2 = (e_0e_1e_2 \ldots e_m)(e_0e_1e_2 \ldots e_m) = e_0^2e_1^2 \ldots e_m^2 = e_0e_1 \ldots e_m = e$$

olduğundan $e^2 = e \in R$ eşkaredir. Ayrıca

$$eR = \bigcap_{i=0}^{m} r_R(a_i)$$

dir. Gerçekten ; $x \in eR$ ise $x = er = (e_0e_1e_2 \ldots e_m)r$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Bu durumda

$$a_0x = a_0(e_0e_1e_2 \ldots e_m)r = a_0e_0(e_1e_2 \ldots e_m)r = 0(e_1e_2 \ldots e_m)r = 0$$

olup $x \in r_R(a_0)$'dır.

$$a_1x = a_1(e_0e_1e_2 \ldots e_m)r = a_1e_1(e_0e_2 \ldots e_m)r = 0(e_0e_2 \ldots e_m)r = 0$$

olup $x \in r_R(a_1)$'dir.

$$a_2x = a_2(e_0e_1e_2 \ldots e_m)r = a_2e_2(e_0e_1 \ldots e_m)r = 0(e_0e_1 \ldots e_m)r = 0$$

olup $x \in r_R(a_2)$'dir.

Bu şekilde devam edilecek olursa;

$$a_mx = a_m(e_0e_1e_2 \ldots e_m)r = a_me_m(e_0e_1 \ldots e_{m-1})r = 0(e_0e_1 \ldots e_{m-1})r = 0$$

olduğundan $x \in r_R(a_m)$ olur. Her $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ için $x \in r_R(a_i)$ olduğundan

$$x \in \bigcap_{i=0}^{m} r_R(a_i)$$

elde edilir.

Diğer taraftan $y \in \bigcap_{i=0}^{m} r_R(a_i)$ alalım. Buradan her $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ için $y \in r_R(a_i) = e_iR$ olup $y \in e_iR$'dir. Her $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ için $y = e_ir_i$ olacak şekilde $r_i \in R$ vardır.

$$\begin{aligned}
y =& e_0r_0 \quad \text{ise} \quad e_0y = e_0r_0 = y \quad \text{ise} \quad e_0y = y \\
y =& e_1r_1 \quad \text{ise} \quad e_1y = e_1r_1 = y \quad \text{ise} \quad e_0e_1y = y \\
y =& e_2r_2 \quad \text{ise} \quad e_2y = e_2r_2 = y \quad \text{ise} \quad e_0e_1e_2y = y \\
&\vdots \\
y =& e_mr_m \quad \text{ise} \quad e_my = e_mr_m = y \quad \text{ise} \quad e_0e_1e_2 \ldots \; e_mr_m = y
\end{aligned}$$

$y = e_0e_1e_2 \dots e_m r_m$ olacak şekilde $r_m \in R$ vardır. Bu durumda $y = er_m$ olacak şekilde $r_m \in R$ var olup $y \in eR$'dir.
Şimdi ise $r_{R[x]}(p) = eR[x]$ olduğunu gösterelim. $f(x) \in eR[x]$ ise $f(x) = eg(x)$ olacak şekilde $g(x) \in R[x]$ vardır.
Eşitliğin her iki tarafını $p(x)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
p(x)f(x) =& p(x)[eg(x)] \\
=& [p(x)e]g(x) \\
=& [(a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m)e]g(x) \\
=& [a_0e + a_1ex + \ldots + a_mex^m]g(x) \\
=& [a_0(e_0e_1 \ldots e_m) + a_1(e_0e_1 \ldots e_m)x + \ldots + a_m(e_0e_1 \ldots e_m)x^m]g(x) \\
=& [a_0e_0(e_1e_2 \ldots e_m) + a_1e_1(e_0e_2 \ldots e_m)x + \ldots + a_me_m(e_0e_1 \ldots e_{m-1})x^m]g(x) \\
=& 0
\end{aligned}$$

olduğundan $f(x) \in r_{R[x]}(p(x))$ olup $eR[x] \subseteq r_{R[x]}(p)$ elde edilir.
Diğer taraftan $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \in r_{R[x]}(p)$ olsun. Bu durumda $p(x)q(x) = 0$'dır. R Armendariz olduğundan her $i = 0, 1, \ldots, m$ ve her $j = 0, 1, \ldots, n$ için $a_ib_j = 0$'dır. Bundan dolayı her $i = 0, 1, \ldots, m$ için $b_j \in r_R(a_i)$'dir. Buradan $b_j \in \cap_{i=0}^{m} r_R(a_i) = eR$ olup $b_j = er_j$ olacak şekilde $r_j \in R$ vardır. $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n = er_0 + er_1x + \ldots + er_nx^n = e(r_0 + r_1x + \ldots + r_nx^n)$ ise $q(x) = e(r_0 + r_1x + \ldots + r_nx^n) \in eR[x]$ olup $r_{R[x]}(p) \subseteq eR[x]$'tir. Sonuç olarak $r_{R[x]}(p) = eR[x]$ olduğundan $R[x]$ bir sağ p.p halkadır.

Benzer olarak $R[x]$'in bir sol *p.p*-halka olduğu gösterilebilir. Böylece $R[x]$ hem sağ hem de sol p.p halka olduğundan $R[x]$ bir p.p halkadır.
$(\Leftarrow)$ $R[x]$ p.p halka olsun. R'nin p.p halka olduğunu gösterelim. $a \in R$ olsun. $R \subseteq R[x]$ olduğundan $a \in R[x]$'tir. $R[x]$ p.p halka olduğundan $r_{R[x]}(a) = eR[x]$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ eşkaresi vardır. Bu eşitliğin her iki yanı R ile arakesit alınırsa $r_{R[x]}(a) \cap R = r_R(a) = eR[x] \cap R = eR$ olduğundan $r_R(a) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ bulunduğundan R bir sağ p.p halkadır. Benzer şekilde R'nin bir sol p.p halka olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak R hem sağ hem de sol p.p halka olduğundan R bir p.p halkadır. $\square$

Teorem 3.3.11 R Armendariz bir halka olsun. Bu durumda R'nin Baer halka olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in Baer halka olmasıdır (Kim and Lee, 2000)

İspat ($\Rightarrow$) R bir Baer halka olsun. $R[x]$'in bir Baer halka olduğunu gösterelim. A, $R[x]$'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Göstermemiz gereken $r_{R[x]}(A) = e(x)R[x]$ olacak şekilde $e^2(x) = e(x) \in R[x]$ eşkaresinin var olduğudur. Öncelikle Lemma 3.3.3' den R Armendariz olduğundan R abelyan ve Lemma 3.3.7'den R abelyan olduğundan $R[x]$'teki her eşkare eleman R'dedir diyebiliriz. A^*; A'daki tüm polinomların tüm katsayılarının kümesi olsun. Bu durumda A^*; R'nin boştan farklı bir alt kümesidir. R Baer halka olduğundan $\emptyset \neq A^* \subseteq R$ için $r_R(A^*) = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ eşkaresi vardır (yani her $a \in A^*$ için $aeR = 0$'dır). Şimdi $r_{R[x]}(A) = eR[x]$ olduğunu gösterelim. $f(x) \in eR[x]$ alalım. Bu durumda $f(x) = eg(x)$ olacak şekilde $g(x) \in R[x]$ vardır. Buradan $Af(x) = Aeg(x)) = (Ae)g(x)$ olur. Her $q(x) \in A$ için $q(x)f(x) = q(x)[eg(x)] = [q(x)e]g(x) = [(a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m)e]g(x) = [a_0e + a_1ex + \ldots + a_mex^m]g(x) = [0 + 0x + \ldots + 0x^m]g(x) = 0g(x) = 0$ olduğundan $Af(x) = 0$ olup $f(x) \in r_{R[x]}(A)$'dır. Bu durumda $eR[x] \subseteq r_{R[x]}(A)$ olur. Diğer taraftan $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m \in r_{R[x]}(A)$ alalım. Bu durumda $Ag(x) = 0$ olup her $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in A$ için $f(x)g(x) = 0$'dır. R Armendariz olduğundan $f(x)g(x) = 0$ iken her i, j için $a_ib_j = 0$'dır. Bundan dolayı $b_0, b_1, \ldots, b_t \in r_R(A^*)$'dır. Her j için $b_j \in r_R(A^*) = eR$ olup $b_j = er_j$ olacak şekilde $r_j \in R$ vardır. $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_tx^t = er_0 + er_1x + \ldots + er_tx^t = e(r_0 + r_1x + \ldots + r_tx^t)$ olacak şekilde $r_0 + r_1x + \ldots + r_tx^t \in R[x]$ vardır. Bu durumda $g(x) \in eR[x]$ olup $r_{R[x]}(A) \subseteq eR[x]$ olduğundan $R[x]$ Baer halkadır.
($\Leftarrow$) $R[x]$ Baer halka olsun. R'nin Baer olduğunu gösterelim. R'nin boştan farklı bir B alt kümesini alalım. Bu durumda $R \subseteq R[x]$ olduğundan $\emptyset \neq B \subseteq R[x]$' dir. $R[x]$ Baer halka olduğundan $r_{R[x]}(B) = eR[x]$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ vardır. Bu eşitliğin her iki yanı R ile arakesit alınırsa $r_{R[x]}(B) \cap R = r_R(B) = eR[x] \cap R = eR$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ var olduğundan R Baer halkadır. □

Benzer sonuçlar, formal kuvvet seriler halkası için de aşağıdaki gibi verilebilir.

Önerme 3.3.12 R abelyan bir halka olmak üzere.

(1) $R[[x]]$ p.p halka ise R p.p halkadır.

(2) $R[[x]]$ Baer halka ise R Baer halkadır. (Kim and Lee, 2000)

İspat İspatı, Teorem 3.3.10 ve Teorem 3.3.11'in ispatlarındaki metoda benzer olarak yapılır. □

Sonuç 3.3.13 Bir R halkasının Armendariz olduğunu kabul edelim.

(1) $R[[x]]$ p.p halka ise R p.p halkadır.

(2) $R[[x]]$ Baer halka ise R Baer halkadır. (Kim and Lee, 2000)

İspat Lemma 3.3.3'ten R Armendariz olduğundan abelyandır. Önerme 3.3.12'den (1) ve (2)'nin sağlandığı açıktır. □

Bir halkanın klasik sağ kesirler halkasını kullanarak Kim ve Lee 2000'de inmiş halkalar için bir karakterizasyon vermişlerdir. Huh ve diğerleri 2002'de Armendariz halkalar üzerinde bu ifadeyi genişleterek aşağıdaki gibi ifade etmişlerdir.

Teorem 3.3.14 Bir R halkasının $Q(R)$ klasik sağ kesirler halkasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda R'nin Armendariz olması için gerek ve yeter koşul $Q(R)$'nin Armendariz olmasıdır.

İspat İspatın diğer yönü açık olduğundan R Armendariz iken $Q(R)$'nin Armendariz olduğunu göstermek yeterlidir. $Q(R)[x]$'te $f(x)g(x) = 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$ ve $g(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j$ polinomlarını göz önüne alalım. $Q(R)$; R'nin klasik sağ kesir cismi olduğundan $a_i, b_j \in R$ ve $u, v \in R$ regüler elemanlar olmak üzere her i, j için $\alpha_i = a_i u^{-1}$, $\beta_j = b_j v^{-1}$ biçiminde yazılabilir. Ayrıca her bir j için $u^{-1} b_j = c_j w^{-1}$ olacak şekilde $c_j \in R$ ve $w \in R$ regüler elemanı vardır. Bu durumda $f_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ ve $g_1(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \in R[x]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 =& f(x)g(x) \\ =& \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \alpha_i \beta_j x^{i+j} \\ =& \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i (u^{-1} b_j) v^{-1} x^{i+j} \\ =& \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i c_j (vw)^{-1} x^{i+j} \\ =& f_1(x) g_1(x) (vw)^{-1} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $R[x]$'te $f_1(x)g_1(x) = 0$ olup R Armendariz olduğundan her i, j için $a_i c_j = 0$ bulunur. Böylece her i, j için $\alpha_i \beta_j = a_i u^{-1} b_j v^{-1} = a_i c_j w^{-1} v^{-1} = 0$ olur. Sonuç olarak $Q(R)$ Armendariz'dir. □

Bu teoremin bir sonucu olarak von Neumann regüler bir halka üzerinde Armendariz olmanın denk koşulları aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 3.3.15 R von Neumann regüler bir halka olmak üzere R'nin $Q(R)$ klasik sağ kesir halkasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) R Armendariz'dir.

(2) R inmiştir.

(3) $Q(R)$ inmiştir.

(4) $Q(R)$ Armendariz'dir.

İspat (3) $\Rightarrow$ (2) ve (4) $\Rightarrow$ (1) açıktır.
(2) $\Rightarrow$ (1) Lemma 3.1.3'ten açıktır.
(3) $\Rightarrow$ (4) (Kim and Lee, 2000)'de ispatlanmıştır.
(1) $\Rightarrow$ (3) R Armendariz olsun. $Q(R)$'nin inmiş olduğunu gösterelim. Bunun içinde öncelikle R'nin inmiş olduğunu elde etmeliyiz. Önceki bilgilerimizden R abelyan sağ $p.p$ halka ise R'nin inmiş olduğunu biliyoruz. Bu nedenle ilk olarak R abelyan von Neumann regüler halka iken R'nin abelyan sağ $p.p$ halka olduğunu gösterirsek R' nin inmiş olduğunu buluruz. O halde R abelyan von Neumann regüler halka olsun. R'nin abelyan sağ $p.p$ halka olduğunu gösterelim. R abelyan von Neumann regüler oldugundan $a \in R$ için $ara = a$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. R'nin sağ $p.p$ halka oldugunu göstermek için $a \in R$ olmak üzere $r_R(a) = (1 - ra)R$ olacak şekilde $(1 - ra)^2 = 1 - ra \in R$ eşkaresi var olmalıdır. (ra ve $(1 - ra)$'nın eşkare olduğu açıktır) Şimdi $x \in (1-ra)R$ ise $x = (1-ra)r_1$ olacak şekilde $r_1 \in R$ vardır. Buradan $ax = a(1 - ra)r_1$ olup $ax = ar_1 - arar_1 = ar_1 - ar_1 = 0$'dır. Yani $x \in r_R(a)$ olup $(1 - ra)R \subseteq r_{R(a)}$'dır. Diğer taraftan $y \in r_R(a)$ alalım. Bu durumda $ay = 0$'dır. $y = (1 - ra)y$ olarak yazılabilir. Gerçekten $y = (1 - ra)y = y - ray = y$'dir. Sonuç

olarak $y \in (1 - ra)R$ olup $r_R(a) \subseteq (1 - ra)R$'dir. Buradan $r_R(a) = (1 - ra)R$ elde edilir. Yani R abelyan sağ $p.p$ halkadır. Bu nedenle R inmiş olup $Q(R)$ inmiştir. $\square$

Anderson ve Camillo 1998'de R sol ve sağ Noetherian olan asal bir halka olmak üzere "R'nin Armendariz olması için gerek ve yeter koşulun R'nin inmiş olması" ifadesini ispatlamışlardır. Kim ve Lee 2000'de daha zayıf bir şart altında aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir. Öncelikle Goldie halkanın tanımını hatırlatalım.

Tanım 3.3.16 Bir R halkası aşağıdaki şartları sağlıyorsa *sağ Goldie halka* olarak adlandırılır.

(i) R_R sonlu mertebeye sahiptir.

(ii) R'nin sağ sıfırlayanlarının kümesi üzerinde artan zincir koşulu (ascending chain condition) sağlanır.

Sonuç 3.3.17 R'nin bir yarıasal sağ ve sol Goldie halka olduğunu kabul edelim. Bu durumda R'nin Armendariz olması için gerek ve yeter şart R'nin inmiş olmasıdır.

"Bir R halkasının yarıasal sağ Goldie halka olması için gerek ve yeter koşul R'nin yarıbasit Artinian olan klasik sağ kesirler halkasının var olmasıdır" ifadesi iyi bilinen bir durumdur. Ayrıca bir yarıasal R halkası için "R'nin inmiş olması için gerek ve yeter koşul R'nin yarıdeğişmeli olmasıdır". Bu bilgilerin ışığı altında Armendariz halkaların diğer halka sınıflarıyla ilişkilerini içeren bir karakterizasyonu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.3.18 R bir yarıasal sağ Goldie halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) R Armendariz.

(2) R inmiş.

(3) R yarıdeğişmeli.

(4) $Q(R)$ Armendariz.

(5) $Q(R)$ inmiş.

(6) $Q(R)$ yarıdeğişmeli.

(7) $Q(R)$ bölümlü halkaların bir sonlu direkt çarpımı.

Bir R halkası inmiştir $\Leftrightarrow$ $R[x]$ inmiştir. (Lemma 3.1.8'den açıktır.)
Bir R halkası Armendariz'dir $\Leftrightarrow$ $R[x]$ Armendariz'dir. (Teorem 3.1.15'ten açıktır.)
Bir R halkası abelyandır $\Leftrightarrow$ $R[x]$ abelyandır (Lemma 3.3.7'den açıktır.)
Bu bilgilerin ışığı altında "Bir R halkası yarıdeğişmelidir $\Leftrightarrow$ $R[x]$ yarıdeğişmelidir" olmasından şüphe edilebilir. Fakat, Huh ve diğerleri 2002'de aşağıdaki örneği vererek bu olasılığı ortadan kaldırmışlardır.

Örnek 3.3.19 $\mathbb{Z}_2$ tam sayıların 2 modülüne göre kalan sınıflarının cismi ve $\mathbb{Z}_2$ üzerinde değişmeli olmayan $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c$ bilinmeyenlerine göre sıfır sabit terimli polinomların serbest cebiri $A = \mathbb{Z}_2[a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c]$ olsun. $r \in A$ ve $r_1r_2r_3r_4, r_1, r_2, r_3, r_4 \in A$ olmak üzere $a_0b_0, a_1b_2 + a_2b_1, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, a_2b_2, a_0rb_0, a_2rb_2, (a_0+a_1+a_2)r(b_0+b_1+b_2)$ ile üretilen $\mathbb{Z}_2+A$'nın bir I idealini göz önüne alalım. Bu durumda A birimsiz bir halka ve $A^4 \in I$'dır. $R = (\mathbb{Z}_2 + A)/I$ olsun. R halkası yarıdeğişmelidir fakat $R[x]$ yarıdeğişmeli değildir.

"Bir R halkası yarıdeğişmelidir $\Leftrightarrow$ $R[x]$ yarıdeğişmelidir" ifadesinin doğru olmadığını yukarıdaki örneği vererek göstermiş olduk. Fakat, Rege ve Chhawchharia 1997'de R Armendariz iken bu ifadenin sağlandığını aşağıdaki gibi ispatlamışlardır.

Önerme 3.3.20 R Armendariz bir halka olsun. R'nin yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in yarıdeğişmeli olmasıdır.

İspat R halkası bir Armendariz halka olsun. R'nin yarıdeğişmeli olduğunu kabul edelim. $R[x]$'in yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $f(x), g(x) \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. R Armendariz olduğundan f'nin katsayıları g'nin katsayılarını sıfırlar yani her i, j için $a_ib_j = 0$'dır. R yarıdeğişmeli olduğundan $a_iRb_j = 0$ olur. Bu durumda $f(x)R[x]g(x) = 0$ olup $R[x]$ yarıdeğişmeli bulunur. Tersine $R[x]$ yarıdeğişmeli olsun. Yarıdeğişmeli halkaların alt halkaları da yarıdeğişmeli (Huh et al. 2002) olduğundan R'nin yarıdeğişmeli olduğu açıktır. $\square$

Ayrıca terslenebilir halkalar için de benzer bir sonucu Kim ve Lee 2003'te aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Önerme 3.3.21 R Armendariz bir halka olsun. R'nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$'in terslenebilir olmasıdır.

İspat R halkası Armendariz bir halka olsun. R'nin terslenebilir olduğunu kabul edelim. $R[x]$'in terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $f(x), g(x) \in R[x]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. R Armendariz olduğundan f'nin katsayıları g'nin katsayılarını sıfırlar yani her i, j için $a_i b_j = 0$'dır. R terslenebilir olduğundan $b_j a_i = 0$ olur. Bu durumda $g(x)f(x) = 0$ olup $R[x]$ terslenebilir bulunur. Tersine $R[x]$ terslenebilir olsun. Terslenebilir halkaların alt halkaları da terslenebilir (Kim and Lee, 2003) olduğundan R'nin terslenebilir olduğu açıktır. $\square$

4 KAYNAKLAR

Anderson, D. D. and Camillo, V. (1998). Armendariz rings and Gaussian rings. *Communications in Algebra*, **26**: 2265-2272.

Anderson, D. D. and Camillo, V. (1999). Semi groups and rings whose zero products commute. *Communications in Algebra*, **27**: 2847-2852.

Armendariz, E. P. (1974). A note on extensions of Baer and *p.p* rings. *Mathematical Society*, **18**: 470-473.

Goodearl, K. R. (1991). Von Neumann Regular rings. *Krieger Publishing Co. Second Edition*, Malabar, Florida.

Huh, C.,Lee, Y. and Smoktunowicz, A. (2002). Armendariz rings and semicommutative rings. *Communications in Algebra*, **30(2)**: 751-761.

Hungerford, T. W. (1973). Graduate Texts in Mathematics. *Springer-Verlag*,

Hong, C. Y., Kim, N. K. and Kwak, T. K. (2000). Ore extensions of Baer and *p.p* rings. *Journal Pure and Applied Algebra*, **151 (3)**: 215-226.

Hong, C.Y., Kim, N. K. and Kwak, T. K. (2005). Extensions of generalized reduced rings. *Algebra Colloquium*, **12(2)**: 229-240.

Kim, N. K. and Lee, Y. (2000). Armendariz rings and reduced rings. *Journal of Algebra*, **223**: 477–488.

Kim, N. K. and Lee, Y. (2003). Extensions of reversible rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **185**: 207-223.

Krempa, J. (1996). Some examples of reduced rings. *Algebra Colloquium*, **3(4)**: 289-300.

Lee, T. K. and Zhou, Y. (2004) Armendariz and reduced rings. *Communications in Algebra*, **32**: 2287-2299.

Lee, T. S. and Wong, T. L. (2003). On Armendariz rings. *Houston Journal of Mathematics*, **29 (3)**: 583-593.

Lee, Y., Kim, N. K. and Hong, C. Y. (1997). Counterexamples on Baer rings. *Communications in Algebra*, **25**: 497-507.

Lee, Y. and Huh, C. (1998). Counterexamples on *p.p* rings. *Kyungpook Mathematical Journal*, **38**: 421-427.

Rege, M. B. and Chhawchharria, S. (1997). Armendariz rings. *Procedings of the Japan Academy Ser. A. Math.Sci*, **73**: 14-17.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Begüm Hiçyılmaz
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar, 05/07/1989
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 0 555 362 33 90, bgmhcylmz@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi, 2003–2007
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2007–2011
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2011–2013

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

Afyon Birey Dershaneleri, 2010