BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özge TANRIÖVER

DANIŞMAN

Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASIM, 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLIĞI

Özge TANRIÖVER

DANIŞMAN
Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASIM, 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Özge TANRIÖVER tarafından hazırlanan "Birinci Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Salınımlığı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 21/ 11/ 2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Başkan **:** Doç. Dr. M. Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Özkan ÖCALAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Başak KARPUZ
Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

— Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,

— Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,

— Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,

— Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,

— Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,

— Tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.

21/11/ 2014

Özge TANRIÖVER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL

DENKLEMLERİN SALINIMLIĞI

Özge TANRIÖVER

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümün ilk kısmında

$$\frac{d}{dt}(y(t)-R(t)y(t-r))+P(t)y(t-\tau)-Q(t)y(t-\sigma)=0$$

pozitif ve negatif katsayılı birinci mertebeden nötral gecikmeli diferensiyel denklemi incelenmiştir. Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise,

$$x'(t)+p(t)x\big(\tau(t)\big)=0, \qquad t\geq t_0$$

formundaki birinci mertebeden geciklemeli diferensiyel denklemlerin salınımlığı incelenmiştir.

2014, v + 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel denklem, Fark denklem, Nötral denklem, Salınımlık

ABSTRACT

M.Sc Thesis

OSCILLATIONS FOR FIRST ORDER

DIFFERENTIAL EQUATIONS

Özge TANRIÖVER

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Özkan ÖCALAN

This thesis consists of three chapters. The first chapter is devoted to the introduction and provides a generel knowledge about the existing literatüre. In the second chapter, we give some basic definitions and preliminary that be used in further sections. In the third chapter we provide new sufficient conditions fort he oscillation of all solution of the neutral differential equation with variable coefficients

$$\frac{d}{dt}(y(t) - R(t)y(t-r)) + P(t)y(t-\tau) - Q(t)y(t-\sigma) = 0$$

Also, in the third chapter is corcorned with the oscillatory behaviour of first order delay differential equations of the form

$$x'(t) + p(t)x\big(\tau(t)\big) = 0, \qquad t \geq t_0$$

2014, v + 46 pages

Key Words: Differential equation, Difference equation, Neutral equation, Oscillation

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Özkan ÖCALAN'a araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Başak KARPUZ'a ve Sayın Uzm. Dr. Sermin ÖZTÜRK'e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Özge TANRIÖVER

AFYONKARAHİSAR, 2014

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemlerin vazgeçilmez bilimsel öneminde "doğada kopukluklar yoktur" yanlış varsayımına yer veriliyordu. Bu eski hipozete göre, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Bu nedenle diferensiyel denklemler, fizik bilimine özgü matematiksel ifadeler olarak kabul ediliyordu. Fakat yirminci yüzyıl başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Eski Yunanlılara göre, doğa olaylarında görülen süreklilik ile kesiklilik arasındaki zıtlaşma, doğadaki sürekliliğin bir aldatmacasıydı. Günümüzde diferensiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemleri kullanılarak ortadan kaldırılmak istenmiştir.

Bir gecikmeli diferensiyel denklem, $\tau(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau(t) < t$ koşulları sağlanmak üzere

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t)))$$

şeklinde denklemlerdir. Yani bu tür denklemler, bilinmeyen bir fonksiyon ve onun en yüksek mertebeden türevi hariç diğer türevlerinin bir yada daha çok gecikme değişkenlerine bağlı olduğu bir diferensiyel denklemdir. Buradan da görüldüğü gibi $x'(t)$ nin değişim oranı yalnızca $x(t)$ değerine değil aynı zamanda $x(\tau(t))$ değerine de bağlıdır.

$$x'(t) + x(t-2) - x\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x'(t) + x(t-5) - 4 = 0$$

$$x''(t) - 2x'(t) + 3x\left(t - \frac{3}{2}\right) = 1$$

$$x''(t) - 3x'(t - sin^2 t) - x(\frac{t}{3}) + t = 1$$

şeklindeki denklemler birer gecikmeli diferensiyel denklemlerdir.

Gecikmeli denklemler ile ilgili çalışmalar literatüre ilk olarak 1770 yılından sonra girmiştir. Fakat, gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili sistematik ve önemli çalışmalar daha çok son altmış yılın ürünleridir. Gecikmeli diferensiyel denklemler fizik, biyoloji ve ekonomi gibi pek çok alanda ortaya çıkan birçok problemin çözümünde rol oynarlar. Bu nedenle, bu konu hakkında son yıllarda birçok kitap yazılmıştır (Györi and Ladas 1991, Gopalsamy 1992).

Diferensiyel denklemler iki yüz yılı aşan bir sürede incelendiği halde, fark denklemleri yüz yıllık bir inceleme sürecinde sistematik hale gelmiştir.

Fark denklemleri ile zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin, doğal bir ifadesi olarak karşılaşılmaktadır. Zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların çoğu ayrık (kesikli) olduğundan bu tür denklemler önemli matematiksel modelleri oluştururlar. Daha da önemlisi fark denklemleri, diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metodlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzerleridir. Bununla birlikte, fark denklemler teorisi, buna karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Fark denklemleri teorisinin uygulamaları, kontrol teorisinde kararlılık durumunun incelenmesinde, biyolojide canlı popülasyon sayısının araştırılmasında, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesinde, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesinde ve birçok bilim dalında kullanılmaktadır.

Sürekli değişkenli fark denklemleri bilinmeyeni, sürekli değişkenli bir fonksiyon olan fark denklemleridir. Fark denklemleri terimi, genellikle ayrık değişkenli fark denklemleri için kullanılır. Uygulamada, sürekli değişkenli fark denklemlerinde bağımsız değişken zaman ifade etmek için kullanılır. Bu gerçeği gözönüne alarak, sürekli değişkenli fark denklemleri sürekli zamanlı fark denklemleri olarak adlandırılabilir. Sürekli değişkenli fark denklemleri doğal bilimlerin birçok dalında incelenen evrim sürecinin doğal tanımlamaları olarak ortaya çıkar (Györi and Ladas 1991, Sharkovsky *et al.* 1993). Sürekli değişkenli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlığı birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Ladas *et al.* 1992, Domshlak 1993).

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında; bu yüksek lisans tez çalışmasında nötral diferensiyel denklemlerin ve gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlık davranışı incelenmiştir.

İkinci bölümde gecikmeli denklemlerin salınımlık davranışı, otonom, otonom olmama durumu ve asimptotik sabit katsayılı olma durumlarıyla ilgili temel tanım ve teoremler tanıtılmış ve şimdiye kadar bu konularda yapılan bazı çalışmalar verilmiştir. Fark denklemlerinin salınımlık davranışından bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümün birinci kısmında ise pozitif ve negatif katsayılı birinci mertebeden nötral gecikmeli

$$\frac{d}{dt}(y(t)-R(t)y(t-r))+P(t)y(t-\tau)-Q(t)y(t-\sigma)=0$$

diferensiyel denleminin salınımlık davranışını inceledik. Burada

$$P,Q,R \in C([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)\,,\ \ r\in(0,\infty)\,,\ \ \tau,\sigma \in [0,\infty)$$

dır.

Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise

$$x'(t)+p(t)x\big(\tau(t)\big)=0, \qquad t\geq t_0$$

formundaki birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlık davranışını inceledik. Burada $p,\tau \in C\ ([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+=[0,\infty)$, $\tau(t)$ azalan değildir, $t\geq t_0$ için $\tau(t)<t$ ve $\lim_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$ dir. Bugüne kadar araştırılan salınımlık koşullarının kronolojik sırasını gösterdik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Lineer Skaler Gecikmeli Denklemlerin Salınımlığı

$$\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i\,(t)x(t-\tau_i) = 0 \tag{2.1}$$

lineer gecikmeli diferensiyel denklemini düşünelim. Burada

$$p_i \in C\big[[t_0, \infty], \mathbb{R}\big] \text{ ve } \tau_i \in \mathbb{R}^+ \quad i = 1,2,\dots,n \tag{2.2}$$

$\tau = max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ olsun. Bazı $t_1 \geq t_0$ için $x \in C[[t_1 - \tau, \infty), \mathbb{R}]$ nin bir fonksiyon olduğunu (2.1) eşitliğinin çözümünden anlarız. Öyle ki x $[t_1, \infty)$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir ve $t \geq t_1$ için (2.1) eşitliğini sağlar. Böyle bir çözüm $[t_1, \infty)$ üzerinde bir çözüm olarak adlandırılır.

t_1 bir başlangıç noktası ve $\phi \in C\big[[t_1 - \tau,\ t_1], \mathbb{R}\big]$ bir başlangıç fonksiyonu verilmiş olsun. (2.1) eşitliği, $[t_1, \infty)$ üzerinde bir tek çözüme sahiptir. Öyle ki

$$x(t) = \phi(t) \quad t_1 - \tau \leq t \leq t_1\,. \tag{2.3}$$

x $[a, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer x sonsuz çoklukda sıfıra sahipse x fonksiyonu salınımlı yada salınımlı olandır. Yani, her $b > a$ için $c > b$ noktası vardır. Öyle ki $x(c) = 0$ dır. Aksi takdirde x salınımlı olmayan olarak adlandırılır. Yani eğer $b > a$ için $x(t) = 0$ ise x salınımlı değildir. x sürekli iken eğer x salınımsız ise x pozitif yada negatif olmak zorundadır. Yani, $T \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $t \geq T$ için $x(t)$ pozitiftir yada $t \geq T$ için negatiftir.

Bir lineer diferensiyel denklem için bir çözümün karşıtı da aynı denklemin bir çözümüdür ve bu yüzden eğer bir lineer diferensiyel denklem salınımlı olmayan çözüme sahipse denklem pozitif çözüme (ek olarak negatif) sahiptir.

(2.2) nin sağlandığını varsayalım. Burada (2.1) eşitliğinin her çözümü salınımlıdır dediğimizde şunu söylemek istiyoruz.

Her $t_1 \geq t_0$ başlangıç noktası ve her $\phi \in C\big[[t_1 - \tau,\ t_1], \mathbb{R}\big]$ başlangıç fonksiyonu için (2.1) başlangıç değer probleminin ve (2.3) ün x tek çözümü salınımlıdır, yani x sonsuz sıfıra sahiptir. (2.1) eşitliğinin salınımlı olmayan çözüme sahip olduğunu ispatlamak istediğimizde (2.1) eşitliğinin x pozitif çözümüne sahip olduğunu ispatlamak yeter. Yani $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ noktaları vardır öyleki $[t_1, \infty)$ üzerinde x bir çözümdür ve $t \geq t_2$ için $x(t) > 0$ dır.

Katsayıların sabit olduğu yerde lineer otonom gecikmeli denklemin özel durumu için, her çözüm salınımlıdır dediğimizde şunu anlarız. Her $t_1 \in \mathbb{R}$ ve her $\phi \in C\big[[t_1 - \tau, t_1], \mathbb{R}\big]$ başlangıç fonksiyonu için (2.3) koşulunu sağlayan denklemin tek çözümü salınımlıdır.

Hem gecikmeli hem de ileri tartışmalı denklemler için ve sadece ileri tartışmalı denklemler için bir kural olarak $[a, \infty)$ un belirli aralığı üzerindeki çözümler için varlık ve teklik teoremleri mevcut değildir. Böyle denklemler için her çözümün salınımlı olduğunu söylemek şu anlama geliyor; $[a, \infty)$ belirli aralığındaki denklemi sağlayan her sürekli fonksiyon sonsuz sıfıra sahiptir (Györi and Ladas 1991).

2.2 Otonomluk Durumu

(2.1) lineer otonom gecikmeli diferensiyel denklemini düşünelim. Burada p_i katsayıları reel sayıdır ve τ_i gecikmeleri negatif olmayan reel sayıdır. (2.1) eşitliğine ilişkin karakteristik denklemi

$$\lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda \tau_i} = 0 \qquad (2.4)$$

dir (Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.2.1 : $p_i \in \mathbb{R}$ ve $\tau_i \in \mathbb{R}^+ \qquad i = 1, 2, \dots, n$

olduğunu varsayalım. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (2.1) in her çözümü salınımlıdır.

(b) (2.4) karakteristik denklemi reel köke sahip değildir (Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.2.2 : $\dot{x}(t) + px(t-\tau) = 0$ (2.5)

diferensiyel denklemini düşünelim. Burada

$$p, \tau \in \mathbb{R}$$

dir. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (2.5) in her çözümü salınımlıdır.

(b) $\lambda + pe^{-\lambda\tau} = 0$ karakteristik denklemi reel köklere sahip değildir (Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.2.3 : $p_i, \tau_i \geq 0$ $i = 1, 2, \ldots, n$ olsun. Aşağıdaki iki koşuldan her biri (2.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlığı için yeterlidir.

(a) $\sum_{i=1}^{n} p_i\tau_i > \frac{1}{e}$ (2.6)

(b) $(\prod_{i=1}^{n} p_i)^{\frac{1}{n}}(\sum_{i=1}^{n} \tau_i) > \frac{1}{e}$ (2.7)

(Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.2.4 : $p_i, \tau_i \geq 0$ $i = 1,2, \ldots, n$ olsun.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\max_{1\leq i\leq n} \tau_i\right) \leq \frac{1}{e} \tag{2.8}$$

(2.1) denkleminin salınımlı olmayan çözümünün varlığı için yeterli bir koşul iken

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\min_{1\leq i\leq n} \tau_i\right) > \frac{1}{e} \tag{2.9}$$

(2.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeterli bir koşuldur (Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.2.5 : $p, \tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\dot{x}(t) + px(t-\tau) = 0$$

diferensiyel denklemini düşünelim. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (2.5) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(b) $p\tau > \frac{1}{e}$

(Györi and Ladas 1991).

Sonuç 2.1.1 : $p, q, \tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\dot{x}(t) + px(t) + qx(t - \tau) = 0 \tag{2.10}$$

diferensiyel denklemini dikkate alalım. O zaman,

$$q\tau e^{p\tau} > \frac{1}{e}$$

(2.10) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlığı için gerek ve yeter şarttır (Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.2.6 : $\dot{x}(t) + px(t - \tau) - qx(t - \sigma) = 0$ (2.11)

Gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Kabul edelim ki $p, q, \tau, \sigma \in \mathbb{R}^+$ sağlansın.

$$p > q \text{ ve } \tau \geq \sigma$$

(2.11) koşulunun tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek şart

$$p > q, \qquad \tau \geq \sigma, \qquad q(\tau - \sigma) \leq 1$$

ve

$$(p - q)\tau > \frac{1}{e}[1 - q(\tau - \sigma)]$$

yeter şarttır (Györi and Ladas 1991).

2.3 Otonom Olmama Durumu

Lineer otonom olmayan gecikmeli

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t-\tau) = 0 \quad t \geq t_0 \tag{2.12}$$

diferensiyel denklemini düşünelim (Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.3.1 : $p \in C\big[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+\big] \quad \tau > 0$

ve

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}$$

olduğunu varsayalım. (2.12) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Györi and Ladas 1991).

Teorem 2.3.2 : $p \in C\big[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+\big] \quad \tau > 0$

ve

$$\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds \leq \frac{1}{e} \qquad t \geq t_0$$

olduğunu varsayalım. (2.12) denkleminin bir pozitif çözümü vardır (Györi and Ladas 1991).

2.4 Asimptotik Sabit Katsayılı Lineer Gecikmeli Denklemlerin Salınımlığı

Teorem 2.4.1 :

(a) $Q_j \in C\ [[t_0\,, \infty), \mathbb{R}^+]\ ,\ \tau_j \geq 0$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} Q_j(t) \equiv q_j$ (2.13)

ün sağlandığını ve

$$\dot{z}(t) + \sum_{j=1}^{n} q_j z\big(t-\tau_j\big) = 0 \tag{2.14}$$

sınırlı denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu varsayalım. Böylece

$$\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(t)x(t-\tau_j) = 0\,, \qquad t \geq t_0 \tag{2.15}$$

denkleminin her çözümü de salınımlıdır.

(b) (2.13) şartına ek olarak, yeterli büyüklükteki t için

$$Q_j(t) \leq q_j \qquad\qquad j = 1,2, \dots, n \qquad\qquad (2.16)$$

olduğunu varsayalım.

(2.15) denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak (2.14) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Györi and Ladas 1991).

2.5 Fark Denklemlerinin Salınımlığı

$k + 1$ mertebeli

$$x(n+1) - x(n) + p(n)x(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \qquad (2.17)$$

üç terim fark denklemini düşünelim. Burada k pozitif tamsayı ve $p(n)$ $n \in \mathbb{Z}^+$ için tanımlanmış bir dizidir.

Eğer her pozitif N tamsayısı için $n \geq N$ vardır öyle ki

$$x(n)x(n+1) \leq 0$$

ise $x(n)$ belirsiz çözümüne sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi taktirde, çözüm salınımlı olmayan olarak adlandırılır. Diğer bir deyişle eğer çözüm ya ergeç pozitif yada ergeç negatif ise $x(n)$ çözümü salınımlıdır. Eger $x(n) - x^*$ sıfır civarında salınımlı ise $x(n)$ çözümü x^* güç dengesi noktası civarında salınımlıdır denir.

Bu durum (2.13) de daha uygun formda yazılabilir.

$$x(n+2) - x(n+1) + px(n) = 0$$

denkleminin karekteristik kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4p}$$

olarak yazılabilir (Elaydi 2000).

Tanım 2.5.1 : $\{a(n)\}$ reel sayıların bir dizisi olsun. $\beta(n)$ $\{a(n),\ a(n+1),\ a(n+2),\dots\}$ kümesinin en üst sınırı olsun. Her n için ya $\beta(n)=\pm\infty$ ya da $\{\beta(n)\}$ dizisi reel sayıların monoton azalan dizisidir. Benzer olarak $\alpha(n)$ $\{a(n),\ a(n+1), a(n+2),\dots\}$ kümesinin en alt sınırı olur. Böylece ;

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty} a(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\beta(n)$

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} a(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(n)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(n)$ vardır ancak ve ancak $\limsup\limits_{n\to\infty} a(n)=\liminf\limits_{n\to\infty} a(n)=\lim\limits_{n\to\infty} a(n)$

olduğunu hatırlayalım (Elaydi 2000).

Örnek 2.5.1 : Aşağıdaki diziler için alt ve üst limit değerlerini bulalım.

$$S_1:\ 0,1,0,1,\dots \qquad \limsup_{n\to\infty} S_1=1 \quad \liminf_{n\to\infty} S_1=0$$

$$S_2: 1,-2,3,-4,\dots,(-1)^{n+1}n,\dots \qquad \limsup_{n\to\infty} S_2=\infty \qquad \liminf_{n\to\infty} S_2=-\infty$$

$$S_3: \frac{3}{2},\frac{-1}{2},\frac{4}{3},\frac{-1}{3},\frac{5}{4},\frac{-1}{4},\frac{6}{5},\frac{-1}{5},\dots \quad \limsup_{n\to\infty} S_3=1 \qquad \liminf_{n\to\infty} S_3=0$$

(Elaydi 2000).

Teorem 2.5.1 :

$$\liminf_{n\to\infty} p(n)=p>\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

olduğunu varsayalım. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $x(n+1)-x(n)+p(n)x(n-k)\le 0$

eşitsizliği pozitif çözüme sahip değildir.

(ii) $x(n+1)-x(n)+p(n)x(n-k)\ge 0$

eşitsizliği negatif çözüme sahip değildir (Elaydi 2000).

Teorem 2.5.2 : $p(n) \geq 0$ ve $supp(n) < \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$

olduğunu varsayalım.

Böylece (2.17) salınımlı olmayan çözüme sahiptir (Elaydi 2000).

Teorem 2.5.3 : $$x(n+1) - x(n) + px(n-k) = 0 \qquad (2.18)$$

denklemini düşünelim. Burada k pozitif tamsayıdır ve p negatif olmayan reel sayıdır.

Böylece (2.18) in her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak $p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ dir (Elaydi 2000).

Uyarı 2.5.1 : Gyori ve Ladas (1991) k. mertebeden

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + \cdots + p_k x(n) = 0$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak karekteristik denklem pozitif köke sahip değil olmasını gösterdiler.

(2.18) üç terim denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak $p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ dir. Burada $k \in Z - \{-1, 0\}$ dır (Elaydi 2000).

3. BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLIĞI

3.1 Nötral Diferensiyel Denklemlerin Salınımlığı İçin Bazı Sonuçlar

Bu bölümde pozitif ve negatif katsayılı birinci mertebeden nötral gecikmeli

$$\frac{d}{dt}(y(t)-R(t)y(t-r))+P(t)y(t-\tau)-Q(t)y(t-\sigma)=0 \qquad (3.1)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alacağız. Burada

$$P,Q,R\in\ C([t_0,\infty),\mathbb{R}^+),\ r\in(0,\infty)\ \ \tau,\sigma\ \in[0,\infty) \qquad (3.2)$$

dur.

(3.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlığı için aşağıdaki yeter şartları inceleyeceğiz (Yu and Wang 1992).

Teorem A : (3.2) nin sağlandığını ve

$$\tau\geq\ \sigma \qquad (3.3)$$

$$P(t)\geq Q(t+\sigma-\tau)\text{ ve }\ (t)-Q(t+\sigma-\tau)\neq 0\ ,\ t\geq t_0+\tau-\sigma \qquad (3.4)$$

$$0\leq R(t)\leq r_0\leq 1\quad t\geq t_0\text{ ve bazı }r_0\in[0,1] \qquad (3.5)$$

$$(\tau-\sigma)Q(t)\leq 1-r_0\ ,\ \ t\geq t_0 \qquad (3.6)$$

olduğunu varsayalım.

Böylece aşağıdaki iki koşulun her biri

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\big(P(s)-Q(s+\sigma-\tau)\big)ds>\frac{1}{e} \qquad (3.7)$$

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\ \big(P(s)-Q(s+\sigma-\tau)\big)ds>1 \qquad (3.8)$$

(3.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olmasını gerektirir (Chuanxi and Ladas 1990).

Teorem B : (3.2) ve (3.7) nin sağlandığını ve

$$\tau > \sigma > 0 \tag{3.9}$$

$P(t) - Q(t + \sigma - \tau) \geq 0$ ve özdeş olarak 0 değil (3.10)

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t-(\tau-\sigma)}^{t} Q(s)ds = 0 \tag{3.11}$$

$R(t) - \int_{t-(\tau-\sigma)}^{t} Q(s)ds \geq 0$ yeterli büyüklükteki t için (3.12)

olduğunu varsayalım.

Böylece (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Lalli and Zhang 1990).

Teorem C : (3.2) ve (3.9) un sağlandığını ve q ve ε pozitif katsayılarının var olduğunu varsayalım. Öyle ki;

$Q(t) \equiv q,\ P(t) \geq q + \varepsilon$, $t \geq t_0$ için (3.13)

$R(t) \leq 1$ ve $1 - R(t) - q(\tau - \sigma) > 0,\ t \geq t_0$ için (3.14)

ve

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t-\tau}^{t} (P(s) - q)ds > \frac{1}{e} \tag{3.15}$$

dir. Böylece (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Wei 1990).

Teorem D : (3.2) nin sağlandığını ve

$$R(t) \equiv c < 1, \quad \tau > \sigma \tag{3.16}$$

$P(t) \geq Q(t + \tau - \sigma)$, $t \geq t_1 \geq t_0$ için (3.17)

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t-\tau}^{t} P(s)ds > \frac{1}{e} \tag{3.18}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(s)ds < \infty \tag{3.19}$$

olduğunu varsayalım.

Böylece (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Ruan 1991).

Burada bizim amacımız ispatlanacak olan Lemma 3.1.1 i kullanarak yukarıdaki teoremlerin ispatlarını göstermektir.

$$A = \liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} (P(s) - Q(s+\sigma-\tau)) \left(1 + R(s-\tau) + \int_{s-\tau}^{s} Q(u-\tau)du\right) ds$$

$$M = \limsup_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} (P(s) - Q(s+\sigma-\tau)) \left(1 + R(s-\tau) + \int_{s-\tau}^{s} Q(u-\tau)du\right) ds$$

olsun.

Ana sonuç aşağıda gösterilecektir.

Teorem 3.1.1 : (3.2), (3.3), (3.10) ve (3.12) nin sağlandığını veya

$$A > \frac{1}{e} \tag{3.20}$$

ya da

$$A \leq \frac{1}{e} \quad \text{ve} \quad M > 1 - \frac{1}{2}\left(1 - A - \sqrt{1 - 2A - A^2}\right) \tag{3.21}$$

olduğunu varsayalım.

Böylece (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Uyarı 3.1.1 : (3.5) ve (3.6) nin (3.12) yi sağlaması gerektirdiğini ve (3.20) veya (3.21) in sırasıyla (3.7) veya (3.8) in bir ilerlemesi olduğunu görmek kolaydır. Teorem B deki (3.11) koşulu çıkarıldı. Teorem C deki (3.13) ve (3.15) koşulları (3.12) ve (3.20) koşullarından daha zordur. Teorem D deki (3.16) ve (3.19) (3.12) nin sağlanmasını gerektirir ve (3.18) de (3.20) nin sağlanmasını gerektirir. Böylece teorem (3.1.1) önceden bahsedilen dört teoremi ilerletir.

$T = max\{\tau, \sigma, r\}$ olsun. (3.1) denkleminin bir çözümüyle bazı $t_1 \geq t_0$ için $y(t) \in C([t_1 - T, \infty), \mathbb{R}\ )$ nin bir fonksiyon olduğu anlamına gelir. Öyle ki; $y(t) -$

$R(t)y(t-r)$ $[t_1,\infty)$ üzerinde sürekli diferensiyellenebilirdir ve $t \geq t_1$ için (3.1) denklemi sağlanır.

(3.2) nin sağlandığını varsayalım ve $\phi \in C((t_0-T,t_0],\mathbb{R})$ bir başlangıç fonksiyonu olsun. Böylece (3.1) denkleminin tek çözümünün $y(t) \in C([t_0-T,\infty),\mathbb{R})$ olduğu kolayca görülebilir. Öyle ki;

$$y(t)=\phi(t)\,, \qquad t_0-T \leq t \leq t_0$$

dir. Alışılmış olarak, (3.1) denkleminin bir çözümü eğer keyfi çoklukta sıfıra sahipse salınımlı olarak adlandırılır. Aksi taktirde çözüm salınımlı değildir.

Sonuçta aksi belirtilmezse, bir fonksiyonel eşitsizliği yazdığımızda bunun yeterli büyüklükteki t değerleri için sağladığını varsayacağız.

3.1.1 Önemli Lemmalar

Bu bölümde ilk olarak birinci mertebeden

$$x'(t)+H(t)x(t-\tau) \leq 0 \tag{3.22}$$

gecikmeli diferensiyel eşitsizliğinin pozitif çözüme sahip olmadığını garanti etmek için yeni bir yeterli koşul göstereceğiz. Burada $H \in C([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ ve $\tau \in (0,\infty)$ dur.

$$a=\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} H(s)ds$$

ve

$$m=\limsup_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} H(s)ds$$

olsun.

Eğer ya $a>\frac{1}{e}$ yada $m>1$ ise (3.22) nin pozitif çözüme sahip olmadığı bilinir. Erbe ve Zhang (1988)

$$a \leq \frac{1}{e} \text{ ve } m > 1 - \frac{a^2}{4} \tag{3.23}$$

ifadesinin (3.22) nin pozitif çözüme sahip olmasını gerektirdiğini kanıtladılar.

Özellikle, Jianchao (1991) (3.23) ün aşağıdaki zayıf koşulla yer değiştirebileceğini kanıtladı.

$$a \leq \frac{1}{e} \quad \text{ve} \quad m > 1 - \frac{a^2}{2(1-a)} \tag{3.24}$$

Bu bölümdeki ana sonuçlardan biri aşağıdaki Lemma 3.1.1 dir. Bu kendi sağ tarafıyla ilgilidir ve literatürdeki birkaç bilinen sonuçları ilerletir. Örneğin, (3.24) koşulunu ilerletir.

Lemma 3.1.1 :

$$a \leq \frac{1}{e} \text{ ve } m > 1 - \frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{2} \tag{3.25}$$

olduğunu varsayalım.

Böylece (3.22) pozitif çözüme sahip değildir.

İspat : Eğer $a = 0$ ise, böylece (3.25) Lemma 3.1.1 in sonucunun doğru olduğunu gerektiren $m > 1$ i verir. Sonra $0 < a \leq \frac{1}{e}$ olduğunu varsayalım ve $x(t)$ (3.22) nin bir pozitif çözümü olsun. Bir çelişki alalım. Bunu sonlandırmak için aşağıdaki gibi reel sayıların $\{b_n\}$ dizisini tanımlayalım.

$$b_1 = \frac{1}{4}a^2$$

$$b_n = b_{n-1}^2 + ab_{n-1} + \frac{1}{2}a^2 \qquad n = 2,3,\ldots \text{ için} \tag{3.26}$$

Aşağıdaki iddaalara bakalım.

İddaa 3.1.1 : $x(t) \geq b_n x(t-\tau) \qquad n = 1,2,\ldots$ için

Açıkça iddaa 3.1.1 n=1 için sağlanır (Erbe and Zhang 1988). a nın tanımına göre $\varepsilon \in (0, a)$ için ve yeterli büyüklükteki t için

$$a = \liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} H(s)ds$$

$$\int_{t-\tau}^{t} H(s)ds \geq a$$

$$\int_{t-\tau}^{t} H(s)ds > a - \varepsilon \tag{3.27}$$

dır (Yu 1991).

Buradan, her yeterli büyüklükteki t için $t^* > t$ vardır. Öyle ki ;

$$\int_{t}^{t^*} H(s)ds = a - \varepsilon$$

ve

$$\int_{t^*-\tau}^{t^*} H(s)ds > a - \varepsilon \tag{3.28}$$

dır. Bu

$$t^* - \tau < t \tag{3.29}$$

olmasını gerektirir. (3.22) nin her tarafını t den t^* ye integre ederek

$$x'(t) + H(t)x(t-\tau) \leq 0$$

$$\int_{t}^{t^*} x'(s)ds + \int_{t}^{t^*} H(s)x(s-\tau)ds \leq 0$$

$$x(t^*) - x(t) + \int_{t}^{t^*} H(s)x(s-\tau)ds \leq 0$$

$$x(t^*) + \int_{t}^{t^*} H(s)x(s-\tau)ds \leq x(t) \tag{3.30}$$

elde ederiz.

$t-\tau \leq s-\tau \leq t^{*}-\tau < t \qquad s \in [t, t^{*}]$ için

olduğu kolayca görülür.

Yeniden, (3.22) eşitsizliğini $s-\tau$ dan t ye integre ederek ve $x(t)$ nin artmayan olmasını kullanarak,

$$x'(t) + H(t)x(t-\tau) \leq 0$$

$$\int_{s-\tau}^{t} x'(u)du + \int_{s-\tau}^{t} H(u)x(u-\tau)du \leq 0$$

$$x(t) - x(s-\tau) + \int_{s-\tau}^{t} H(u)x(u-\tau)du \leq 0$$

$$x(s-\tau) \geq x(t) + \int_{s-\tau}^{t} H(u)x(u-\tau)du$$

$$\geq b_1 x(t-\tau) + x(t-\tau)\int_{s-\tau}^{t} H(u)du$$

$$= \left(b_1 + \int_{s-\tau}^{s} H(u)du + \int_{s}^{t} H(u)du\right)x(t-\tau)$$

$$= \left(b_1 + \int_{s-\tau}^{s} H(u)du - \int_{t}^{s} H(u)du\right)x(t-\tau)$$

$$\geq \left(b_1 + a - \varepsilon - \int_{t}^{s} H(u)du\right)x(t-\tau).$$

Bu (3.30) eşitsizliğinde yerine konularak

$$x(t) \geq x(t^{*}) + \int_{t}^{t^{*}} H(s)x(s-\tau)ds$$

$$x(t) \geq x(t^{*}) + x(t-\tau)\int_{t}^{t^{*}} H(s)\left(b_1 + a - \varepsilon - \int_{t}^{s} H(u)du\right)ds$$

$$= x(t^*) + x(t-\tau)\left((a-\varepsilon)(b_1 + a - \varepsilon) - \int_t^{t^*}\int_t^s H(s)H(u)duds\right) \qquad (3.31)$$

buluruz.

(3.31) de integrallerin mertebelerini değiştirerek

$$\int_t^{t^*}\int_t^s H(s)H(u)duds = \int_t^{t^*}\int_u^{t^*} H(s)H(u)dsdu$$

$$= \int_t^{t^*}\int_s^{t^*} H(u)H(s)duds$$

ve böylece

$$\int_t^{t^*}\int_t^s H(s)H(u)duds = \frac{1}{2}\left(\int_t^{t^*}\int_t^s H(s)H(u)duds + \int_t^{t^*}\int_s^{t^*} H(u)H(s)duds\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_t^{t^*} H(u)du\right)^2 = \frac{1}{2}(a-\varepsilon)^2$$

dır.

Bunu birleştirerek ve (3.31) ile

$$x(t) \geq x(t^*) + x(t-\tau)\left((a-\varepsilon)(b_1 + a - \varepsilon) - \frac{1}{2}(a-\varepsilon)^2\right) \qquad (3.32)$$

elde edilir.

$t^* - \tau < t$ olduğu için

$$x(t^*) \geq b_1 x(t^* - \tau) \geq b_1 x(t) \geq {b_1}^2 x(t-\tau)$$

olur. Bu ve (3.32)

$$x(t) \geq \left({b_1}^2 + (a-\varepsilon)(b_1 + a - \varepsilon) - \frac{1}{2}(a-\varepsilon)^2\right)x(t-\tau)$$

olmasını verir.

$\varepsilon \to 0$ olsun.

$$x(t) \geq \left(b_1{}^2 + ab_1 + \frac{1}{2}a^2\right)x(t-\tau) = b_2 x(t-\tau)$$

$n = 2$ için iddaa 3.1.1 in ispatı tamamlanır. Basit bir tümevarım uygulayarak

$$x(t) \geq b_n x(t-\tau) \qquad n = 1,2,\ldots \text{ için}$$

genellemesini yapabiliriz.

İddaa 3.1.1 in ispatı tamamlanır.

İddaa 3.1.2 : $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{\left(1-a-\sqrt{1-2a-a^2}\right)}{2}$

İlk olarak $\{b_n\}$ dizisinin sınırlı ve kesin olarak artan olmasının ispatını gösterelim. Aslında

$$c = \frac{1}{2}\left(1 - a - \sqrt{1-2a-a^2}\right)$$

olsun.

Böylece

$$b_1 = \frac{1}{4}a^2 < c$$

bu

$$b_2 = b_1{}^2 + ab_1 + \frac{1}{2}a^2$$

$$< c^2 + ac + \frac{1}{2}a^2 = c$$

olmasını gerektirir.

Böylece genelde

$$b_n < c \qquad n = 1,2,\ldots \text{ için}$$

dir ve bu yüzden $\{b_n\}$ sınırlıdır. Diğer bir deyişle,

$$b_2 - b_1 = \left(\frac{1}{4}a^2\right)^2 + \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2 > 0$$

ve

$$b_n - b_{n-1} = (b_{n-1} + b_{n-2} + a)(b_{n-1} - b_{n-2}) \qquad n = 3,4, \dots \text{ için}$$

olduğu için

$$b_n > b_{n-1} \qquad n = 2,3, \dots \text{ için}$$

dır. Yani $\{b_n\}$ kesin artandır. Bu yüzden $\lim_{n\to\infty} b_n = d$ vardır ve $d \leq c$ yi sağlar. (3.26) nın her tarafının limiti alınarak

$$b_n = {b_{n-1}}^2 + ab_{n-1} + \frac{1}{2}a^2$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left({b_{n-1}}^2 + ab_{n-1} + \frac{1}{2}a^2\right)$$

$$d = d^2 + ad + \frac{1}{2}a^2$$

veya eşdeğer olarak

$$d^2 + (a-1)d + \frac{1}{2}a^2 = 0$$

elde edilir.

Bu denklem iki pozitif köke sahiptir. Bunlar

$$d_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 - a - \sqrt{1 - 2a - a^2}\right) \text{ ve } d_2 = \tfrac{1}{2}\left(1 - a + \sqrt{1 - 2a - a^2}\right)$$

dir.

$d_1 = c < d_2$ olduğu için $d = d_1 = c$ dıı ve böylece iddaa 3.1.2 nin ispatı tamamlanır.

Son olarak (3.22) yi $t - \tau$ dan t ye integre ederek

$$x(t) - x(t-\tau) + \int_{t-\tau}^{t} H(s)x(s-\tau)ds \leq 0$$

elde edilir.

İddaa 3.1.1 ve $x(t)$ nin monotonluğunu kullanarak

$$b_n - 1 + \int_{t-\tau}^{t} H(s)ds \leq 0 \qquad n = 1,2, \dots \text{ için}$$

elde edilir.

İddaa 3.2.2 nin ışığında

$$m = \limsup_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} H(s)ds \leq 1 - \frac{1}{2}\left(1 - a - \sqrt{1 - 2a - a^2}\right)$$

olur. Bu (3.25) le çelişir ve böylece lemma 3.1.1 in ispatı tamamlanır.

Lemma 3.1.2 : Lemma 3.1.1 in hipotezlerinin sağlandığını varsayalım. Gecikmeli diferensiyel eşitsizlik

$$x'(t) + H(t)x(t-\tau) \geq 0$$

negatif çözüme sahip değildir.

Lemma 3.1.3 : (3.2), (3.3), (3.10) ve (3.12) nin sağlandığını varsayalım ve $y(t)$ (3.1) denkleminin bir pozitif çözümü olsun.

$$x(t) = y(t) - R(t)y(t-r) - \int_{t-\tau+\sigma}^{t} Q(s)\, y(s-\sigma)ds \qquad (3.33)$$

olsun.

$$x'(t) \leq 0 \text{ ve } x(t) > 0$$

dır.

Teorem 3.1.1 in İspatı : Çelişki olarak (3.1) denkleminin $y(t)$ pozitif çözümüne sahip olduğunu varsayalım. $x(t)$ (3.33) deki gibi olsun. Lemma 3.1.3 den

$$x'(t) \leq 0 \text{ ve } x(t) > 0 \tag{3.34}$$

dır.

(3.1) ve (3.33) den

$$x'(t) = -\big(P(t) - Q(t + \sigma - \tau)\big)y(t - \tau) \tag{3.35}$$

dir.

Ayrıca (3.33) ve (3.34) den

$$y(t) \geq x(t) + R(t)x(t - r) + \int_{t-\tau-\sigma}^{t} Q(s)x(s - \sigma)ds$$

$$\geq \left(1 + R(t) + \int_{t-\tau+\sigma}^{t} Q(s)ds\right)x(t).$$

Bu (3.35) de yerine konularak

$$x'(t) + (P(t) - Q(t + \sigma - \tau))\left(1 + R(t - \tau) + \int_{t-\tau+\sigma}^{t} Q(s - \tau)ds\right)x(t - \tau) \leq 0$$

elde edilir.

Fakat lemma 3.1.1 ve Györi ve Ladas (1991)'ın çalışmasından (3.20) veya (3.21) koşulları altında yukarıdaki birinci mertebeden diferensiyel eşitsizlik pozitif bir çözüme sahip olamaz. Bu (3.34) le çelişir ve böylece teorem 3.1.1 in ispatı tamamlanır.

3.2 Gecikmeli Diferensiyel Denklemler İçin Salınımlık Kriteri

Bu bölüm

$$x'(t) + p(t)x\big(\tau(t)\big) = 0, \qquad t \geq t_0 \tag{3.36}$$

formundaki birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlık davranışıyla ilgilidir. Burada $p, \tau \in C\ ([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, $\tau(t)$ azalan değildir, $t \geq t_0$ için $\tau(t) < t$ ve $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ dir.

k ve L

$$k = \liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} P(s)ds$$

ve

$$L = \limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} P(s)ds$$

ile tanımlanmış sayılar olsun (Sficas and Stavroulakis 2003).

(3.36) denkleminin bir çözümüyle bazı $T_0 \geq t_0$ için $[\tau(T_0), \infty)$ üzerinde tanımlı sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon anlarız ve öyle ki $t \geq T_0$ için (3.36) sağlanır. Eğer çözüm keyfi çoklukta sıfıra sahipse böyle bir çözüm salınımlıdır ve aksi taktirde salınımlı değildir.

(3.36) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlığı için ilk sistematik çalışma Myshkis (1950) tarafından yapıldı. Eğer

$$\limsup_{t\to\infty}[t - \tau(t)] < \infty, \quad \liminf_{t\to\infty}[t - \tau(t)] \liminf_{t\to\infty} p(t) > \frac{1}{e} \tag{$C1$}$$

ise (3.36) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu kanıtladı.

Ladas vd. (1972) eğer

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds > 1 \tag{$C2$}$$

ise aynı sonucun sağlandığını kanıtladılar.

Ladas (1979) ve Koplatadze ve Chanturija (1982) (C1) koşulunu

$$\liminf_{\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e} \qquad (C3)$$

şartına indirgemişlerdir.

(C3) deki $\frac{1}{e}$ sabiti göz önüne alındığında, eğer

$$\int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds \leq \frac{1}{e}$$

eşitsizliği sağlanırsa, (3.36) salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Ladas vd. (1982) ve Fukagai ve Kusano (1984) $p(t)$ salınım katsayılı (3.36) denklemi için salınımlık kriterini ((C2) ve (C3) koşullarının bir tipinin kriterini) kanıtladılar.

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds$$

limiti olmadığı zaman (C2) ve (C3) koşulları arasında boşluk olduğu açıktır.

Erbe ve Zhang (1988) (3.36) denkleminin salınımlı olmayan $x(t)$ çözümü için $\frac{x(\tau(t))}{x(t)}$ üst sınır oranını kullanarak yeni salınımlık kriteri geliştirdiler. Onların sonucu eğer

$$0 < k \leq \tfrac{1}{e} \quad \text{ve} \quad L > 1 - \tfrac{k^2}{4} \qquad (C4)$$

ise (3.36) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu söyler.

Jian Chao (1991)

$$L > 1 - \frac{k^2}{2(1-k)} \qquad (C5)$$

koşulunu elde etti.

Yu ve Whang (1992) ve Yu vd. (1992)

$$L > 1 - \frac{1 - k - \sqrt{1 - 2k - k^2}}{2} \qquad (C6)$$

koşulunu elde etti.

Elbert ve Stavroulakis (1990) ve Kwong (1991), farklı teknikler kullanarak (C4) ü (bu durumda burada $0 < k \leq \frac{1}{e}$)

$$L > 1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 \qquad (C7)$$

ve

$$L > \frac{ln\lambda_1 + 1}{\lambda_1} \qquad (C8)$$

koşuluna ilerletti. Burada λ_1

$$\lambda = e^{k\lambda} \qquad (3.37)$$

denkleminin küçük köküdür.

Koplatadze ve Kvinikadze (1994) (C6) yi ilerlettiler.

Philos ve Sficas (1998) ve Jaros ve Stavroulakis (1999) ve Kon vd. (2000) sırasıyla

$$L > 1 - \frac{k^2}{2(1-k)} - \frac{k^2}{2}\lambda_1 \qquad (C9)$$

$$L > \frac{ln\lambda_1 + 1}{\lambda_1} - \frac{1 - k - \sqrt{1 - 2k - k^2}}{2} \qquad (C10)$$

ve

$$L > 2k + \frac{2}{\lambda_1} - 1 \qquad (C11)$$

koşullarını elde ettiler.

Aşağıdaki bu tarihi ve kronolojik bilgi

$$\int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds \geq \frac{1}{e}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds = \frac{1}{e}$$

Elbert ve Stavroulakis (1993) ve Kozakiewicz vd. (1995) ve Domshlak ve Stavroulakis (1995) tarafından çalışıldı.

Bu bölümün amacı birkaç durumdaki (C2) ve (C4)-(C11) koşullarını

$$L > \frac{\ln \lambda_1 - 1 + \sqrt{5 - 2\lambda_1 + 2k\lambda_1}}{\lambda_1} \qquad (C12)$$

koşuluna indirgenebileceğini göstermektir. k→ 0 iken (C4)-(C11) koşullarının hepsi (C2) ye indirildi. Belirtilen amaçlar için, bu şartlar altında $k = \frac{1}{e}$ olduğunda üst sınır değerleri vereceğiz.

(C_4): 0,966166179

(C_5): 0,892951367

(C_6): 0,863457014

(C_7): 0,845181878

(C_8): 0,735758882

(C_9): 0,709011646

(C_{10}): 0,599215896

(C_{11}): 0,471517764

(C_{12}): 0,459987065

3.2.1 (C10) ve (C12) Koşullarının Elde Edilişi

$t \to \infty$ iken $\int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds$ ortalamasının alt ve üst limitlerini sırasıyla

$$k = \liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds$$

ve

$$L = \limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds$$

ile gösterelim.

$$w(t) = \frac{x(\tau(t))}{x(t)}$$

olsun.

$k \leq \frac{1}{e}$ şartı altında, (3.36) denkleminin bir olası salınımlı olmayan $x(t)$ çözümü için $w(t)$ fonksiyonun asimptotik davranışının giriş analizi ile işe başlayalım. Bu amaç için, yeterince büyük t ler için (3.36) denkleminin bir $x(t)$ pozitif çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. $x(t)$ ile (3.36) denklemini öncelikle bölersek ve ondan sonra bu denklemin $\tau(t)$ den t ye integralini alırsak, $t \geq T_1$ için tüm yeterince büyük t ler için sağlayan

$$w(t) = exp \int_{\tau(t)}^{t} p(s)w(s)ds \tag{3.38}$$

integral eşitliğine ulaşırız.

Burada hem $x(t)$ hem $x\big(\tau(t)\big)$ $[T_1, \infty)$ üzerinde pozitiflerdir.

Lemma 3.2.1 : $k > 0$ ve (3.36) denklemi bir pozitif $x(t)$ çözümüne sahip olsun. O zaman, $k \leq \frac{1}{e}$ ve

$$\lambda_1 \leq \liminf_{t\to\infty} w(t) \leq \lambda_2$$

dir. Burada λ_1 ve λ_2 $\lambda = e^{k\lambda}$ denkleminin kökleridir (Jaros and Stavroulakis 1999).

İspat : $\alpha = \liminf_{t\to\infty} w(t)$ olsun. (3.38) denkleminden yeterince büyük t ler için $k > \frac{1}{e}$ ise

$$w(t) = exp \int_{\tau(t)}^{t} p(s)w(s)ds$$

dir. Bu açıkça

$$\alpha \geq expk\alpha$$

olmasını gerektirir. Her λ için $\lambda < e^{k\lambda}$ durumunda basit bir hesaplama yöntemi bunu gösterir.

Buda (3.36) denkleminin $k > \frac{1}{e}$ şartı altında pozitif çözümlerin olmadığını gösterir. Diğer yandan eğer $0 < k \leq \frac{1}{e}$ ise o zaman $\lambda = e^{k\lambda}$ denkleminin $\lambda_1 = \lambda_2 = e$ eşitliği ile verilen köklere sahip olması için gerek ve yeter koşul $k = \frac{1}{e}$ olmasıdır ve $\alpha \geq e^{k\alpha}$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_1 \leq \alpha \leq \lambda_2$ olmasıdır.

Sıradaki lemma $t \to \infty$ iken $w(t)$ fonksiyonu için bir üst sınır vermektedir.

Lemma 3.2.2 : $0 < k \leq \frac{1}{e}$ ve $x(t)$ (3.36) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. O zaman

$$\limsup_{t\to\infty} w(t) \leq \frac{2}{1 - k - \sqrt{1 - 2k - k^2}} \tag{3.39}$$

dir (Jaros and Stavroulakis 1999).

Teorem 3.2.1 : $0 < k \leq \frac{1}{e}$ ve $x(t)$ (3.36) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. O zaman

$$M = \liminf_{t\to\infty} \frac{x(t)}{x(\tau(t))} \tag{3.40}$$

ve λ_1 , $\lambda = e^{k\lambda}$ denkleminin küçük kökü olmak üzere,

$$L \leq \frac{1 + \ln \lambda_1}{\lambda_1} - M \tag{3.41}$$

dir (Kon *et al.* 2008).

İspat : $\theta \left(\frac{1}{\lambda_1}, 1\right)$ aralığında herhangi bir sayı olsun . Lemma 3.2.1 ve M nin tanımından

$$\frac{x(\tau(t))}{x(t)} > \theta\lambda_1 , \qquad t \geq T_1 \tag{3.42}$$

ve

$$\frac{x(t)}{x(\tau(t))} > \theta M , \quad t \geq T_1 \tag{3.43}$$

olacak şekilde bir $T_1 > T$ mevcuttur.

Şimdi $t \geq T_1$ olsun. $g(s) = \frac{x(\tau(t))}{x(s)}$ sürekli bir fonksiyon, $g\big(\tau(t)\big) = 1 < \theta\lambda_1$ ve $g(t) > \theta\lambda_1$ olduğundan

$$\frac{x(\tau(t))}{x(t^*(t))} = \theta\lambda_1$$

olacak şekilde bir $t^*(t) \in (\tau(t), t)$ vardır.

(3.36) eşitliğinin $x(t)$ yardımıyla bölünmesi $\tau(t)$ den $t^*(t)$ ye integre edilmesi ve (3.42) eşitsizliğinin hesaba katılmasıyla

$$\int_{\tau(t)}^{t^*(t)} p(s)ds \leq -\frac{1}{\theta\lambda_1}\int_{\tau(t)}^{t^*(t)} \frac{x'(s)}{x(s)} ds = \frac{\ln(\theta\lambda_1)}{\theta\lambda_1} \tag{3.44}$$

$[t^*(t), t]$ üzerinde (3.36) denkleminin integre edilmesi (3.43) eşitsizliğinin kullanılması ve $s \leq t$ koşuluyla $x(\tau(s)) \geq x(\tau(t))$ gerçeği altında

$$\int_{t^*(t)}^{t} p(s)ds \leq \frac{x(t^*(t))}{x(\tau(t))} - \frac{x(t)}{x(\tau(t))}$$

$$= \frac{1}{\theta\lambda_1} - \frac{x(t)}{x\big(\tau(t)\big)}$$

$$\leq \frac{1}{\theta\lambda_1} - \theta M \tag{3.45}$$

bulunur.

(3.44) ve (3.45) ifadelerinin toplanması

$$\int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds \leq \frac{1 + \ln(\theta\lambda_1)}{\theta\lambda_1} - \theta M$$

eşitsizliğini verir.

$t \to \infty$ alınarak,

$$L \leq \frac{1 + \ln(\theta\lambda_1)}{\theta\lambda_1} - \theta M$$

bulunur.

$\theta \to 1$ alınarak ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1 : (3.36) diferensiyel denklemini göz önüne alalım ve $L < 1$ ve $0 < k \leq \frac{1}{e}$ olduğunda aşağıdaki koşul sağlanır.

$$L > \frac{\ln\lambda_1 + 1}{\lambda_1} - \frac{1 - k - \sqrt{1 - 2k - k^2}}{2}$$

O halde (3.36) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 3.2.1 : $\alpha = {\left(\sqrt{2}(0{,}6e + 1)\right)}\Big/{(\pi(0{,}6e - 1))}$ olmak üzere,

$$x'(t) + \frac{0{,}6}{\alpha\pi + \sqrt{2}}(2\alpha + \cos t)x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{3.46}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. O zaman

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} {0{,}6(2\alpha + \cos u)}\Big/{(\alpha\pi + \sqrt{2}\,)}\, du = \frac{1}{e}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} {0{,}6(2\alpha+\cos u)}\Big/{(\alpha\pi+\sqrt{2})}\,du = 0{,}6$$

dır.

Bu yüzden sonuç 3.2.1 e göre (3.46) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Jaros and Stavroulakis 1999).

Lemma 3.2.3 : $0 < k \le \frac{1}{e}$ ve $x(t)$ (3.36) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. $\tau(t)$ nin sürekli diferensiyellenebilir ve $w > 0$ olduğunu varsayalım. Öyle ki her t için

$$p\big(\tau(t)\big)\tau'(t) \ge wp(t) \tag{3.47}$$

dir. Böylece

$$\limsup_{t\to\infty} w(t) \le \frac{2}{1-k-\sqrt{(1-k)^2-4A}} \tag{3.48}$$

dır. Burada A

$$A = \frac{e^{\lambda_1\theta k}-\lambda_1\theta k-1}{(\lambda_1\theta)^2} \tag{3.49}$$

İle verilmiştir (Sficas and Stavroulakis 2003).

İspat : $0 < \delta < k$ yaklaşık olarak k ve yeterince büyük $T > t_0$ da herhangi bir keyfi sayı olsun. Öyle ki her $t \ge T$ için $\tau(t) > t_0$ ve $\int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds > \delta$ dır.

$$t \ge T \text{ ve } T_1 \equiv T_1(t) > t{:}\ \tau(T_1) = t$$

olsun.

$\int_t^{T_1} p(s)ds > \delta$ olduğu için $T_1 > t_1 \equiv t_1(t) > t$ vardır. Öyle ki

$$\int_t^{t_1} p(s)ds = \delta$$

dir.

(3.36) yi t den t_1 e integre ederek

$$x(t) = x(t_1) + \int_t^{t_1} p(s)x\big(\tau(s)\big)ds$$

elde edilir.

$s < t_1$ için $\tau(s)$ den t ye tekrar integral alırsak

$$x\big(\tau(s)\big) = x(t) + \int_{\tau(s)}^{t} p(u)x\big(\tau(u)\big)du$$

elde edilir.

Son iki eşitliği birleştirerek

$$x(t) = x(t_1) + \int_t^{t_1} p(s)\left[x(t) + \int_{\tau(s)}^{t} p(u)x\big(\tau(u)\big)du\right]ds \qquad (3.50)$$

elde edilir.

$0 < \lambda < \lambda_1$ olsun. $x(t)$ azalan olduğundan uygun $\alpha \geq t_0$ için

$$\varphi(t) = x(t)e^{\lambda \int_{t_0}^{t} p(s)ds} \quad , \quad t \geq \alpha$$

fonksiyonu azalandır. Lemma 3.2.1 ile yeterince büyük t için

$$\frac{x\big(\tau(t)\big)}{x(t)} > \lambda$$

dır. Sonuç olarak yeterince büyük t için

$$0 = x'(t) + p(t)x\big(\tau(t)\big) \geq x'(t) + \lambda p(t)x(t)$$

$\varphi'(t) \leq 0$ olmasını gerektirir.

(3.50) de yerine yazarak, yeterince büyük t için

$$x(t) \geq x(t_1) + \delta x(t) + \varphi(\tau(t)) \int_t^{t_1} p(s)\left(\int_{\tau(s)}^{t} p(u)e^{-\lambda \int_{t_0}^{\tau(u)} p(\xi)d\xi}du\right)ds$$

$$= x(t_1) + \delta x(t) + \varphi(\tau(t))e^{-\lambda \int_{t_0}^{\tau(t)} p(s)ds} \int_t^{t_1} p(s) \left(\int_{\tau(s)}^t p(u) e^{\lambda \int_{\tau(u)}^{\tau(t)} p(\xi)d\xi} du \right) ds$$

ve böylece

$$x(t) \geq x(t_1) + \delta x(t) + x\big(\tau(t)\big) \int_t^{t_1} p(s) \left(\int_{\tau(s)}^t p(u) e^{\lambda \int_{\tau(u)}^{\tau(t)} p(\xi)d\xi} du \right) ds \quad (3.51)$$

dir. (3.47) den dolayı

$$\int_{\tau(s)}^t p(u) e^{\lambda \int_{\tau(u)}^{\tau(t)} p(\xi)d\xi} du \geq \int_{\tau(s)}^t p(u) e^{\lambda\theta \int_u^t p(\xi)d\xi} du = \frac{1}{\lambda\theta}\left[e^{\lambda\theta \int_{\tau(s)}^t p(\xi)d\xi} - 1 \right]$$

elde ederiz.

Böylece

$$\int_t^{t_1} p(s) \left(\int_{\tau(s)}^t p(u) e^{\lambda \int_{\tau(u)}^{\tau(t)} p(\xi)d\xi} du \right) ds \geq -\frac{\delta}{\lambda\theta} + \frac{1}{\lambda\theta} \int_t^{t_1} p(s) e^{\lambda\theta \int_{\tau(s)}^t p(\xi)d\xi} ds$$

$$= -\frac{\delta}{\lambda\theta} + \frac{1}{\lambda\theta} \int_t^{t_1} p(s) e^{\lambda\theta \int_{\tau(s)}^s p(\xi)d\xi - \lambda\theta \int_t^s p(\xi)d\xi} ds$$

$$\geq -\frac{\delta}{\lambda\theta} + \frac{1}{\lambda\theta} e^{\lambda\theta\delta} \int_t^{t_1} e^{-\lambda\theta \int_t^s p(\xi)d\xi} ds$$

$$= -\frac{\delta}{\lambda\theta} + \frac{e^{\lambda\theta\delta}}{(\lambda\theta)^2}\left[1 - e^{-\lambda\theta \int_t^{t_1} p(\xi)d\xi} \right]$$

$$= -\frac{\delta}{\lambda\theta} + \frac{e^{\lambda\theta\delta}}{(\lambda\theta)^2}\left[1 - e^{-\lambda\theta\delta} \right] = -\frac{\delta}{\lambda\theta} + \frac{1}{(\lambda\theta)^2}(e^{\lambda\theta\delta} - 1)$$

dir ve (3.51)

$$x(t) \geq x(t_1) + \delta x(t) + A^* x\big(\tau(t)\big) \quad (3.52)$$

yi verir. Burada

$$A^* = \frac{e^{\lambda\theta\delta} - \lambda\theta\delta - 1}{(\lambda\theta)^2}$$

dir. (3.52) den

$$x(t) \geq d_1 x(\tau(t))$$

dir. Burada

$$d_1 = \frac{A^*}{1-\delta}$$

dir.

$$x(t_1) \geq d_1 x(\tau(t_1)) \geq d_1 x(t)$$

olması gözlenir. Çünkü x(t) azalandır ve böylece (3.52)

$$x(t) \geq d_2 x(\tau(t))$$

olmasını verir. Burada $d_2 = \frac{A^*}{1-d_{2-\delta}}$

dır. Aşağıdaki bu tekrarlı işlemlerle

$$x(t) \geq d_{n+1} x(\tau(t))$$

elde edilir. Burada

$$d_{n+1} = \frac{A^*}{1-d_n-\delta} \qquad n = 1,2, \ldots$$

dır. $\{d_n\}$ dizisinin kesin olarak artan ve sınırlı olduğu kolayca görülür.

Böylece $\lim_{n\to\infty} d_n = d$ vardır ve

$$d^2 - (1-\delta)d + A^* = 0$$

denklemini sağlar. $\{d_n\}$ kesin olarak artan olduğu için

$$d = \frac{1-\delta-\sqrt{(1-\delta)^2-4A^*}}{2}$$

dır. Böylece, yeterince büyük t için

$$\frac{x(t)}{x(\tau(t))} \geq \frac{1-\delta-\sqrt{(1-\delta)^2-4A^*}}{2}$$

ve böylece $0<\delta<k$ k ya yaklaşık keyfidir. $\lambda \to \lambda_1$ olursa son eşitsizlik (3.48) e neden olur. İspat tamamlanır (Kon *et al.* 2000).

Uyarı 3.2.1 : (3.47) nin

$$\int_{\tau(u)}^{\tau(t)} p(s)ds \geq w\int_u^t p(s)ds \qquad \tau(t) \leq u \leq t \tag{3.53}$$

$$v(u)=\int_{\tau(u)}^{\tau(t)} p(s)ds - w\int_u^t p(s)ds \qquad \tau(t) \leq u \leq t$$

fonksiyonu

$$v(t)=0$$

ve

$$v'(u)=-p\big(\tau(u)\big)\tau'(u)+wp(u) \leq 0$$

koşullarını sağlar.

Eğer $p(t)>0$ ve

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{p(\tau(t))\tau'(t)}{p(t)}=w_0>0$$

ise w $0<w<w_0$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir sayı olabilir. $p(t)\equiv p>0$ koşuluna ek olarak $\tau(t)=t-\tau$ yada $\tau(t)=t-\tau$ ve $p(t)\,\tau$ periyodik (3.47) yi sağlayan fonksiyonların bir sınıfı vardır.

Lemma 3.2.4 : $0<k\leq\frac{1}{e}$ olsun ve $x(t)$ (3.36) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. (3.47) koşulunun sağlandığını varsayalım. Böylece

$$L \leq \frac{\ln\lambda_1}{\lambda_1}+\frac{-1+\sqrt{1+2w-2w\lambda_1 M}}{w\lambda_1} \tag{3.54}$$

dır.

İspat : θ $(\frac{1}{\lambda_1}, 1)$ aralığında herhangi bir sayı olsun.

Lemma 3.2.1 den ve M nin tanımından $T_1 > T$ vardır ve öyle ki

$$\frac{x(\tau(t))}{x(t)} > \theta\lambda_1 \qquad t \geq T_1 \tag{3.55}$$

ve

$$\frac{x(t)}{x(\tau(t))} > \theta M \qquad t \geq T_1 \tag{3.56}$$

dir.

Şimdi $t \geq T_1$ olsun. $g(s) = \frac{x(\tau(t))}{x(s)}$ fonksiyonu sürekli olduğu için,

$$g\big(\tau(t)\big) = \frac{x(\tau(t))}{x(\tau(t))} = 1 < \theta\lambda_1$$

ve

$$g(t) = \frac{x(\tau(t))}{x(t)} > \theta\lambda_1$$

$t^* \equiv t^*(t) \in (\tau(t), t)$ vardır öyle ki

$$\frac{x(\tau(t))}{x(t^*)} = \theta\lambda_1 \tag{3.57}$$

dır.

(3.36) yı $x(t)$ ile bölerek ve $\tau(t)$ den t^* a integral alarak ve (3.55) i hesaba katarak

$$\int_{\tau(t)}^{t^*} p(s)ds \leq -\frac{1}{\theta\lambda_1}\ln\frac{x(t^*)}{x(\tau(t))} = \frac{\ln\theta\lambda_1}{\theta\lambda_1} \tag{3.58}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\Lambda \coloneqq \int_{t^*}^{t} p(s)ds$$

için benzer bir eşitsizlik bulmaya çalışalım. (3.36) yı $\tau(s)$ den $\tau(t)$ ye integre ederek

$$x\big(\tau(s)\big) - x\big(\tau(t)\big) = \int_{\tau(s)}^{\tau(t)} p(u)x\big(\tau(u)\big)du \qquad t^* \le s \le t$$

(3.36) yı t^* dan t ye integre ederek ve (3.53) ü uygulayarak

$$\int_{t^*}^{t} x'(s)ds + \int_{t^*}^{t} p(s)x\big(\tau(s)\big)ds = 0$$

$$x(t^*) - x(t) = \int_{t^*}^{t} p(s)x\big(\tau(s)\big)ds$$

$$= \int_{t^*}^{t} p(s)\left[x\big(\tau(t)\big) + \int_{\tau(s)}^{\tau(t)} p(u)x\big(\tau(u)\big)du\right]ds$$

$$= \int_{t^*}^{t} p(s)x\big(\tau(t)\big)ds + \int_{t^*}^{t} p(s)\left(\int_{\tau(s)}^{\tau(t)} p(u)x\big(\tau(u)\big)du\right)ds$$

$$\ge x(\tau(t))\int_{t^*}^{t} p(s)ds + x(\tau^2(t))\left[\int_{t^*}^{t} p(s)\left(\int_{\tau(s)}^{\tau(t)} p(u)du\right)ds\right]$$

$$\ge x(\tau(t))\int_{t^*}^{t} p(s)ds + wx(\tau^2(t))\int_{t^*}^{t} p(s)\left(\int_{s}^{t} p(u)du\right)ds$$

$$= x(\tau(t))\int_{t^*}^{t} p(s)ds + \frac{w}{2}x(\tau^2(t))\left(\int_{t^*}^{t} p(s)ds\right)^2$$

$$\Lambda \coloneqq \int_{t^*}^{t} p(s)ds \;\; \Rightarrow \Lambda x\big(\tau(t)\big) + \frac{w}{2}\Lambda^2 x(\tau^2(t))$$

Burada $\tau^2(t) \equiv \tau\big(\tau(t)\big)$ dir. Bu yüzden

$$\Lambda + \Lambda^2 w\frac{x(\tau^2(t))}{x(\tau(t))} \le \frac{x(t^*)}{x\big(\tau(t)\big)} - \frac{x(t)}{x(\tau(t))}$$

ve (3.56) ve (3.57) yi hesaba katarak,

$$\frac{1}{\theta\lambda_1} - \theta M$$

den daha küçük yada eşittir. Böylece (3.55) den

$$\frac{x(\lambda^2(t))}{x(\tau(t))} > \theta\lambda_1$$

dir.

$$\Lambda + \frac{\Lambda^2}{2} w\theta\lambda_1 \leq \frac{1}{\theta\lambda_1} - \theta M$$

ya da

$$\Lambda^2 \frac{w\theta\lambda_1}{2} + \Lambda + \left(\theta M - \frac{1}{\theta\lambda_1}\right) \leq 0$$

$$\lambda \leq \frac{-1 + \sqrt{1 - 2w\theta\lambda_1\left(\theta M - \frac{1}{\theta\lambda_1}\right)}}{w\theta\lambda_1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2w - 2w\theta^2\lambda_1 M}}{w\theta\lambda_1}$$

dır. Çünkü diğer kök negatiftir. (3.58) i ve son eşitsizliği ekleyerek

$$\int_{\tau(t)}^{t^*} p(s)ds \leq \frac{\ln(\theta\lambda_1)}{\theta\lambda_1} + \frac{-1 + \sqrt{1 + 2w - 2w\theta^2\lambda_1 M}}{w\theta\lambda_1}$$

elde edilir.

$\theta \to 1$ için ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 : (3.36) diferensiyel denklemini düşünelim. $L < 1, 0 < k \leq \frac{1}{e}$ olsun ve

$w > 0$ olduğunu varsayalım. Öyle ki (3.47) sağlanır.

$$L > \frac{\ln\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{-1 + \sqrt{1 + 2w - 2w\lambda_1 B}}{w\lambda_1} \qquad (3.59)$$

Burada

$$B = \frac{1 - k - \sqrt{(1-k)^2 - 4A}}{2}$$

dır. Böylece (3.36) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Uyarı 3.2.2 : $w = 1$ olduğunda (3.59) denklemi

$$B = 1 - k - \frac{1}{\lambda_1}$$

olduğu için

$$L > \frac{\ln \lambda_1 - 1 + \sqrt{5 - 2\lambda_1 + 2k\lambda_1}}{\lambda_1} \tag{3.60}$$

denklemine dönüşür.

$k = \frac{1}{e}$ olması durumunda $\lambda_1 = e$ ve (3.60) dan

$$L > \frac{\sqrt{7 - 2e}}{e} \approx 0{,}459987065$$

olur.

Örnek3.2.2: $\quad x'(t) + px\left(t - q(\sin^2 \sqrt{t}) - \frac{1}{pe}\right) = 0 \qquad (3.61)$

gecikmeli diferensiyel denklemini düşünelim. Burada $p > 0,\ q > 0$ ve $pq = 0{,}46 - \frac{1}{e}$ dir. Böylece

$$k = \liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p ds = \liminf_{t\to\infty} p\left(q\left(\sin^2 \sqrt{t}\right) + \frac{1}{pe}\right) = \frac{1}{e}$$

ve

$$L = \limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p ds = \limsup_{t\to\infty} p\left(q\left(\sin^2 \sqrt{t}\right) + \frac{1}{pe}\right) = pq + \frac{1}{e} = 0{,}46$$

Böylece (3.61) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

4. KAYNAKLAR

Chao, J. (1991). On the oscillation of linear differential equations with deviating arguments. *Math. Practice Theory,* **1 :** 32-40.

Chuanxi, Q. and Ladas, G. (1990) . Oscillation in differential equations with positive and negative coefficients. *Canad. Math. Bull.,* **33:** 442-450.

Domslak, Y. (1993). Oscillation properties of linear difference equations with continuous time. Differential Equations Dynam, **4:** 311-324.

Domshlak, Y. and Stavroulakis, I. P. (1996). Oscillations of first order delay differential equations in a critical state. *Appl. Anal.,* **61 :** 359-371.

Elaydi, S. (2000). An introduction to difference equations. *Sprinter –Verlag*, Newyork, **52**.

Elbert, A. and Stavroulakis, I. P. (1995). Oscillation and non-oscillation criteria for delay differential equations. Proc. Amer. *Math. Soc.,* **123 :** 1503-1510.

Erbe, L. H. and Zhang, B. G. (1988). Oscillation for first order linear differential equations with deviating arguments. *Differential Integral Equations,* **1:** 305-314.

Fukagai, N. and Kusano, T. (1984). Oscillation theory of first order functional differential equations with deviating arguments. *Ann. Mat. Pura Appl.,* **136 :** 95-117.

Gopalsamy, K. (1992). Stabiility and ocsillations in delay differential equations of population Dynamics. Kluwer Academic, 501 p., Dordrecht.

Györi, I. and Ladas, G. (1991). Oscillation theory of delay differential equations with applications. *Clarendon Press*, Oxford.

Jaros, J. and Stavroulakis, I. P. (1999). Oscillation tests for delay equations. *Rocky Mountain J. Math*., **29 :** 197-207.

Kon, M., Sficas, Y. G. and Stavroulakis, I. P. (2000). Oscillation criteria for delay equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128 :** 2989-2997.

Koplatadze, R. G. and Chanturija, T. A. (1982). On oscillatory and monotonic solutions of first order differential equations with deviating arguments. *Differ. Uravn.,* **18 :**1463-1465 (Russian).

Koplatadze, R. G. and Kvinikadze, G. (1994). On the oscillation of solutions of first order delay differential inequalities and equations. *Georgian Math. J.*, **1 :** 6755-685.

Kozakiewicz, E. (1995). Conditions for the absence of pozitive solutions of a first order differential inequality with a single delay. *Archivum Mathematicum,* **31 :** 291-297.

Kwong, M. K. (1991). Oscillation of first order delay equations. *J. Math. Anal. Appl.,* **156 :** 274-286.

Ladas, G., Lakshmikantham, V. and Papadakis, J. S. (1972). Oscillation of higher order retarded differential equations generated by the retarded arguments. Delay and functional differential equations and their applications, *Academic Press*, New York **:** 219-231.

Ladas, G. (1979). Sharp conditions for oscillations caused by delays. *Appl.,* **156 :** 93-98.

Ladas, G., Sficas, Y. G. and Stavroulakis, I. P. (1982). Functional differential inequalities and equations with oscillating coefficients. Trend in theory and practise of nonlinear differential equations (*Arlingon*, TX), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math*., **90** (Marcel Dekker, New York, 1984)**:** 277-284.

Ladas, G., Pakula, L. and Wang, Z. (1992). Necessary and sufficient conditions for the oscillation of difference equations. Panamer. Math. J., **1:** 17-29.

Lalli, B. S. and Zhang, B. G. (1990). Oscillation of first order neutral differential equations. *Appl. Anal.,* **39 :** 265-274.

Li, B. (1995). Oscillations of delay differential equations with veriable coefficients. *J. Math. Anal. Appl.,* **192 :** 312-321.

Li, B. (1996). Oscillation of first order delay differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.,* **124 :** 3729-3737.

Myshkis, A. D. (1950). Linear homogeneous differential equations of first order with deviating arguments. *Uspekhi Mat. Nauk,* **5** (36)**:** 160-162 (Russian).

Philos, C. G. and Sficas, Y. G. (1998). An oscillation criterion for first order linear delay differential equations. *Canad. Math. Bull.,* **41:**207-213.

Ruan, S. G. (1991). Oscillations for first order neutral differential equations with variable coefficients. *Bull. Austral. Math. Soc.,* **43 :** 147-152.

Sficas, Y. G. and Stavroulakis, I. P. (2003). Oscillation criteria for first order delay equations. *Bull. London. Math. Soc.,* **35:** 239-246.

Sharkovsky, A. N., Maistrenko, Yu. L. and Romanenko, E. Yu. (1993). Difference equations and their applications. Mathematics and Its Applications, 250.

Shen, J. H. (1996). Comparison theorems for the oscillation of difference equations with continuous arguments and applications. Chinese Science Bulletin, **18:** 1506-1510.

Yu, J. S. (1991). Netral differential equations with positive and negative coefficients. *Acta. Math. Sinica,* **34 :** 517-523.

Yu, J. S., Wang, Z. C., Zhang, B. G. and Qian, X. Z. (1992). Oscillations of differential equations with deviating arguments. *Panamer. Math. J.,* **2:** 59-78.

Yu, J. S. and Wang, Z. C. (1992). Some further results on oscillation of neutral differential equations. *Bull. Austral. Math. Soc.,* **46:** 149-157.

Wei, J. J. (1989). Sufficient and necessary conditions fort he oscillation of first order differential equations with deviating arguments and applications. *Acta. Math. Sinica,* **32 :** 632-638.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özge TANRIÖVER

Doğum Yeri : Afyonkarahisar

Doğum Tarihi : 10.04.1990

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Afyon Milli Piyango Anadolu Lisesi, 2008.

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversite, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2012.

Çalıştığı Kurumlar ve Yıllar

1. Sınav Dergisi Dershaneleri, 2010.
2. Tahmaz Dil Dershanesi, 2011.
3. Batı Dershanesi, 2014.