LAMBDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAK FONKSİYON DİZİLERİ

Ayşe ŞAHİN

DANIŞMAN

Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİMDALI

Ekim, 2013

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LAMBDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAK FONKSİYON DİZİLERİ

Ayşe ŞAHİN

DANIŞMAN
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ekim, 2013

TEZ ONAY SAYFASI

Ayşe ŞAHİN tarafından hazırlanan "Lambda İstatistiksel Yakınsak Fonksiyon Dizileri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 21/10/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **MatematikAnabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Fatih NURAY

Başkan **:**Prof. Dr. Fatih NURAY
AKÜ Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Murat PEKER
AKÜ Eğitim Fakültesi

Üye **:** Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER
AKÜ Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….

Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

21/10/2013

Ayşe ŞAHİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$\lambda-$ İSTATİSTİKSEL YAKINSAK FONKSİYON DİZİLERİ

AYŞE ŞAHİN

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, istatistiksel yakınsaklık tanımlanmış ve istatistiksel yakınsakla ilgili teoremler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık incelenmiştir. Beşinci bölümde, fonksiyon dizileri için noktasal istatistiksel yakınsaklık çalışılmıştır. Altıncı bölümde fonksiyon dizileri için α mertebeden noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsaklık incelenmiştir ve son olarak yedinci bölümde fonksiyon dizileri için α mertebeden noktasal ve düzgün $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık tanımlanmıştır. Ayrıca $S_\lambda^\alpha(f)$-istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $w_{\lambda p}^\beta(f)$-toplanabilirlik arasındaki ilişki verilmiştir.

2013, v+56 sayfa

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, λ $-$istatistiksel yakınsaklık, fonksiyon dizileri, Cesàro toplanabilirlik

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

$\lambda-$STATISTICALLY CONVERGENT FUNCTION SEQUENCES

AYŞE ŞAHİN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatih NURAY

This thesis consists of seven chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provides a general knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed. In the third chapter, statistical convergence was defined and the theorems about statistical convergece was investigeted. In the fourth chapter,$\lambda-$statistical convergent was investigated. In the fifth chapter, pointwise statistical convergence for sequences of functions was studied. In the sixth chapter, pointwise and uniform statistical convergence of order α for sequences of functions was investigated, and finally, in the seventh chapter, $\lambda-$statistical convergence of order α for sequences of functions was studied. Also some relations between $S_{\lambda}^{\alpha}(f)-$statistical and strong $w_{\lambda p}^{\beta}(f)$-summability are given.

2013, v+56 pages

Key Words: Statistical convergence, $\lambda-$statistical convergence, sequences of functions, Cesàro summability.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Fatih NURAY (Afyon Kocatepe Üniversitesi)'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam esnasında her konuda yardımını gördüğüm hocam Yard. Doç. Dr. Uğur ULUSU (Afyon Kocatepe Üniversitesi)'a teşekkür ederim.

Hayatımın her anında olduğu gibi yüksek lisans eğitimim boyunca da maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen sevgili Aileme teşekkür ederim.

Ayşe ŞAHİN

SİMGELER DİZİNİ

S_λ	$\lambda-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
S	İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$h.h.k$	Hemen her k için
$(C,1)$	Cesàro toplanabilme
$\delta_\alpha(K)$	K kümesinin $\alpha-$ yoğunluğu
l_∞	Sınırlı diziler uzayı
S^α	α mertebeden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S^\alpha(f)$	α mertebeden noktasal istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerinin kümesi
$w_p^\alpha(f)$	α mertebeden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir fonksiyon dizilerin kümesi
$S_u^\alpha(f)$	α mertebeden düzgün istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerinin kümesi

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı 1951'de Fast tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca Schoenberg ve Buck tarafından da bağımsız olarak çalışılmıştır. (Schoenberg 1959 ve Buck 1953). Schoenberg, istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini vermiş ve bu kavramı yakınsaklığın bir toplanabilme metodu olarak incelemiştir. İstatistiksel yakınsaklık konusu sayılar teorisi, trigonometrik seriler, toplanabilme ve son yıllarda lokal konveks uzaylar ve kuvvetli integral toplanabilme gibi birçok alanda farklı adlar altında çalışılmıştır.

İkinci bölümde temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenip örnekler verilmiştir. Ayrıca istatistiksel Cauchy dizisi kavramı tanımlandı ve istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu ispatlandı. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık bir toplanabilme metodu olarak çalışıldı. Metodun gücü genel matris metodlarıyla karşılaştırıldı ve bazı Tauberian teoremleri ispatlandı.

Dördüncü bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirmek için $(V, \lambda)-$toplanabilirliği kullanıldı. Bu yeni metoda $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık denildi ve S_λ ile gösterildi. (S_λ , $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık dizilerinin kümesi.) S_λ nın istatistiksel yakınsaklıkla, $(C, 1)-$toplanabilirliğiyle ve kuvvetli $(V, \lambda)-$toplanabilirliğiyle arasındaki ilişki verildi.

Beşinci bölümünde, reel değerli fonksiyon dizileri için noktasal istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlandı. Ayrıca fonksiyon dizileri için istatistiksel-Cauchy dizisi kavramı tanımlandı ve reel değerli fonksiyon dizileri için noktasal istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu ispatlandı.

Altıncı bölümde reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanıp incelendi. Reel değerli fonksiyon dizileri için $\alpha-$istatistiksel Cauchy dizisi kavramı verildi ve bu kavramın reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden noktasal istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu ispatlandı. Ayrıca, fonksiyon dizileri için α mertebeden istatistiksel yakınsaklık ile β mertebeden istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelendi. $\alpha \leq \beta$ olduğunda reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlikle β mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişki ve β mertebeden istatistiksel yakınsaklıkla α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişki verildi.

Yedinci bölümde reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden $[V, \lambda]-$toplanabilirlik ve α mertebeden noktasal $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanıp incelendi. $w_{\lambda p}^{\beta}(f)$ ve $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ arasında ve $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ ve $S_{\lambda}(f)$ arasında bazı kapsam ilişkileri kuruldu.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı,

(*i*) $\forall x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde $\exists y \in B$ vardır.

(*ii*) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y = z$

özelliklerine sahipse f ye A dan B ye bir fonksiyondur denir.

Tanım 2.2 Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir.

Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olan diziye rasyonel terimli dizi denir. Dizi $x = (x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.3. $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$ dizisi verilsin,

$$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\; k(n) = k_n$$

fonksiyonu (dizisi) bir artan dizi olmak üzere

$$x \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

bileşke fonfsiyonuna x dizisinin bir alt dizisi adı verilir ve

$$(x \circ k)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$$

şeklinde gösterilir (Balcı,1999).

Tanım 2.4. $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $K = \{x : |x - a| < \varepsilon \;,\; x \in \mathbb{R}\}$ kümesine a nın ε komşuluğu denir.

Tanım 2.5. (x_n) bir reel sayı dizisi $a \in \mathbb{R}$ olsun.$\forall\ \varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi a ya yakınsaktır denir ve

$$\lim x_n = a \quad \text{veya} \quad (x_n) \to a$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| < M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 2.7. X ve Y Banach uzayları ve $T = (t_{nk})$ matrisi X uzayından Y ye lineer operatörlerinin bir dizisi olsun. Her $x = (x_n) \in X$ dizisi için

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k$$

ifadesi Y de tanımlı norma göre yakınsak ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$Tx = \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k \right) \in Y$$

oluyorsa T matrisine X den Y ye bir matris dönüşümü denir ve $T \in (X, Y)$ ile gösterilir. (Maddox 1980)

Tanım 2.8. X ve Y Banach uzayları ve $T = (t_{nk})$ matrisi X uzayından Y ye bir matris dönüşümü olsun. $x = (x_n) \in X$ olmak üzere

$$T_n(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k$$

serileri her $n \in \mathbb{N}$ için yakınsak ve $T_n(x) \to l, \ \ (n \to \infty)$ ise x dizisi l sayısına toplanabilirdir denir. T matrisine de X den Y ye bir toplanabilme matrisi adı verilir. (Maddox 1980)

Tanım 2.9. Pozitif tam sayıların K kümesininin doğal yoğunluğunu

$$\delta(K) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

ile tanımlayalım. $|\{k \leq n : k \in K\}|$, n'yi geçmeyen K'nın eleman sayısını göstermektedir. Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 2.10. (x_n) bir reel terimli dizi olsun. $\forall > \varepsilon$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.1. (x_n) bir reel terimli dizi olsun. (x_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır.

Tanım 2.11. (x_{n_k}) , (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. (x_{n_k}) yakınsak ve limiti s ise, bu s noktasına (x_n) dizisinin bir limit noktası denir.

Tanım 2.12. Reel sayıların bir $x = (x_n)$ dizisi verilmiş olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_n - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ ile gösterilir. Bu durumda L sayısına x dizisinin istatistiksel limiti adı verilir. İstatistiksel yakınsak tüm diziler kümesi S ile gösterilir. (Šalát ve Tijdeman 1980)

Tanım 2.13. $\forall\ \varepsilon > 0$ verildiğinde h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = \mathbb{N}(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise yani $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = \mathbb{N}(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel-Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.2. x bir sayı dizisi olmak üzere x in istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart x in istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır. (Fridy 1985)

Teorem 2.3. Eğer x sınırlı bir sayı dizisi ise bu durumda istatistiksel yığılma noktasına sahiptir. (Fridy 1985)

Tanım 2.14. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.$\forall\varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.15. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\exists\delta > 0$ varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.16. $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$ da A üzerinde tanımlı , reel değerli fonksiyonların dizisi olsun.

$$s : \mathbb{N} \to F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi adı verilir (Balcı,1997).

Tanım 2.17. $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir.

Tanım 2.18. $\forall \varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ olduğunda her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 2.19. $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve h.h.k. için $|f_k(x) - f_N(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N\,(= N(\varepsilon, x))$ sayısı mevcut ise yani $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : \forall x \in A \text{ için } |f_k(x) - f_N(x)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

oluyorsa $\{f_k\}$ dizisine istatistiksel-Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.20. $0 < \alpha \leq 1$ verilsin. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : \ |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir L reel sayısı varsa (x_k) dizisine α mertebeden istatistiksel yakınsak denir. Bu durumda x, L ye α mertebeden istatistiksel yakınsak denir ve $S^\alpha - \lim x_k = L$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.21. $0 < \alpha \leq 1$ verilsin. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : \ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

oluyorsa, $\{f_k\}$, fonksiyon dizisine A kümesi üzerinde f fonksiyonuna α mertebeden noktasal istatistiksel yakınsak denir ya da noktasal α-istatistiksel yakınsak dizi denir.

Tanım 2.22. $0 < \alpha \leq 1$ ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ ve h.h.$k\ (\alpha)$ için,

$$|f_k(x) - f_N(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N\,(= N(\varepsilon, x))$ sayısı varsa $\{f_k\}$ dizisine α mertebeden istatistiksel Cauchy dizisi denir ya da $\alpha-$istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.23. A üzerinde $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α sabit bir reel sayı olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için A kümesi üzerinde,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n :\ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

oluyorsa, $\{f_k\}$, fonksiyon dizisine f fonksiyonuna α mertebeden düzgün istatistiksel yakınsak denir ya da düzgün $\alpha-$istatistiksel yakınsak denir.

Tanım 2.24. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α bir reel sayı ve p pozitif bir reel sayı olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - f(x)|^p = 0$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $\{f_k\}$ fonksiyon dizisine α mertebeden kuvvetli $p-$cesàro toplanabilir denir.

3 İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İstatistiksel yakınsaklık kavramı H. Fast tarafından 1951'de tanımlanmış ve Buck (1953), Schoenberg (1959) ve daha birçok araştırmacı tarafından bağımsız olarak çalışılmıştır. Son yıllarda toplanabilme teorisi alanında önemli bir yer edinmiştir.

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramını inceleyip örnekler vereceğiz. İstatistiksel-Cauchy dizisi kavramını tanımlayacağız ve bu kavramın istatistiksel yakınsaklığa denk olduğunu ispatlayacağız. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme metodu olarak çalışacağız. Metodun gücünü genel matris metodlarıyla karşılaştıracağız ve bazı Tauberian teoremlerini ispatlayacağız.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenecektir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir K alt kümesininin doğal yoğunluğunu

$$\delta\left(K\right) = \lim_{n} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : k \in K\right\}\right|$$

ile tanımlayalım. $\left|\left\{k \leq n : k \in K\right\}\right|$, n yi geçmeyen K nın eleman sayısını göstermektedir. Eğer $\delta\left(K\right) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir. Açıkça sonlu dizilerin yoğunluğu sıfırdır. $\delta\left(K\right)$ veya $\delta\left(\mathbb{N} \setminus K\right)$ yoğunluklarından herhangi biri varsa $\delta\left(\mathbb{N} \setminus K\right) = 1 - \delta\left(K\right)$ dır.

Tanım.3.1.1 Eğer $x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer tüm k lar için P özelliğini sağlıyorsa bu takdirde (x_k) dizisine h.h.k için P özelliğini sağlıyor denir.
Sıfır yoğunluklu küme tanımından esinlenerek istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 3.1.2. $x = (x_k)$ reel yada kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : \ |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

oluyorsa yani h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ oluyor ise $x = (x_k)$ dizisine, L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

$$st - \lim x = L \ \text{ veya } \ x_k \to L\,(S)$$

ile gösterilir. İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir ve S_0 ile gösterilir.Yani

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0 \right\},$$
$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right| = 0 \right\}$$

dır.

Yakınsak bir dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat bu ifadenin tersi doğru olmayabilir. Yani istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek.3.1.1 $x = (x_k)$ dizisi,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \quad (m = 1, 2, 3, ...) \\ 0, & k \neq m^2 \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} \leq \{k \leq n : \ x_k \neq 0\} \leq \sqrt{n}$$

olduğundan; her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : \ |x_k - 0| \geq \varepsilon\} \right| \leq \lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : \ x_k \neq 0\} \right| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Böylece $st - lim\ x = 0$ olur. Fakat bu dizi yakınsak değildir.

Örnek 3.1.2.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \quad (m = 1, 2, 3, ...) \\ 2, & k \neq m^2 \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $st - lim\ x = 2$ dir. Açıkça $|x_k - L| < \varepsilon$ eşitsizliği h.h.k için sağlanırsa $\lim x_k = L$ dir. $\lim x_k = L$ olması $st-\lim x_k = L$ olmasını gerektirir, bu yüzden istatistiksel yakınsaklık bir regüler toplanabilme metodu olarak düşünülebilir. Bunu İstatistiksel Yakınsaklık ve Toplanabilme kısmında inceleyeceğiz.

3.2 İstatistiksel Cauchy Dizisi

Bu kısımda Cauchy yakınsaklık kriterinin istatistiksel benzerini inceleyeceğiz.

Tanım 3.2.1 $\forall\ \varepsilon > 0$ verildiğinde h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = \mathbb{N}(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise yani $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : \ |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir $N = \mathbb{N}(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel-Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.2.1 Bir $x = (x_k)$ dizisi için aşağıdaki önermeler denktir.

$i)$ x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ x istatistiksel-Cauchy dizisidir.

$iii)$ h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi vardır.

İspat: $(i \Longrightarrow ii)$ İspat için "yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir." teoreminin ispatındaki yöntemi kullanacağız. $st-\lim x_k = L$ olduğunu farzedelim ve $\varepsilon > 0$ olsun. $|x_k - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ve $|x_N - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde N seçilirse

$$|x_k - x_N| < |x_k - L| + |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

olur. Dolayısıyla x istatistiksel- Cauchy dizisidir.

$(ii \implies iii)$ (ii) sağlansın ve $I = [x_N - 1,\ x_N + 1]$ aralığı h.h.k için x_k yı içerecek şekilde bir N sayısı seçelim. (ii) yi kullanarak $I' = \left[x_M - \frac{1}{2}\ ,x_M + \frac{1}{2}\right]$ aralığı h.h.k için x_k yı içerecek şekilde bir M sayısı seçelim. Ayrıca $I_1 = I \cap I^{'}$ aralığının h.h.k için x_k yı içerdiğini iddia ediyoruz. Çünkü,

$$\left\{k \leq n\ :\ x_k \notin I \cap I^{'}\ \right\} = \{k \leq n : x_k \notin I\} \cup \left\{k \leq n : x_k \notin I^{'}\right\}$$

olur ve dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : x_k \notin I \cap I^{'}\ \right\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n\ : x_k \notin I\}\right| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : x_k \notin I^{'}\right\}\right| = 0$$

elde edilir. Bu yüzden I_1, h.h.k için x_k yı içeren ve uzunluğu 1 den küçük eşit olan kapalı bir aralıktır. Benzer şekilde $I'' = \left[x_{N(2)} - \frac{1}{2}\ , x_{N(2)} + \frac{1}{2}\right]$ aralığı h.h.k için x_k yı içerecek şekilde $N(2)$ sayısını seçelim. Yukarıdaki düşünceye göre

$$I_2 = I_1 \cap I^{''}$$

h.h.k için x_k yı kapsayan ve uzunluğu $\frac{1}{2}$ den küçük eşit olan kapalı bir aralıktır. Bu şekilde devam edilirse her bir m için $I_m \supseteq I_{m+1}$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini oluşturabiliriz. I_m nin uzunluğu 2^{1-m} den büyük değildir ve h.h.k için $x_k \in I_m$ dir.

İç içe aralıklar teoremi gereğince

$$\cap_{m=1}^{\infty} I_m = \lambda$$

olacak şekilde bir λ sayısı vardır. h.h.k için $x_k \in$ Im olduğu göz önüne alınırsa; $n > T_m$ olduğunda

$$\frac{1}{n} \left|\{k \leq n : x_k \notin I_m\}\right| \leq \frac{1}{m} \tag{3.1}$$

olacak şekilde pozitif artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ tam sayı dizisini seçebiliriz.

Şimdi x in bir z alt dizisini $\forall\ x \in A$ için $k > T_1$ olduğunda x_k nın tüm terimlerini içerecek şekilde ve $T_m < k < T_{m+1}$ için $x_k \notin I_m$ olacak şekilde oluşturalım. Daha sonrada y dizisini

$$y_k = \begin{cases} \lambda, & \text{eğer } x_k \;\; z \text{ nin bir terimi ise} \\ x_k, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\lim y_k = \lambda$ dır. Çünkü $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise x_k, z nin bir terimidir ki bu $y_k = \lambda$ ya da $x_k = y_k \in I_m$ anlamına gelir ve $|y_k - \lambda| \leq 2^{1-m}$ dir. Ayrıca, h.h.k için $x_k = y_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunun doğruluğunu göstermek için $T_m < n < T_{m+1}$ alalım. Bu durumda,

$$\{k \leq n \;\; : y_k \neq x_k\} \subseteq \{k \leq n \;:\; x_k \notin I_m\}$$

dir.(3.1) den

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n} \left|\{k \leq n \;\; : y_k \neq x_k\}\right| \; & \leq \tfrac{1}{n} \left|\{k \leq n \; : x_k \notin I_m\}\right| \\ & < \tfrac{1}{m} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $n \to \infty$ iken limit sıfırdır ve h.h.k için $x_k = y_k$ dır.

(iii) Son olarak (iii) nin sağladığını farzedelim, h.h.k için $x_k = y_k$ ve $\lim y_k = L$ diyelim. $\varepsilon > 0$ olsun. Her n için

$$\{k \leq n : \;\; |x_k - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n : x_k \neq y_k\} \cup \{k \leq n : |y_k - L| > \varepsilon\}$$

$\lim y_k = L$ olduğundan son yazılan küme sabit sayıda tam sayıları içerir ve bu sayıya $l = l(\varepsilon)$ diyelim. Ayrıca, h.h.k için $x_k = y_k$ olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : \;\; |x_k - L| \geq \in\}\right| \; & \leq \lim_n \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : x_k \neq y_k\}\right| + \; \lim_n \frac{l}{n} \\ & = 0 \end{aligned}$$

dır. Bu durumda h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ olur ve (i) sağlanır ve ispat tamamlanır. Teoremin sonunda aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.2.1. Eğer x, $st - \lim \, x_k = L$ olacak şekilde bir dizi ise $\lim y_k = L$ olacak şekilde bir y alt dizisine sahiptir.

3.3 İstatistiksel Yakınsaklık ve Toplanabilme

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme metodu olarak çalışacağız. İstatistiksel yakınsaklık metodunu genel matris toplanabilme metodlarıyla karşılaştıracağız ve bazı Tauberian teoremlerini ispatlayacağız. Ancak öncesinde toplanabilme metodu hakkında bilgi verelim.

Toplanabilme Metodu: O.Toeplitz toplanabilme metodlarının aslında özel birer matris dönüşümü olduğunu göstermiştir. Yani, her $n, k = 1, 2, ...$ için a_{nk} bir reel sayı olmak üzere $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi olsun. $A = (a_{nk})$ matrisini

$$A = (a_{nk}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$x = (x_k)$ dizisini de

$$x = (x_k) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterelim. Bu durumda

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \ldots \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \ldots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + \ldots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ax matrisinin her bir terimi;

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

şeklinde ifade edilebilir. Açıkça bu çarpımın anlamlı olabilmesi için her bir n doğal sayısı için yukarıdaki serinin yakınsak olduğunu kabul etmeliyiz. Bu şekilde elde edilen $(Ax)_n = (A_n(x))$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi yada $A-$dönüşümü denir. Özel olarak $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisini şöyle seçelim.

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & , k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases}$$

Bu durumda herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin $A-$dönüşümünü $n, k = 1, 2, ...$ için

$$(A_n(x)) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right)$$

olur. Son eşitlikten görüldüğü gibi bu şekilde seçilen A martisi $x = (x_k)$ dizisine uygulanınca, dizinin aritmetik ortalamasına dönüşmektedir. Bu dönüşüme Cesáro Ortalaması denir. $(C, 1)$ veya C_1 şeklinde gösterilir.

X ve Y reel terimli dizilerden oluşan iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Eğer her $x = (x_k) \in X$ ve her $n \in N$ için

$$(A_n(x)) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right)$$

x dizisinin $A = (a_{nk})$ matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi mevcut ve $(A_n(x)) \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X uzayından Y uzayı içine bir matris dönüşümü tanımlar denir. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için $(A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcut ve bir L değerine yakınsıyorsa x dizisi $A-$toplanabilirdir denir ve $A - \lim x = L$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.1. Bir Q metodunun P metodunu içermesi demek;

$$P \subset Q \Longleftrightarrow [(x_n) \rightarrow x(P) \Rightarrow (x_n) \rightarrow x(Q)]$$

olmasıdır.

Tanım 3.3.2. Her bir satırında sıfırdan farklı sonlu sayıda terim bulunan matrise satır-sonlu matris denir.
C_1 metodu sınırlılığına bakılmaksızın istatistiksel yakınsaklık metodunu içerir mi sorusunun cevabını aşağıdaki teoremden öğreneceğiz. Ama önce Lemmayı verelim.

Lemma 3.3.1. Sonsuz sayıdaki k için $t_k \neq 0$ olacak şekilde $t = t_k$ bir sayı dizisi ise h.h.k için $x_k = 0$ ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \infty$$

olacak şekilde bir x dizisi vardır.

İspat. Her k için $\{m(k)\}_{k=1}^{\infty}$ olacak şekilde azalmayan pozitif sayıların bir dizisini seçelim.

$$m(k) > k^2 \text{ ve } t_{m(k)} \neq 0$$

dır. x'i $x_{m(k)} = \dfrac{1}{t_{m(k)}}$ ve diğer durumlarda $x_k = 0$ olacak şekilde tanımlayalım. $x_k = 0$ ve h.h.k için

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} t_{m(k)} x_{m(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

dır.

Teorem 3.3.2.. Hiç bir matris toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez.

İspat Bir önceki Lemma gösteriyor ki bir matrisin istatistiksel yakınsaklık metodunu içermesi için satır sonlu matris olması gerekir. $A = (a_{mk})$ bir keyfi satır sonlu matris olsun ve $a_{n(1),k'(1)} \neq 0$ elemanını seçelim. Daha sonra $k(1) \geq k'(1)$, $a_{n(1),k(1)} \neq 0$ ve $k > k(1)$ için $a_{n(1),k} = 0$ olacak şekilde bir $k(1)$ sütununu seçelim.Her m için

$k(m) \geq m^2$ ise $a_{n(m),k(m)} \neq 0$ ve $k > k(m)$ ise $a_{n(m),k} = 0$ olmak üzere satır ve sütun indekslerin artan bir dizisini seçelim. Şimdi $x = (x_k)$ dizisini

$$x_{k(1)} = \tfrac{1}{a_{n(1),k(1)}}, ...,$$
$$x_{k(m)} = \tfrac{1}{a_{n(m),k(m)}} \left[m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \right], ...,$$

ve

$x_k = 0$ (diğer durumlarda)
şeklinde tanımlayalım. O halde

$$\begin{aligned}
(Ax)_{n(m)} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{n(m),k} x_k \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \\
&= a_{n(m),k(m)} x_{k(m)} + \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \\
&= a_{n(m),k(m)} \tfrac{1}{a_{n(m),k(m)}} \left[m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \right] + \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} = m
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left\{ (Ax)_{n(m)} \right\}$ dizisi yakınsak değildir. Yani x dizisi $A-$toplanabilir değildir. Ayrıca $k(m) \geq m^2$ olduğundan

$$|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

dir ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

olduğundan $st - \lim x = 0$ elde edilir. Bu durumda x dizisi yakınsak olduğu halde $A-$toplanabilir değildir yani A metodu istatistiksel yakınsaklığı içermez.

Şimdi aşağıdaki örnekte istatistiksel yakınsaklığın içerdiği aşikar olmayan bir matris metodunun varlığını gösterelim.

Örnek 3.3.1. A matrisini aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n \text{ ve } n \text{ bir sayının karesi değilse} \\ \frac{1}{2}, & n = m^2 \text{ ise ve } k = n \text{ yada } k = (m-1)^2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

O halde herhangi bir x dizisi için

$$(Ax)_n = \begin{cases} \frac{x_1}{2}, & n = 1 \text{ ise} \\ x_{(m-1)^2} + x_{m^2}, & n = m^2 \text{ ise } m = 2, 3, ..., \\ x_n, & n \text{ bir sayının karesi değilse} \end{cases}$$

sağlanır. Böylece A açıkça regüler ve üçgensel bir matristir. İstatistiksel yakınsaklığın A yı içerdiğini görmek için

$$\lim_n (Ax)_n = L$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\neq m}} x_n = L$ ve

$$|\{k \leq n : (Ax)_n \neq x_n\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : (Ax)_n \neq x_n\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt{n} = 0$$

sağlanır. Teorem 3.2.1. den $st - \lim x = L$ elde edilir. Bu durumda istatistiksel yakınsaklık metodu A metodunu içeriyor denir.

Şimdi de A metodunun yakınsaklığa denk olmadığını gösterelim. Bunun için $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} (-1)^m & , k = m^2 \text{ ise } m = 1, 2, ... \\ 0 & , \text{Eğer } k \text{ bir sayının karesi değilse} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $n > 1$ için $(Ax)_n = 0$ elde edilir. x dizisi yakınsak değildir ama $A-$toplanabilirdir.

3.4 Tauberian Koşulu ve Tauberian Teoremi

David Borwein bir $x = (x_k)$ dizisi için ; $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ olmak üzere istatistiksel yakınsaklık metodunda Tauberian koşulunun $\Delta x_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$ şeklinde olmasını önermiştir. Bir sonraki teoremden bu varsayımın doğruluğunu göreceğiz. Öncelikle aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 3.4.1. 0 ve o tanımları;

$(a_n)\,,\,(b_n)$ reel terimli diziler olmak üzere,

$$a_n = 0\,(b_n) \Leftrightarrow \sup_n \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \infty$$

$$a_n = o\,(b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

dır.

Tanım 3.4.2. A belirli bir toplama metodu olsun, A toplama metodu ile birlikte dizi üzerine eklenen koşulla seri yakınsak oluyorsa dizi üzerine eklenen koşula Tauberian koşul, böyle teoremlere de Tauberian teorem denir.

Teorem 3.4.1 x, bir dizi, öyle ki $st - \lim x_k = L$ ve $\Delta x_k = 0\left(\frac{1}{k}\right)$ ise $\lim x_k = L$ dir.

İspat: $st - \lim x_k = L$ olduğunu farzedelim. Teorem 3.2.1 i kullanarak h.h.k için $\lim y_k = L$ ve $x_k = y_k$ olacak şekilde bir y dizisi seçelim. Her bir k için;

$$k = m\,(k) + p\,(k)$$

olsun. Burada $m\,(k)$ değeri;

$$m\,(k) = \max\{i \leq k : x_i = y_i\}$$

dir. Eğer $\{i \leq k : x_i = y_i\}$ kümesi boş küme ise $m\,(k) = -1$ dir. İddia ediyoruz ki :

$$\lim_k \frac{p\,(k)}{m\,(k)} = 0 \tag{3.2}$$

olsun. Eğer $\frac{p(k)}{m(k)} > \varepsilon > 0$ ise

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\left|\{i \leq k : x_i \neq y_i\}\right| &\leq \frac{1}{m(k)+p(k)}p(k) \\
&\leq \frac{p(k)}{\frac{p(k)}{\varepsilon}+p(k)} \\
&= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla, eğer sonsuz sayıda k için $\frac{p(k)}{m(k)} > \varepsilon$ olursa h.h.k için $x_k = y_k$ olmasıyla çelişir ve (3.2) sağlanır. Şimdi $y_{m(k)}$ ve x_k arasındaki farklılığı düşünelim. $\Delta x_k = 0\left(\frac{1}{k}\right)$ olduğundan her k için $|\Delta x_k| \leq \frac{B}{k}$ olacak şekilde sabit bir B sayısı vardır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\left|y_{m(k)} - x_k\right| &= \left|x_{m(k)} - x_{m(k)+p(k)}\right| \\
&\leq \sum_{i=m(k)}^{m(k)+p(k)-1} |\Delta x_i| \\
&\leq p(k)\frac{B}{m(k)}
\end{aligned}$$

olur. (3.2) den $k \to \infty$ iken limit alındığında son ifade sıfıra gider ve $\lim y_k = L$ olduğundan $\lim x_k = L$ olduğu sonucuna varırız.

Sonraki Teorem, Teorem 3.4.1. teki $0\left(\frac{1}{k}\right)$ teriminin istatistiksel yakınsaklık için en iyi Tauber şartı olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.4.2. $\{r_k\}$ pozitif sayıların azalan bir dizisi olsun. Öyle ki $\{kr_k\}$, sınırsız yani $r_k \neq 0\left(\frac{1}{k}\right)$, $st-\lim x_k = 0$ ve $\Delta x_k = 0\left(r_k\right)$ olacak şekilde bir x dizisi vardır. Fakat x yakınsak değildir.

İspat. $\{r_k\}$ yukarıdaki gibi olsun; h.h.k için $x_k = 0$ olacak şekilde yakınsak olmayan bir dizi oluşturacağız. 0 dan 1 e artan tekrar sıfıra azalan bloklara ayıracağız. $|\Delta x_k| = r_k$ olsun. q. sıfır olmayan blok aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned}
x_{n(q)} &= 0 < x_{n(q)+1} = r_{n(q)} < \ldots < x_{t(q)} \geq 1 \\
x_{t(q)} &> \ldots > x_{n(q)} > 0 = x_{n(q)+1}
\end{aligned}$$

Bu bloktaki en küçük artış $r_{n(q)}$ da olduğundan en çok bloktaki $2\left[\frac{1}{r_{n(q)}}\right]$ nin terimlerine ihtiyaç var. Sıfıra eşit olmayan bloklar, seçilen $n(q)$ ile aşağıdaki gibi bulundu: $\{kr_k\}$ nın sınırsız olduğu hipotezini kullanarak,

$$n(q) > n(q-1)$$

ifadesini seçelim, öyle ki,

$$n(q)\, r_{n(q)} > 2q^2$$

dir. Geriye $st-\lim x_k = 0$ olduğunu yada h.h.k için $x_k = 0$ olduğu durumu göstermek kalır.

$$A(n) = |\{k \leq n : x_k \neq 0\}|$$

olsun. $\dfrac{A(n)}{n}$ nin x_n sıfıra eşit olmayan blokta olduğunda arttığını ve x_n sıfır blokta olduğunda azaldığını görmek kolay.

Ayrıca,

$$\lim \frac{A(n)}{n} = 0$$

olduğunu göstermek için

$$\lim_q \frac{A(n(q))}{n(q)} = 0$$

olduğunu göstermek yeter. Bunu aşağıda gösterelim;

$$\begin{aligned}
\frac{A(n(q))}{n(q)} &\leq \frac{1}{n(q)} \sum_{i=1}^{q} \\
&\leq \frac{1}{n(q)} \sum_{i=1}^{q} \left[\frac{2}{r_{n(i)}}\right] \\
&\leq \frac{2q}{n(q)\, r_{n(q)}} \\
&< \frac{1}{q}
\end{aligned}$$

bundan dolayı h.h.k için $x_k = 0$ ve $\Delta x_k = 0\,(r_k)$ dır, fakat x yakınsak değildir.

Teorem 3.3.5. $\{k(i)\}_{i=1}^{\infty}$ pozitif tamsayılarının azalan bir dizisi olsun , öyle ki ,

$$\liminf_{i} \frac{k(i+1)}{k(i)} > 1$$

olmak üzere bir $x = (x_k)$ dizisi;

$$k \neq k(i) \qquad i = 1, 2, 3, ...$$

iken eğer $\Delta x_k = 0$ ve $st - \lim x_k = L$ ise $\lim x_k = L$ dir.

İspat: Eğer $\liminf_i \frac{k(i+1)}{k(i)} = 1 + 2\delta > 1$ ise yeterince büyük i için

$$\frac{k(i+1)}{k(i)} > 1 + \delta > 1, \tag{3.3}$$

ya da

$$k(i+1) - k(i) > \delta k(i)$$

dır. Bu $(i+1)$ incideki blokların $\delta k(i)$ dekinden daha büyük olması anlamına gelir.

Şimdi farzedelim ki $\lim x_k \neq L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun, öyle ki keyfi büyük k için $|x_k - L| \geq \varepsilon$ olur. i, (3.3) ü sağlayacak kadar büyük olduğunda $(i+1)$ inci bloğundan böyle bir k seçilirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(i+1)} \left|\{k \leq k(i+1) : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| &> \frac{k(i+1) - k(i)}{k(i+1)} \\ &> \frac{\delta}{1+\delta} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right|$$

sıfıra yakınsamaz, bu yüzden $st - \lim x_k \neq L$ dir.

4 $\lambda-$İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirmek için (V,λ) $-$toplanabilirliğini kullanacağız. Bu yeni metoda $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık diyeceğiz ve S_λ ile göstereceğiz. (S_λ, $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık dizilerinin kümesi.) S_λ nın istatistiksel yakınsaklıkla, $(C,1)$ $-$toplanabilirliğiyle ve kuvvetli (V,λ) $-$toplanabilirliğiyle arasındaki ilişkiyi göstereceğiz.

4.1 $\lambda-$İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda $\lambda-$İstatistiksel Yakınsaklık kavramı incelenecektir.

Tanım 4.1.1 $\lambda = (\lambda_n)$ azalmayan pozitif sayıların sonsuza giden bir dizisi olsun.

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 1$$

dir. Genelleştirilmiş $de\ la\ Val\bar{e}e - Pousin$ ortalaması

$$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$$

aralığında

$$t_n(x) := \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

şeklinde tanımlanır.

$$n \to \infty \text{ iken } t_n(x) \to L$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisine L ye (V,λ) $-$toplanabilir denir. Eğer $\lambda_n = n$ ise (V,λ) $-$toplanabilirliği $(C,1)$ $-$toplanabilirliğine dönüşür. L'ye kuvvetli Cesero toplanabilir ve kuvvetli (V,λ)-toplanabilir olan $x = (x_k)$ dizilerin kümeleri için, yani sırasıyla $x_k \to L[C,1]$ ve $x_k \to L[V,\lambda]$ için

$$[C,1] := \left\{ x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{R} \;,\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

ve

$$[V,\lambda] := \left\{ x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{R} \;,\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

yazılır.

Tanım 4.1.2 Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisine L'ye $\lambda-$istatistiksel yakınsaktır denir. $s_\lambda - \lim x = L$ ya da $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ile gösterilir ve

$$S_\lambda := \{x : \; \exists L \in \mathbb{R}, S_\lambda - \lim x = L\}$$

dir.

Tanım 4.1.3 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$$\delta_A(K) := \lim_n (A_{x_K})_n = \lim_n \sum_{k\in K} a_{nk}$$

limiti mevcut ise $\delta_A(K)$ sayısına K kümesinin $A-$yoğunluğu denir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin $A-$yoğunluğu sıfır ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $st_A - \lim x = L$ ile gösterilir.

HATIRLATMA:

(i) Eğer $\lambda_n = n$ ise S_λ, S nin aynısıdır.

(ii) $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık, $A-$istatistiksel yakınsaklığın özel bir halidir. Yani eğer $A = (a_{nk})$ matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n} & \text{eğer } k \in I_n \\ 0 & \text{eğer } k \notin I_n \end{cases}$$

şeklinde seçilirse $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık elde edilir.

4.2 $[V, \lambda]$ ve $(C, 1)$ Metodlarıyla S_λ Arasındaki İlişki

Bu kısımda $[V, \lambda]$ ve $(C, 1)$ metodları ile S_λ arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. $\lambda = (\lambda_n)$ azalmayan pozitif sayıların sonsuza giden tüm pozitif dizilerin kümesini Λ ile tanımlayalım. Öyle ki $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ ve $\lambda_1 = 1$ dir.

Teorem 4.2.1 $\lambda \in \Lambda$ olsun,

(i) $x_k \to L\,[V, \lambda] \Longrightarrow x_k \to L\,(S_\lambda)$ ve $[V, \lambda] \subseteqq S_\lambda$ dır.

(ii) Eğer $x \in l_\infty$ ve $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ise bu durumda $x_k \to L\,[V, \lambda]$ ve bu yüzden $x_k \to L\,[C, 1]$ dir.

(iii) $S_\lambda \cap l_\infty = [V, \lambda] \cap l_\infty$ (l_∞ sınırlı dizilerin kümesi)

İspat: (i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \to L\,[V, \lambda]$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k \in I_n} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon . \left| \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right|$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$x_k \to L\,[V, \lambda] \Longrightarrow x_k \to L\,(S_\lambda)$$

dır.

Şimdi $S_\lambda \supsetneqq [V, \lambda]$ olduğunu gösteren bir örnek verelim.

$$x_k = \begin{cases} k, & n - \left[\sqrt{\lambda_n}\right] + 1 \leq k \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde $x = (x_k)$ tanımlayalım. Bu durumda $x \notin l_\infty$ ve $\forall\ \varepsilon\,(0 < \varepsilon \leq 1)$ için $n \to \infty$ iken

$$\frac{1}{\lambda_n} \left| \{k \in I_n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} \right| = \frac{\left[\sqrt{\lambda_n}\right]}{\lambda_n} \to 0$$

olur. Yani $x_k \to 0\,(S_\lambda)$ dır. Diğer taraftan,

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - 0| \to \infty \quad (n \to \infty)$$

elde edilir. Yani $x_k \nrightarrow 0\,[V,\lambda]$ dir.

(ii) $x_k \rightarrow L\,(S_\lambda)$ ve $x \in l_\infty$ olduğunu farzedelim. Tüm k lar için $|x_k - L| \leq M$ diyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k - L| &= \tfrac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k-L|\geq\varepsilon}}|x_k - L| + \tfrac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k-L_n|<\varepsilon}}|x_k - L| \\ &\leq \tfrac{M}{\lambda_n}\ \{k \in I_n\ :\ |x_k - L|\ \geq\ \varepsilon\}\ + \varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan $x_k \rightarrow L\,[V,\lambda]$ elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - L) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}(x_k - L) + \frac{1}{n}\sum_{k\in I_n}(x_k - L) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}|x_k - L| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k - L| \\ &\leq \frac{2}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k - L| \end{aligned}$$

dir. Buradan $x_k \rightarrow L\,[V,\lambda]$ olduğundan $x_k \rightarrow L\,(C,1)$ dir.

(iii), (i) ve (ii) den kolayca elde edilir.

Teorem 4.2.2 $S \subseteq S_\lambda$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\inf\frac{\lambda_n}{n} > 0 \tag{4.1}$$

olmasıdır.

İspat: $\varepsilon > 0$ için,

$$|\{k < n\ :\ |x_k - L|\ \geq\ \varepsilon\}| \supset\ |\{k \in I_n\ :\ |x_k - L|\ \geq\ \varepsilon\}|$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}|\{k < n\ :\ |x_k - L|\ \geq\ \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{n}|\{k \in I_n\ :\ |x_k - L|\ \geq\ \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\lambda_n}{n}.\frac{1}{\lambda_n}|\{k \in I_n\ :\ |x_k - L|\ \geq\ \varepsilon\}| \end{aligned}$$

ifadesinin $n \rightarrow \infty$ iken limitini göstermek için (4.1) i kullanacağız. Bu durumda

$$x_k \rightarrow L \Longrightarrow x_k \rightarrow L\,(S_\lambda)$$

olur. Tersine $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} = 0$ olduğunu farzedelim. $\dfrac{\lambda_n(j)}{n(j)} < \dfrac{1}{j}$ olacak şekilde $(n(j))_{j=1}^{\infty}$ alt dizisizi seçelim.

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } i \in I_{n(j)},\ j = 1, 2, ... \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde bir $x = (x_i)$ dizisini tanımlayalım. $x \in S$ ve Teorem 4.2.1 den $x \in [C, 1]$ dir. Fakat diğer yandan $x \notin S_\lambda$ ve Teorem 4.2.1 in (ii) şartından dolayı $x \notin [V, \lambda]$ dır. Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} > 0$$

olması gerekir.

5 FONKSİYON DİZİLERİ İÇİN NOKTASAL İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümünde, reel değerli fonksiyon dizileri için noktasal istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayacağız. Ayrıca fonksiyon dizileri için istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanımlayıp reel değerli fonksiyon dizileri için noktasal istatistiksel yakınsaklığa denk olduğunu ispatlayacağız.

Tanım kümesindeki her bir x için terimleri fonksiyon değerlerine karşılık gelen diğer bir $(f_k(x))$ dizisi oluşturulabilir. A, bu ikinci dizinin yakınsak olduğu kümeyi göstersin. $x \in A$ olmak üzere

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$$

eşitliğiyle tanımlanan f fonksiyonuna, $\{f_k\}$ dizisinin limit fonksiyonu denir ve $\{f_k\}$ dizisine de A kümesi üzerinde f ye noktasal yakınsaktır denir. Bu demektir ki $k > K$ olduğunda A kümesindeki her bir x noktası, ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde hem x e bağlı hem de ε a bağlı bir K vardır.

5.1 Fonksiyon Dizileri İçin Noktasal İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda fonksiyon dizileri için noktasal istatistiksel yakınsaklık incelenecektir.

Tanım 5.1.1 $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : \forall x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \} \right| = 0$$

oluyorsa $\{f_k\}$ dizisine, f ye noktasal istatistiksel yakınsaktır denir. Yani her $x \in A$ ve h.h.k için

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oluyorsa $\{f_k\}$ dizisi A kümesi üzerinde f ye noktasal istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda A kümesi üzerinde $st - \lim f_k(x) = f(x)$ veya $f_k \to f$ yazılır.

Bu demektir ki $\delta > 0$, $n > N\,(=\varepsilon\ ,\delta, x\ )$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \forall x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\ \right\}\right| < \delta$$

olacak şekilde bir N tam sayısı vardır.

Aşikar olarak $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizlik tüm sonlu sayıdaki k lar için sağlanırsa, A kümesi üzerinde $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ olması $st - \lim f_k(x) = f(x)$ olmasını gerektirir. Fakat bu ifadenin tersi her zaman doğru olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 5.1.1 $x \in \mathbb{R}/[-1,1]$, $k = 1, 2, 3, 4, 5,...$ ise

$$f_k(x) = \begin{cases} (-x)^k, & k \in [3^p, 3^p + p] \ , p = 1, 2, 3, ... \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \ f_k(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]\right\}\right| \leq \frac{p\,(p+1)}{2.3^p}$$

olur. Böylece $\mathbb{R}\ /[-1,1]$ üzerinde st-lim $\mathrm{f}_k(x) = 0$ olur. Fakat $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ mevcut değildir.

Teorem 5.1.1. $\{f_k\}$ ve $\{g_k\}$ bir A kümesi üzerinde iki fonksiyon dizisi olsun. Eğer A kümesi üzerinde $st - \lim f_k(x) = f(x)$ ve $st - \lim_k(x) = g(x)$ ise bu durumda; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere A kümesi üzerinde

$$st - \lim\left(\alpha f_k(x) + \beta g_k(x)\right) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

dir.

İspat: $\alpha = 0, \beta = 0$ için ispat açıktır. $\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ verilsin,

$$\left|\alpha f_k(x) + \beta g_k(x) - (\alpha f(x) + \beta g(x))\right| \leq |\alpha| \,.\, |f_k(x) - f(x)| + |\beta| \,.\, |g_k\ (x) - g(x)|$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\{k \leq n : \forall x \in A \text{ için } |\alpha f_k(x) + \beta g_k(x) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \geq \varepsilon\} \\ \subseteq \left\{k \leq n : \forall x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2.|\alpha|}\right\} \\ \cup \left\{k \leq n : \forall x \in A \text{ için } |g_k\ (x) - g(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2.|\beta|}\right\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan A kümesi üzerinde

$$st - \lim(\alpha f_k(x) + \beta g_k(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

elde edilir.

5.2 Fonksiyon Dizileri İçin İstatistiksel Cauchy Dizisi

Bu kısımda fonksiyon dizileri için istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanımlayıp reel değerli fonksiyon dizileri için noktasal istatistiksel yakınsaklığa denk olduğunu ispatlayacağız.

Tanım 5.1.2. $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve h.h.k. için $|f_k(x) - f_N(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(= N(\varepsilon, x))$ sayısı mevcut ise yani $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in A \text{ için } |f_k(x) - f_N(x)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $\{f_k\}$ dizisine istatistiksel-Cauchy dizisi denir.

Teorem 5.1.2 $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

$i)$ $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde noktasal istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde istatistiksel-Cauchy dizisidir.

$iii)$ $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olmak üzere her $x \in A$ ve h.h.k. için $f_k(x) = g_k(x)$ olacak şekilde noktasal yakınsak bir $\{g_k\}$ fonksiyon dizisi vardır.

İspat: (i) nin (ii) yi gerektirdiğini ispatlamak için "yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir." teoreminin ispatındaki yöntemi kullanacağız. A kümesi üzerinde

$$st - lim f_k(x) = f(x)$$

olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda h.h.k. için $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Eğer N sayısı $|f_N - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanacak şekilde seçilirse $\forall x \in A$ ve h.h.k için

$$|f_k(x) - f_N(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde bir istatistiksel-Cauchy dizisi olur.

Şimdi (ii) nin doğru olduğunu farzedelim ve $I = [f_N(x) - 1\ ,\ f_N(x) + 1]$ aralığı her $x \in A$ ve h.h.k için $f_k(x)$ i içerecek şekilde N sayısını seçelim. (ii) yi uygulayarak her $x \in A$ ve h.h.k için $I' = \left[f_M(x) - \frac{1}{2}\ ,\ f_M(x) + \frac{1}{2}\right]$ aralığı $f_k(x)$ i içerecek şekilde M sayısını seçelim. Ayrıca, $I_1 = I \cap I'$ aralığının her $x \in A$ ve h.h.k. için $f_k(x)$ i içerdiğini iddia ediyoruz. Çünkü,

$$\begin{aligned}\left\{k \leq n{:}\forall x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I \cap I'\right\} &= \{k \leq n{:}\ \forall x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I\} \\ &\cup \left\{k \leq n{:}\ \forall x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I'\right\}\end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \left|\{k \leq n{:}\ \forall x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I \cap I'\}\right| \\ &\quad \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \left|\{k \leq n{:}\ \forall x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I\}\right| \\ &\qquad + \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \left|\{k \leq n{:}\ \forall x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I'\}\right| = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden I_1, her $x \in A$ ve h.h.k için $f_k(x)$ i içeren ve uzunluğu 1 den küçük eşit olan bir aralıktır.

Şimdi de h.h.k. için $I'' = \left[f_{\frac{N}{2}}(x) - \frac{1}{4}\ ,\ f_{\frac{N}{2}}(x) + \frac{1}{4}\right]$ aralığı $f_k(x)$ i içerecek şekilde $N(2)$ sayısını seçelim. Önceki yolla her $x \in A$ ve h.h.k. için $I_2 = I_{1\cap} I''$ aralığı $f_k(x)$ i kapsar ve uzunluğu $\frac{1}{2}$ den küçük eşittir. Bu şekilde devam edilerek her bir m için $I_m \supseteq I_{m+1}$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini oluşturalım. I_m nin uzunluğu 2^{1-m} den büyük olamaz ve her $x \in A$ için $f_k(x) \in I_m$ olur. Buna göre A kümesi üzerinde öyle bir $f(x)$ fonksiyonu vardır ki $\{f(x)\} = \cap_{m=1}^{\infty} I_m$ dir. Her $x \in A$ ve h.h.k için $f_k(x) \in I_m$ olduğundan $n > T_m$ için

$$\frac{1}{n} \left|\{k \leq n : \forall x \in A \text{ için } \; f_k(x) \notin \; I_m\}\right| < \frac{1}{m} \tag{5.1}$$

olacak şekilde artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisi seçebiliriz. Şimdi $(f_k(x))$ in bir $(z_k(x))$ alt dizisini her $x \in A$ için $k > T_1$ olduğunda $f_k(x)$ in tüm terimlerini içerecek şekilde ve $T_m < k < T_{m+1}$ için $f_k(x) \notin I_m$ olacak şekilde oluşturalım. Şimdi $g_k(x)$ fonksiyon dizisini

$$g_k(x) = \begin{cases} f(x), & f_k(x) \;,\; (z_k(x)) \text{'in bir terimi ise} \\ f_k(x), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda A kümesi üzerinde

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = f(x)$$

dir. Çünkü $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise $f_k(x)$, $(z_k(x))$'in bir terimidir ve bu A kümesi üzerinde $g_k(x) = f(x)$ ya da A kümesi üzerinde $g_k(x) = f_k(x) \in I_m$ anlamına gelir ve her $x \in A$ ve h.h.k için $|g_k(x) - f(x)| \leq 2^{1-m}$ dir. Ayrıca $\forall x \in A$ ve h.h.k için $g_k(x) = f_k(x)$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunun doğruluğunu göstermek için $T_m < n < T_{m+1}$ alalım. Bu durumda

$$\{k \leq n : \forall x \in A \quad \text{için} \quad g_k(x) \neq f_k(x)\} \subseteq \{k \leq n : \forall x \in A \;\; \text{için} \quad f_k(x) \notin \; I_m\}$$

olur. Dolayısıyla (5.1) numaralı eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : \forall x \in A \text{ için } \; g_k(x) \neq f_k(x)\}\right| &\leq \frac{1}{n} \{k \leq n : \forall x \in A \text{ için } \; f_k(x) \notin \; I_m\} \\ &< \frac{1}{m} \end{aligned}$$

dir. Böylece $n \to \infty$ için limit sıfırdır ve $\forall x \in A$ ve h.h.k için $g_k(x) = f_k(x)$ dir. Dolayısıyla (ii) sağlanır.

Son olarak (iii) nin sağladığını farzedelim. A kümesi üzerinde $\forall x \in A$ ve h.h.k için $f_k(x) = g_k(x)$ ve $\lim_{k \to \infty} g_k(x) = f(x)$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda her bir n için

$$\{k \leq n\text{:}\forall x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n\text{:}\forall x \in A \text{ için } f_k(x) \neq g_k(x)\}$$
$$\cup \{k \leq n\text{:}\forall x \in A \text{ için } |g_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

olur. Çünkü A kümesi üzerinde $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$ dir. Yukarıdaki yazılan son küme sabit sayıda tam sayı içerir. Buna $l = l(\varepsilon, x)$ diyelim. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} |\{k \leq n\text{: } \forall x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} |\{k \leq n\text{: } \forall x \in A \text{ için } f_k(x) \neq g_k(x)\}| \\
&+ \lim_{n\to\infty} \frac{l}{n} = 0
\end{aligned}$$

dır. Çünkü her $x \in A$, h.h.k için $f_k(x) = g_k(x)$ dir. Dolayısıyla her $x \in A$ ve h.h.k için $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ dir, (i) sağlar ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.1 den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç: A üzerinde $st - \lim f_k(x) = f(x)$ olacak şekilde $\{f_k\}$ fonksiyonların bir dizisi ise $\lim_{i\to\infty} f_{k(i)}(x) = f(x)$ olacak şekilde $\{f_k\}$ in bir $\left(f_{k(i)}(x)\right)$ alt dizisi vardır.

6 FONKSİYON DİZİLERİ İÇİN α MERTEBEDEN NOKTASAL VE DÜZGÜN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanımlayıp inceleyeceğiz. Reel değerli fonksiyon dizileri için $\alpha-$istatistiksel Cauchy dizisi kavramını vereceğiz ve bu kavramın reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden noktasal istatistiksel yakınsaklığa denk olduğunu ispatlayacağız. Ayrıca, fonksiyon dizileri için α mertebeden istatistiksel yakınsaklık ile β mertebeden istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilşkiyi inceleyeceğiz. $\alpha \leq \beta$ olduğunda reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlikle β mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiyi ve β mertebeden istatistiksel yakınsaklıkla α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

$0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α bir reel sayı olsun. $\mathbb{N}$ nin E alt kümesinin $\alpha-$yoğunluğunu

$$\delta_\alpha(E) = \lim_n \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : \ k \in E\}|$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $|\{k \leq n : \ k \in E\}|$, n yi geçmeyen E nin eleman sayısını gösteriyor.
Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi $\alpha-$yoğunluğu sıfır olan bir küme hariç diğer tüm k lar için $P(k)$ özelliğini sağlıyorsa x_k, h.h.k (α)için $P(k)$ özelliğini sağlar denir.

$\mathbb{N}$ nin herhangi bir sonlu alt kümesinin $\alpha-$yoğunluğunun sıfır olduğu açıktır ve

$$\delta_\alpha(E^c) = 1 - \delta_\alpha(E)$$

eşitliği $0 < \alpha < 1$ için genelde sağlanmaz. Eşitlik sadece $\alpha = 1$ için sağlanır. $\alpha = 1$ olduğunda herhangi bir kümenin $\alpha-$yoğunluğu doğal yoğunluğa dönüşür.

6.1 Fonksiyon Dizileri İçin α Mertebeden Noktasal İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden istatistiksel yakınsaklık ve α mertebeden noktasal istatistiksel yakınsaklık kavramlarını inceleyeceğiz.

Tanım 6.1.1 $0 < \alpha \leq 1$ verilsin. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k \leq n : \ |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir L reel sayısı varsa (x_k) dizisine α mertebeden istatistiksel yakınsak denir. Bu durumda x, L ye α mertebeden istatistiksel yakınsaktır denir. $S^{\alpha}-\lim x_k = L$ şeklinde yazılır. α mertebeden istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesini S^{α} ile tanımlayalım. α mertebeden tüm istatistiksel sıfır dizilerinin kümesini S_0^{α} ile tanımlayalım. Her bir $0 < \alpha \leq 1$ için $S_0^{\alpha} \subset S^{\alpha}$ olduğu açıktır. $\alpha = 1$ için α mertebeden istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık aynıdır.

Tanım 6.1.2 $0 < \alpha \leq 1$ verilsin. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k \leq n : \ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

oluyorsa, $\{f_k\}$ fonksiyon dizisine, A kümesi üzerinde f fonksiyonuna α mertebeden noktasal istatistiksel yakınsaktır denir ya da noktasal α-istatistiksel yakınsak dizi denir.

Yani $\forall\ x \in A$ ve h.h.$k(\alpha)$ için

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oluyorsa, A üzerinde $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ yazılır.

Bu durumda $\delta > 0$, $n > N\left(= N(\varepsilon, \delta, x)\right)$, $0 < \alpha \leq 1$ ve $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k \leq n : \ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| < \delta$$

olacak şekilde bir N tam sayısı vardır. α mertebeden noktasal istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerinin tüm kümesini $S^{\alpha}(f)$ ile tanımlayalım.

$\alpha = 1$ için $S^{\alpha}(f)$ yerine $S(f)$ yazılır ve $f = 0$ özel durumunda $S^{\alpha}(f)$ yerine $S_0^{\alpha}(f)$ yazılır.

$0 < \alpha \leq 1$ için α mertebeden istatistiksel yakınsak fonksiyon dizileri iyi tanımlıdır. Fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunun için $\{f_k\}$,

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ x_k, & k \neq 2n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, ..., \ x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right]$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, hem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k \leq n : \ \forall \ x \in A \text{ için } |f_k(x) - 1| \geq \varepsilon\}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^{\alpha}} = 0$$

hem de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k \leq n : \ \forall \ x \in A \text{ için } |f_k(x) - 0| \geq \varepsilon\}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^{\alpha}} = 0$$

olur. Dolayısıyla $\alpha > 1$ için $\{f_k\}$, hem 1 e hem de 0 a α mertebeden istatistiksel yakınsaktır. Yani $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = 1$ ve $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = 0$ dır. Bu durum imkansızdır.

Teorem 6.1.1 $0 < \alpha \leq 1$ ve $\{f_k\}, \{g_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli fonksiyon dizileri olsun.

(i) Eğer $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $S^{\alpha} - \lim cf_k(x) = cf(x)$ dir.

(ii) Eğer $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ ve $S^{\alpha} - \lim g_k(x) = g(x)$ ise
$S^{\alpha} - \lim (f_k(x) + g_k(x)) = f(x) + g(x)$ dır.

İspat: (i) $c = 0$ olduğunda ispat açıktır. $c \neq 0$ ve $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ olduğunu farzedelim. h.h.k (α) için

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır ve dolayısıyla h.h.k (α) için

$$|cf_k(x) - cf(x)| < \varepsilon$$

dir. Bu $S^{\alpha} - \lim cf_k(x) = cf(x)$ olmasını gerektirir.

(ii) nin ispatı aşağıdaki eşitsizliklerden elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k \leq n : \ \forall\ x \in A \text{ için } \left|f_k(x) + g_k(x) - (f(x) + g(x))\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\quad \leq \tfrac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k \leq n : \ \forall\ x \in A \text{ için } \left|f_k(x) - f(x)\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \\
&\qquad + \tfrac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k \leq n : \ \forall\ x \in A \text{ için } \left|g_k(x) - g(x)\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\right|
\end{aligned}$$

Her yakınsak fonksiyon dizi, α mertebeden istatistiksel yakınsaktır. Yani her $0 < \alpha \leq 1$ için $c(f) \subset S^\alpha(f)$ dir. Fakat tersi sağlanmayabilir. Örneğin, $\{f_k\}$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & k = n^3 \\ \frac{2kx}{1+k^2x^2}, & k \neq n^3 \end{cases}$$

$\alpha > \frac{1}{3}$ için $S^\alpha - \lim f_k(x) = 0$ dır, fakat yakınsak değildir.

6.2 α-İstatistiksel Cauchy Dizisi ve Kuvvetli $p-$Cesàro Toplanabilirlik

Bu kısımda, reel değerli fonksiyon dizileri için $\alpha-$istatistiksel Cauchy dizisi ve α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlik kavramlarını inceleyeceğiz. $\alpha \leq \beta$ olduğunda reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlikle β mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiyi ve β mertebeden istatistiksel yakınsaklıkla α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Tanım 6.2.1 $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α herhangi bir reel sayı ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ ve h.h.k (α) için

$$|f_k(x) - f_N(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N\,(= N(\varepsilon, x))$ sayısı varsa $\{f_k\}$ dizisine α mertebeden bir istatistiksel Cauchy dizisi ya da $\alpha-$istatistiksel Cauchy dizisi denir. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k \leq n : \ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f_N(x)| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

dir.

Teorem 6.2.1 $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

(i) $\{f_k\}$, A üzerinde noktasal $\alpha-$istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $\{f_k\}$, A üzerinde $\alpha-$istatistiksel Cauchy dizisidir.

(iii) $\{f_k\}$, bir fonksiyon dizisi olmak üzere $\forall\ x \in A$ ve h.h.k (α) için $f_k(x) = g_k(x)$ olacak şekilde α mertebeden noktasal yakınsak bir $\{g_k\}$ fonksiyon dizisi vardır.

İspat: $(i \Rightarrow ii)$

A üzerinde $S^\alpha - \lim f_k(x) = f(x)$ olduğunu farzedelim. $\varepsilon > 0$ ve h.h.k (α) için $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Eğer N sayısı $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanacak şekilde seçilirse $\forall\ x \in A$ için

$$|f_k(x) - f_N(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Böylece $\{f_k\}$, $\alpha-$istatistiksel Cauchy dizisi olur.

(ii) nin doğru olduğunu farzedelim ve $I = [f_N(x) - 1,\ f_N(x) + 1]$ aralığı $\forall\ x \in A$ ve h.h.k (α) için $f_k(x)$ i içerecek şekilde N sayısını seçelim. (ii) yi uygulayarak $\forall\ x \in A$ ve h.h.k (α) için $I' = \left[f_M(x) - \frac{1}{2},\ f_M(x) + \frac{1}{2}\right]$aralığı $f_k(x)$ i içerecek şekilde M sayısını seçelim. $\forall\ x \in A$ ve h.h.k (α) için $I_1 = I \cap I'$ aralığının $f_k(x)$ i içerdiğini iddia ediyoruz. Çünkü,

$$\begin{aligned} &\{k \leq n:\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I \cap I'\} \\ &= \{k \leq n:\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I\} \\ &\quad + \{k \leq n:\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I'\} \end{aligned}$$

olur ve bu durumda,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n:\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I \cap I'\}| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n:\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I\}| \\ &\quad + \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n:\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I'\}| = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden I_1, $\forall\ x \in A$, h.h.k (α) için $f_k(x)$ i içerir ve uzunluğu 1 den küçük eşit olan kapalı bir aralıktır.

Şimdi $\forall\ x \in A$, h.h.$k\ (\alpha)$ için $I'' = \left[f_{N(2)}(x) - \frac{1}{4},\ f_{N(2)}(x) + \frac{1}{4}\right]$ aralığı $f_k(x)$ i içerecek şekilde $N(2)$ sayısını seçelim. Önceki yolla $\forall\ x \in A$, h.h.$k\ (\alpha)$ için $I_2 = I_1 \cap I''$ aralığı $f_k(x)$ i içerir ve uzunluğu $\frac{1}{2}$ den küçük eşittir. Bu şekilde devam edilerek her bir m için $I_m \supseteq I_{m+1}$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini oluşturalım. I_m nin uzunluğu 2^{1-m} den büyük olamaz ve $\forall\ x \in A$, h.h.$k\ (\alpha)$ için $f_k(x) \in I_m$ dir. Böylece A kümesi üzerinde öyle bir $f(x)$ fonksiyonu vardır ki $\{f(x)\} = \cap_{m=1}^{\infty} I_m$ dir. $\forall\ x \in A$, h.h.$k\ (\alpha)$ için $f_k(x) \in I_m$ olduğundan $n > T_m$ için

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k \leq n :\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I_m\}\right| \leq \frac{1}{m} \tag{6.1}$$

olacak şekilde artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisi seçebiliriz.

Şimdi $(f_k(x))$ in bir $(z_k(x))$ alt dizisini $\forall\ x \in A$ için $k > T_1$ olduğunda tüm $f_k(x)$ terimlerini içerecek şekilde ve $T_m < k < T_{m+1}$ için $f_k(x) \notin I_m$ olacak şekilde oluşturalım. $\forall\ x \in A$ için $(g_k(x))$ fonksiyon dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$g_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{Eğer } f_k(x),\ z_k(x) \text{ in bir terimi ise} \\ f_k(x), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu durumda A kümesi üzerinde $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$ dir. Çünkü $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise $f_k(x)$, $(z_k(x))$ in bir terimidir ya da A üzerinde $g_k(x) = f_k(x) \in I_m$ ve $\forall x \in A$ için $|g_k(x) - f_k(x)| \leq 2^{1-m}$ dir. Ayrıca $\forall\ x \in A$, h.h.$k\ (\alpha)$ için $g_k(x) = f_k(x)$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunun doğruluğunu göstermek için $T_m < n < T_{m+1}$ alalım. Bu durumda

$$\{k \leq n :\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \neq g_k(x)\} \subseteq \{k \leq n :\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I_m\}$$

olur. Dolayısıyla (6.1) den ,

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k \leq n :\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \neq g_k(x)\}\right| \\ &\quad \leq \tfrac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k \leq n :\ \forall\ x \in A \text{ için } f_k(x) \notin I_m\}\right| < \tfrac{1}{m} \end{aligned}$$

dir. Böylece $n \to \infty$ iken limit sıfırdır ve $\forall\ x \in A$, h.h.$k\ (\alpha)$ için $g_k(x) = f_k(x)$ dır. Dolayısıyla (ii), (iii) yi gerektirir.

Son olarak, (iii) nin sağladığını farzedelim. $\forall x \in A$, h.h.k (α) için $g_k(x) = f_k(x)$ ve A üzerinde $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda her bir n için

$$\begin{aligned} &\{k \le n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)|\} \\ &\quad \subseteq \{k \le n : \ \forall\, x \in A \text{ için } f_k(x) \ne g_k(x)\} \\ &\quad \cup \{k \le n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |g_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} \end{aligned}$$

olur ve A üzerinde $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$ olduğundan son yazılan küme sabit sayıda tam sayı içerir. Bu sabit sayıya $l = l(\varepsilon, x)$ diyelim. Böylece,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^\alpha} |\{k \le n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}| \\ &\quad \le \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^\alpha} |\{k \le n : \ \forall\, x \in A \text{ için } f_k(x) \ne g_k(x)\}| \\ &\qquad + \lim \tfrac{l}{n^\alpha} = 0 \end{aligned}$$

dır. Çünkü $\forall\, x \in A$, h.h.k (α) için $g_k(x) = f_k(x)$ dir. Dolayısıyla $\forall\, x \in A$, h.h.k (α) için $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ olur. Bu yüzden (i) sağlar ve ispat tamamlanır.

Sonuç 6.2.1 A üzerinde $S^\alpha - \lim f_k(x) = f(x)$ olacak şekilde $\{f_k\}$ bir fonksiyon dizisi ise A üzerinde $\lim_{n\to\infty} f_{k(n)}(x) = f(x)$ olacak şekilde bir $\left\{f_{k(n)}(x)\right\}$ alt dizisi vardır.

Teorem 6.2.2 $0 < \alpha < \beta \le 1$ olsun. $S^\alpha(f) \subseteq S^\beta(f)$ dir ve $\alpha < \beta$ olacak şekilde bazı α ve β için kapsam kesindir.

İspat: Eğer $0 < \alpha < \beta \le 1$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{n^\beta} |\{k \le n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}| \\ &\quad \le \tfrac{1}{n^\alpha} |\{k \le n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}| \end{aligned}$$

olduğundan $S^\alpha(f) \subseteq S^\beta(f)$ dir. Kapsamın kesin olduğunu göstermek için $\{f_k\}$ dizisini

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ \frac{k^2 x}{1 + k^3 x^2}, & k \ne n^2 \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, ..., \ x \in [0, 1]$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ için

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{n^\alpha} |\{k \le n : \ \forall\, x \in [0,1] \ \text{ için } |f_k(x) - 0| \ge \varepsilon\}| \\ &\quad = \tfrac{1}{n^\alpha} |\{k \le n : \ \forall\, x \in [0,1] \ \text{ için } |f_k(x)| \ge \varepsilon\}| \le \tfrac{\sqrt{n}}{n^\alpha} \to 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $S^{\beta}-\lim f_k(x)=0$, yani $\frac{1}{2}<\beta\leq 1$ için $x\in S^{\beta}(f)$ dir, fakat $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$ için $x\notin S^{\alpha}(f)$ dir.

Teorem 6.2.2 de $\beta=1$ alırsak sonraki sonucu elde ederiz.

Sonuç 6.2.2 $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi, bazı $0<\alpha\leq 1$ için f fonksiyonuna α mertebeden istatistiksel yakınsaksa, f fonksiyonuna istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 6.2.2 $0<\alpha\leq 1$ olacak şekilde α bir reel sayı ve p pozitif bir reel sayı olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\left|f_k(x)-f(x)\right|^p=0$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $\{f_k\}$ fonksiyon dizisine α mertebeden kuvvetli $p-$cesàro toplanabilir denir. Bu durumda A üzerinde $w_p^{\alpha}-\lim f_k(x)=f(x)$ yazılır. $\alpha=1$ için α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirlik, kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirliğe dönüşür. α mertebeden tüm kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir fonksiyon dizilerinin kümesini $w_p^{\alpha}(f)$ ile tanımlayalım. $f(x)=0$ olması durumunda $w_{0,p}^{\alpha}(f)$ yazılır.

Teorem 6.2.3 $0<\alpha<\beta\leq 1$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. $w_p^{\alpha}(f)\subseteq w_p^{\beta}(f)$ dir ve $\alpha<\beta$ olacak şekilde bazı α ve β için kapsam kesindir.

İspat: $\{f_k\}$, α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir olsun. $0<\alpha<\beta\leq 1$ olacak şekilde α ve β verilsin ve p pozitif bir reel sayı olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}\left|f_k(x)-f(x)\right|^p\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\left|f_k(x)-f(x)\right|^p$$

yazabiliriz. Bu da $w_p^{\alpha}(f)\subseteq w_p^{\beta}(f)$ i verir. Kapsamın kesin olduğunu göstermek için $\{f_k\}$ dizisini

$$f_k(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+kx}, & k=n^2\\ 0, & k\neq n^2\end{cases}\quad x\in\left[0,\tfrac{1}{k}\right]$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}\left|f_k(x)-0\right|^p\leq\frac{\sqrt{n}}{n^{\beta}}=\frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}}$$

dir. $n \to \infty$ iken $\frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}} \to 0$ olduğundan $w_p^{\beta}(f) - \lim f_k(x) = 0$ dır. Yani $\{f_k\}$ dizisi $0 < \beta < \frac{1}{2}$ için α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirdir, fakat

$$\frac{\sqrt{n}}{2n^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - 0|^p$$

ve $n \to \infty$ iken $\frac{\sqrt{n}}{2n^{\alpha}} \to \infty$ olduğundan $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $\{f_k\}$ dizisi α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir değildir.

Sonuç 6.2.3 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. Bu durumda,
(i) Eğer $\alpha = \beta$ ise $w_p^{\alpha}(f) = w_p^{\beta}(f)$dir.
(ii) $\forall \alpha \in (0,1]$ ve $0 < p < \infty$ için $w_p^{\alpha}(f) \subseteq w_p(f)$ dir.

Teorem 6.2.4 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $w_q^{\alpha}(f) \subseteq w_p^{\alpha}(f)$ dir.

Teorem 6.2.5 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde α ve β sabit reel sayılar ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer $\{f_k\}$, f fonksiyonuna α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir ise f fonksiyonuna β mertebeden istatistiksel yakınsaktır.

İspat: A üzerinde tanımlı herhangi bir $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi için,

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - f(x)|^p \geq |\{k \leq n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| .\varepsilon^p$$

yazabiliriz ve bu yüzden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - f(x)|^p &\geq \frac{1}{n^{\alpha}} |\{k \leq n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| .\varepsilon^p \\
&\geq \frac{1}{n^{\beta}} |\{k \leq n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| .\varepsilon^p
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 6.2.4 $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α sabit bir reel sayı ve $0 < p < \infty$ olsun. $\{f_k\}$, f fonksiyonuna α mertebeden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir ise f fonksiyonuna α mertebeden istatistiksel yakınsaktır.

6.3 Fonksiyon Dizileri İçin α Mertebeden Düzgün İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda fonksiyon dizileri için α mertebeden düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenecektir.

Tanım 6.3.1 A üzerinde $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α sabit bir reel sayı olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için A kümesi üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left|\left\{k \leq n :\ \forall\ x \in A \text{ için } \left|f_k(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

oluyorsa $\{f_k\}$, fonksiyon dizisine f fonksiyonuna α mertebeden düzgün istatistiksel yakınsak ya da düzgün $\alpha-$istatistiksel yakınsak denir.

Yani $\forall\ x \in A$ ve h.h.k (α) için

$$\left|f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon \tag{6.2}$$

oluyorsa, bu durumda A üzerinde düzgün $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ ya da A üzerinde $S_u^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ yazılır. Tüm düzgün $\alpha-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $S_u^{\alpha}(f)$ ile tanımlayalım.

Teorem 6.3.1 $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için f ve f_k, $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda $c_k = \max_{x\in A}\left|f_k(x) - f(x)\right|$ olduğunda A üzerinde düzgün $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ olması için gerek ve yeter şart $S^{\alpha} - \lim c_k = 0$ olmasıdır.

İspat: A üzerinde düzgün $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ olduğunu farzedelim. $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için A üzerinde $\left|f_k(x) - f(x)\right|$ sürekli olduğundan herhangi bir $x_k \in A$ için mutlak maksimum değeri vardır. Yani, $c_1 = \left|f_1(x_1) - f(x_1)\right|$, $c_2 = \left|f_2(x_2) - f(x_2)\right|$, ... sağlanacak şekilde $x_1, x_2, ... \in A$ noktaları bulunabilir. Böylece $k = 1, 2, 3, ...$ için $c_k = \left|f_k(x) - f(x)\right|$ yazabiliriz. Düzgün $\alpha-$istatistiksel yakınsaklık tanımından, $\forall\ \varepsilon > 0$ ve h.h.k (α) için $\left|f_k(x_k) - f(x_k)\right| < \varepsilon$ yazabiliriz. Bu yüzden $S^{\alpha} - \lim c_k = 0$ dır.

(6.2) den eğer A üzerinde düzgün $\lim f_k(x) = f(x)$ ise A üzerinde düzgün $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ dir. Fakat tersi doğru olmayabilir. Bunu göstermek için $\{f_k\}$ dizisini,

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ \frac{k}{k^2+k^2x^2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, ..., \ x \in [0,1]$$

şeklinde tanımlayalım.

$$c_k = \max_{x\in[0,1]} |f_k(x) - 0| = \begin{cases} 2, & k = n^2 \\ \frac{1}{k}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğunda $S^{\alpha} - \lim c_k = 0$ olduğundan $[0,1]$ üzerinde $x \in [0,1]$ ve $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ için $\{f_k\}$, $f(x) = 0$ a düzgün $\alpha-$istatistiksel yakınsaktır. Fakat $\lim_{k\to\infty} c_k$ var olmadığından $(f_k(x))$, $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir.

Tersine ıspat aşikardır.

Sonuç 6.3.1 (i) A üzerinde düzgün $\lim f_k(x) = f(x)$ ise A üzerinde $\lim f_k(x) = f(x)$ dır. A üzerinde $\lim f_k(x) = f(x)$ ise A üzerinde noktasal $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ dır.
(ii) A üzerinde düzgün $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ ise
A üzerinde noktasal $S^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$ dır.
(iii) Eğer $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise $S_u^{\alpha}(f) \subseteq S_u^{\beta}(f)$ dır.

6.4 Fonksiyon Dizileri İçin Düzgün $\alpha-$İstatistiksel Cauchy Dizisi

Bu kısımda reel değerli fonksiyon dizileri için düzgün $\alpha-$istatistiksel Cauchy dizisi kavramını inceleyeceğiz.

Tanım 6.4.1 $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α herhangi bir reel sayı ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde bir fonksiyon dizisi olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$, h.h.$k\,(\alpha)$ ve $\forall\, x \in A$ için $|f_k(x) - f_N(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N\,(= N(\varepsilon))$ sayısı varsa $\{f_k\}$ dizisine α mertebeden düzgün istatistiksel Cauchy dizisi ya da düzgün $\alpha-$istatistiksel Cauchy dizisi denir. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} |\{k \leq n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

dır.

Teorem 6.4.1 $0 < \alpha \leq 1$ ve $\{f_k\}, \{g_k\}$ A üzerinde tanımlanmış reel değerli fonksi-yon dizileri olsun.

(i) Eğer $S_u^\alpha - \lim f_k(x) = f(x)$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $S_u^\alpha - \lim cf_k(x) = cf(x)$ dir.

(ii) Eğer $S_u^\alpha - \lim f_k(x) = f(x)$ ve $S_u^\alpha - \lim g_k(x) = g(x)$ ise

$$S_u^\alpha - \lim (f_k(x) + g_k(x)) = f(x) + g(x)$$

dır.

Teorem 6.4.2 $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α herhangi bir reel sayı ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde bir fonksiyon dizisi olsun. Aşağıdaki durumlar denktir.

(i) A üzerinde $\{f_k\}$ düzgün $\alpha-$istatistiksel yakınsaktır.

(ii) A üzerinde $\{f_k\}$ düzgün $\alpha-$istatistiksel Cauchy dizisidir.

(iii) $\{f_k\}$, bir fonksiyon dizisi olmak üzere $\forall\ x \in A$ ve h.h.k (α) için $f_k(x) = g_k(x)$ olacak şekilde α mertebeden düzgün yakınsak bir $\{g_k\}$ fonksiyon dizisi vardır.

7 FONKSİYON DİZİLERİ İÇİN α MERTEBEDEN $\lambda-$İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden $[V, \lambda]$ $-$toplanabilirlik ve α mertebeden noktasal $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanımlayıp inceleyeceğiz. $w_{\lambda p}^{\beta}(f)$ ve $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ arasında ve $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ ve $S_{\lambda}(f)$ arasında bazı kapsam ilişkileri kuracağız.

Aksi belirtilmedikçe $n_o \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ için $\mathbb{N}_{n_o} = \{n_o,\ n_o + 1,\ n_o + 2, ...\}$ de "tüm $n_o \in \mathbb{N}_{n_o}$" nin anlamı "pozitif tam sayıların sonlu sayıları hariç tüm $n \in \mathbb{N}$" dir.

A, boş olmayan bir küme olsun, A üzerinde tanımlanan sınırlandırılmış reel değerli tüm fonksiyonların kümesini $B(A)$ ile tanımlayalım.

7.1 α Mertebeden Noktasal $\lambda-$İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda α mertebeden noktasal $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanıp incelenecektir.

Tanım 7.1.1 $\lambda = (\lambda_n)$ dördüncü bölümdeki gibi tanımlansın ve α, $(0, 1]$ aralığında herhangi bir reel sayı olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} \left|\{k \in I_n :\ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

oluyorsa $\{f_k\}$ fonksiyon dizisine, f fonksiyonuna α mertebeden noktasal $\lambda-$istatistiksel yakınsaktır denir. Yani $\delta > 0$, $n > N\,(= N(\varepsilon, \delta, x))$, $0 < \alpha \leq 1$ ve $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} \left|\{k \in I_n :\ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| < \delta$$

olacak şekilde bir N sayısı vardır. α mertebeden noktasal istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerinin tüm kümesini $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ ile tanımlayalım. Bu durumda A üzerinde

$$S_{\lambda}^{\alpha} - \lim f_k(x) = f(x)$$

yazılır. $\lambda_n = n$ ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için S_λ^α yerine $S^\alpha(f)$ yazılır. Özel olarak $\alpha = 1$ durumunda $S_\lambda^\alpha(f)$ yerine $S_\lambda(f)$ yazılır.

$0 < \alpha \leq 1$ için $S_\lambda^\alpha -$ istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlıdır. Fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunun için $\{f_k\}$,

$$f_k(x) = \begin{cases} 2, & k = 3n \\ \frac{1}{1+kx}, & k \neq 3n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $\alpha > 1$ için hem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left|\{k \in I_n : \ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - 2| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{[\lambda_n] + 1}{3\lambda_n^\alpha} = 0$$

hem de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left|\left\{k \in I_n : \ \forall\ x \in A \text{ için } \left|f_k(x) - \frac{1}{1+kx}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2([\lambda_n] + 1)}{3\lambda_n^\alpha} = 0$$

olur. Dolayısıyla $S_\lambda^\alpha -$ istatistiksel yakınsaklık hem 2 ye hem de 0 a yakınsar. Bu durum imkansızdır.

7.2 Fonksiyon Dizileri için α Mertebeden $[V, \lambda]$ $-$Tollanabilirlik

Bu kısımda reel değerli fonksiyon dizileri için α mertebeden $[V, \lambda]$ $-$tollanabilirlik kavramını inceleyeceğiz. $w_{\lambda p}^\beta(f)$ ve $S_\lambda^\alpha(f)$ arasında ve $S_\lambda^\alpha(f)$ ve $S_\lambda(f)$ arasında bazı kapsam ilişkileri kuracağız.

Tanım 7.2.1 $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi yukarıda belirtildiği gibi olsun. α, $(0, 1]$ aralığında herhangi bir reel sayı ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \sum_{\substack{k\in I_n \\ x\in A}} |f_k(x) - f(x)|^p = 0$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $\{f_k\}$ fonksiyon dizisine, kuvvetli $w_{\lambda p}^\alpha(f)$ $-$toplanabilir ya da α mertebeden noktasal $[V, \lambda]$ $-$toplanabilir denir.

Bu durumda A üzerinde $w_{\lambda p}^{\alpha}-\lim f_k(x)=f(x)$ yazılır. Tüm kuvvetli $w_{\lambda p}^{\beta}(f)-$toplanabilir fonksiyon dizilerinin kümesini $w_{\lambda p}^{\alpha}(f)$ ile tanımlayalım. $\lambda_n=n$ ve tüm $n\in N$ için $w_{\lambda p}^{\alpha}(f)$ yerine $w_{p}^{\alpha}(f)$ yazılır. $\alpha=1$ özel durumunda $w_{\lambda p}^{\alpha}(f)$ yerine $w_{\lambda p}(f)$ yazılır.

Teorem 7.2.1 Her $n\in\mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n\leq\mu_n$ olacak şekilde $\lambda=(\lambda_n)$ ve $\mu=(\mu_n)$ dördüncü bölümde tanımlanan Λ da iki dizi olsun. $0<\alpha\leq\beta\leq1$ ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi olsun.

(i) Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{\lambda_n^{\alpha}}{\mu_n^{\beta}}>0 \tag{7.1}$$

ise $S_{\mu}^{\beta}(f)\subseteq S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ dir.

(ii) Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}}=1 \tag{7.2}$$

ise $S_{\lambda}^{\alpha}(f)\subseteq S_{\mu}^{\beta}(f)$ dir.

İspat: (i) Her $n\in\mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n\leq\mu_n$ olduğunu farzedelim ve (7.1) sağlansın. Bu durumda $I_n\subset J_n$ ve $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}&\{k\in J_n:\ \forall\ x\in A \text{ için } |f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\\&\qquad\supset\{k\in I_n:\ \forall\ x\in A \text{ için } |f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\end{aligned}$$

yazabiliriz ve bu yüzden $J_n=[n-\mu_n+1,\ n]$ aralığında her $n\in\mathbb{N}_{n_o}$ için

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{\mu_n^{\beta}}\left|\{k\in J_n:\ \forall\ x\in A \text{ için } |f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\right|\\&\qquad\leq\tfrac{\lambda_n^{\alpha}}{\mu_n^{\beta}}\tfrac{1}{\lambda_n^{\alpha}}\left|\{k\in I_n:\ \forall\ x\in A \text{ için } |f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

dir. $n\to\infty$ iken (7.1) yi kullanarak limit alırsak $S_{\mu}^{\beta}(f)\subseteq S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ elde edilir.

(ii) A üzerinde $S_{\lambda}^{\alpha}-\lim f_k(x)=f(x)$ olsun ve (7.2) sağlansın. $I_n\subset J_n$ olduğundan,

$\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall\ n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\mu_n^\beta}\left|\{k \in J_n :\ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad = \tfrac{1}{\mu_n^\beta}\left|\{n - \mu_n + 1 < k < n - \lambda_n :\ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\qquad\quad + \tfrac{1}{\mu_n^\beta}\left|\{k \in I_n :\ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad \leq \tfrac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^\beta} + \tfrac{1}{\mu_n^\beta}\left|\{k \in I_n :\ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad \leq \tfrac{\mu_n - \lambda_n^\beta}{\lambda_n^\beta} + \tfrac{1}{\mu_n^\beta}\left|\{k \in I_n :\ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad \leq \left(\tfrac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} - 1\right) + \tfrac{1}{\lambda_n^\alpha}\left|\{k \in I_n :\ \forall\ x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right|
\end{aligned}$$

dir.(2) den $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} = 1$ olduğundan ilk terim ve A üzerinde $S_\lambda^\alpha - \lim f_k(x) = f(x)$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim $n \to \infty$ iken 0 a yakınsar. $\left(\text{Her } n \in \mathbb{N}_{n_o} \text{ için } \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} - 1\right) \geq 0 \text{ olduğuna dikkat edelim.}\right)$ Bu $S_\lambda^\alpha(f) \subseteq S_\mu^\beta(f)$ olmasını gerektirir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.2.1 $\forall\ n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ da iki dizi ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer (7.1) sağlarsa, bu durumda;

(i) $\forall\alpha \in (0,1]$ ve $\forall x \in A$ için $S_\mu^\alpha(f) \subseteq S_\lambda^\alpha(f)$ dir.

(ii) $\forall\alpha \in (0,1]$ ve $\forall x \in A$ için $S_\mu(f) \subseteq S_\lambda^\alpha(f)$ dir.

(iii) $\forall x \in A$ için $S_\mu(f) \subseteq S_\lambda(f)$ dir.

Sonuç 7.2.2 $\forall\ n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ da iki dizi ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer (7.2) sağlarsa, bu durumda;

(i) $\forall\alpha \in (0,1]$ ve $\forall x \in A$ için $S_\lambda^\alpha(f) \subseteq S_\mu^\alpha(f)$ dir.

(ii) $\forall\alpha \in (0,1]$ ve $\forall x \in A$ için $S_\lambda^\alpha(f) \subseteq S_\mu(f)$ dir.

(iii) $\forall x \in A$ için $S_\lambda(f) \subseteq S_\mu(f)$ dir.

Teorem 7.2.3 Her $n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde $\lambda = (\lambda_n)$, $\mu = (\mu_n) \in \Lambda$ olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi olsun.

(i) Eğer (7.1) sağlarsa $\forall x \in A$ için $w_{\mu p}^{\beta}(f) \subset w_{\lambda p}^{\alpha}(f)$ dir.

(ii) Eğer (7.2) sağlarsa ve $f(x) \in B(A)$ ise $\forall x \in A$ için $B(A) \cap w_{\lambda p}^{\alpha}(f) \subset w_{\mu p}^{\beta}(f)$ dir.

İspat: (i) nin ıspatı açıktır.

(ii) $(f_k(x)) \in B(A) \cap w_{\lambda p}^{\alpha}(f)$ olsun ve (7.2) nin sağladığını farzedelim.

$(f_k(x)) \in B(A)$ olduğundan $\forall\, k \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in A$ için $|f_k(x) - f(x)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. Şimdi, $\forall n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ ve $I_n \subset J_n$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in J_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p &= \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in J_n - I_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^{\beta}} \right) M^p + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n^{\beta}}{\lambda_n^{\beta}} \right) M^p + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} - 1 \right) M^p + \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $B(A) \cap w_{\lambda p}^{\alpha}(f) \subset w_{\mu p}^{\beta}(f)$ dir.

Sonuç 7.2.3 $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ da iki dizi ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer (7.1) sağlarsa, bu durumda;

(i) $\forall \alpha \in (0,1]$ ve $\forall x \in A$ için $w_{\mu p}^{\alpha}(f) \subset w_{\lambda p}^{\alpha}(f)$ dır.

(ii) $\forall \alpha \in (0,1]$ ve $\forall x \in A$ için $w_{\mu p}(f) \subset w_{\lambda p}^{\alpha}(f)$ dır.

(ii) $\forall x \in A$ için $w_{\mu p}(f) \subset w_{\lambda p}(f)$ dır.

Sonuç 7.2.4 $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ da iki dizi ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer (7.2) sağlarsa, bu durumda;

(i) $\forall \alpha \in (0,1]$ ve $\forall x \in A$ için $B(A) \cap w_{\lambda p}^{\alpha}(f) \subset w_{\mu p}^{\alpha}(f)$ dır.

(ii) $\forall \alpha \in (0,1]$ ve $\forall x \in A$ için $B(A) \cap w_{\lambda p}^{\alpha}(f) \subset w_{\mu p}(f)$ dır.

(iii) $\forall x \in A$ için $w_{\lambda p}(f) \subset w_{\mu p}(f)$ dir.

Teorem 7.2.4 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde α ve β sabit reel sayılar, $\forall n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ ve $\{f_k\}$, A kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi olsun. Bu durumda;

(i) (7.1) sağlansın, eğer A üzerinde tanımlanmış reel değerli fonksiyon dizisi, f ye kuvvetli $w_{\mu p}^{\beta}(f)$ $-$toplanabilir ise f ye $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ $-$istatistiksel yakınsaktır.

(ii) (7.2) sağlansın, eğer $f_k(x) \in B(A)$ ve $\{f_k\}$, A üzerinde tanımlanmış sınırlı reel değerli fonksiyon dizisi, f ye $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ $-$istatistiksel yakınsak ise f ye kuvvetli $w_{\mu p}^{\beta}(f)$ $-$toplanabilirdir.

İspat: Herhangi bir $(f_k(x))$ fonksiyon dizisi ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \in J_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p &= \sum_{\substack{k \in J_n, x \in A \\ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon}} |f_k(x) - f(x)|^p + \sum_{\substack{k \in J_n, x \in A \\ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\geq \sum_{\substack{k \in I_n, x \in A \\ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon}} |f_k(x) - f(x)|^p + \sum_{\substack{k \in I_n, x \in A \\ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\geq \sum_{\substack{k \in I_n, x \in A \\ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\geq |\{k \in I_n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in J_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p &\geq \frac{1}{\mu_n^{\beta}} |\{k \in I_n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p \\
&\geq \frac{\lambda_n^{\alpha}}{\mu_n^{\beta}} \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} |\{k \in I_n : \ \forall\, x \in A \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p
\end{aligned}$$

elde edilir. (7.1) sağladığından, eğer $\{f_k\}$, f ye kuvvetli $w_{\mu p}^{\beta}(f)$ $-$toplanabilir ise f ye $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ $-$istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $S_{\lambda}^{\alpha} - \lim f(x) = f(x)$ ve $(f_k(x)) \in B(A)$ olduğunu farzedelim. Bu durumda, tüm

k lar için $|f_k(x) - f(x)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in J_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p &= \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in J_n - I_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^{\beta}} \right) M^p + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n^{\beta}}{\lambda_n^{\beta}} \right) M^p + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_n \\ x \in A}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} - \frac{\lambda_n^{\beta}}{\lambda_n^{\beta}} \right) M^p + \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} \sum_{\substack{k \in I_n, x \in A \\ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\quad + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{\substack{k \in I_n, x \in A \\ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon}} |f_k(x) - f(x)|^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} - 1 \right) M^p \\
&\quad + \frac{M^p}{\lambda_n^{\beta}} \left| \left\{ k \in I_n : \ \forall\, x \in A \text{ için } \ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

dir ve $S_{\lambda}^{\alpha} - \lim f(x) = f(x)$ olduğunda (7.2) yi kullanarak $w_{\mu p}^{\beta} - \lim f(x) = f(x)$ elde edilir.

Sonuç 7.2.5 $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ da iki dizi α, $(0, 1]$ de herhangi bir reel sayı olsun. Eğer (7.1) sağlarsa, bu durumda;

(i) A üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi f ye kuvvetli $w_{\mu p}^{\alpha}(f)$ $-$toplanabilir ise f ye $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ $-$istatistiksel yakınsaktır.

(ii) A üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi f ye kuvvetli $w_{\mu p}(f)$ $-$toplanabilir ise f ye $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ $-$istatistiksel yakınsaktır.

(iii) A üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon dizisi f ye kuvvetli $w_{\mu p}(f)$ $-$toplanabilir ise f ye $S_{\lambda}(f)$ $-$istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 7.2.6 $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_o}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ da iki dizi ve α, $(0, 1]$ de herhangi bir reel sayı olsun. Eğer (7.2) sağlarsa, bu durumda;

(i) A üzerinde tanımlanmış sınırlı reel değerli bir fonksiyon dizisi f ye $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ $-$istatistiksel yakınsak ise f ye kuvvetli $w_{\mu p}^{\alpha}(f)$ $-$toplanabilirdir.

(ii) A üzerinde tanımlanmış sınırlı reel değerli bir fonksiyon dizisi f ye $S_{\lambda}^{\alpha}(f)$ $-$istatistiksel yakınsak ise f ye kuvvetli $w_{\mu p}(f)$ $-$toplanabilirdir.
$(iii,)$ Eğer A üzerinde tanımlanmış sınırlı reel değerli bir fonksiyon dizisi f ye $S_{\lambda}(f)$ $-$istatistiksel yakınsak ise f ye kuvvetli $w_{\mu p}(f)$ $-$toplanabilirdir.

KAYNAKLAR

Aslıhan S. (2012). İstatistiksel yakınsaklık, Yüksek Lisans Tezi, Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.

Başar, F. (2012). Summability Theory and its Applications. Bentham Science Publishers, İstanbul.

Connor, J. (1988). The statistical and strong p-Cesáro convergence of sequences.*Analysis*, **8:** 47-63.

Connor, J. (1989). On Strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canad.Math.Bull*, **32:** 194-198.

Çolak, R. (2010). Statistical convergence of order α. Anamaya Pub., New Delhi, Modern Methods in Analysis and its Applications, pp. 121-129.

Çolak, R. (2011). On $\lambda-$statistical convergence. In: Conference on Summability and Applications, İstanbul, Turkey.

Çolak, R., Bektaş, A. (2011). $\lambda-$statistical convergence of order α. *Acta Math. Sci.*, **31(**3)**:** 953-959.

Duman, O. and Orhan, C. (2004). $\mu-$statistical convergent function sequences. *Czec hoslov. Math. J.*, **54(129)**(2)**:** 413-422.

Edely, O.H.H., Mohiuddine, S.A., Noman, A.K. (2010). Korovkin type approximation theorems obtained through generalized statistical convergence. *Appl. Math. Lett.*, **23**(11)**:** 1382-1387.

Et, M., (2003). Strongly almost summable difference sequences of order m defined by a modulus. *Studia Sci. Math. Hung.*, **40(**4)**:** 463-476.

Et, M., Altın, Y., Choudhary, B., Tripathy, B.C. (2006). On some classes of sequences defined by sequences of Orlicz functions. *Math. Inequal. Appl.*, **9**(2): 335-342.

Et, M. and Nuray, F. (2011). Δ^m-statistical convergence. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **32**(6): 961-969.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.*, **2**: 241-244.

Freedman, A.R. -Sember, J.J. -Raphael,M. (1978). Some Cesáro type summability spaces. *Proc. London Math., Soc.*, **37**: 508-520.

Fridy, J.A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5**: 301-313.

Fridy, J.A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pasific. J. Math.*, **160**: 43-51.

Gadjiev, A.D., Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mt. J. Math.*, **32(**1): 129-138.

Gökhan, A., Güngör, M. (2002). On pointwise statistical convergence. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **33(**9): 1379-1384.

Güngör, M., Et., M., Altın, Y. (2004). Strongly $(V_\sigma, \lambda, q)-$summable sequences defined by Orlicz functions. *Indian J. Pure Appl. Math. Comput.*, **157(**2**):** 561-571.

Güngör, M., Et (2003). Strongly almost summable sequences defined by Orlicz functions. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **34(**8): 1141-1151.

Kolk, E. (1991). The statistical convergence in banach spaces. *Acta Comment. Univ. Tartu*, **928**: 41-52.

Kumar, V., Mursaleen, M. (2011). On $(\lambda, \mu)-$statistical convergence of double sequences on intuitionistic fuzzy normed spaces Filomat. **25(**2): 109-120.

Leindler, L. (1965). Über die de la Vallēe-Pousinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **16**: 375-387.

Miller, H.I., Orhan, C. (2001). On almost convergent and statistically convergent sequences. *Acta Math. Hung.*, **93(**1-2): 135-151.

Mohiuddine, S.A., Alghamdi, M.A. (2012). Statistical summability through a lacurnary sequence in locally solid Riesz spaces. *J. Inequal. Appl.*, **2012:** 225.

Mohiuddine, S.A., Aiyub, M. (2012). Lacurnary statistical convergence in random 2-nor-
med spaces. *Appl. Math. Inf. Sci.*,. **6**(3): 581-585.

Mohiuddine, S.A., Allotaibi, A., Mursaleen, M. (2012). Statistical convergence of double sequences in locally solid Riesz spaces. *Abstr. Appl. Anal.*, **2012:** 719729.

Mohiuddine, S.A., Allotaibi, A., Mursaleen, M. (2012). Statistical summability $(C, 1)$ and a Korovkin type approximation theorem. *J. Inequal Appl.*, **2012:** 172.

Mohiuddine, S.A., Lohani, Q.M.D. (2009). On generalized statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed space. *Solitons Fractals*, **42(**3): 1731-1737.

Mursaleen, M. (2000). $\lambda-$statistical convergence. *Math. Slovaca*, **50(**1): 111-115.

Niven, I.,Zuckerman , H.S. (1980). An Introduction to the theory of numbers. Fourth Ed.,New York, John Wiley and Sons.

Işk, M. (2010). Generalized vector-valued sequence spaces defined by modulus functions. *J. Inequal. Appl.*, **2010:** 457892.

Işk, M. (2011). Strongly almost $(V_\sigma, \lambda, q)-$summable sequences. *Math. Slovaca*, **61(**5), 779-788.

Rath, D., Tripathy, B.C. (1994). On statistical convergent and statistically Cauchy sequences. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **25(**4): 381-386.

Ŝalāt, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, **30**: 139-150.

Savaş, F. (2000). Strong almost sequence and almost $\lambda-$statistical convergence. *Hokkaido Math. J.*, **29(**3): 531-536.

Schoenberg, I.J. (1959). The intregrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly*, **66**: 361-375.

Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymtotique.*Colloq. Math.*, **2:** 73-74

Tuğba, Y. (2010). İstatistiksel Yakınsak Alt Diziler, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Zygmund, A. (1979). TrigonometricSeries. Cambridge University Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Ayşe ŞAHİN
Doğum Yeri	:	Afyon
Doğum Tarihi	:	07.04.1988
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	:	Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi, 2006
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010