EŞKARE DÖNÜŞLÜ HALKALAR

Kübra GÖKTÜRK

DANIŞMAN

Doç. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİMDALI

Temmuz, 2013

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EŞKARE DÖNÜŞLÜ HALKALAR

Kübra GÖKTÜRK

DANIŞMAN
Doç. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz, 2013

TEZ ONAY SAYFASI

Kübra GÖKTÜRK tarafından hazırlanan "Eşkare Dönüşlü Halkalar" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 12/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Muhittin BAŞER

Başkan **:** Doç. Dr. Erdoğan HALAT
AKÜ Eğitim Fakültesi

Üye **:** Doç. Dr. Muhittin BAŞER
AKÜ Fen Edebiyat Fakültesi

Üye **:** Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA
AKÜ Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

12/07/2013

Kübra GÖKTÜRK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
EŞKARE DÖNÜŞLÜ HALKALAR

Kübra GÖKTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Muhittin BAŞER

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar, bazı halka sınıfları ve bir halka üzerindeki polinom halkaları hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, dönüşlü ve eşkare dönüşlü halkalar karakterize edilmiştir ve bu halka sınıflarının bazı temel özellikleri incelenmiştir.

2013, v+40 sayfa

Anahtar Kelimeler: Matris Halkası, Polinom Halkası, Dönüşlü Halka, Eşkare Dönüşlü Halka.

ABSTRACT

Msc Thesis

IDEMPOTENT REFLEXIVE RINGS

Kübra GÖKTÜRK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic

Supervisor: Assoc. Prof. Muhittin BAŞER

This thesis consists of three chapters. In the first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions, some ring classes and polynomial rings on a ring are recalled. In the third chapter, reflexive and idempotent reflexive rings are characterized and the basic properties of this ring classes are studied.

2013, v+ 40 pages

Key Words: Matrix Ring, Polynomial Ring, Reflexive Ring, Idempotent Reflexive Ring.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım olan değerli hocam Doç. Dr. Muhittin BAŞER'e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocam Yrd. Doç. Dr. Fatma KAYNARCA' ya teşekkür ederim.

Kübra GÖKTÜRK

AFYONKARAHİSAR, TEMMUZ 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

D	R halkasının Dorroh genişlemesi
I_n	$n \times n$ tipindeki birim matris
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[x; x^{-1}]$	R üzerindeki Laurent polinomlar halkası
$R[x; \alpha]$	R nin skew polinom halkası
$T(R, R)$	R halkasının R ile aşikar genişlemesi
$UTM_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası
$\langle x^n \rangle$	$R[x]$ halkasının x^n tarafından üretilen ideali

1. GİRİŞ

Dönüşlü halkalar hakkında çok sayıda yayın bulmak mümkündür. Günümüzde de, bir çok matematikçi tarafından çalışılan halka sınıflarından birisi olan dönüşlü halka sınıflarına ilk orijinal yaklaşım 1981 yılında Mason tarafından yapılmıştır. Mason, bu çalışmasında bir halkanın idealleri için dönüşlülük özelliğini tanımlamıştır. Daha sonra, bir halkanın eşkare dönüşlülük özelliği ve injektifliği arasındaki ilişki Kim tarafından 2005 yılında çalışılmıştır. Bundan bir yıl sonra, eşkare dönüşlü sağ idealler kavramı Kim ve Baik tarafından yapılmıştır. Kim ve Baik "On idempotent reflexive rings" başlıklı çalışmalarında idealler için dönüşlülük kavramını genelleştirerek eşkare dönüşlü sağ idealler ve eşkare dönüşlü halkalar kavramlarını vermişlerdir. Çalışmamızın detaylarına geçmeden bu halka sınıflarını hatırlatalım. Çalışmamız boyunca aksi belirtilmedikçe halkalar birimli olarak alınacaktır. Bir R halkası verildiğinde, R üzerindeki polinom halkası $R[x]$, R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası $Mat_n(R)$ ve R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası $U_n(R)$ ile gösterilecektir. R bir halka I da R nin bir sağ ideali olmak üzere, eğer $a, b \in R$ için;

$$aRb \subseteq I \Longrightarrow bRa \subseteq I$$

oluyorsa, bu durumda I sağ idealine *dönüşlüdür* denir. Eğer bir halkanın sıfır ideali dönüşlü bir ideal oluyorsa, bu durumda bu halka bir dönüşlü halka olarak adlandırılır. Yani $a, b \in R$ için;

$$aRb = 0 \Longrightarrow bRa = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına bir *dönüşlü halka* denir. Diğer taraftan I; R nin bir ideali olmak üzere, eğer $a \in R$ için;

$$aRa \subseteq I \Longrightarrow a \in I$$

oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir *yarıasal ideali* denir. Eğer bir R halkasının sıfır ideali yarıasal, yani $a \in R$ için;

$$aRa = 0 \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına bir *yarıasal halka* denir. Yarıasal halkaların dönüşlülük özelliğini sağladığını görmek oldukça kolaydır. Ayrıca, R bir halka, I; R' nin bir tek yanlı ideali ve $e^2 = e \in R$ olmak üzere $a \in R$ için,

$$aRe \subseteq I \Longrightarrow eRa \subseteq I$$

oluyorsa, bu durumda I idealine bir *sağ eşkare dönüşlü ideal* denir. Eğer bir halkanın sıfır ideali sağ eşkare dönüşlü ise, yani $a, e^2 = e \in R$ için;

$$aRe = 0 \Longrightarrow eRa = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına bir *sağ eşkare dönüşlü halka* denir. Eğer halkalar birimsiz ise yine aynı tanımlar kullanılır. Sol eşkare dönüşlü idealler ve sol eşkare dönüşlü halkalar benzer biçimde tanımlanır. Eğer bir halka hem sol ve hem de sağ eşkare dönüşlü ise, bu durumda bu halkaya bir eşkare dönüşlü halka denir. Açık olarak eşkare dönüşlü halkaların sınıfı hem dönüşlü halkaların sınıfı hem de abelian halkaların sınıfı tarafından kapsanır.

Bir halkanın yarıasal olma özelliğinin bu halka üzerine kurulan $R[x]$ polinomlar halkasına ve $Mat_n(R)$ matrisler halkasına taşındığı bilinmektedir. Biz de, bu çalışmada (Kwak ve Lee, 2012) çalışmasını temel referans alarak dönüşlü halkalar ve sağ eşkare dönüşlü halkalar kavramlarını karakterize edeceğiz . Dönüşlü bir R halkası verildiğinde, $Mat_n(R)$ halkasının eşkare dönüşlü alt halkalarını inşa edeceğiz ki bu alt halkalar dönüşlü olmayacaklar. Bir dönüşlü halka üzerindeki hem polinomlar halkasının hemde kuvvet serileri halkasının eşkare dönüşlü olduğunu göstereceğiz. Ayrıca dönüşlülük ve eşkare dönüşlülük özelliğinin bu halkaların hangi genişlemelerine hangi şartlar altında taşınıp taşınamayacağını araştıracağız.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramları ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyacağımız bazı halka sınıflarını hatırlatacağız. Bu bölüm için temel referanslarımız (Hungerford 1982), (Anderson and Fuller 1992), (Lam 2001) ve (Rowen 1988) olacaktır.

2.1. Halkalar

Bu kısımda halka teorideki bazı temel kavramlar hatırlatılacak ve halkaların sıkça kullanacağımız özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.1. R boştan farklı bir küme ve R üzerinde, genellikle $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma ile gösterilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer;

(i) $(R,+)$ bir değişmeli gruptur,

(ii) Her $a,b,c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ (çarpmanın birleşme özelliği vardır.),

(iii) Her $a,b,c \in R$ için $a(b+c) = ab + ac$ ve $(a+b)c = ac + bc$ (çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.)

aksiyomları sağlanıyorsa, bu durumda R ye $(+)$ ve $(.)$ ikili işlemleri ile birlikte bir *halka* denir.

R bir halka olmak üzere eğer, her $a,b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R ye *değişmelidir* denir. Eğer her $a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa, bu durumda R ye *birimli bir halka* denir. 1_R elemanına da halkanın *birimi* denir. Bir halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına halkanın *sıfırı* denir ve 0_R veya herhangi bir karışıklığa sebep olmazsa 0 ile gösterilir.

Teorem 2.1.2. R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her $a \in R$ için $0a = a0 = 0$ dır.

(ii) Her $a,b \in R$ için $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ dir.

(iii) Her $a,b \in R$ için $(-a)(-b) = ab$ dir.

(iv) Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $a,b \in R$ için $(na)b = a(nb) = n(ab)$ dir.

(v) Her $a_i, b_j \in R$ için $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ dir.

Tanım 2.1.3. R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ $(ba = 0)$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ varsa, bu durumda a ya bir *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan bir elemana halkanın bir *sıfır böleni* denir. Hiçbir sıfır böleni olmayan bir halkaya bir *tamlık bölgesi* (*domain*) denir.

Tanım 2.1.4. R birimli bir halka olmak üzere $a \in R$ olsun. Eğer $ca = 1_R$ $(ab = 1_R)$ olacak şekilde bir $c \in R$ $(b \in R)$ varsa bu durumda a ya *sol (sağ) tersinir eleman* denir. c (b) elemanına a nın bir *sol (sağ) tersi* denir. Hem sağ hem de sol tersinir bir elemana *tersinir eleman* denir.

Tanım 2.1.5. $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir R halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise, bu durumda R halkasına bir *cisim* denir.

Örnek 2.1.6. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli bir halkadır. Bununla beraber $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi farklı ikili işlemlere göre de halka yapılabilir. Fakat bundan sonraki çalışmalarımızda $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası denildiğinde, tamsayıların bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikteki halka yapısı göz önüne alınacaktır. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir tamlık bölgesidir. $\mathbb{Q}$ (rasyonel sayılar), $\mathbb{R}$ (reel sayılar) ve $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte birer cisimdir.

Örnek 2.1.7. $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ kümesi $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ ve $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$ ikili işlemleri ile birlikte değişmeli ve birimli bir halkadır. Eğer p bir asal tamsayı ise $\mathbb{Z}_p$ bir cisimdir.

Tanım 2.1.8. R bir halka $a \in R$ olmak üzere eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa, bu durumda a ya *üstel sıfır (nilpotent)* eleman denir.

Tanım 2.1.9. Bir R halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir e elemanına *eşkare (idempotent)* eleman denir. Birimli bir halkada 0_R ve 1_R eşkare elemanlardır.

Tanım 2.1.10. R bir halka olmak üzere

$$C(R) = \{c \in R \mid \text{Her } r \in R \text{ için } cr = rc\}$$

kümesine R halkasının *merkezi* denir.

Tanım 2.1.11. Bir R halkasının bir e eşkare elemanı R halkasının merkezine ait ise, bu durumda e eşkare elemanına *merkezil eşkare (central idempotent) eleman* denir. Bir R halkasının tüm eşkare elemanları merkezil eşkare ise, bu durumda R halkası *abelyan (abelian)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.12. R bir halka ve $u, r \in R$ olmak üzere $ur = 0$ iken $r = 0$ ise u *sağ regüler eleman,* $ru = 0$ iken $r = 0$ ise u *sol regüler eleman* olarak isimlendirilir. u hem sağ hem sol regüler ise u ya bir *regüler eleman* denir.

2.2. Alt halkalar, İdealler ve Bölüm Halkaları

Tanım 2.2.1. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olmak üzere S kümesi R de tanımlı toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer $S; R$ deki işlemlere göre kendi başına bir halka oluyorsa, bu durumda S ye R nin bir *alt halkası* denir. $I; R$ nin bir alt halkası olmak üzere, eğer her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx \in I$ oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir *sol ideali*, $xr \in I$ oluyorsa, bu durumda da I ya R nin bir *sağ ideali* denir. Eğer I hem bir sol hem de bir sağ ideal ise, bu durumda I ya R nin bir *ideali* denir.

Her ideal bir alt halkadır. Fakat her alt halka bir ideal olmak zorunda değildir. Gerçekten; bir halkanın merkezi bir alt halka olmasına rağmen bir ideal olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.2. Her bir n tamsayısı için $\langle n \rangle = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ devirli alt gurubu, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bir idealidir.

Örnek 2.2.3. R bir halka olmak üzere $\{0\}$ ve $R; R$ nin idealleridir. Bu ideallere R nin aşikar idealleri denir.

R bir halka olmak üzere $A_1, A_2, \dots, A_n;$ R nin boştan farklı alt kümeleri olsun.

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in A_i, i = 1,2, \dots, n\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer A ve B; R nin boştan farklı alt kümeleri ise bu durumda,

$$AB = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \mid a_i \in A, b_i \in B, n \in \mathbb{N}^*\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ ise, bu durumda AB yerine aB yazılır. Eğer B kümesi toplama işlemine göre kapalı ise, bu durumda $aB = \{ab \mid b \in B\}$ olur.

Örnek 2.2.4. R bir halka ve e, R'nin bir merkezil eşkare elemanı olmak üzere $1_R - e$ de bir merkezil eşkaredir. Ayrıca eR ve $(1_R - e)R$ kümeleri R nin idealleridir.

Grup teoride normal alt grupların oynadığı rolü halka teoride idealler oynar. R bir halka I da R nin bir ideali olsun. R değişmeli toplamsal bir grup olduğundan $I; R$ nin bir toplamsal normal alt grubudur. Böylece;

$$R/_I = \{a + I \mid a \in R\}$$

kümesi,

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

şeklinde tanımlanan toplama işlemine göre değişmeli gruptur. $R/_I$ değişmeli grubu,

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya R nin I ideali yardımıyla elde edilen *bölüm halkası* denir. R değişmeli iken $R/_I$' nın da değişmeli ve R birimli iken $R/_I$' nın da birimli olduğu açıktır.

Tanım 2.2.5. R bir halka ve $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere;

$$l_R(X) = \{r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } rx = 0\}$$

$$r_R(X) = \{r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } xr = 0\}$$

kümelerine sırayla R içinde X in *sol ve sağ sıfırlayanı* denir. Eğer $X = \{x\}$ ise bu durumda $l_R(X) = l_R(\{x\}) = l_R(x)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.2.6. R bir halka ve $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere; $l_R(X)$; R nin bir sol ideali, $r_R(X)$ de R nin bir sağ idealidir. Ayrıca X ve Y; R nin boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere;

(i) $X \subset Y$ ise $l_R(Y) \subset l_R(X)$ ve $r_R(Y) \subset r_R(X)$ dir.
(ii) $X \subset r_R(l_R(X))$ ve $X \subset l_R(r_R(X))$ dir.
(iii) $l_R(X) = l_R(r_R(l_R(X)))$ dir.

2.3. Matris Halkaları ve Polinom Halkaları

Bu bölümde verilen bir R halkasından elde edilen bazı yeni halkaları hatırlatacağız.

Tanım 2.3.1. R birimli bir halka ve x bir bilinmeyen olmak üzere;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklindeki bir formal toplama R den katsayılı bir polinom denir. R den katsayılı tüm polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir. Yani;

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in R\}$$

şeklindedir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$$

olmak üzere, n ve m tamsayılarından büyük olanını k ile gösterirsek bu iki polinomun toplamı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i) x^i$$

Bu polinomların çarpımı ise

$$c_l = \sum_{j=0}^{l} a_j b_{l-j} = a_0 b_l + a_1 b_{l-1} + a_2 b_{l-2} + \cdots + a_{l-2} b_2 + a_{l-1} b_1 + a_l b_0$$

olmak üzere,

$$f(x)g(x) = \sum_{l=0}^{m+n} c_l x^l$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda tanımlanan ikili işlemlere göre $R[x]$ kümesi bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki *polinomların halkası* veya R den *katsayılı polinomların halkası* denir.

Tanım 2.3.2. R bir halka olmak üzere;

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$$

kümesi polinomlarda bilinen toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *kuvvet serilerinin halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.3. R bir halka olmak üzere;

$$R[x; x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R \ (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir}) \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *Laurent polinomlarının halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.4. R bir halka olmak üzere bileşenleri R den gelen n satırlı ve n sütunlu matrislerin kümesi matrislerde bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R üzerinde $n \times n$ tipindeki *matrislerin halkası* denir ve $Mat_n(R)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.5. R bir halka ve M bir (R, R) −bimodül olmak üzere

$$R \oplus M = R \times M = \{(r, m) | r \in R, m \in M\}$$

kümesi,

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2,\ m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2,\ r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

ikili işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya R nin M ile aşikar genişlemesi (trival extension) denir ve $T(R, M)$ ile gösterilir. Bir R halkasının $M; (R, R)$ −bimodülü ile aşikar genişlemesi

$$\left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R, m \in M\right\}$$

halkasına izomorftur.

Tanım 2.3.6. Bir R halkası (P) özelliğini sağladığında eğer e; R'de bir eşkare olmak üzere, eRe halkası ve $Mat_n(R)$ halkası da (P) özelliğini sağlıyor ise bu (P) özelliğine *Morita Invaryant* özelliktir denir.

Tanım 2.3.7. R bir halka ve S bir değişmeli bir halka olmak üzere eğer $(R, +)$ değişmeli grubu bir sol S_modül ve bu modül yapısındaki $\cdot : R \times S \to R$ skaler çarpımı, her $s \in S$ ve $r_1, r_2 \in R$ için

$$s(r_1 r_2) = (s r_1) r_2 = r_1 (s r_2)$$

özelliğini sağlıyorsa, bu durumda R'ye S değişmeli halkası üzerinde *cebir* denir.

Tanım 2.3.8. S, R'nin çarpımsal alt monoidi (birimli ve birleşmeli) olmak üzere

(i) $\upsilon : R \to Q$ homomorfizması her $s \in S$ için $\upsilon(s)$ tersinir olacak şekilde vardır.

(ii) Q'nun her elemanı $s \in S$ ve $r \in R$ için $[\upsilon(s)]^{-1}\upsilon(r)$ formundadır.

özellikleri sağlanırsa Q halkasına *R'nin S'ye göre kesirlerinin halkası* denir.

2.4. Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda bazı halka sınıfları hatırlatılacak ve bu halka sınıfları arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 2.4.1. Bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için,

$$a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R ye *inmiş* (*reduced*) *halka* denir.

Sıfır bölensiz her halka inmiş halkadır. Daha özel olarak $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası inmiş bir halkadır. Diğer taraftan $\bar{0} \neq \bar{2} \in \mathbb{Z}_4$ için $(\bar{2})^2 = \bar{2}\bar{2} = \bar{0}$ olduğundan $\mathbb{Z}_4$ halkası inmiş bir halka değildir. Ayrıca inmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğunu görmek çok kolaydır.

Tanım 2.4.2. $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \Longrightarrow ba = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına *terslenebilir* (*reversible*) denir.

Lemma 2.4.3. Her inmiş halka terslenebilir bir halkadır.

İspat. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = baba = b0a = 0$ ve R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. ■

Tanım 2.4.4. R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \Longrightarrow aRb = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *yarıdeğişmeli* (*semicommitative*) olarak adlandırılır. Bir R halkasının yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul her bir $a \in R$ için $r_R(a)$ $(l_R(a))$ kümesinin R nin bir ideali olmasıdır.

Tanım 2.4.5.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \, , g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \ \in R[x]$$

olmak üzere,

$$f(x)g(x) = 0 \Rightarrow a_i b_j = 0 \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *Armendariz* olarak adlandırılır.

Yukarıdaki koşulu sağlayan halkalara Armendariz ismi verilmiştir. Çünkü 1974' te E.P. Armendariz, inmiş bir halkanın yukarıdaki koşulu sağladığını göstermiştir. Yani her inmiş halka bir Armendariz halkadır.

Tanım 2.4.6.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \, , g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \ \in R[x]$$

olmak üzere,

$$f(x)R[x]g(x) = 0 \Rightarrow a_i R b_j = 0 \quad (0 \leq i \leq n \, , 0 \leq j \leq m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına bir $quasi - Armendariz\ halka$ denir.

Armendariz halkaların, quasi-Armendariz halka olduklarını görmek kolaydır.

Tanım 2.4.7. R bir halka, $I \neq R$ olacak şekilde R nin bir ideali I olmak üzere, eğer R nin A, B idealleri için;

$$AB \subseteq I \Rightarrow A \subseteq I \text{ veya } B \subseteq I$$

oluyorsa, bu durumda I ya bir *asal* (*prime*) *ideal* denir.

Tanım 2.4.8. R bir halka olmak üzere $a \in R$ için,

$$aRa = 0 \ \Rightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *yarıasal* (*semiprime*) olarak adlandırılır.

Lemma 2.4.9. Her inmiş halka yarıasaldır.

İspat. R inmiş bir halka ve $a \in R$ için $aRa = 0$ olsun. Bu durumda $1_R \in R$ için de $a1_Ra = a^2 = 0$ olacağından ve R inmiş olduğundan $a = 0$ elde edilir ki, bu da R nin yarı asal olduğunu gösterir. ■

Tanım 2.4.10. R bir halka ve $a, b, c \in R$ olmak üzere;

$$abc = 0 \implies acb = 0$$

oluyorsa, bu durumda R ye bir *simetrik* (*symmetric*) *halka* denir.

Hatırlanacağı üzere her elemanı üstel sıfır olan bir ideale bir *nil ideal* denir.

Tanım 2.4.11. R bir halka ve P, R nin bir asal ideali olsun. Eğer $R/_P$ nin sıfırdan farklı nil ideali yoksa, bu durumda P ye *güçlü asal* (*strongly prime*) *ideal* denir.

Tanım 2.4.12. Eğer P, R nin güçlü asal idealleri arasında minimal ise, bu durumda P ye R nin bir *küçük güçlü asal* (*minimal strongly prime*) *ideali* denir.

Tanım 2.4.13. R bir halka, P, R nin bir ideali ve $a, b \in R$ olmak üzere;

$$ab \in P \implies a \in P \text{ veya } b \in P$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına *tamamen asal* (*completely prime*) *ideal* denir.

3. EŞKARE DÖNÜŞLÜ HALKALAR

Bu bölümde (Kwak ve Lee, 2012) çalışmasını referans alarak dönüşlü halka kavramını karakterize edeceğiz ve dönüşlü halkaların bir çok genişlemesinin de dönüşlü olduğunu göstereceğiz. Ayrıca, dönüşlülük koşulunun Morita invariant olduğunu ve bir dönüşlü halkanın sağ quotient halkasının da dönüşlü olduğunu ispat edeceğiz.

3.1. Dönüşlü Halkalar

Bu kısımda ele alınan halkaların birimli olması gerekmeyecektir. İlk olarak dönüşlü halkaların tanımı verilip, bu halka sınıflarının diğer halka sınıfları ile ilişkileri incelenecektir. Aşağıdaki tanımı vererek başlayalım.

Tanım 3.1.1. R bir halka ve I , R nin bir sağ ideali olmak üzere, $a, b \in R$ için,

$$aRb \subseteq I \Longrightarrow bRa \subseteq I$$

oluyorsa, bu durumda I idealine R nin bir *sağ dönüşlü* (*reflexive*) *ideali* denir. Eğer, bir R halkasının 0 sıfır ideali dönüşlü ise, bu durumda bu halkaya bir *dönüşlü* (*reflexive*) *halka* denir.

Önerme 3.1.2. R bir halka ve I, R nin bir ideali olmak üzere, eğer I bir asal ideal ise, bu durumda I dönüşlü bir idealdir.

İspat. I, R nin asal ideali ve $a, b \in R$ için $aRb \subseteq I$ olsun. I asal ideal olduğundan $aRb \subseteq I$ iken $a \in I$ veya $b \in I$ dır. Böylece $a \in I$ için I ideal olduğundan, $br \in R$ için $bra \in I$ dir veya $b \in I$ için I ideal olduğundan, $ra \in R$ için $bra \in I$ dir. Sonuç olarak $bRa \subseteq I$ olur ki, bu da bize I'nın bir dönüşlü ideal olduğunu gösterir. ■

Önerme 3.1.3. R bir halka ve R nin ideallerinin bir ailesi $\{I_\lambda | \lambda \in \Gamma\}$ olsun. Bu durumda $\bigcap_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda$ ideali de bir dönüşlü idealdir.

İspat. R bir halka ve $\{I_\lambda | \lambda \in \Gamma\}$ kümesi R'nin dönüşlü ideallerinin bir ailesi olsun. $I = \bigcap_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda$ olmak üzere $a, b \in R$ için $aRb \subseteq I$ olsun. $aRb \subseteq I = \bigcap_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda$ olduğundan her $\lambda \in \Gamma$ için $aRb \subseteq I_\lambda$ dır. I_λ dönüşlü olduğundan her $\lambda \in \Gamma$ için $bRa \subseteq I_\lambda$ dır. Böylece $bRa \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda = I$ olup I dönüşlü bir idealdir. ■

Önerme 3.1.4. R bir halka ve I, R'nin bir ideali olmak üzere, eğer I; R nin bir yarıasal ideal ise, bu durumda I; R'nin bir dönüşlü idealidir.

İspat. $a, b \in R$ için $aRb \subseteq I$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $(bra)R(bra) \subseteq I$ olup, I yarıasal olduğundan $bra \in I$olur. Böylece $bRa \subseteq I$ olur ki, bu da bize I nın bir dönüşlü ideal olduğunu gösterir. ■

Önerme 3.1.5. R bir halka ve I, R nin bir ideali olmak üzere, eğer I, R nin bir asal ideali ise, bu durumda I, R nin bir yarıasal idealidir.

İspat. I, R nin bir asal ideali ve $a \in R$ için $aRa \subseteq I$ olsun. Bu durumda, I, R nin bir asal ideali olduğundan $a \in I$ olur ki, bu da bize I nın yarıasal ideal olduğunu gösterir. ■

Önerme 3.1.6. R birimli bir halka olmak üzere, eğer R terslenebilir bir halka ise, bu durumda R dönüşlü bir halkadır.

İspat. R terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. R birimli olduğundan $ab = 0$ olur. O halde her $r \in R$ için $abr = 0$ elde edilir. Fakat R terslenebilir olduğundan $bra = 0$ ve buradan da $bRa = 0$ olur ki, bu da bize R nin dönüşlü bir halka olduğunu gösterir. ■

Önerme 3.1.7. R bir halka olmak üzere, eğer R terslenebilir bir halka ise, bu durumda R yarıdeğişmeli bir halkadır.

İspat. R bir halka olmak üzere, $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ dır. Bu durumda her $r \in R$ için $bar = 0r = 0$ olup, R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ ve böylece de $aRb = 0$ elde edilir ki, bu da bize R halkasının yarı değişmeli olduğunu gösterir. ■

Önerme 3.1.8. R birimli bir halka olmak üzere, R halkasının dönüşlü ve yarı-değişmeli olması için gerek ve yeter koşul her $x \in R$ için $l(x) = r(x)$ olmasıdır.

İspat. R dönüşlü ve yarı değişmeli bir halka olsun. $r \in l(x)$ alalım. Buradan $rx = 0$ olup, R yarı değişmeli olduğundan $rRx = 0$ ve R dönüşlü olduğundan $xRr = 0$ olur. R birimli olduğundan $xr = 0$ yani $r \in r(x)$ olur. Bu da bize $l(x) \subset r(x)$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $r(x) \subset l(x)$ olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak $l(x) = r(x)$

olur. Tersine, her $x \in R$ için $l(x) = r(x)$ olsun. Önce R halkasının yarı değişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olsun. Bu durumda $b \in r(a) = l(a)$ olup $ba = 0$ olur. Her $r \in R$ için $bar = 0$ olduğundan $b \in l(ar) = r(ar)$ dır. Buradan $arb = 0$ olup $aRb = 0$ elde edilir ki bu da bize R nin yarı değişmeli bir halka olduğunu gösterir. Şimdi R halkasının dönüşlü halka olduğunu gösterelim. $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. R halkası birimli olduğundan $ab = 0$ dır. Kabulden $ba = 0$ olur. R yarı değişmeli olduğundan $bRa = 0$ olur. Böylece R dönüşlü bir halka olur. ■

Önerme 3.1.9. R bir halka olmak üzere, eğer R yarı değişmeli bir halka ise, bu durumda R abelyan bir halkadır.

İspat. R yarıdeğişmeli bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. Her $r \in R$ için $er = re$ olduğunu gösterelim. $e(1-e) = 0$ ve R yarı değişmeli olduğundan $eR(1-e) = 0$ dır. Böylece her $r \in R$ için $er(1-e) = 0$ olup, buradan $er = ere$ elde edilir. Diğer taraftan $(1-e)e = 0$ ve R yarı değişmeli olduğundan $(1-e)Re = 0$ dır. Böylece her $r \in R$ için $(1-e)Re = 0$ olup buradan $re = ere$ elde edilir. Sonuç olarak $er = re$ olduğu görülür. ■

Önerme 3.1.10. R halkası birimli bir halka olmak üzere, eğer R dönüşlü ve yarı-değişmeli halka ise, bu durumda R terslenebilir bir halkadır.

İspat. R dönüşlü ve yarıdeğişmeli bir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. R yarı değişmeli olduğundan $aRb = 0$ dır. R dönüşlü olduğundan $bRa = 0$ ve R birimli olduğundan $ba = 0$ olur. Böylece R terslenebilir bir halkadır. ■

Lemma 3.1.11. Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(i) R dönüşlü bir halkadır.

(ii) Her $a \in R$ için $r_R(aR) = l_R(Ra)$ dır.

(iii) A ve B, R halkasının boştan farklı alt kümeleri olmak üzere $ARB = 0$ iken $BRA = 0$ dır.

(iv) R nin sağ (sol) I, J idealleri için, $IJ = 0$ iken $JI = 0$ dır.

(v) R nin I, J idealleri için $IJ = 0$ iken $JI = 0$ dır.

İspat. (i) ⇒ (ii) R dönüşlü bir halka olsun. $b \in r_R(aR)$ alalım. Buradan $aRb = 0$ olur. R dönüşlü olduğundan $bRa = 0$ elde edilir. O halde $b \in l_R(Ra)$ olur. Böylece $r_R(aR) \subseteq l_R(Ra)$ olur. Diğer taraftan $b \in l_R(Ra)$ olsun. Buradan $bRa = 0$ dır. R dönüşlü olduğundan $aRb = 0$ yazılır. Yani $b \in r_R(aR)$ olur. Böylece $l_R(Ra) \subseteq r_R(aR)$ olur. Sonuç olarak $r_R(aR) = l_R(Ra)$ elde edilir.

(ii) ⇒ (iii) Her $a \in R$ için $r_R(aR) = l_R(Ra)$ ve $ARB = 0$ olsun. Bu durumda her $a \in A$ ve $b \in B$ için $aRb = 0$ olur. Buradan $b \in r_R(aR) = l_R(Ra)$ olup, bu durumda her $a \in A$ ve $b \in B$ için $bRa = 0$ elde edilir ki, bu da bize ve $BRA = 0$ olduğunu gösterir.

(iii) ⇒ (iv) (iii) sağlansın ve R nin I, J idealleri için $IJ = 0$ olsun. I ve J, R nin sağ (sol) idealleri olduğundan $IRJ = 0$ olur. Hipotezden $JRI = 0$ olur. Böylece $1_R \in R$ için $J\,1_R I = 0$ yani $JI = 0$ elde edilir.

(iv) ⇒ (v) Bu gerektirmenin ispatı açıktır.

(v) ⇒ (i) (v) sağlansın ve $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. $RaR = I$ ve $RbR = J$ olarak alalım. Bu durumda $IJ = RaRRbR = 0$ olup hipotezden $JI = RbRRaR = 0$ olur. Böylece $bRa \subseteq RbRRaR = 0$ olduğundan $bRa = 0$ dır. Bu yüzden R dönüşlü bir halkadır. ■

Önerme 3.1.12.

(1) R bir halka olmak üzere, eğer R nin $T(R, R)$ aşikar genişlemesi dönüşlü ise, bu durumda R dönüşlü bir halkadır

(2) R yarıasal bir halka olsun. Bu durumda;

(i) $a, b \in R$ için $aRbRb = 0$ $(aRaRb = 0)$ olması için gerek ve yeter koşul $aRb = 0$ olmasıdır.

(ii) $T(R,R)$ dönüşlü bir halkadır.

İspat. (1) $T(R,R)$ dönüşlü bir halka ve $a,b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. Bu durumda $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} asb & atb \\ 0 & asb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olur. $T(R,R)$ dönüşlü bir halka olduğundan $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bsa & bta \\ 0 & bsa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olup, buradan $bsa = 0$ ve $bta = 0$ elde edilir. Bu da bize $bRa = 0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak R dönüşlü bir halka olur.

(2) R yarıasal bir halka olsun.

(i) $a,b \in R$ için $aRbRb = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan $aRbRbR = 0R = 0$ olur. Böylece $aRbRaRb \subseteq aRbRbR = 0$ olduğundan $aRbRaRb = 0$ elde edilir. R yarıasal olduğundan $aRb = 0$ olur. Benzer şekilde, $aRaRb = 0$ olsun. Buradan $aRaRbR = 0R = 0$ olur. $aRbRaRb \subseteq aRaRbR = 0$ olduğundan $aRbRaRb = 0$ olur. R yarıasal olduğundan $aRb = 0$ elde edilir. Tersine, $aRb = 0$ olsun. Bu durumda $aRbRb = 0$ ve $aRaRb = 0$ olduğu açıktır.

(ii) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} \in T(R,R)$ için $AT(R,R)B = 0$ olsun. Bu durumda $T(R,R)$'nin herhangi bir $C = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}$ elemanı için $ACB = 0$ elde edilir. Buradan da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} asa' & asb' + ata' + bsa' \\ 0 & asa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan $asa' = 0$ ve böylece de $aRa' = 0$ olur. R dönüşlü olduğundan $a'Ra = 0$ olur. Her $r \in R$ için $asb' + ata' + bsa' = 0$ eşitliğini sağdan ra' ile çarparsak $asb'ra' + ata'ra' + bsa'ra' = 0$ olur. $aRa' = 0$ olduğundan $asb'ra' = 0$ ve $ata'ra' = 0$ olur. Dolayısıyla $bsa'ra' = 0$ dır. $sa'r \in R$ olduğundan $bRa' = 0$ olur. R dönüşlü olduğundan $a'Rb = 0$ olur. $aRa' = 0$ ve $bRa' = 0$ olduğundan $ata' = 0$ ve $bsa' = 0$ dır. $asb' + ata' + bsa' = 0$ eşitliğinden $asb' = 0$ elde edilir. Böylece $aRb' = 0$ olur. R dönüşlü olduğundan $b'Ra = 0$ elde edilir. Şimdi

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'sa & a'sb + a'ta + b'sa \\ 0 & a'sa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur ki, bu da bize $T(R,R)$ nin dönüşlü bir halka olduğunu gösterir. ■

Not. (i) R değişmeli bir halka ise, bu durumda $T(R,R)$ değişmeli ve böylece de terslenebilir bir halkadır.

(ii) $T(R,R)$ dönüşlü olacak şekilde değişmeli ve yarıasal olmayan bir R halkası vardır. Gerçekten; R_1 değişmeli olmayan yarıasal bir halka , R_2 yarıasal olmayan değişmeli bir halka olmak üzere $R = R_1 \oplus R_2$ olsun. Bu durumda $T(R_1, R_1)$ halkası Önerme 3.1.12(2) den dolayı dönüşlü ve $T(R_2, R_2)$ halkası da değişmelidir. Böylece $T(R,R)$ dönüşlü bir halkadır.

Teorem 3.1.13. R bir halka olmak üzere;

(i) Eğer R dönüşlü bir halka ise, bu durumda her bir $e^2 = e \in R$ için eRe dönüşlü bir halkadır.

(ii) R halkasının dönüşlü olması için gerek ve yeter koşul her $n \geq 1$ için $Mat_n(R)$ halkasının dönüşlü olmasıdır.

İspat. (i) R dönüşlü bir halka ve $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere $a = er_1e,\ b = er_2e \in eRe$ alalım. $aeReb = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda R dönüşlü olduğundan $ebRae = 0$ olur. Diğer taraftan $eb = e(e\,r_2e) = e\,r_2e = b = be$ ve $ea = e(e\,r_1e) = e\,r_1e = a = ae$ olduğundan $beRea = 0$ elde edilir. Bu da bize eRe halkasının dönüşlü bir halka olduğunu gösterir.

(ii) Kabul edelim ki; R dönüşlü bir halka ve $M = Mat_n(R)$ olsun. M nin A, B idealleri için $AB = O$ olsun. Bu durumda $A = Mat_n(I)$ ve $B = Mat_n(J)$ olacak şekilde R nin I ve J idealleri vardır. Buradan $Mat_n(IJ) = Mat_n(I)Mat_n(J) = AB = O$ olur ki, böylece $IJ = 0$ elde edilir. Fakat R dönüşlü bir halka olduğundan Lemma 3.1.11(v) gereğince $JI = 0$ olur. O halde $BA = Mat_n(J)Mat_n(I)Mat_n(JI) = O$ olur. Tekrar Lemma 3.1.11(v) gereğince $M = Mat_n(R)$ bir dönüşlü halka olur. Tersine, eğer $Mat_n(R)$ dönüşlü bir halka ise, bu durumda $R \cong RE_{11} = E_{11}Mat_n(R)\, E_{11}$ olur. Böylece (i) den dolayı R dönüşlü bir halka olur. ■

Not. Teorem 3.1.13'ün bir sonucu olarak bir halkanın 'dönüşlü olma' özelliğinin Morita invaryant olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 3.1.14. K bir cisim ve a, b , K üzerinde değişmeli olmayan iki bilinmeyen olmak üzere $R = K < a, b >$ serbest cebiri olsun. Bu durumda R inmiş bir halka olacağından dönüşlü bir halka olur. I; R nin aRb tarafından üretilen ideali olsun. Bu durumda $aRb \subseteq I$ fakat $ba \in bRa \nsubseteq I$ olduğundan $R/_I$ bölüm halkası dönüşlü bir halka değildir.

Önerme 3.1.15. R bir halka olmak üzere;

(i) R halkasının bir I ideali için $R/_I$ dönüşlü bir halka olsun. Eğer I inmiş bir halka ise, bu durumda R dönüşlü bir halkadır.

(ii) R simetrik halkasının bir I ideali olmak üzere, eğer R nin boştan farklı bir S altkümesi için $I = r_R(S)$ ise, bu durumda $R/_I$ dönüşlü bir halkadır.

(iii) R halkasının e merkezil eşkare elemanı için , eR ve $(1-e)R$ halkalarının dönüşlü olması için gerek ve yeter koşul R halkasının dönüşlü olmasıdır.

İspat. (i) $R/_I$ dönüşlü bir halka ve $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. $R/_I$ dönüşlü olduğundan $(a+I)(r+I)(b+I) = I$ olup, buradan $arb + I = I$ olur. Yani $arb \in I$ dır. I dönüşlü olduğundan $bra \in I$ elde edilir. $(bRaR)^2 = bRaRbRaR$ olup $aRb = 0$ olduğundan $(bRaR)^2 = 0$ olur. I inmiş bir halka olduğundan $bRaR = 0$ olup, buradan $bRa = 0$ elde edilir. Böylece R dönüşlü bir halka olur.

(ii) R simetrik bir halka ve R nin boştan farklı bir S altkümesi için $I = r_R(S)$ olsun. $\bar{R} = R/_I$ ve $r \in R$ olmak üzere $\bar{r} = r + I \in \bar{R}$ diyelim. $\bar{a}\bar{R}\bar{b} = 0$ iken $SaRb = 0$ olur. Böylece $0 = SaRb = SaRbR = S(aR)(bR)$ olur. Diğer taraftan R simetrik olduğundan $S(bR)(aR) = 0$ olur ve buradan $SbRa = 0$ elde edilir. Böylece $bRa \subseteq I$

olup, $bRa + I = I$ olur. Böylece $\bar{b}\bar{R}\bar{a} = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\bar{R} = {}^{R}/_{I}$ dönüşlü bir halka olur.

(iii) Kabul edelim ki eR ve $(1-e)R$ dönüşlü bir halka olsun. $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. $aRb = 0$ eşitliğini soldan e ile çarparsak $eaRb = e0 = 0$ olur. e merkezil olduğundan $aeRb = 0$ olur. eR dönüşlü olduğundan $beRa = 0$ ve e merkezil olduğundan da $ebRa = 0$ elde edilir. $aRb = 0$ eşitliğini soldan $(1-e)$ ile çarparsak $(1-e)aRb = (1-e)0 = 0$ olur. $(1-e)$ merkezil olduğundan $a(1-e)Rb = 0$ dır. $(1-e)R$ dönüşlü olduğundan da $b(1-e)Ra = 0$ ve $(1-e)$ merkezil olduğundan $(1-e)bRa = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $bRa = ebRa + (1-e)bRa = 0$ olduğundan R dönüşlü bir halka olur. Tersine, R dönüşlü bir halka olsun. eR ve $(1-e)R$ nin dönüşlü olduğu Teorem 3.1.13(1) den açıktır. ■

Not. Önerme 3.1.15.(i) deki "I inmiş halka" şartı "I dönüşlü halka" olarak değiştirilemez.

Önerme 3.1.16. S bir R halkasının sağ Ore koşulunu sağlayan çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. S kümesi regüler elemanlardan oluşsun. Eğer R halkası dönüşlü bir halka ise, bu durumda R nin S ye göre Q sağ quotient halkası da dönüşlüdür.

İspat. R dönüşlü bir halka olsun. $a, b \in R$ ve $u, v \in S$ olmak üzere $\alpha = au^{-1}$ ve $\beta = bv^{-1}$ için $\alpha Q\beta = 0$ olsun. $Q = u^{-1}Q$ olduğundan $0 = \alpha Q\beta = aQ(bv^{-1})$ olur. Bu ise herhangi $rs^{-1} \in Q$ için $a(rs^{-1})(bv^{-1}) = 0$ olmasını gerektirir. Hipotezden $s^{-1}b = cw^{-1}$ olacak şekilde $c \in R$ ve regüler $w \in R$ vardır. Böylece her hangi bir $r \in R$ için $0 = a(rs^{-1})(bv^{-1}) = arcw^{-1}v^{-1}$ olup, buradan $aRc = 0$ ve R dönüşlü halka olduğundan da $cRa = 0$ elde ederiz. $aRc = 0$ ve $s^{-1}b = cw^{-1}$ iken $bw = sc$ olduğundan herhangi bir $r \in R$ için $0 = arsc = arbw$ olup, buradan $aRb = 0$ ve R dönüşlü halka olduğundan $bRa = 0$ elde ederiz. $v^{-1}Q = Q$ olduğundan $\beta Q\alpha = bw^{-1}Qau^{-1} = bQau^{-1}$ olur. Buradan herhangi bir $rt^{-1} \in Q$ için $bQau^{-1} = b(rt^{-1})au^{-1}$ dır. a ve t için $al = td$ ve $t^{-1}a = d\,l^{-1}$ olacak şekilde s$\in S$ ve $d \in R$ vardır. $aRb = 0$ ve $al = td$ olduğudan her hangi bir $r \in R$ için $alrb = tdrb = 0$ ve böylece $dRb = 0$ elde ederiz. R dönüşlü olduğundan $bRd = 0$ olur. $bRd = 0$

olduğundan herhangi bir $rt^{-1} \in Q$ için $b(rt^{-1})au^{-1} = brdl^{-1}u^{-1} = 0$ olduğundan $\beta Q\alpha = 0$ olur. Bu yüzden Q dönüşlü halkadır. ■

Önerme 3.1.17. Δ merkezil regüler elemanlardan oluşan R halkasının çarpımsal kapalı bir altkümesi olsun. Bu durumda R nin dönüşlü olması için gerek ve yeter koşul $\Delta^{-1}R$ halkasının dönüşlü olmasıdır.

İspat. Önerme 3.1.16 nın ispatına benzer olarak yapılır. ■

Sonuç 3.1.18. R bir halka olmak üzere, $R[x]$ halkasının dönüşlü olması için gerek ve yeter koşul $R[x: x^{-1}]$ halkasının dönüşlü olmasıdır.

İspat. Önerme 3.1.17 de $\Delta = \{1, x, x^2, \dots\}$ alınırsa, bu durumda Δ açık olarak $R[x]$ in çarpımsal kapalı bir altkümesidir ve $R[x: x^{-1}] = \Delta^{-1}R[x]$ olur. ■

Önerme 3.1.19. P bir halka olmak üzere, eğer P tamamen asal bir halka ise, bu durumda P dönüşlü bir halkadır.

İspat. P tamamen asal bir halka ve $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ olsun. $1_R \in R$ için $a\,1_R b \in P$ olup $ab \in P$ olur. Hipotezden $a \in P$ veya $b \in P$ dir. $a \in P$ ise $bra \in P$ ve $b \in P$ ise $bra \in P$ dir. Sonuç olarak $bRa \subseteq P$ olduğundan P dönüşlü bir halkadır. ■

R değişmeli bir S halkası üzerinde bir cebir olmak üzere $D = R \oplus S$ değişmeli grubu $r_i \in R$, $s_i \in S$ için,

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1, s_1s_2)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya R nin S ile *Dorroh genişlemesi* denir.

Önerme 3.1.20. R , S değişmeli halkası üzerinde bir cebir olsun. R dönüşlü bir halka ve S bir tamlık bölgesi ise, bu durumda R nin S ile Dorroh Genişlemesi $D = R \oplus S$ dönüşlü bir halkadır.

İspat. $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in D$ için $(r_1, s_1)D(r_2, s_2) = 0$ olsun. Bu durumda keyfi $(r, s) \in D$ için $(r_1, s_1)(r, s)(r_2, s_2) = 0$ olur.

$$
\begin{aligned}
(r_1, s_1)(r, s)(r_2, s_2) &= (r_1 r + s_1 r + s\, r_1 ,\, s_1 s)(r_2, s_2) \\
&= (r_1 r\, r_2 + s_1 r\, r_2 + s\, r_1\, r_2 + s_1 s\, r_2 + s_2\, r_1\, r + s_2\, s_1 r + \\
&\quad s_2 s\, r_1 ,\, s_1 s\, s_2) \\
&= (0,0)
\end{aligned}
$$

dan $r_1 r\, r_2 + s_1 r\, r_2 + s\, r_1\, r_2 + s_1 s\, r_2 + s_2\, r_1\, r + s_2\, s_1 r + s_2 s\, r_1 = 0$ ve $s_1 s\, s_2 = 0$ elde ederiz. $s_1 s\, s_2 = 0$ için S keyfi ve S bir tamlık bölgesi olduğundan $s_1 = 0$ veya $s_2 = 0$ olur. Eğer $s_1 = 0$ ise, bu durumda $r_1 r\, r_2 + s\, r_1\, r_2 + s_2\, r_1\, r + s_2 s\, r_1 = 0$ olup buradan $r_1(r + s)(r_2 + s_2) = 0$ elde edilir. $r + s \in R$ olduğundan $r_1 R(r_2 + s_2) = 0$ olur. R dönüşlü olduğundan $(r_2 + s_2)R\, r_1 = 0$ ve buradan $(r_2 + s_2)(r + s)\, r_1 = 0$ olur. Böylece,

$$
\begin{aligned}
(r_2, s_2)(r, s)(r_1, s_1) &= (r_2 r + s_2 r + s\, r_2,\, s_2 s)(r_1, s_1) \\
&= (r_2 r\, r_1 + s_2 r\, r_1 + s\, r_2\, r_1 + s_2 s\, r_1 + s_1\, r_2 r + s_1\, s_2 r + \\
&\quad s_1 s\, r_2,\, s_2 s\, s_1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan eğer $s_2 = 0$ ise, bu durumda $(r_1 + s_1)(r + s)\, r_2 = 0$ olur. Buradan $(r_1 + s_1)R\, r_2 = 0$ elde ederiz. R dönüşlü olduğundan $r_2 R(r_1 + s_1) = 0$ olur. Dolayısıyla $(r_2, s_2)(r, s)(r_1, s_1) = 0$ olup buradan $(r_2, s_2)D(r_1, s_1) = 0$ elde edilir ki bu da bize $D = R \oplus S$ Dorroh genişlemesinin dönüşlü bir halka olduğunu gösterir.

Tersine, $D = R \oplus S$ Dorroh genişlemesinin dönüşlü bir halka olduğunu kabul edelim. $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olsun. Bu durumda herhangi bir $(r, s) \in D$ için $a(r + s)b = 0$ olur. Bu ise herhangi bir $(r, s) \in D$ için $(a, 0)(r, s)(b, 0) = 0$ olmasını gerektirir. $D = R \oplus S$ Dorroh genişlemesi dönüşlü bir halka olduğundan $(b, 0)(r, s)(a, 0) = 0$ olur. Böylece $b(r + s)a = 0$ olur ki, buradan $bRa = 0$ bulunur. Sonuç olarak R dönüşlü bir halka olur. ■

Önerme 3.1.21. R quasi-Armendariz bir halka olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(i) R dönüşlü bir halkadır.

(ii) $R[x]$ dönüşlü bir halkadır.

(iii) $R[x;x^{-1}]$ dönüşlü bir halkadır.

İspat. (i) ⇒ (ii) R dönüşlü bir halka ve $f=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ için $fR[x]g=0$ olsun. R quasi-Armendariz olduğundan her i,j için $a_iRb_j=0$ olur. Böylece R dönüşlü olduğundan $b_jRa_i=0$ olur. Buradan $gR[x]f=0$ elde edilir ki, bu da bize $R[x]$ halkasının dönüşlü olduğunu gösterir.

(ii) ⇒ (i) $R[x]$ dönüşlü bir halka ve $a,b\in R$ için $aRb=0$ olsun. Bu durumda $aR[x]b=0$ olur ve $R[x]$ dönüşlü olduğundan $bR[x]a=0$ olur. Buradan $bRa=0$ elde ederiz ki, bu da bize R halkasının dönüşlü olduğunu gösterir.

(ii) ⇔ (iii) Sonuç 3.1.18 den açıktır. ■

Aşağıdaki örnek bize bir halkanın quasi-Armendarizlik özelliği ve dönüşlülük özelliğinin birbirine bağlı olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.22. (i) Bir R inmiş halkası için $S_3(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in R\right\}$ halkası dönüşlü değildir. Fakat Armendarizdir ve böylece de quasi-Armendariz bir halkadır.

(ii) A değişmeli ve yarıasal bir halka olsun. Bu durumda $R=S_2(\,T(A,A))$ halkası Önerme 3.1.12(2) den dolayı dönüşlüdür. Şimdi R halkasının quasi-Armendariz olmadığını gösterelim. $R[x]$ halkasının

$$f=\begin{pmatrix}(0,1) & (0,0)\\ (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0)\\ (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}x \text{ ve } \; g=\begin{pmatrix}(0,1) & (0,0)\\ (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(0,1) & (-1,0)\\ (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}x$$

elemanları için $fR[x]g=O$ dır. Fakat

$$\begin{pmatrix}(0,1) & (1,0)\\ (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}R\begin{pmatrix}(0,1) & (0,0)\\ (0,0) & (0,1)\end{pmatrix}\neq O$$

olduğundan R halkası quasi-Armendariz değildir.

Önerme 3.1.23. Bir R halkasının yarıasal olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ halkasının yarıasal olmasıdır.

İspat. R yarıasal bir halka ve $f(x) \in R[x]$ için $f(x)R[x]f(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f(x) = 0$ olduğunu gösterelim. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ olmak üzere keyfi bir $r_0 + r_1x + r_2x^2 + \cdots + r_sx^s \in R[x]$ için

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)(r_0 + r_1x + \cdots + r_sx^s)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = 0$$

olur. Buradan;

$$a_0r_0a_0 = 0 \tag{1}$$

$$a_0r_0a_0 + a_0r_1a_0 + a_1r_0a_0 = 0 \tag{2}$$

$$a_0r_0a_2 + a_0r_1a_1 + a_1r_0a_1 + a_0r_2a_0 + a_1r_1a_0 + a_2r_0a_0 = 0 \tag{3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_nr_sa_n = 0 \tag{n}$$

denklem sistemini elde ederiz. Birinci eşitlikte $a_0r_0a_0 = 0$ olup R yarıasal olduğundan $a_0 = 0$ olur. Üçüncü eşitlikte $a_0 = 0$ olduğundan $a_1r_0a_1 = 0$ olur. R yarıasal olduğundan $a_1 = 0$ dır. Bu şekilde $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, ..., $a_n = 0$ bulunur. Buradan $f(x) = 0$ bulunur ki bu da bize $R[x]$ halkasının yarıasal bir halka olduğunu gösterir. Tersi açıktır. ■

Bir R halkasının yarıasal olması için gerek yeter koşulun $R[x]$ halkasının yarıasal olması gerektiğini gördük. Böylece bir yarı-asal halka üzerindeki polinom halkası dönüşlü olur. Fakat dönüşlü halkaların sınıfı Örnek 3.1.14 den dolayı homomorfik görüntüler altında kapalı değildir. Bununla beraber aşağıdaki sonuca sahibiz.

Teorem 3.1.24. R yarıasal bir halka ve n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere, (x^n); x^n tarafından üretilen ideal olmak üzere $R[x]/(x^n)$ bölüm halkası dönüşlü bir halkadır.

İspat. $S = R[x]/(x^n)$ olsun. $n = 1$ için $S \cong R$ olup, ispat açıktır. $n = 2$ için $S \cong T(R,R)$ olduğundan Önerme 3.1.12(2) den dolayı S dönüşlü bir halkadır. Şimdi $n \geq 3$ olsun. $\bar{x} = x + <x^n>$ olmak üzere, $f = a_0 + a_1\bar{x} + \cdots + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} \in S$ ve $h = c_0 + c_1\bar{x} + \cdots + c_{n-1}\bar{x}^{n-1} \in S$ için $fSh = 0$ olsun. Bu durumda keyfi $g = b_0 + b_1\bar{x} + \cdots + b_{n-1}\bar{x}^{n-1} \in S$ için $fgh = 0$ olur. $i + j + k \geq n$ için $a_i b_j c_k \bar{x}^{i+j+k} = 0$ dır. $i + j + k \leq n - 1$ olduğu durumlara bakmak yeterlidir. $fgh = 0$ olduğundan

$$(a_0 + a_1\bar{x} + \cdots + a_{n-1}\bar{x}^{n-1})(b_0 + b_1\bar{x} + \cdots + b_{n-1}\bar{x}^{n-1})(c_0 + c_1\bar{x} + \cdots + c_{n-1}\bar{x}^{n-1}) = 0$$

olur. Buradan,

$$a_0 b_0 c_0 = 0 \tag{1}$$

$$a_0 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_0 + a_1 b_0 c_0 = 0 \tag{2}$$

$$a_0 b_0 c_2 + a_0 b_1 c_1 + a_0 b_2 c_0 + a_1 b_0 c_1 + a_1 b_1 c_0 + a_2 b_0 c_0 = 0 \tag{3}$$

$$\vdots$$

$$a_0 b_0 c_{n-2} + a_0 b_1 c_{n-3} + \cdots + a_{n-3} b_1 c_0 + a_{n-2} b_0 c_0 = 0 \tag{4}$$

$$a_0 b_0 c_{n-1} + a_0 b_1 c_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_1 c_0 + a_{n-1} b_0 c_0 = 0 \tag{5}$$

denklem sistemini elde ederiz. Önerme 3.1.12(2) den $a, b \in R$ için 'R dönüşlü ve $aRbRb = 0 \iff aRb = 0$' olduğunu biliyoruz. (1) den $b_0 \in R$ keyfi olduğundan $a_0 R c_0 = 0$ olur. $a_0 R c_0 = 0$ olduğundan (2) de $a_0 b_1 c_0 = 0$ olup buradan

$$a_0 b_0 c_1 + a_1 b_0 c_0 = 0 \tag{6}$$

dır. (6) eşitliğini sağdan rc_0 ile çarpalım. Böylece $a_0b_0c_1rc_0 + a_1b_0c_0rc_0 = 0$ elde edilir. Buradan $a_0b_0c_1rc_0 = 0$ olduğundan $b_0c_0r \in R$ için $a_1b_0c_0rc_0 = 0$ dır. Dolayısıyla $a_1Rc_0 = 0$ olur. $a_0Rc_0 = 0$ ve $a_1Rc_0 = 0$ eşitliklerini (2) denkleminde kullanırsak $a_0b_0c_1 = 0$ elde edilir. Buradan $a_0Rc_1 = 0$ olur. $a_0Rc_0 = 0\,, a_1Rc_0 = 0\,, a_0Rc_1 = 0$ eşitliklerini (3) te yerine yazarsak

$$a_0b_0c_2 + a_1b_0c_1 + a_2b_0c_0 = 0 \tag{7}$$

elde edilir. (7) eşitliğini sağdan rc_0 ile çarparsak,

$$a_0b_0c_2rc_0 + a_1b_0c_1rc_0 + a_2b_0c_0rc_0 = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan $b_0c_0r \in R$ için $a_2b_0c_0rc_0 = 0$ olur. Dolayısıyla $a_2Rc_0 = 0$ dır. $a_2Rc_0 = 0$ eşitliğini (7) de kullanırsak

$$a_0b_0c_2 + a_2b_0c_0 = 0 \tag{8}$$

elde edilir. (8) eşitliğini rc_1 ile sağdan çarparsak,

$$a_0b_0c_2rc_1 + a_2b_0c_0rc_1 = 0$$

yazılır. Burada $a_0Rc_1 = 0$ olduğundan $a_0b_0c_2rc_1 = 0$ dır. Dolayısıyla $a_2b_0c_0rc_1 = 0$ olur. $b_0c_0r \in R$ için $a_2Rc_0 = 0$ elde edilir. Şimdi $i + k = 0,1,2, \dots, (n-2)$ için $a_iRc_k = 0$ olduğunu kabul edelim. (5) eşitliğine bu yöntemi uygulayalım. Elde edilenler yerine yazıldığında (7) denklemi

$$a_0b_0c_{n-1} + \cdots + a_{n-2}b_0c_1 + a_{n-1}b_0c_0 = 0 \tag{9}$$

olur. (9) denklemi sağdan sırasıyla $rc_0, rc_1,..., rc_{n-2}$ ile çarparsak $a_{n-1}Rc_0 = 0$, $a_{n-2}Rc_1 = 0$,..., $a_0Rc_{n-1} = 0$ elde edilir. Bu bize $i + k = n - 1$ olan her i, k için $a_iRc_k = 0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $i + j \leq n - 1$ olan her i, j ve k için $a_iRc_k = 0$ dır. R dönüşlü olduğundan $hSf = 0$ ve buradan S dönüşlü bir halka olur. ■

3.2. Eşkare Dönüşlü Halkalar

Bu kısımda dönüşlü halkaların bir genelleştirmesi olan eşkare dönüşlü halkaları tanımlayıp bu halka sınıflarının bazı karakterizasyonlarını vereceğiz.

Tanım 3.2.1. R bir halka ve I, R nin bir tek yanlı ideali olmak üzere, eğer

$a, e^2 = e \in R$ için,

$$aRe \subseteq I \Longrightarrow eRa \subseteq I$$

oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir *sağ eşkare dönüşlü* (*right idempotent reflexive*) *ideali* denir. Eğer R nin 0 ideali sağ eşkare dönüşlü oluyorsa, bu durumda R ye bir *sağ eşkare dönüşlü* (*right idempotent reflexive ring*) *halka* denir. Eğer halkamız birimsiz bir halka ise yine aynı tanımı kullanırız. Sol eşkare dönüşlü idealler ve sol eşkare dönüşlü halkalar benzer şekilde tanımlanır. Eğer bir halka hem sağ ve hem de sol eşkare dönüşlü oluyorsa bu halkaya bir *eşkare dönüşlü halka* denir.

Önerme 3.2.2. R birimli ve abelyan bir halka ise, bu durumda R eşkare dönüşlü bir halkadır.

İspat. R birimli abelyan bir halka ve $a, e = e^2 \in R$ olmak üzere $aRe = 0$ olsun. $aRe = 0$ ve R birimli bir halka olduğundan $ae = 0$ olur. R abelyan olduğundan $ea = 0$ dır ve buradan her $r \in R$ için $rea = era = 0$ olur. O halde $eRa = 0$ olur. Böylece R eşkare dönüşlü halka olur. ■

Önerme 3.2.3. R dönüşlü bir halka ise, bu durumda R eşkare dönüşlü bir halkadır.

İspat. İspat açıktır. ■

Dönüşlü olmayan bir halka, eşkare dönüşlü bir halka olabilir. Bunu aşağıdaki örnekte görelim.

Örnek 3.2.4. $F\{X, Y\}$, X ve Y tarafından F cismi üzerinde üretilen serbest cebir ve (YX) , YX elemanı tarafından üretilen $F\{X, Y\}$ nin iki yanlı ideali olsun. Bu durumda

$R = F\{X, Y\}/\langle YX\rangle$ ve $x = X + \langle YX\rangle, y = Y + \langle YX\rangle \in R$, $yx = 0$ olmak üzere , $R = \{f_0(x) + f_1(x)y + \cdots + f_n(x)y^n \mid n = 0,1,2, \dots ve\ f_i(x) \in F[X]\}$ bir polinom halkasıdır. Şimdi $0 \neq \alpha, 0 \neq \beta \in R$ için $\alpha\beta = 0$ olsun. $f_n(x) \neq 0$ ve $g_m(x) \neq 0$ olmak üzere, $\alpha = f_0(x) + f_1(x)y + \cdots + f_n(x)y^n$ ve $\beta = g_0(x) + g_1(x)y + \cdots + g_m(x)y^m$ şeklinde olsunlar. $\alpha\beta = 0$ olduğundan,

$$(f_0(x) + f_1(x)y + \cdots + f_n(x)y^n)(g_0(x) + g_1(x)y + \cdots + g_m(x)y^m) = 0$$

yazılır. Buradan $f_0(x)g_0(x) = 0$ olur ki, buradan $F[X]$ cisim olduğundan $f_0(x) = 0$ veya $g_0(x) = 0$ olur.

I.Durum: $f_0(x) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\alpha x\beta = (f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots + f_n(x)y^n)x(g_0(x) + g_1(x)y + \cdots + g_m(x)y^m)$$

$$= f_1(x)yxg_0(x) + f_2(x)y^2xg_0(x) + \cdots + f_n(x)y^nxg_m(x)y^m$$

ve $yx = 0$ olduğundan $\alpha x\beta = 0$ bulunur. Şimdi $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t \in F[X]$ olsun. Buradan $yg(x) = c_0y + c_1yx + c_2yx^2 + \cdots + c_tyx^t = c_0y = g(0)y$ olduğundan $g_0(0) = g_1(0) = \cdots = g_m(0) = 0$ olur. Böylece

$$\alpha y\beta = (f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots + f_n(x)y^n)y(g_0(x) + g_1(x)y + \cdots + g_m(x)y^m)$$

$$= (f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots + f_n(x)y^n)(yg_0(x) + yg_1(x)y + \cdots + yg_m(x)y^m)$$

$$= (f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots + f_n(x)y^n)(g_0(0)y + g_1(0)y^2 + \cdots + g_m(0)y^{m+1})$$

$$= (f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots + f_n(x)y^n)(0 + 0 + \cdots + 0)$$

$$=0$$

elde edilir. Diğer taraftan $h_0(x) + h_1(x)y + \cdots + h_t(x)y^t \in R$ için $\alpha x\beta = 0$, $\alpha y\beta = 0$ olduğundan $\alpha(h_0(x) + h_1(x)y + \cdots + h_t(x)y^t)\beta = \alpha h_0(x)\beta + \alpha h_1(x)y\beta + \cdots + \alpha h_t(x)y^t\beta = 0$ olur. Böylece $\alpha R\beta = 0$ elde edilir.

II.Durum: $g_0(x) = 0$ ve $f_0(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\alpha\beta = 0$ olduğundan

$$(f_0(x) + f_1(x)y + \cdots + f_n(x)y^n)(g_0(x) + g_1(x)y + \cdots + g_m(x)y^m) = 0$$

yazılır. Buradan,

$f_0(x)g_0(x) = 0$, $f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x) = 0$, $f_0(x) \neq 0$ ve $g_0(x) = 0$ olduğundan $g_1(x) = 0$ dır. $f_0(x)g_2(x) + f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_0(x) = 0$, $f_0(x) \neq 0$, $g_0(x) = 0$ ve $g_1(x) = 0$ olduğundan $g_2(x) = 0$ dır. Bu şekilde devam edilerek $f_n(x)g_m(x) = 0$, $f_n(x) \neq 0$ olduğundan $g_m(x) = 0$ bulunur.

$g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_m(x) = 0$ olması $g_m(x) \neq 0$ olmasıyla çelişir. Bu durumda I.Durum geçerlidir. Şu halde $\alpha\beta = 0$ iken $\alpha R \beta = 0$ dır. Sonuç olarak R abelyan olduğundan eşkare dönüşlü bir halkadır.

Önerme 3.2.5. R eşkare dönüşlü bir halka ve $e^2 = e \in R$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) eR sağ eşkare dönüşlü bir idealdir.

(ii) eR iki yanlı bir idealdir.

(iii) e merkezil elemandır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) eR sağ eşkare dönüşlü bir ideal olsun. eR nin sağ ideal olduğunu biliyoruz. Şimdi eR nin sol ideal olduğunu gösterelim. $i \in eR = I$ olsun. $i = ex = eex \in R^2I$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır ve $I \subseteq R^2I$ dır. eR sağ eşkare dönüşlü ideal olduğundan $y \in R$ için $eRy \subseteq eR$ iken $yRe \subseteq eR$ olur. Böylece $R^2e \subseteq eR$ dir. Buradan $R^2I = I$ olur. Böylece $ai = aex = aeex \in R^2I = I = eR$ olduğundan eR sol idealdir. Sonuç olarak eR iki yanlı ideal olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) eR iki yanlı ideal olsun. $x \in R$ ve $e^2 = e \in R$ olmak üzere, $xe = xee \in x(RR) \subseteq eR$ olduğundan $xe = er$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Buradan $exe = eer = er = xe$ olur. Herhangi bir $s \in R$ için $sexe = sxe$ dir. Buradan $sexe - sxe = 0$ yazılır. Böylece $(se - s)xe = 0$ olup, $(se - s)Re = 0$ olur. R eşkare dönüşlü olduğundan $eR(se - s) = 0$ olup, $ee(se - s) = 0$ yazılır. $e^2 = e$ olduğundan $e(se - s) = 0$ olur. Buradan $ese - es = 0$ olup, $ese = es$ dir. Böylece $ex = xe$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $f^2 = f \in R$ olmak üzere $xRf \subseteq eR$ olsun. $r \in R$ için $xrf = ey$ olacak şekilde bir $y \in R$ vardır. Böylece $exrf = ey = xrf$ ve $exrf - xrf = 0$ olur. Buradan

$(ex-x)rf=0$ olup, $(ex-x)Rf=0$ yazılır. R eşkare dönüşlü olduğundan $fR(ex-x)=0$ dır. Buradan $frex-frx=fr(ex-x)\in fR(ex-x)=0$ olup, $frex=frx$ olur. e merkezil olduğundan $efrx=frx\in eR$ olur. Dolayısıyla $fRx\subseteq eR$ olur. Şimdi $f^2=f\in R$ için $fRx\subseteq eR$ olsun. $r\in R$ için $frx=ey$ olacak şekilde $y\in R$ vardır. Böylece $efrx=ey=frx$ ve $frxe-frx=0$ olur. Buradan $fr(xe-x)=0$ olup, $fR(xe-x)=0$ yazılır. R eşkare dönüşlü olduğundan $(xe-x)Rf=0$ dır. Buradan $xerf-xrf=(xe-x)rf\in(xe-x)Rf=0$ olup, $xerf=xrf$ olur. e merkezil olduğundan $exrf=xrf\in eR$ dir ve buradan $xRf\subseteq eR$ olur. Dolayısıyla eR eşkare dönüşlü bir halkadır. ■

Sonuç 3.2.6. Bir R halkasının her temel sağ ideali eşkare dönüşlü ise, bu durumda R abelyan bir halkadır.

İspat. Her temel sağ ideal eşkare dönüşlü olsun. Bu durumda $0=0_RR$ olduğundan 0 ideali bir temel sağ idealdir. Hipotezden 0 ideali sağ eşkare dönüşlü yani R halkası eşkare dönüşlü halka olur. Önerme 3.2.5 den R abelyandır. ■

Lemma 3.2.7. Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.

(ii) $e^2=e\in R$ için $l_R(Re)\subseteq r_R(eR)$ dir.

(iii) R halkasının boştan farklı herhangi bir A altkümesi ve eşkare elemenlarının boştan farklı herhangi bir E altkümesi için $ARE=0$ ise $ERA=0$ dır.

(iv) J , R nin eşkare elemenlarının bir altkümesi tarafından üretilen bir sağ ideali olmak üzere, R nin her I,J sağ ideali için $IJ=0$ ise $JI=0$ dır.

(v) J , R nin eşkare elemenlarının bir altkümesi tarafından üretilen bir ideali olmak üzere, R nin her I,J ideali için $IJ=0$ ise $JI=0$ dır.

İspat. (i)⇒(ii) R sağ eşkare dönüşlü bir halka ve $e^2 = e \in R$ olsun. $a \in l_R(Re)$ ise, bu durumda $aRe = 0$ olur. R sağ eşkare dönüşlü bir halka olduğundan $eRa = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $a \in r_R(eR)$ olup, buradan $l_R(Re) \subseteq r_R(eR)$ bulunur.

(ii)⇒(i) $e^2 = e \in R$ için $l_R(Re) \subseteq r_R(eR)$ ve $a \in R$ için $aRe = 0$ olsun. $aRe = 0$ olduğundan $a \in l_R(Re) \subseteq r_R(eR)$ olup, buradan $a \in r_R(eR)$ olur. Sonuç olarak $eRa = 0$ olur ki bu da bize R'nin sağ eşkare dönüşlü halka olduğunu gösterir.

(i) ⇒(iii) A, R halkasının boştan farklı bir altkümesi ve E, R nin eşkare elemenlerının boştan farklı bir kümesi olmak üzere $ARE = 0$ olsun. Bu durumda herhangi bir $a \in A$ ve $e \in E$ için için $aRe = 0$ olur. R sağ eşkare dönüşlü olduğundan $eRa = 0$ olur ki, buradan $ERA = 0$ elde edilir.

(iii) ⇒(iv) J , R nin eşkare elemanlarının bir E altkümesi tarafından üretilmek üzere, I ve J , R nin sağ idealleri olsun. $IJ = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $IR \subseteq I$ ve $E \subseteq J$ olduğundan $IRE \subseteq IJ = 0$ olur ve böylece (iii) den dolayı $ERI = 0$ elde edilir. $J = \langle E \rangle = \{er | r \in R, e \in E\} = ER$ olması $JI = 0$ olmasını gerektirir.

(i)⇒(v) J, R nin eşkare elemanlarının bir E altkümesi tarafından üretilmek üzere, I ve J R nin idealleri olsun. $IJ = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $IER \subseteq IJ = 0$ olur. Her ideal aynı zamanda bir sağ ideal olduğundan $ERI = 0$ ve böylece $RERI = 0$ olur. Fakat $RER = J$ olduğundan $JI = 0$ olur.

(v) ⇒(i) $a, e^2 = e \in R$ için $aRe = 0$ olsun. Buradan $RaRReR = 0$ ve böylece (v)'ten $ReRRaR = 0$ olur. Sonuç olarak $eRa = 0$ yani R sağ eşkare dönüşlü halka olur. ■

Örnek 3.1.14'te $b^2 = b \in R$ alındığında sağ eşkare dönüşlü halkaların sınıfının homomorfik görüntüler altında kapalı olmadığı görülür.

Önerme 3.2.8. Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) Eğer R sağ eşkare dönüşlü bir halka ise, bu durumda her bir $0 \neq e^2 = e \in R$ için eRe de sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.

(ii) R halkasının bir I ideali için $R/_I$ sağ eşkare dönüşlü bir halka olsun. Eğer I birimsiz inmiş bir halka ise, bu durumda R sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.

(iii) R halkasının merkezil eşkare bir e elemanı için eR ve $(1-e)R$ halkalarının sağ eşkare dönüşlü halka olmaları için gerek ve yeter koşul R halkasınn sağ eşkare dönüşlü halka olmasıdır.

İspat. (i) R sağ eşkare dönüşlü bir halka olsun. $f^2 = f$ olmak üzere $a, f \in eRe$ ve $aeRef = 0$ olsun. $f \in eRe$ ve R sağ eşkare dönüşlü olduğundan $aRf = 0$ iken $fRa = 0$ dır. $a', f' \in R$ için $a = ea'e \in eRe$ ve $f = ef'e \in eRe$ olsun. $x \in feRea$ ise $r' \in R$ olmak üzere $x = fer'ea = ef'eer'eea'e = ef'eer'ea'e = fr''a \in fRa = 0$ dır. Dolayısıyla $feRea = 0$ dır. Buradan eRe sağ eşkare dönüşlü bir halka olur.

(ii) I, R halkasının bir ideali ve $R/_I$ sağ eşkare dönüşlü bir halka , I birimsiz inmiş bir halka olsun. $e^2 = e, a \in R$ için $aRe = 0$ olsun. $R/_I$ sağ eşkare dönüşlü olduğundan $(a+I)(r+I)(e+I) = I$ dır. Buradan $(are) + I = I$ elde edilir. Dolayısıyla $are \in I$ olur. I inmiş olduğundan terslenebilirdir, terslenebilir olduğundan dönüşlüdür ve dönüşlü olduğundan eşkare dönüşlü bir halkadır. $are \in I$ olduğundan $aRe \subseteq I$ dir. I eşkare dönüşlü olduğundan $eRa \subseteq I$ dır. $(eRaR)^2 = eRaReRaR = 0$ ise $eRaR = 0$ dır. Buradan $eRa = 0$ olur. R sağ eşkare dönüşlü bir halka olur. R halkasının sol eşkare dönüşlü olması benzer şekilde gösterilir.

(iii) $e \in R$ merkezil eşkare bir eleman olmak üzere eR ve $(1-e)R$ sağ eşkare dönüşlü olsun. $a, f^2 = f \in R$ için $aRf = 0$ olsun. Buradan $eaRf = 0$ olur. e merkezil olduğundan $aeRf = 0$ olur. eR sağ eşkare dönüşlü bir halka olduğundan $feRa = 0$ olur. Diğer taraftan $(1-e)aRf = 0$ ve $(1-e)$ eşkare olduğundan $a(1-e)Rf = 0$ dır. $(1-e)R$ sağ eşkare dönüşlü olduğundan $f(1-e)Ra = 0$ olur. $fRa = feRa + f(1-e)Ra = 0$ olduğundan R sağ eşkare dönüşlü halkadır. ∎

Örnek 3.2.9. F bir cisim olmak üzere $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ halkası sağ ve sol eşkare dönüşlü değildir. R nin sıfırdan farklı tüm öz idealleri $I_1 = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ ve $I_3 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dır ve bunların hepside inmiş halkalar değildir. Fakat $R/_{I_1} \cong F$ ve $R/_{I_2} \cong F$ ve $R/_{I_3} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I_3 \middle| a, c \in F \right\}$ inmiş halkadır. Böylece $i = 1,2,3$ için her bir $R/_{I_i}$ eşkare dönüşlü halkardır.

$n \geq 2$ için, R dönüşlü halkası üzerindeki $n \times n$ tipinde $U_n(R)$ üst üçgensel matrislerin halkasının eşkare dönüşlü olması gerekmez. Fakat bununla beraber aşağıdaki sonuca sahibiz.

Önerme 3.2.10. R bir halka ve $n \geq 2$ olmak üzere aşağıdakilerden en az biri sağlanıyorsa, bu durumda R sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.

(i) $Mat_n(R)$ sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.
(ii) $U_n(R)$ sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.
(iii) $S_n(R)$ sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.
(iv) $V_n(R)$ sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.

İspat.(i) $Mat_n(R)$ sağ eşkare dönüşlü bir halka olsun. Bu durumda Önerme 3.2.8.(1) den $R \cong RE_{11} = E_{11}Mat_n(R)\,E_{11}$ sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.

(ii) (i)'nin ispatı gibidir.

(iii) $S_n(R)$ sağ eşkare dönüşlü bir halka ve $a, e^2 = e \in R$ için $aRe = 0$ olsun. Böylece $(a\sum_{i=1}^{n} E_{ii})S_n(R)(e\sum_{i=1}^{n} E_{ii}) = 0$ olup, buradan $(e\sum_{i=1}^{n} E_{ii})S_n(R)(a\sum_{i=1}^{n} E_{ii}) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $eRa = 0$ olur ki, bu da bize R nin sağ eşkare dönüşlü bir halka olduğunu gösterir.

(iv) $V_n(R)$ sağ eşkare dönüşlü bir halka olsun. R halkasının sağ eşkare dönüşlü olması (iii) deki gibi gösterilir. ■

Sonuç 3.2.11.

(i) Eğer $T(R,R)$ aşikar genişlemesi sağ eşkare dönüşlü bir halka ise, bu durumda R halkası da sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.
(ii) n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $R[x]/_{<(x^n)>}$ sağ eşkare dönüşlü bir halka ise, bu durumda R sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.

İspat. (i) Önerme 3.2.10 (iii)'den $S_2(R) \cong T(R,R)$ olduğundan R sağ eşkare dönüşlü bir halkadır.

(ii) Önerme 3.2.10 (iv)'den $V_n(R) \cong R[x]/_{<x^n>}$ olduğundan R sağ eşkare dönüşlü bir halkadır. ■

Teorem 3.2.12. $n \geq 2$ ve R dönüşlü bir halka olsun. Bu durumda $S_n(R)$ ve $V_n(R)$ halkaları sağ eşkare dönüşlü halkalardır.

İspat. Öncelikle $n \geq 2$ için $S_n(R)$ halkasının sağ eşkare dönüşlü halka olduğunu gösterelim.

$n = 2$ için $E = \begin{pmatrix} e & u \\ 0 & e \end{pmatrix}$, $S_2(R)$ de bir eşkare eleman olsun.

$$\begin{pmatrix} e & u \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & u \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & eu + ue \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & u \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

olduğundan $e^2 = e$ ve $eu + ue = u$ olur. $e = 0$ olursa $E = 0$ olur. Bu yüzden $e \neq 0$ alalım. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in S_2(R)$ için $AS_2(R)E = 0$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $S = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix} \in S_2(R)$ için ,

$$0 = ASE = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & u \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ase & asu + ate + bse \\ 0 & ase \end{pmatrix}$$

olduğundan $ase = 0$ ve $asu + ate + bse = 0$ dır. $s \in R$ olduğundan $aRe = 0$ olur. $aRe = 0$ olduğundan $ate = 0$ olur ve $asu + bse = 0$ elde edilir. Bu eşitliği sağdan e ile çarparsak $asue + bsee = 0$ yazılır. $su \in R$ olduğundan $asue = 0$ olur. $e^2 = e$ olduğundan $0 = bsee = bse$ dir. Buradan $bRe = 0$ dır. $asu + bse = 0$ eşitliğinde $bse = 0$ eşitliğini yerine yazarsak $asu = 0$ olur. Yani $aRu = 0$ dır. R dönüşlü olduğundan $eRa = 0$, $eRb = 0$ ve $uRa = 0$ dır. Böylece

$$ESA = \begin{pmatrix} e & u \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} esa & esb + eta + usa \\ 0 & esa \end{pmatrix} = 0$$

olur. $ESA = 0$ olduğundan $ES_2(R)A = 0$ dır. Buradan $S_2(R)$ dönüşlü bir halka olur.

$n = 3$ için $\begin{pmatrix} e & u & v \\ 0 & e & w \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, $S_3(R)$ de eşkare eleman olsun.

$$\begin{pmatrix} e & u & v \\ 0 & e & w \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & u & v \\ 0 & e & w \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & eu + ue & ev + uw + ve \\ 0 & e^2 & ew + we \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & u & v \\ 0 & e & w \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

olduğundan $e^2 = e$, $eu + ue = u$, $ev + uw + ve = v$, $ew + we = w$ olur. $e = 0$ olursa $E = 0$ olur. O yüzden $e \neq 0$ alalım.

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in S_3(R)$ için $AS_3(R)E = 0$ olduğunu farzedelim. Herhangi bir $S = \begin{pmatrix} s & t & l \\ 0 & s & m \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \in S_3(R)$ için ,

$$0 = ASE = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t & l \\ 0 & s & m \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & u & v \\ 0 & e & w \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} as & at + bs & al + bm + cs \\ 0 & as & am + ds \\ 0 & 0 & as \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & u & v \\ 0 & e & w \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ase & asu + ate + bse & asv + atw + bsw + ale + bme + cse \\ 0 & ase & asw + ame + dse \\ 0 & 0 & ase \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $ase = 0$, $asu + ate + bse = 0$, $asv + atw + bsw + ale + bme + cse = 0$ ve $asw + ame + dse = 0$ dır. $n = 2$ için hesaplandığında $aRe = aRu = bRe = 0$ ve $eRa = uRa = eRb = 0$ dır. Buradan $ale = 0$ ve $bme = 0$ olduğundan $asv + atw + bsw + ale + bme + cse = 0$ eşitliği

$$asv + atw + bsw + cse = 0 \tag{11}$$

ve $ame = 0$ olduğundan $asw + ame + dse = 0$ eşitliği

$$asw + dse = 0 \tag{12}$$

şeklinde yazılır. (12) eşitliğini sağdan e ile çarparsak, $aswe + dsee = 0$ elde edilir. Buradan $dse = 0$ olur. Dolayısıyla $dRe = 0$ dır. (12) eşitliğinde bunu yerine koyarsak $asw = 0$ olur. Buradan $aRw = 0$ yazılır. (11) de $aRw = 0$ yerine yazılırsa $asv + +bsw + cse = 0$ olur. Bu eşitliği sağdan e ile çarparsak $asve + +bswe + csee = 0$ elde edilir. $asve = 0$, $bswe = 0$ olduğundan $csee = 0$ elde edilir. $cse = 0$ olduğundan $cRe = 0$ yazılır. Bunu da $asv + +bsw + cse = 0$ da yerine yazarsak $asv + +bsw = 0$ yazılır. $ew + we = w$ olduğundan $asv + +bs(ew + we) = 0$ dır. Buradan $asv + +bsew + bswe = 0$ yazılır. Böylece $aRv = 0$ ve $bRw = 0$ olur. R dönüşlü olduğundan

$$eRa = eRb = uRa = eRd = wRa = eRc = vRa = wRb = 0 \tag{13}$$

olur. $eu + ue = u$ ve (13) ten $eRd = 0$ olduğundan $uRd = (eu + ue)Rd = euRd + ueRd = 0$ olur ve $uRd = 0$ yazılır. Bu sonuçlar bize $ES_3(R)A = 0$ olduğunu gösterir. $S_3(R)$ eşkare dönüşlü halkadır.

$n = 4,5, \ldots$ için de benzer şekilde doğru olduğu görülür.

İDDİA: Her $i = 1, \dots, n$ için $e_{ii} = e$ olmak üzere $E^2 = E = (e_{ij}) \in S_n(R)$ olsun. O halde E matrisinin her bir bileşinin çarpımsal açılımındaki her teriminde e çarpanı görünür.

Gerçekten; iddianın doğruluğunu kanıtlamak için n üzerinde tümevarım uygulayalım.

$n = 2$ için $e^2 = e$ ve $\begin{pmatrix} e & e_{12} \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & e_{12} \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & ee_{12} + e_{12}e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e_{12} \\ 0 & e \end{pmatrix}$ olduğundan $e_{12} = ee_{12} + e_{12}e$ bulunur.

$n = 3$ için

$$\begin{pmatrix} e & e_{12} & e_{13} \\ 0 & e & e_{23} \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & e_{12} & e_{13} \\ 0 & e & e_{23} \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & ee_{12} + e_{12}e & ee_{13} + e_{12}e_{23} + e_{13}e \\ 0 & e^2 & ee_{23} + e_{23}e \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e & e_{12} & e_{13} \\ 0 & e & e_{23} \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

olduğundan $e_{12} = ee_{12} + e_{12}e$, $e_{23} = ee_{23} + e_{23}e$, $e_{13} = ee_{13} + e_{12}e_{23} + e_{13}e = ee_{13} + e_{12}(ee_{23} + e_{23}e) + e_{13}e$ elde edilir.

Kabul edelim ki $1 \leq i, j \leq n - 1$ için E matrisinin her bir bileşeninin çarpımsal açılımındaki her teriminde e çarpanı görünsün. Şimdi $n \geq 4$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$e_{1n} = ee_{1n} + e_{12}e_{2n} + \cdots + e_{1(n-1)}e_{(n-1)n} + e_{1n}e \tag{14}$$

$$e_{2n} = ee_{2n} + e_{23}e_{3n} + \cdots + e_{2(n-1)}e_{(n-1)n} + e_{2n}e \tag{15}$$

$$\vdots$$

$$e_{(n-2)n} = ee_{(n-2)n} + e_{(n-2)(n-1)}e_{(n-1)n} + e_{(n-2)n}e \tag{16}$$

$$e_{(n-1)n} = ee_{(n-1)n} + e_{(n-1)n}e \tag{17}$$

elde edilir. (17) eşitliğini (16) da yerine yazarsak

$$e_{(n-2)n} = ee_{(n-2)n} + e_{(n-2)(n-1)}(ee_{(n-1)n} + e_{(n-1)n}e) + e_{(n-2)n}e$$

elde edilir. $2 \leq i, j \leq n - 1$ için E matrisinin her bir bileşeninin çarpımsal açılımındaki her teriminde e çarpanı göründüğünü farzederiz. Bu şekilde e_{1n} de e ' yi içerir. Böylece iddia ispatlanmış olur.

Şimdi $n \geq 4$ için $S_n(R)$ halkasının eşkare dönüşlü olduğunu gösterelim. Her $i = 1, \dots, n$ için $a_{ii} = a$, $s_{ii} = s$, $e_{ii} = e$ olmak üzere $A = (a_{ij})$, $S = (s_{ij})$, $E^2 = E = (e_{ij}) \in S_n(R)$ olsun. Yukarıdaki iddia gereğince

$$1 \leq i,j \leq n-1 \text{ için } aRe_{ij} = 0 \text{ , } e_{ij}Ra = 0 \text{ , } a_{ij}Re = 0 \text{ , } eRa_{ij} = 0 \tag{18}$$

$$1 \leq i \leq n-3 \text{ , } 2 \leq k \leq n-2 \text{ ve } k<l \text{ için } a_{ik}Re_{kl} = 0 \text{ ve } e_{ik}Ra_{kl} = 0 \tag{19}$$

olur.

$(b_{ij}) = ASE$ olsun. İddiadan, (18) ve (19) eşitliklerinden ,

$$0 = ase_{1n} + (as_{12} + a_{12}s)e_{2n} + \cdots + (as_{1n} + \cdots + a_{1n}s)e$$

$$= ase_{1n} + a_{1n}se = b_{1n} \tag{20}$$

$$0 = ase_{2n} + \cdots + (as_{2n} + \cdots + a_{2n}s)e = ase_{2n} + a_{2n}se = b_{2n} \tag{21}$$

$$\vdots$$

$$0 = ase_{(n-2)n} + \cdots + (as_{(n-2)n} + \cdots + a_{(n-2)(n-1)}s_{(n-1)n} + a_{(n-2)n}s)e$$

$$= ase_{(n-2)n} + a_{(n-2)n}se = b_{(n-2)n} \tag{22}$$

$$0 = ase_{(n-1)n} + \cdots + (as_{(n-1)n} + \cdots + a_{(n-1)n}s)e$$

$$= ase_{(n-1)n} + a_{(n-1)n}se = b_{(n-1)n} \tag{23}$$

yazılır. (23) ü sağdan e ile çarparsak $0 = (ase_{(n-1)n} + a_{(n-1)n}se)e = a_{(n-1)n}se$ ve buradan $a_{(n-1)n}Re = 0$ ve $aRe_{(n-1)n} = 0$ dır. (22) yi sağdan e ile çarparsak $0 = (ase_{(n-2)n} + a_{(n-2)n}se)e = a_{(n-2)n}se$ ve buradan $a_{(n-2)n}Re = 0$ ve $aRe_{(n-2)n} = 0$ dır. Bu şekilde devam edilerek

$$i = 1, \ldots, n-1 \text{ için } a_{in}Re = 0 \text{ ve } aRe_{in} = 0 \tag{24}$$

elde edilir. R dönüşlü olduğundan

$$i = 1, \ldots, n-1 \text{ için } e_{in}Ra = 0 \text{ ve } eRa_{in} = 0 \tag{25}$$

olur. Buna ek olarak $k \leq n-1$ olduğundan iddiadan, (18) ve (19) eşitliklerinden,

$$1 \leq i,k \leq n-2 \qquad \text{için } a_{ik}Re_{kn} = 0 \text{ ve } e_{ik}Ra_{kn} = 0 \tag{26}$$

elde edilir. (18), (19), (24), (25), (26) eşitliklerinden $ESA = 0$ olur. Böylece $ES_n(R)A = 0$ bulunur. Yani $n \geq 2$ için $S_n(R)$ sağ eşkare dönüşlü halkadır. ∎

Sonuç 3.2.13. R dönüşlü bir halka olsun. R halkasının $T(R, R)$ trivial genişlemesi sağ eşkare dönüşlü halkadır ve herhangi bir pozitif n tamsayısı için ${R[x]}/_{<x^n>}$ sağ eşkare dönüşlü halkadır.

4. KAYNAKLAR

Anderson, D.D. and Camillo, V. (1999). Semigroups and rings whose zero products commute. *Comm. Algebra* **27(6)**: 2847-2852.

Armendariz, E.P. (1974). A note on extension of Baer and p.p.-rings. *J. Austral. Math.* Soc. **18**: 470-473.

Birkenmeier, G. F., Kim, J. Y., Park, J. K. (2001). Principally quasi-Baer rings. *Comm. Algebra* **29(2)**: 639-660.

Cohn, P.M. (1999). Reversible rings. *Bull. London Math. Soc*., **31**: 641-648.

Courter, R. C. (1969). Rings all of whose factor rings are semiprime. *Canad. Math. Bull.* **12(4)**: 417-426.

Habeb, J.M. (1990). A note on zero commutative and duo rings. *Math. J. Okayama Univ.* **32**: 73-76.

Hirano, Y. (2002). On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring. *J. Pure Appl. Algebra* **168**: 45-52.

Hwang, S. U., Jeon, Y. C., Lee, Y. (2006). Structure and topological conditions of NI rings. *J. Algebra* **302**: 186-199.

Jeon, Y. C., Kim, H. K., Lee, Y., Yoon, J. S. (2009). On weak Armendariz rings. *Bull. Korean Math. Soc.* **46(1)**: 135-146.

Kim, J. Y. (2005). Certain ring whose simple singular modules are GP-injective. *Proc. Japan Academy Ser.* A **81**: 125-128.

Kim, J. Y., Baik, J. U. (2006). On idempotent reflexive rings. *Kyungpook Math.* J. **46**: 597-601.

Kim, N. K., Lee, Y. (2000). Armendariz rings and reduced rings. *J. Algebra* **223**: 477-488.

Kim, N.K. and Lee, Y. (2003). Extensions of reversible rings, *J. Pure Appl. Algebra,* **185**: 207-223.

Kwak, T. K., Lee, Y. (2012). Reflexive Property of Rings. *Comm. Algebra* **40**: 1576-1594.

Lambek, J. (1971). On the representation of modules by sheaves of factor modules, *Canad. Math. Bull*. **14**: 359-368.

Lee, T. K., Wong, T. L. (2003). On Armendariz rings. *Houston J. Math*. **29**: 583-593.

Lee, T. K., Zhou, Y. Q. (2004). Armendariz and reduced rings. *Comm. Algebra* **32(6)**: 2287-2299.

Marks, G. (2001). On 2-primal Ore extensions. *Comm. Algebra* **29**: 2113-2123.

Marks, G. (2002). Reversible and symmetric rings. *J. Pure and Appl. Algebra* **174**: 311-318.

Mason. G. (1981). Reflexive ideals. *Comm. Algebra* **9**: 1709-1724.

McConnell, J. C., Robson, J. C. (1987). Noncommutative Noetherian Rings. New York: John Wiley & Sons Ltd.

Rege, M.B., Chhawchharia, S. (1997). Armendariz rings, Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci. **73**: 14-17.

Shepherdson, J. C. (1951). Inverses and zero-divisors in matrix ring. *Proc. London Math. Soc.* **3**: 71-85.

Shin, G. Y. (1973). Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring. *Trans. Amer. Math. Soc.* **184**: 43-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kübra GÖKTÜRK

Doğum Yeri : Bursa

Doğum Tarihi: 07.11.1988

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : İnegöl YDA Lisesi, 2006

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010