KESİRLİ

İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine Nur YILMAZOĞLU

DANIŞMAN

Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2013

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Emine Nur YILMAZOĞLU

DANIŞMAN
Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık, 2013

TEZ ONAY SAYFASI

Emine Nur YILMAZOĞLU tarafından hazırlanan "Kesirli İntegral Eşitsizlikleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 20/12/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Başkan **:** Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM . . . . . .
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.

Üye **:** Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN . . . . . .
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.

Üye **:** Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ . . . . . .
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

20/12/2013

Emine Nur YILMAZOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Emine Nur YILMAZOĞLU

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Danışman: Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Bu tez çalışmasında $J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi$ şeklinde tanımlı α-mertebeli Riemann-Liouville kesirli integral operatörü göz önüne alınmış ve bu operatörün bazı eşitsizliklere uygulanması incelenmiştir.

Daha sonra genelleştirilmiş ${}_a^{\varphi}I_x^{\alpha} f(x) = \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{p+1} - \tau^{p+1})^{\alpha-1} \tau^p f(\tau) d\tau$ kesirli integral operatörü kullanılarak bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

2013, v + 55 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli İntegraller, Kesirli İntegral Eşitsizlikleri.

ABSTRACT

M.Sc Thesis

FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES

Emine Nur YILMAZOĞLU

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Naturaland Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc.Prof.Dr.Umut Mutlu ÖZKAN

In this theis, we consider the α -th order Riemann-Liouville fractional integral operator, which is defined by $J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi$, and study its applications to some inequalities.

Later, some new integral inequalities are obtained by using generalized fractional integral operator ${}_a^{\varphi}I_x^{\alpha} f(x) = \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{p+1} - \tau^{p+1})^{\alpha-1} \tau^p f(\tau) d\tau$.

2013, v + 55 pages

Key Words: Fractional Integrals, Fractional Integral Inequalities.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca bilgilerinden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından dolayı değerli hocam sayın Doç.Dr.Umut Mutlu ÖZKAN'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme ve dostlarıma göstermiş oldukları sabır ve duydukları güven için sonsuz teşekkür ederim.

Emine Nur YILMAZOĞLU

AFYONKARAHİSAR , 2013

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET………………………………………………………………………….i

ABSTRACT………………………………………………………………………..ii

TEŞEKKÜR……………………………………………………………………….iii

İÇİNDEKİLER DİZİNİ……………………………………………………………..iv

SİMGELER DİZİNİ……………………………………………………………....v

1. GİRİŞ…………………………………………………………………………...1

   1.1 Amaç ve Kapsam…………………………………………………………1

   1.2 Literatür Özeti……………………………………………………………1

2. TEMEL KAVRAMLAR……………………………………………………..3

3. KESİRLİ (FRACTIONAL) İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ……………………10

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ……………..22

5. BAZI YENİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ.36

6. SONUÇ VE ÖNERİLER……………………………………………………..51

7. KAYNAKLAR……………………………………………………………..52

ÖZGEÇMİŞ…………………………………………………………………..56

SİMGELER DİZİNİ

$\int_a^b$	Belirli İntegral
Γ	Gamma Fonksiyonu
β	Beta Fonksiyonu
J^α	Fractional İntegral Operatörü

1.GİRİŞ

1.1 Amaç ve Kapsam

Kesirli hesabın tarihi, 17. yüzyıla dayanmaktadır. Keyfi mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve n −katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır. Bu kavramlar 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin, kesirli mertebe için diferensiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır. Bu çalışma içerisinde Kesirli integrallerin bilinen birçok formu vardır, öyle ki, bunlardan özellikle J.Hadamard ve Riemann-Liouville kesirli integralleri, 1993 te Samko, Kilbas, Marichev, 2001 de Kilbas, 2002 de Butzer, Kilbas, Trujillo, 2006 da Kilbas, Srivastava, Trujillo, 2009 da Podlubny ve tarafından yaygın olarak incelenmiştir. Katugampola'nın 2011 yılında elde etmiş olduğu genelleştirilmiş fractional integral operatörü kullanılarak bu tezde Belarbi ve Dahmani' nin senkronize fonksiyonları ele alarak ifade etmiş oldukları teoremler genelleştirilmiş ve ayrıca Dahmani tarafından çalışılmış Minkowski eşitsizliğinin de genelleştirilmesi ifade ve ispat edilmiştir.

1.2 Literatür Özeti

Kesirli diferansiyel teorisi, çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesirli türevler için önemli bir avantajdır. Kesirli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemeleri, akışkanlık teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya ve diğer birçok alanda kullanılmaktadır.

1695'te $\alpha = {}^{1}/_{2}$ −nci mertebeden türev Leibniz tarafından tanımlanmıştır. Şimdilik "**Tamsayı mertebeli olmayan Türev ve İntegral önemli bir paradokstur**" ancak bir gün bu paradoksun faydalı bir şekilde sunulacağına inanıyorum demiştir. Bu paradokstan hareketle birçok bilim insanı çeşitli araştırmalar sunmuştur. Bunlardan bazıları Riemann-Liouville, Hadamard, Grunwald-Letnikov, Riesz ve Caputo integral eşitsizlikleri 1993 te Samko, Kilbas, Marichev ve 2006 da Kilbas, Srivastava, Trujillo tarafından kesirli hesap teori ve gelişmeleriyle farklı türevler tanımlanmıştır.

Kesirli analizde; kesirli türevler, 2006 da Kilbas, Srivastava, Trujillo ve 1993 te Samko, Kilbas, Marichev tarafından bir kesirli integral yardımıyla tanımlanmıştır. Kesirli integrallerin bilinen birçok formu vardır, öyle ki, bunlardan özellikle J.Hadamard ve Riemann-Liouville kesirli integralleri, 1993 te Samko, Kilbas, Marichev, 2001 de Kilbas, 2002 de Butzer, Kilbas, Trujillo, 2006 da Kilbas, Srivastava, Trujillo ve 2009 da Podlubny tarafından yaygın olarak incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Re $\alpha > 0$ ve f , $J' = (0,\ \infty)$ da parçalı sürekli ve $J = [0,\ \infty)$ sınırlı alt aralıkta integrallenebilir olsun. O zaman t > 0 için α - inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali aşağıdaki şekildedir.

$$J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \tag{2.1}$$

Eğer $G(x,y)$, $[a,b]\times[a,b]$ üzerinde sürekli ise,

$$\int_\alpha^b dx \int_\alpha^x G(x,y)dy = \int_\alpha^b dy \int_y^b G(x,y)dx \tag{2.2}$$

yazılabilir. (2.2) ifadesine Dirichlet formülü denir.

F, Öklid düzleminde sürekli ve α , β , γ pozitif sayılar olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\int_a^t (t-x)^{\beta-1} dx \int_a^x (y-a)^{\alpha-1} (x-y)^{\gamma-1} F(x,y) dy \\ &= \int_a^t (y-a)^{\alpha-1} dy \int_y^t (t-x)^{\beta-1} (x-y)^{\gamma-1} F(x,y) dx \end{aligned} \tag{2.3}$$

eşitliği vardır (Miller and Ross 1993).

Eğer $a = 0, \alpha = 1$ ve $F(x,y) = g(x) f(y)$ ise (2.3) ifadesi

$$\begin{aligned} &\int_0^t (t-x)^{\beta-1} g(x) dx \int_0^x (x-y)^{\gamma-1} f(y) dy \\ &= \int_0^t f(y) dy \int_y^t (t-x)^{\beta-1} (x-y)^{\gamma-1} g(x) dx \end{aligned} \tag{2.4}$$

olarak yazılır.

Şimdi Riemann-Liouville fractional integral operatörünün nasıl elde edildiğini gösterelim. Bunun için,

$$\int_a^x \int_a^{\gamma_1} \int_a^{\gamma_2} \cdots \int_a^{\gamma_{n-1}} f(\gamma_n) d\gamma_n d\gamma_{n-1} \ldots d\gamma_2 d\gamma_1 \tag{2.5}$$

şeklindeki n - katlı integrali göz önüne alalım. (2.5) integralinde integrasyon sınırı ve buna bağlı olarak integralin sırasını

$a < \gamma_1 < x$	$\gamma_2 < \gamma_1 < x$
$a < \gamma_2 < \gamma_1$	$\gamma_3 < \gamma_2 < x$
$a < \gamma_3 < \gamma_2$	$\gamma_4 < \gamma_3 < x$
$\ldots$	$\ldots$
$a < \gamma_{n-2} < \gamma_{n-3}$	$\gamma_{n-1} < \gamma_{n-2} < x$
$a < \gamma_{n-1} < \gamma_{n-2}$	$\gamma_n < \gamma_{n-1} < x$
$a < \gamma_n < \gamma_{n-1}$	$a < \gamma_n < x$

tablosu yardımıyla değiştirirsek,

$$\int_a^x \int_a^{\gamma_1} \int_a^{\gamma_2} \cdots \int_a^{\gamma_{n-1}} f(\gamma_n) d\gamma_n d\gamma_{n-1} \ldots d\gamma_2 d\gamma_1 = \int_a^x f(\gamma_n) \ldots \left(\int_{\gamma_3}^x \left(\int_{\gamma_2}^x d\gamma_1 \right) d\gamma_2 \right) \ldots d\gamma_n$$

eşitliğini yazarız. Bu yeni sınırlara göre, (2.5) integrali yeniden düzenlendiğinde,

$$\int_a^x \int_a^{\gamma_1} \int_a^{\gamma_2} \cdots \int_a^{\gamma_{n-1}} f(\gamma_n) d\gamma_n d\gamma_{n-1} \ldots d\gamma_2 d\gamma_1 = \int_a^x f(\gamma_n) \ldots \left(\int_{\gamma_3}^x \left(\int_{\gamma_2}^x dy_1 \right) dy_2 \right) \ldots dy_n$$

$$= \int_a^x f(\gamma_n) \ldots \left(\int_{\gamma_3}^x (x-\gamma_2) d\gamma_2 \right) \ldots d\gamma_n$$

$$= \int_a^x f(\gamma_n) \ldots \left(\int_{\gamma_4}^x \frac{(x-\gamma_3)^2}{2} d\gamma_3 \right) \ldots d\gamma_n$$

$$\cdots$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\gamma_n)(x-\gamma_n)^{n-1} d\gamma_n$$

bulunur. Şayet burada,

$$(n-1)! = \Gamma(n)$$

olduğu göz önüne alınırsa, (2.5) ile ifade edilen n- katlı integral,

$$\int_a^x \int_a^{\gamma_1} \int_a^{\gamma_2} \ldots \int_a^{\gamma_{n-1}} f(\gamma_n) d\gamma_n d\gamma_{n-1} \ldots d\gamma_2 d\gamma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\gamma_n)(x-\gamma_n)^{n-1} d\gamma_n \qquad (2.6)$$

şeklinde yeniden yazılır(S.G. Samko , A.A. Kilbas, O.I. Marichev, 1993). (2.6) eşitliğinin sağ tarafındaki n pozitif bir tamsayıdır. Bununla birlikte Γ fonksiyonu, tamsayılar dışında da ifade edilebildiğinden n nin tamsayı olmaması durumunda da (2.6) eşitliğinin sağ tarafı için bir tanım verilebilir.

Tanım 2.1: $f(x) \in L_1(a,b)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}_{a^+}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \quad x > a \\ (\mathrm{I}_{b^-}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \quad x < a \end{aligned} \qquad (2.7)$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α - inci mertebeden sağ ve sol taraflı kesirli integral denir. Bu integraller genel olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri olarak bilinir (S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, 1993).

Tanım 2.2: $t \geq 0$ C_μ uzayında $f(t)$ reel değerli fonksiyonu için, eğer $p > \mu$ sayısı varsa

$$f(t) = t^p f_1(t)$$

dır ve burada $f_1(t) \in C([0,\infty))$ dır (Belarbi and Dahmani 2009).

Tanım 2.3: Eğer $f^{(n)} \in C_\mu$ ise $n \in R$ için C_μ^n uzayında $f(t)$ fonksiyonu vardır ve $t \geq 0$ dır (Belarbi and Dahmani 2009).

Tanım 2.4: Tanım 2.1 de de ifade edildiği gibi $\alpha \geq 0$ olmak üzere $f \in C_\mu(\mu \geq -1)$ fonksiyonu için $\alpha -$inci mertebeden Riemann-Liouville integral operatörü,

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \ , \ \alpha > 0 \ , \ t > 0 \qquad J^0 f(t) = f(t) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır (S.G. Samko , A.A. Kilbas, O.I. Marichev, 1993, Belarbi and Dahmani 2009).

Burada Γ fonksiyonu,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$$

şeklindedir. Bu integral operatörü için

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t) \ , \ \alpha \geq 0 \ , \ \beta \geq 0 \tag{2.9}$$

yarı grup ve

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^\beta J^\alpha f(t) \tag{2.10}$$

şeklinde değişme özelliğine sahiptir.(S.G. Samko , A.A. Kilbas, O.I. Marichev, 1993, Belarbi and Dahmani 2009).

$f(t) = t^{\mu}$ olmak üzere (2.8) ifadesinden,

$$J^{\alpha} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} t^{\alpha+\mu}, \quad \alpha > 0,\ \mu > -1, t > 0 \tag{2.11}$$

yazılır (Belarbi and Dahmani 2009).

Örnek 2.1: $f(t) = (t-a)^{\frac{1}{2}}$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ olması durumunda Riemann-Liouville kesirli integralini hesaplayalım.

$$(\mathrm{I}_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \qquad , \ x > a$$

integralinden,

$$(\mathrm{I}_{a^+}^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

eşitliği yazılabilir. Şayet bu eşitlikte $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ oluşu ve $t = a + (x-a)\tau$ şeklindeki değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 ((x-a)\tau)^{\frac{1}{2}} (x-a)^{-\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} (x-a) d\tau$$

$$= \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau$$

yazılır. Burada,

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

şeklindeki β fonksiyonu göz önüne alınırsa verilen integral

$$(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau$$

$$= \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \beta(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{1!}$$

$$= \frac{(x-a)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}(x-a)}{2}$$

olarak hesaplanır. Buradan,

$f(t) = (t-a)^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ – inci mertebeden kesirli integralinin,

$$\frac{\sqrt{\pi}(x-a)}{2}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.2: Şimdi elde edilen $f(t) = \frac{\sqrt{\pi}(x-a)}{2}$ şeklindeki integral fonksiyonunun tekrar $\alpha = \frac{1}{2}$ için Riemann- Lioville integralini hesaplarsak,

$$(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^x \frac{\sqrt{\pi}(x-a)}{2} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(x-a)\tau(x-a)^{-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}(x-a)d\tau = \frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2} \int_0^1 \tau(1-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau$$

$$= \frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2} \beta(2, \frac{1}{2}) = \frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2} \beta(2, \frac{1}{2}) = \frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})}$$

$$=\frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{1!\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{4}{3}=\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}$$

olduğunu görürüz. Örnek 2.1 ve Örnek 2.2 den; bir fonksiyonun ard arda iki defa $\alpha=\frac{1}{2}$ -inci mertebeden integrali (Yani iki kez yarım integrali alınırsa) alınırsa bu sonuç, fonksiyonun klasik integraline eşittir.

3. KESİRLİ (FRACTIONAL) İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Chebyshev eşitliği olarak bilinen

$$T(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right) \qquad (3.1)$$

şeklindeki eşitliği göz önüne alınsın. Burada f ve g fonksiyonları integrallenebilir ve $[a,b]$ aralığı üzerinde sekronize fonksiyonlardır. Yani her $x, y\in[a,b]$ için $\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)\geq 0$ dır (Chebyshev 1882).

Bu bölümde kesirli integral kullanılarak (3.1) fonksiyonu için bazı eşitsizlikler elde edilecektir (Malamud 2001, Marinkovic et al. 2008, Pachpatte 2006).

Teorem 3.1: f ve g, $[0,\infty)$ da sekronize iki fonksiyon, $t>0$ ve $\alpha>0$ olmak üzere,

$$J^{\alpha}(fg)(t)\geq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}}J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t) \qquad (3.2)$$

dir (Belarbi and Dahmani 2009).

İspat : $\tau\geq 0$ ve $\rho\geq 0$ şartları altında f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ sekronize iki fonksiyon ise,

$$\big(f(\tau)-f(\rho)\big)\big(g(\tau)-g(\rho)\big)\geq 0 \qquad (3.3)$$

eşitsizliğinden,

$$\begin{gathered} f(\tau)g(\tau)-f(\tau)g(\rho)-f(\rho)g(\tau)+f(\rho)g(\rho)\geq 0 \\ f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho)\geq f(\tau)g(\rho)+f(\rho)g(\tau) \end{gathered} \qquad (3.4)$$

elde edilir.(3.4) ün her iki tarafı $\tau \in (0,t)$ için $\dfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho) \\ &\geq \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\rho) + \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\tau) \end{aligned} \tag{3.5}$$

yazılır.Elde edilen bu (3.5) eşitsizliğinin her iki tarafının $(0,t)$ aralığı üzerinden integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)g(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\rho)g(\rho)d\tau \\ &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)g(\rho)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\rho)g(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)g(\tau)d\tau = J^{\alpha}(fg)(t)$$

ifadesi (3.6) da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} &J^{\alpha}(fg)(t) + f(\rho)g(\rho)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &\geq \frac{g(\rho)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau + \frac{f(\rho)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) de

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = J^{\alpha}(1)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = J^{\alpha} f(t) \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau = J^{\alpha} g(t)$$

ifadeleri yazılırsa,

$$J^{\alpha}(fg)(t) + f(\rho)g(\rho)J^{\alpha}(1) \geq g(\rho)J^{\alpha} f(t) + f(\rho)J^{\alpha} g(t) \tag{3.9}$$

elde edilir.(3.9) un her iki tarafı $\rho \in (0,t)$ için $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} &\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} J^{\alpha}(fg)(t) + \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho)J^{\alpha}(1) \\ &\geq \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(\rho)J^{\alpha} f(t) + \frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)J^{\alpha} g(t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

olacaktır. Yine (3.10) un $(0,t)$ aralığı üzerinden integrali alınırsa;

$$\frac{J^{\alpha}(fg)(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}d\rho+\frac{J^{\alpha}(1)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}f(\rho)g(\rho)d\rho$$

$$\geq \frac{J^{\alpha}f(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}g(\rho)d\rho+\frac{J^{\alpha}g(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}f(\rho)d\rho \tag{3.11}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\rho)^{\alpha-1}d\rho = J^{\alpha}(1), \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\rho)^{\alpha-1}f(\rho)g(\rho)d\rho = J^{\alpha}(fg)(t)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}g(\rho)d\rho = J^{\alpha}g(t) \quad , \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}f(\rho)d\rho = J^{\alpha}f(t)$$

integralleri (3.11) de yerine yazılırsa,

$$J^{\alpha}(fg)(t)J^{\alpha}(1)+J^{\alpha}(fg)(t)J^{\alpha}(1)\geq J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)+J^{\alpha}g(t)J^{\alpha}f(t)$$

$$2J^{\alpha}(fg)(t)J^{\alpha}(1)\geq 2J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)$$

$$J^{\alpha}(fg)(t)J^{\alpha}(1)\geq J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t) \tag{3.12}$$

$$J^{\alpha}(fg)(t)\geq \frac{1}{J^{\alpha}(1)}J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2: f ve g, $[0,\infty)$ aralığında sekronize iki fonksiyon olsun. Böylece her $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ için,

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J^{\beta}(fg)(t)+\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)} J^{\alpha}(fg)(t) \geq J^{\alpha} f(t) J^{\beta} g(t)+J^{\beta} f(t) J^{\alpha} g(t) \tag{3.13}$$

dir (Belarbi and Dahmani 2009).

İspat: $\tau \geq 0$ ve $\rho \geq 0$ olmak üzere f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında sekronize iki fonksiyon ise,

$$\big(f(\tau)-f(\rho)\big)\big(g(\tau)-g(\rho)\big) \geq 0 \tag{3.14}$$

yazılır ve buradan

$$\begin{gathered} f(\tau)g(\tau)-f(\tau)g(\rho)-f(\rho)g(\tau)+f(\rho)g(\rho) \geq 0 \\ f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho) \geq f(\tau)g(\rho)+f(\rho)g(\tau) \end{gathered} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15) in her iki tarafı $\tau \in (0,t)$ için $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{gathered} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\tau)+\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\rho) \\ \geq \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)g(\rho)+\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\rho)g(\tau) \end{gathered} \tag{3.16}$$

olacaktır. Yine burada (3.16) nın her iki tarafının $(0,t)$ aralığı üzerinde integrali alınırsa,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)g(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\rho)g(\rho)d\tau$$
$$\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)g(\rho)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\rho)g(\tau)d\tau \tag{3.17}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)g(\tau)d\tau = J^{\alpha}(fg)(t)$$

ifadesi (3.17) de yerine yazılırsa,

$$J^{\alpha}(fg)(t) + f(\rho)g(\rho)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$
$$\geq \frac{g(\rho)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau + \frac{f(\rho)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.18) de

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = J^{\alpha}(1)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau = J^{\alpha} f(t) \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau)d\tau = J^{\alpha} g(t)$$

eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$J^{\alpha}(fg)(t)+f(\rho)g(\rho)J^{\alpha}(1)\geq g(\rho)J^{\alpha}f(t)+f(\rho)J^{\alpha}g(t) \tag{3.20}$$

bulunur. (3.20) ifadesinin her iki tarafı $\dfrac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}&\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}J^{\alpha}(fg)(t)+\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}f(\rho)g(\rho)J^{\alpha}(1)\\&\geq\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}g(\rho)J^{\alpha}f(t)+\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}f(\rho)J^{\alpha}g(t)\end{aligned} \tag{3.21}$$

yazılır. (3.21) in $(0,t)$ aralığında integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}&\frac{J^{\alpha}(fg)(t)}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}d\rho+\frac{J^{\alpha}(1)}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}f(\rho)g(\rho)d\rho\\&\geq\frac{J^{\alpha}f(t)}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}g(\rho)d\rho+\frac{J^{\alpha}g(t)}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}f(\rho)d\rho\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir.

(3.22) deki integraller yerine

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}d\rho=J^{\beta}(1)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}f(\rho)g(\rho)d\rho=J^{\beta}(fg)(t)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}g(\rho)d\rho=J^{\beta}g(t)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1} f(\rho)d\rho = J^\beta f(t)$$

ifadeleri yazılırsa,

$$J^\alpha(fg)(t)J^\beta(1)+J^\alpha(1)J^\beta(fg)(t) \geq J^\alpha f(t)J^\beta g(t)+J^\alpha g(t)J^\beta f(t) \quad (3.23)$$

bulunur.

Buradan,

$$\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}J^\alpha(fg)(t)+\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\beta(fg)(t) \geq J^\alpha f(t)J^\beta g(t)+J^\alpha g(t)J^\beta f(t) \quad (3.24)$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 3.1: (3.2) ve (3.3) ifadelerindeki fonksiyonlar $[0,\infty)$ da sekronize değilse (3.2) ve (3.3) eşitsizlikleri yön değiştirir. $\forall x, y \in [0,\infty)$ için $\left(f(x)-f(y)\right)\left(g(x)-g(y)\right) \leq 0$ dır (Belarbi and Dahmani 2009).

Uyarı 3.2: Teorem 3.2 de $\alpha = \beta$ alırsak Teorem 3.1 elde edilir.

Teorem 3.3: $(f_i)_{i=1,\dots,n,}\, n, [0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. O zaman $t>0, \alpha>0$ için,

$$J^\alpha\left(\prod_{i=1}^n f_i\right)(t) \geq \left(J^\alpha(1)\right)^{1-n}\prod_{i=1}^n J^\alpha f_i(t) \quad (3.25)$$

dir (Belarbi and Dahmani 2009).

İspat: Teorem, tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir.

$n=1$ için her $t>0, \alpha>0$ olduğu zaman

$$J^{\alpha}(f_1)(t) \geq J^{\alpha}(f_1)(t)$$

elde edilir.

$n=2$ için her $t>0, \alpha>0$ olduğu zaman (3.6) dan

$$J^{\alpha}(f_1 f_2)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha}(f_1)(t) J^{\alpha}(f_2)(t)$$

elde edilir.

Şimdi de tümevarım hipotezinden $t>0, \alpha>0$ için,

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{2-n} \prod_{i=1}^{n-1} J^{\alpha} f_i(t) \tag{3.26}$$

olduğu kabul edelim.

$(f_i)_{i=1,\dots,n}$ fonksiyonları pozitif artan fonksiyonlar olduğundan, $(\prod_{i=1}^{n-1} f_i)(t)$ fonksiyonu artandır. Dolayısıyla Teorem 3.1, $\prod_{i=1}^{n-1} f_i = g$, $f_n = f$ fonksiyonlarına uygulanırsa,

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) = J^{\alpha}(fg)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t) J^{\alpha}(f_n)(t) \tag{3.27}$$

elde edilir.

(3.26) hipotezi dikkate alınarak,

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1}\left(\left(J^{\alpha}(1)\right)^{2-n}\left(\prod_{i=1}^{n-1} J^{\alpha} f_i\right)(t)\right) J^{\alpha}(f_n)(t) \tag{3.28}$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4: $\alpha \geq 0, p \geq 1$ için, f ve g $[0,\infty)$ aralığında pozitif fonksiyonlar ve $\forall t > 0$ için; $J^{\alpha} f^{p}(t) < \infty$, $J^{\alpha} g^{p}(t) < \infty$ olsun. Eğer $0 < m \leq \dfrac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M$, $\tau \in [0,t]$ ise,

$$[J^{\alpha} f^{p}(t)]^{\frac{1}{p}} + [J^{\alpha} g^{p}(t)]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1+M(m+2)}{(m+1)(M+1)} [J^{\alpha}(f+g)^{p}(t)]^{\frac{1}{p}} \qquad (3.29)$$

dir (Dahmani 2010).

İspat : $\tau \in [0,t], t > 0$ için, $\dfrac{f(\tau)}{g(\tau)} < M$ olduğundan,

$$(M+1)^{p} f^{p}(\tau) \leq M^{p} (f+g)^{p}(\tau) \qquad (3.30)$$

yazabiliriz.

(3.30) un her iki tarafı $\dfrac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{(M+1)^{p}}{\Gamma(\alpha)} (t-\tau)^{\alpha-1} f^{p}(\tau) \leq \frac{M^{p}}{\Gamma(\alpha)} (t-\tau)^{\alpha-1} (f+g)^{p}(\tau) \qquad (3.31)$$

elde edilir. (3.31) in her iki tarafın $\tau \in (0,t)$ aralığında integrali alınırsa;

$$\frac{(M+1)^{p}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f^{p}(\tau) d\tau \leq \frac{M^{p}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} (f+g)^{p}(\tau) d\tau \qquad (3.32)$$

elde edilir. Buradaki (3.32) ifadesine

$$J^{\alpha} f^{p}(t) \leq \frac{M^{p}}{(M+1)^{p}} J^{\alpha}(f+g)^{p}(t) \qquad (3.33)$$

dir. Buradan

$$[J^{\alpha} f^{p}(t)]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{M}{M+1}[J^{\alpha}(f+g)^{p}(t)]^{\frac{1}{p}} \tag{3.34}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $mg(\tau) \leq f(\tau)$ eşitsizliğini kullanarak;

$$(1+\frac{1}{m})g(\tau) \leq \frac{1}{m}(f(\tau)+g(\tau))$$

yazılabilir. Buradan

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{p} g^{p}(\tau) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^{p}(f(\tau)+g(\tau))^{p} \tag{3.35}$$

elde edilir.(3.35) in her tarafı $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ çarpılırsa;

$$\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{p} g^{p}(\tau) \leq \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{m}\right)^{p}(f(\tau)+g(\tau))^{p} \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.36) nın her iki tarafı $\tau \in (0,t)$ aralığında integrali alınırsa;

$$\int_{0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{p} g^{p}(\tau)d\tau \leq \int_{0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{m}\right)^{p}(f(\tau)+g(\tau))^{p} d\tau \tag{3.37}$$

yazılır. (3.37) deki ifadeler yerine yazılacak olursa;

$$\left[J^{\alpha}g^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{m+1}\left[J^{\alpha}(f+g)^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.38}$$

elde edilir. Bu da (3.34) ve (3.38) in birlikte ispatıdır.

Teorem 3.5: $\alpha \ge 0, p \ge 1$ için, f ve g $[0,\infty)$ aralığında pozitif fonksiyonlar ve $\forall t > 0$ için; $J^{\alpha} f^{p}(t) < \infty$, $J^{\alpha} g^{p}(t) < \infty$ olsun. Eğer $0 < m \le \frac{f(\tau)}{g(\tau)} \le M,\ \tau \in [0,t]$ ise

$$\left[J^{\alpha} f^{p}(t)\right]^{\frac{2}{p}} + \left[J^{\alpha} g^{p}(t)\right]^{\frac{2}{p}} \ge \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} - 2\right)\left[J^{\alpha} f^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}}\left[J^{\alpha} g^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.39}$$

dir (Dahmani 2010).

İspat: (3.34) ve (3.38) eşitsizlikleri çarpılırsa;

$$\frac{(M+1)(m+1)}{M}\left[J^{\alpha} f^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}}\left[J^{\alpha} g^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\left[J^{\alpha}((f+g)(t))^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^{2} \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.40) ın sağ tarafına Minkowsky eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(\left[J^{\alpha}(f(t)+g(t))^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^{2} \le \left(\left[J^{\alpha} f^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[J^{\alpha} g^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}}\right)^{2}$$

yazılır. Buradan

$$\left[J^{\alpha}(f(t)+g(t))^{p}\right]^{\frac{2}{p}} \le \left[J^{\alpha} f^{p}(t)\right]^{\frac{2}{p}} + \left[J^{\alpha} g^{p}(t)\right]^{\frac{2}{p}} + 2\left[J^{\alpha} f^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}}\left[J^{\alpha} g^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.41}$$

elde edilir.(3.40) ve (3.41) kullanılarak (3.39) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Biz ilk olarak Cauchy integral formülü yardımıyla,

$$ {}_aI_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau; \quad \alpha > 0, x > a \tag{4.1} $$

şeklindeki Riemann – Liouville kesirli (fractional) integralini

$$ \int_a^x d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)d\tau_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau \tag{4.2} $$

n - katlı integrali yardımıyla ifade etmiştik (S.G.Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, 1993).

Aynı şekilde,

$$ {}_aI_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{\tau} \right)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau; \quad \alpha > 0, x > a \tag{4.3} $$

şeklindeki Hadamard kesirli (fractional) integrali,

$$ \int_a^x \frac{d\tau_1}{\tau_1} \int_a^{\tau_1} \frac{d\tau_2}{\tau_2} \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} \frac{f(\tau_n)}{\tau_n} d\tau_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (\log \frac{x}{\tau})^{n-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \tag{4.4} $$

eşitliği ile elde edilir (Hadamard 1892).

Şimdi burada, hem Riemann – Liouville hem de Hadamard kesirli (fractional) integralinin genellemesi olan fractional integrasyonundan bahsedilecektir. $\alpha, \rho \neq -1$ reel sayılar olmak üzere, (2.5) ve (2.6) olduğu gibi

$$\int_a^x \tau_1{}^{\rho} d\tau_1 \int_a^{\tau_1} \tau_2{}^{\rho} d\tau_2 \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} \tau_n{}^{\rho} f(\tau_n) d\tau_n$$

$$= \frac{(\rho+1)^{1-n}}{(n-1)!} \int_a^x (t^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{n-1} \tau^{\rho} f(\tau) d\tau \tag{4.5}$$

dir. Böylece,

$${}_a^{\varphi} I_x^{\alpha} f(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^{\rho} f(\tau) d\tau \tag{4.6}$$

dır (Katugampola 2011).

$X_c^p(a,b)(c \in R, 1 \le p \le \infty), [a,b]$ de tanımlı kompleks değerli Lebesgue ölçülebilir, yani $\| f \|_{X_c^p} < \infty$, f fonksiyonlarının uzayıdır. Burada norm fonksiyonu,

$$\| f \|_{X_c^p} < \infty = \left(\int_a^b \left| t^c f(t) \right|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad (1 \le p \le \infty, c \in R) \tag{4.7}$$

dır. $p = \infty$ için,

$$\| f \|_{X_c^{\infty}} = ess \sup_{a \le t \le b} \left[t^c \left| f(t) \right| \right], \quad (c \in R) \tag{4.8}$$

şeklindedir.

Özellikle $c = \dfrac{1}{p} (1 \le p \le \infty)$ olduğu zaman X_c^p uzayı klasik $L^p(a,b)$ uzayı ile çakışır.

Genelleştirilmiş integral için türev formülü tanımlamak için, $n \in N = \{1, 2, \cdots\}$, $p \in R$ ve $\alpha \geq 0$ için, $n-katlı$ integral,

$$f(x) = \int_a^x \tau_1{}^\rho d\tau_1 \int_a^{\tau_1} \tau_2{}^\rho d\tau_2 \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} \tau_n{}^\rho f(\tau_n) d\tau_n \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlansın (Katugampola 2011). Dirichlet tekniği kullanılarak,

$$\int_a^x \tau_1{}^\rho d\tau_1 \int_a^{\tau_1} \tau^\rho f(\tau) d\tau = \int_a^x \tau^\rho f(\tau) d\tau \int_\tau^x \tau_1{}^\rho d\tau_1$$

$$= \frac{1}{\rho+1} \int_a^x \left(x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1} \right) \tau^\rho f(\tau) d\tau$$

bulunur (Podlubny 1999). Yukarıdaki adım $n-1$ defa tekrar edildiğinde,

$$\begin{aligned} &\int_a^x \tau_1{}^\rho d\tau_1 \int_a^{\tau_1} \tau_2{}^\rho d\tau_2 \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} \tau_n{}^\rho f(\tau_n) d\tau_n \\ &= \frac{(\rho+1)^{1-n}}{(n-1)!} \int_a^x \left(x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1} \right)^{n-1} \tau^\rho f(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Böylece genelleştirilmiş Fractional integral operatörü

$${}_a^\rho I_x^\alpha f(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^\rho f(\tau) d\tau \tag{4.11}$$

şeklindedir. Burada α ve $\rho \neq -1$ reel sayılardır.

$\rho = 0$ olduğu zaman hem Riemann – Liouville hem de Caputo kesirli türevlerinin tanımları kullanılarak standart Riemann – Liouville kesirli integrali elde edilir (Kilbas *et* *al.* 2006, Podlubny 1999, Samko *et al.* 1993). L'Hospital kuralı kullanılarak, $\rho \to -1^+$ olduğunda,

$$\lim_{\rho \to -1^+} \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^\rho f(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \lim_{\rho \to -1^+} \left(\frac{x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1}}{\rho+1} \right)^{\alpha-1} \tau^\rho f(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$$

elde edilir. Bu da bilinen Hadamard kesirli (fractional) (4.3) integralidir (Butzer *et al.* 2002 a,b, Kilbas 2001, Kilbas *et al.* 2006, Podlubny 1999).

Hadamard kesirli integrali, yaygın bir şekilde çalışılmıştır, özellikle Hadamard türü kesirli hesaplar Kilbas tarafından (2001), nitelik ve yarı-grup özellikleri Butzer, Kilbas, Trujillo tarafından (2002), Mellin dönüşümleri Butzer, Kilbas, Trujillo tarafından (2002) ve G-dönüşüm temsilcileri Kilbas, Trujillo (2003) sadece bazılarıdır.

Şimdi n. mertebeden türevlerin

$$f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \ldots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \ldots$$

sonsuz dizisini gözönüne alalım. Bu dizi, keyfi mertebeden diferensiyel düşüncesi altında tekrarlanan diferensiyelin bir genelleştirilmesidir. Burada temel amaç $\frac{d^n}{dx^n}$ sembolü ile gösterilen operatörün n tamsayı değerli parametresini, tamsayı olmayan bir α parametresiyle yer değiştirilmektir.

Genel kesirli türevleri vermeden önce yarım türev de denen bir türev formülü elde ederek bir uygulamama yapalım ve daha sonra genel kesirli türev formülleri verelim.

Bunun için $f(x)=x^k$ şeklindeki fonksiyonu ele alalım. Burada k pozitif bir tam sayıdır. Ele aldığımız fonksiyonun α. mertebeden klasik türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^k \\
f^{'}(x) &= kx^{k-1} \\
f^{''}(x) &= k(k-1)x^{k-2} \\
f^{'''}(x) &= k(k-1)(k-2)x^{k-3} \\
&\ldots \\
f^{(\alpha)}(x) &= k(k-1)(k-2)\ldots(k-\alpha+1)x^{k-\alpha} \\
&= \frac{k!}{(k-\alpha)}x^{k-\alpha}
\end{aligned}$$

yazılır. Yine burada $\Gamma(n)=(n-1)!$ olduğundan dolayı

$$f^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}x^{k-\alpha} \tag{4.12}$$

eşitliği ifade edilir. Buradaki α sayısını herhangi bir pozitif sayı olarak seçerek fonksiyonun kesirli türevlerini hesaplayabiliriz.

Biran için kabul edelim ki $f(x)=x^k$ fonksiyonu ve α için $\alpha=\frac{1}{2}$ ve $k=2$ olsun. Bu durumda fonksiyonun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini (4.12) eşitliği yardımıyla hesaplamak mümkündür.

$$f^{(\alpha)}(x)=\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x)=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}x^{k-\alpha} \text{ eşitliğinden}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^2=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)}x^{2-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^2=\frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}}$$

$$\Gamma(\frac{5}{2})=\Gamma(1+\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\Gamma(1+\frac{3}{2})=\frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^2=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$$

bulunur. Burada elde edilen yarım türevin tekrar yarım türevi alınırsa,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^2\right)=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\right)=2x$$

olduğu kolayca görülür. Bu da iki yarım türevin bir tam türev oluşunu verir.

Yukarıda yaptığımız uygulamaya benzer olarak $f(x)=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$ alalım ve bu fonksiyonun $\alpha=\frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin $f(x)=x^2$ olduğunu gösterelim. Yani bir fonksiyonun yarım türevininin yarım integralinin kendisine eşit olduğunu gösterelim. Özel olarak $\alpha=0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integrali

$$(I^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \qquad x>0$$

olarak yazılır. Kabuller altında $f(x)=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonunun $\alpha=\frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin,

$$(I^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{\alpha}^{x} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}}, \qquad x > 0$$

$$= \frac{8}{3\pi} \int_0^1 (ux)^{\frac{3}{2}} (x-ux)^{-\frac{1}{2}} x du, \qquad t = ux$$

$$= \frac{8}{3\pi} x^2 \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{8}{3\pi} x^2 B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{3\pi} x^2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{3\pi} x^2 \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= x^2$$

olduğu görülür.

Şimdi kesirli türev için daha genel bir tanım verelim. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad x > a \tag{4.13}$$

Abel integral tipli denklemi ele alalım.

(4.13) ifadesinde x yerine t, t yerine s yazalım. Elde edilen ifadenin her iki yanını $(x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{-\alpha} t^{\rho}$ ile çarparak a dan x e kadar integralini alırsak,

$$(\rho+1)^{1-\alpha} \int_a^x \frac{t^{\rho} dt}{(x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha}} \int_a^x \frac{\varphi(s) ds}{(t^{\rho+1} - s^{\rho+1})^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{t^{\rho} f(t)}{(x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha}} dt \tag{4.14}$$

olacaktır. Burada Dirichlet formülü olarak bilinen (2.2) eşitliğinden (4.14) ifadesi

$$\begin{aligned}(\rho+1)^{1-\alpha} \int_a^x \varphi(s) \left(\int_s^x \frac{t^{\rho}}{(x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha} (t^{\rho+1} - s^{\rho+1})^{1-\alpha}} dt \right) ds \\ = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{t^{\rho} f(t)}{(x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha}} dt\end{aligned} \tag{4.15}$$

olarak yazılır. Elde edilen bu (4.15) ifadesinin sol tarafındaki iç integralde $t^{\rho+1}=s^{\rho+1}+\tau^{\rho+1}(x^{\rho+1}-s^{\rho+1})$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{t^\rho}{(x^{\rho+1}-t^{\rho+1})^\alpha (t^{\rho+1}-s^{\rho+1})^{1-\alpha}}dt &= \frac{1}{\rho+1}\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau \\ &= \frac{1}{\rho+1}\beta(\alpha,1-\alpha) \\ &= \frac{1}{\rho+1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)} \\ &= \frac{1}{\rho+1}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifade (4.15) de yerine yazılırsa,

$$(\rho+1)^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \varphi(s)ds=\Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{t^\rho f(t)}{(x^{\rho+1}-t^{\rho+1})^\alpha}dt$$

$$\int_a^x \varphi(s)ds=\frac{(\rho+1)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{t^\rho f(t)}{(x^{\rho+1}-t^{\rho+1})^\alpha}dt$$

olur. Buradaki son eşitliğin her iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$$\varphi(x)=\frac{(\rho+1)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{t^\rho f(t)}{(x^{\rho+1}-t^{\rho+1})^\alpha}dt \tag{4.16}$$

olacaktır. Bu da

$$({}^\rho D_{a^+}^\alpha f)(x)=\frac{(\rho+1)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{t^\rho f(t)}{(x^{\rho+1}-t^{\rho+1})^\alpha}dt \tag{4.17}$$

şeklinde de yazılır. Elde edilen (4.17) ifadesine α. mertebeden kesirli türev denir.

Bu türeve Riemann-Liouville kesirli türevi de denmektedir.

Şimdi $X_c^p(a,b)$ uzayının sınırlılığını ve $\rho\geq c$ için $X_c^p(a,b)$ uzayında iyi tanımlanmış ${}_a^\rho I_t^\alpha$ kesirli integral operatörünün genelleştirilmesini inceleyelim.

Teorem 4.1: $\alpha > 0,\ 1 \le p \le \infty,\ 0 < a < b < \infty$ ve $p \in \Re,\ c \in \Re$ öyle ki $\rho \ge c$ olsun. Bu durumda ${}_a^\rho I_t^\alpha$ operatörü, $X_c^p(a,b)$ de sınırlıdır ve

$$\left\| {}_a^\rho I_t^\alpha f \right\|_{X_c^p} \le K \| f \|_{X_c^p} \tag{4.18}$$

dır. Burada,

$$K = \frac{b^{\alpha(\rho+1)-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{b}{a}} u^{c-\alpha(\rho+1)-1} \left(\frac{u^{\rho+1}-1}{\rho+1} \right)^{\alpha-1} du\,, \qquad \rho \ne -1$$

dir (Katugampola 2011).

İspat: İlk olarak $1 \le p \le \infty$ olsun. $f(t) \in X_c^p(a,b)$ olduğunda $t^{c-\frac{1}{p}} f(t) \in L_p(a,b)$ olur ve genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliği uygulanabilir. O halde,

$$\left\| {}_a^\rho I_t^\alpha f \right\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b x^{cp} \left| \frac{1}{(\rho+1)^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(x^{\rho+1} - t^{\rho+1} \right)^{\alpha-1} t^\rho f(t) dt \right|^p \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{x^c}{x^{\frac{1}{p}}} t^\rho \left(\frac{x^{\rho+1} - t^{\rho+1}}{\rho+1} \right)^{\alpha-1} f(t) dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x x^{c-\frac{1}{p}} t^\rho \left(\frac{t^{\rho+1}\left(\frac{x^{\rho+1}}{t^{\rho+1}} - 1\right)}{\rho+1} \right)^{\alpha-1} f(t) dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x x^{c-\frac{1}{p}} t^{\alpha(\rho+1)-1} \left(\frac{\left(\frac{x}{t}\right)^{\rho+1} - 1}{\rho+1} \right)^{\alpha-1} f(t) dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Burada $\frac{x}{t}=u$ dönüşümü yapılırsa;

$$\left\| {}_a^\rho I_t^\alpha f \right\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{x}{a}} x^{c-\frac{1}{p}} \left(\frac{x}{u}\right)^{\alpha(\rho+1)-1} \left(\frac{u^{\rho+1}-1}{\rho+1}\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{x}{u}\right) \frac{x}{u^2}\, du \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \int_1^{\frac{x}{a}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{u^{\alpha(\rho+1)+1}} \left(\frac{u^{\rho+1}-1}{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \left(\int_a^b \left| x^{c-\frac{1}{p}} x^{\alpha(\rho+1)} f\left(\frac{x}{u}\right) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} du$$

$$\leq \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{u^{\rho+1}-1}{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{u^{\alpha(\rho+1)+1}} \left(\int_a^b x^{cp} \left| f\left(\frac{x}{u}\right) \right|^p \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{p}} du\, b^{\alpha(\rho+1)}$$

$$= \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{u^{\rho+1}-1}{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \frac{b^{\alpha(\rho+1)}}{u^{\alpha(\rho+1)+1}} \left(\int_{\frac{a}{u}}^{\frac{b}{u}} u^{cp} t^{cp} \left| f(t) \right|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} du$$

$$= \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{b^{\alpha(\rho+1)}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{u^{\rho+1}-1}{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \frac{u^c}{u^{\alpha(\rho+1)+1}} \left(\int_{\frac{a}{u}}^{\frac{b}{u}} \left| t^c f(t) \right|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} du$$

elde edilir ve böylece

$$\left\| {}_a^\rho I_t^\alpha f \right\|_{X_c^p} \leq \mathrm{M} \left\| f \right\|_{X_c^p}$$

dir. Burada

$$M=\frac{b^{\alpha(\rho+1)}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\frac{b}{a}}u^{c-\alpha(\rho+1)-1}\left(\frac{u^{\rho+1}-1}{\rho+1}\right)^{\alpha-1}du;\quad 1\le p<\infty \tag{4.19}$$

dir. $1\le p<\infty$ için teorem ispatlanmış olur. $p=\infty$ için (4.7) ve (4.11) den $u=\frac{x}{\tau}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\left|x^c\left({}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{t}f\right)(x)\right|\le\frac{1}{(\rho+1)^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\tau^{\rho}\left(\frac{x}{\tau}\right)^c\left|\tau^c f(t)\right|d\tau$$

$$=\frac{b^{\alpha(\rho+1)}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\frac{b}{a}}u^{c-\alpha(\rho+1)-1}\left(\frac{u^{\rho+1}-1}{\rho+1}\right)^{\alpha-1}du$$

elde edilir. Bu, yukarıdaki (4.13) ile aynıdır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.1 in özel olarak $\rho\to-1^{+}$ olduğu zamanki versiyonu ispatlandı (Kilbas 2001). Teorem 4.1 de $c=1/p$ yazılarak ve (4.7) dikkate alınarak $L^p(a,b)$ uzayında ${}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{t}$ operatörünün sınırlılığı görülür (Katugampola 2011).

Sonuç 4.1: $\alpha>0, 1\le p\le\infty,\ 0<a<b<\infty$ ve $p\in\Re$ alalım öyle ki, $\rho\ge\frac{1}{p}$ olsun. ${}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{t}$ operatörü $L^p(a,b)$ de sınırlıdır ve

$$\left\|{}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{t}f\right\|_p\le \mathrm{K}\left\|f\right\|_p \tag{4.20}$$

dir. Burada K , (4.13) de c nin yerine $\frac{1}{p}$ alınarak elde edilir (Katugampola 2011).

Aşağıdaki teorem ile integral operatörünün yarı grup özelliği verilmiştir.

Teorem 4.2: $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ 1 \le p \le \infty,\ 0 < a < b < \infty$ ve $p \in \Re$, $c \in \Re$ alalım, öyle ki $\rho \ge c$ olsun. Buradan $f \in X_c^p(a,b)$ için yarı grup özelliği sağlanır. Yani;

$$ {}_a^\rho I_t^\alpha \, {}_a^\rho I_t^\beta = {}_a^\rho I_t^{\alpha+\beta} f \tag{4.21}$$

dir (Katugampola 2011).

İspat: Fubini Teoremi ve ayrıca Dirichlet tekniği kullanılarak f fonksiyonu için,

$$ {}_a^\rho I_t^\alpha \, {}_a^\rho I_t^\beta f(x) = \frac{1}{(\rho+1)^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^\rho d\tau $$

$$ \times \frac{1}{(\rho+1)^{\beta-1}\Gamma(\beta)} \int_a^\tau (\tau^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\beta-1} t^\rho f(t) dt $$

$$ = \frac{1}{(\rho+1)^{\alpha+\beta-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x t^\rho f(t) \int_t^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{\alpha-1} \tag{4.22}$$

$$ \times (\tau^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\beta-1} \tau^\rho d\tau dt $$

elde edilir.

$y = \dfrac{\left(\tau^{\rho+1} - t^{\rho+1}\right)}{\left(x^{\rho+1} - t^{\rho+1}\right)}$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$ \int_t^x \left(x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \left(\tau^{\rho+1} - t^{\rho+1}\right)^{\beta-1} \tau^\rho d\tau = \frac{\left(x^{\rho+1} - t^{\rho+1}\right)^{\alpha+\beta-1}}{\rho+1} \int_0^1 \left(1-y\right)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy $$

$$= \frac{\left(x^{\rho+1} - t^{\rho+1}\right)^{\alpha+\beta-1}}{\rho+1} \beta(\alpha,\beta)$$

$$= \frac{\left(x^{\rho+1} - t^{\rho+1}\right)^{\alpha+\beta-1}}{\rho+1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (4.23)$$

elde edilir (Kilbas *et al.* 2006, Podlubny 1999). O halde (4.16) ve (4.17) den,

$${}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{t}\,{}^{\rho}_{a}I^{\beta}_{t} f(x) = \frac{(\rho+1)^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x t^{\rho} f(t) \frac{(x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha+\beta-1}}{\rho+1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} dt$$

$$= \frac{(\rho+1)^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha+\beta-1} t^{\rho} f(t) dt \qquad (4.24)$$

$$= {}^{\rho}_{a}I^{\alpha+\beta}_{t} f(x)$$

bulunur ve böylece "yeterince iyi" f fonksiyonu için Teorem 4.1 ispatlanmış olur.

Eğer $\rho \geq c$ ise; Teorem 4.2 den ${}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{t}\,{}^{\rho}_{a}I^{\beta}_{t}$ ve ${}^{\rho}_{a}I^{\alpha+\beta}_{t}$ operatörleri $X^{p}_{c}(a,b)$ de sınırlı ve böylece (4.15) ifadesi $f \in X^{p}_{c}(a,b)$ için doğrudur. Bu da Teorem 4.1 in ispatını tamamlar.

Sonuç 4.2: $\alpha > 0, \beta > 0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a < b < \infty$ olsun ve $\rho \geq 1/p$ olacak şekilde $\rho \in R$ olsun. $f \in L^{p}(a,b)$ için (4.15) yarı grup özelliği sağlanır (Katugampola 2011).

Tanım 4.1: $\Re$ reel eksende sonlu bir aralık, $\Omega=[a,b]\left(-\infty<a<b<\infty\right)$ olsun. $\alpha\in C-$inci mertebeden $x>a$ ve $\text{Re}(\alpha)>0$ için ${}^{\rho}\mathrm{I}_{a^+}^{\alpha}$ genelleştirilmiş kesirli (fractional) integrali

$$\left({}^{\rho}\mathrm{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\rho} f(t)}{(x^{\rho+1}-t^{\rho+1})^{1-\alpha}}dt \tag{4.25}$$

şeklinde tanımlanır (Katugampola 2011). Bu integrale sol taraflı kesirli (fractional) integral denir. Benzer olarak $x<b$ ve $\text{Re}(\alpha)>0$ için ${}^{\rho}\mathrm{I}_{b^-}^{\alpha}$ sağ taraflı kesirli (fractional) integrali tanımlanabilir.

$$\left({}^{\rho}\mathrm{I}_{b^-}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{t^{\rho} f(t)}{(t^{\rho+1}-x^{\rho+1})^{1-\alpha}}dt \tag{4.26}$$

5. BAZI YENİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümle genelleştirilmiş kesirli integral operatörü kullanılarak bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Teorem 5.1: f ve g, $[0,\infty)$ senkronize iki fonksiyon olsun. Böylece $t>0, \alpha>0$ ve $\rho\neq -1$ olmak üzere,

$$ {}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(fg)(t) \geq \frac{(\rho+1)^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}} \, {}_a^{\rho}I_x^{\alpha} f(t) \, {}_a^{\rho}I_x^{\alpha} g(t) \tag{5.1} $$

dir.

İspat : $\xi\geq 0$ ve $\eta\geq 0$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon ise,

$$ \left(f(\xi)-f(\eta)\right)\left(g(\xi)-g(\eta)\right)\geq 0 \tag{5.2} $$

yazılır ve buradan

$$ \begin{gathered} f(\xi)g(\xi)-f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi)+f(\eta)g(\eta)\geq 0 \\ f(\xi)g(\xi)+f(\eta)g(\eta)\geq f(\xi)g(\eta)+f(\eta)g(\xi) \end{gathered} \tag{5.3} $$

elde edilir.(5.3) ün her iki tarafı $\xi\in(0,t)$ için $(\rho+1)^{1-\alpha}\dfrac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\xi^{\rho}$ ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
&(\rho+1)^{1-\alpha}\frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\xi^{\rho}f(\xi)g(\xi)\\
&\quad+(\rho+1)^{1-\alpha}\frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\xi^{\rho}f(\eta)g(\eta)\\
&\geq(\rho+1)^{1-\alpha}\frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\xi^{\rho}f(\xi)g(\eta)\\
&\quad+(\rho+1)^{1-\alpha}\frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\xi^{\rho}f(\eta)g(\xi)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

yazılır.(5.4) ün her iki tarafının (a,x) aralığında ξ 'ye göre integrali alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\xi^{\rho}f(\xi)g(\xi)d\xi\\
&\quad+\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\xi^{\rho}f(\eta)g(\eta)d\xi\\
&\geq\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\xi^{\rho}f(\xi)g(\eta)d\xi\\
&\quad+\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\xi^{\rho}f(\eta)g(\xi)d\xi
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\xi^{\rho}f(\xi)g(\xi)d\xi={}_{a}^{\rho}I_x^{\alpha}(fg)(t)$$

$$\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\xi^{\rho}f(\eta)g(\eta)d\xi=f(\eta)g(\eta)\,{}_{a}^{\rho}I_x^{\alpha}(1)$$

$$\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\xi^{\rho}f(\xi)g(\eta)d\xi=g(\eta)\,{}_{a}^{\rho}I_x^{\alpha}(f)(t)$$

$$\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\xi^{\rho} f(\eta)g(\xi)\,d\xi = f(\eta)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(g)(t)$$

ifadeleri (5.5) de yerine yazılırsa;

$${}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(fg)(t)+f(\eta)g(\eta)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(1)\geq g(\eta)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}f(t)+f(\eta)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}g(t) \qquad (5.6)$$

elde edilir.(5.6) nın her iki tarafı $\eta\in(0,t)$ için $\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^{\rho}$ ile çarpalım

$$\begin{aligned}
&\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^{\rho}\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(fg)(t)\\
&\quad+\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^{\rho} f(\eta)g(\eta)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(1)\\
&\geq\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^{\rho} g(\eta)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}f(t)\\
&\quad+\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^{\rho} f(\eta)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}g(t)
\end{aligned} \qquad (5.7)$$

(5.7) nin her iki tarafının (a,x) aralığında η ‘ye göre integralini alalım.

$$\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,{}_a^\rho I_x^\alpha(fg)(t)\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^\rho d\eta$$
$$+\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,{}_a^\rho I_x^\alpha(1)\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^\rho f(\eta)g(\eta)d\eta$$
$$\geq\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,{}_a^\rho I_x^\alpha f(t)\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^\rho g(\eta)d\eta$$
$$+\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,{}_a^\rho I_x^\alpha g(t)\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^\rho f(\eta)d\eta \tag{5.8}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,{}_a^\rho I_x^\alpha(fg)(t)\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^\rho d\eta={}_a^\rho I_x^\alpha(fg)(t)\,{}_a^\rho I_x^\alpha(1)$$

$$\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,{}_a^\rho I_x^\alpha(1)\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^\rho f(\eta)g(\eta)d\eta={}_a^\rho I_x^\alpha(fg)(t)\,{}_a^\rho I_x^\alpha(1)$$

$$\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,{}_a^\rho I_x^\alpha f(t)\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^\rho g(\eta)d\eta={}_a^\rho I_x^\alpha f(t)\,{}_a^\rho I_x^\alpha g(t)$$

$$\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,{}_a^\rho I_x^\alpha g(t)\int_a^x\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^\rho f(\eta)d\eta={}_a^\rho I_x^\alpha g(t)\,{}_a^\rho I_x^\alpha f(t)$$

ifadeleri (5.8) de yerine yazılırsa;

$$2\,{}_a^\rho I_x^\alpha(fg)(t)\,{}_a^\rho I_x^\alpha(1)\geq 2\,{}_a^\rho I_x^\alpha(f)(t)\,{}_a^\rho I_x^\alpha(g)(t)$$

Buradan

$${}_a^\rho I_x^\alpha(fg)(t)\geq\frac{1}{{}_a^\rho I_x^\alpha(1)}\,{}_a^\rho I_x^\alpha(f)(t)\,{}_a^\rho I_x^\alpha(g)(t) \tag{5.9}$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 5.1: Eğer (5.1) ifadesinde $\rho = 0$ alınırsa, (3.2) ifadesi elde edilir. $\rho \to -1^{+}$ için (5.1) ifadesinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$ {}_{a}I_{x}^{\alpha}(fg)(t) \geq \Gamma(\alpha+1)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-\alpha} {}_{a}I_{x}^{\alpha}(f)(t)\, {}_{a}I_{x}^{\alpha}(g)(t) $$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.2: f ve g, $[0,\infty)$ da senkronize iki fonksiyon olsun. Böylece her $t>0$, $\alpha,\beta>0$ ve $\rho \neq -1$ için,

$$ \begin{aligned} &\frac{(\rho+1)^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{(x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\beta}}\, {}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}(fg)(t) + \frac{(\rho+1)^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^{\alpha}}\, {}_{a}^{\rho}I_{x}^{\beta}(fg)(t) \\ &\geq {}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}(f)(t)\, {}_{a}^{\rho}I_{x}^{\beta}(g)(t) + {}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}(g)(t)\, {}_{a}^{\rho}I_{x}^{\beta}(f)(t) \end{aligned} \tag{5.10} $$

dir.

İspat :

$\xi \geq 0$ ve $\eta \geq 0$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon ise,

$$ \left(f(\xi)-f(\eta)\right)\left(g(\xi)-g(\eta)\right) \geq 0 \tag{5.11} $$

yazılır ve buradan

$$ \begin{aligned} &f(\xi)g(\xi)-f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi)+f(\eta)g(\eta) \geq 0 \\ &f(\xi)g(\xi)+f(\eta)g(\eta) \geq f(\xi)g(\eta)+f(\eta)g(\xi) \end{aligned} \tag{5.12} $$

elde edilir.

(5.12) nin her iki tarafı $\xi \in (0,t)$ için $(\rho+1)^{1-\alpha} \dfrac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\rho}$ ile çarpılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(\rho+1)^{1-\alpha} \frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\rho} f(\xi) g(\xi) \\
&\quad +(\rho+1)^{1-\alpha} \frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\rho} f(\eta) g(\eta) \\
&\geq (\rho+1)^{1-\alpha} \frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\rho} f(\xi) g(\eta) \\
&\quad +(\rho+1)^{1-\alpha} \frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\rho} f(\eta) g(\xi)
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

yazılır.(5.13) ün her iki tarafının (a,x) aralığında ξ ‘ye göre integrali alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^x (\rho+1)^{1-\alpha} \frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\rho} f(\xi) g(\xi) d\xi \\
&\quad +\int_a^x (\rho+1)^{1-\alpha} \frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\rho} f(\eta) g(\eta) d\xi \\
&\geq \int_a^x (\rho+1)^{1-\alpha} \frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\rho} f(\xi) g(\eta) d\xi \\
&\quad +\int_a^x (\rho+1)^{1-\alpha} \frac{\left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\rho} f(\eta) g(\xi) d\xi
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \xi^{\rho} f(\xi) g(\xi) d\xi = {}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(fg)(t)$$

ifadesi (5.14) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(fg)(t)+\frac{(p+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \xi^{\rho} f(\eta) g(\eta) d\xi \\
&\geq \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \xi^{\rho} f(\xi) g(\eta) d\xi \\
&+\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \xi^{\rho} f(\eta) g(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{5.15}$$

elde edilir.(5.15) deki integraller yerine

$$\begin{aligned}
&\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \xi^{\rho} f(\eta) g(\eta) d\xi = f(\eta) g(\eta)\, {}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(1) \\
&\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \xi^{\rho} f(\xi) g(\eta) d\xi = g(\eta)\, {}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(f)(t) \\
&\frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\xi^{\rho+1}\right)^{\alpha-1} \xi^{\rho} f(\eta) g(\xi) d\xi = f(\eta)\, {}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(g)(t)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

ifadeleri yazılırsa,

$${}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(fg)(t)+f(\eta)g(\eta)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(1) \geq g(\eta)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}f(t)+f(\eta)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}g(t) \tag{5.17}$$

bulunur. (5.17) nin her iki tarafı $\eta \in (0,t)$ için $\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^{\rho}$ ile çarpılırsa;

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^{\rho}\,{}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}(fg)(t)\\
&\quad+\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^{\rho}f(\eta)g(\eta)\,{}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}(1)\\
&\geq\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^{\rho}g(\eta)\,{}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}f(t)\\
&\quad+\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^{\rho}f(\eta)\,{}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}g(t)
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

yazılır.

(5.18) in her iki tarafının (a,x) aralığında η ‘ye göre integralini alınırsa;

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\,{}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}(fg)(t)\int_{a}^{x}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^{\rho}d\eta\\
&\quad+\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\,{}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}(1)\int_{a}^{x}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^{\rho}f(\eta)g(\eta)d\eta\\
&\geq\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\,{}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}f(t)\int_{a}^{x}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^{\rho}g(\eta)d\eta\\
&\quad+\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\,{}_{a}^{\rho}I_{x}^{\alpha}g(t)\int_{a}^{x}\left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^{\rho}f(\eta)d\eta
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

elde edilir. (5.19) daki integraller yerine yazılırsa;

$$\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\ {}_a^\rho I_x^\alpha\,(fg)(t)\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^\rho d\eta = {}_a^\rho I_x^\alpha\,(fg)(t)\,{}_a^\rho I_x^\beta\,(1)$$

$$\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\ {}_a^\rho I_x^\alpha\,(1)\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^\rho f(\eta)\,g(\eta)\,d\eta = {}_a^\rho I_x^\beta\,(fg)(t)\,{}_a^\rho I_x^\alpha\,(1)$$

$$\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\ {}_a^\rho I_x^\alpha f(t)\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}\eta^\rho g(\eta)\,d\eta = {}_a^\rho I_x^\alpha f(t)\,{}_a^\rho I_x^\beta g(t) \tag{5.20}$$

$$\frac{(\rho+1)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}\ {}_a^\rho I_x^\alpha g(t)\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\eta^{\rho+1}\right)^{\beta-1}\eta^\rho f(\eta)\,d\eta = {}_a^\rho I_x^\alpha g(t)\,{}_a^\rho I_x^\beta f(t)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}&{}_a^\rho I_x^\alpha\,(fg)(t)\,{}_a^\rho I_x^\beta\,(1)+{}_a^\rho I_x^\alpha\,(1)\,{}_a^\rho I_x^\beta\,(fg)(t)\\ &\geq {}_a^\rho I_x^\alpha f(t)\,{}_a^\rho I_x^\beta\,(g)(t)+{}_a^\rho I_x^\alpha g(t)\,{}_a^\rho I_x^\beta\,(f)(t)\end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 5.2: Teorem 5.2 de $\alpha=\beta$ alırsak Teorem 5.1 elde edilir.

Uyarı 5.3: (5.1) ve (5.10) ifadelerindeki fonksiyonlar $[0,\infty)$ da senkronize değilse (5.1) ve (5.10) eşitsizlikleri yön değiştirir. $\forall \xi,\eta\in[0,\infty)$ için $\left(f(\xi)-f(\eta)\right)\left(g(\xi)-g(\eta)\right)\leq 0$ dır.

Teorem 5.3: $\left(f_i\right)_{i=1,\ldots,n}$, $[0,\infty)$ da pozitif artan fonksiyonlar olsun. O zaman $t>0,\ \alpha>0$ ve $\rho\neq -1$ için

$$ {}_a^\rho I_x^\alpha\left(\prod_{i=1}^n f_i\right)(t)\geq\left(\frac{(\rho+1)^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)}{(x^{\rho+1}-a^{\rho+1})^\alpha}\right)^{1-n}\prod_{i=1}^n {}_a^\rho I_x^\alpha f_i(t) \tag{5.22}$$

dir.

İspat : Teorem tümevarım metoduyla ispatlanacak.

$n=1$ için her $t>0,\ \alpha>0$ olduğu zaman

$${}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(f_1\right)(t)\geq {}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(f_1\right)(t)$$

elde edilir.

$n=2$ için her $t>0,\ \alpha>0$ olduğu zaman (4.21) uygulanırsa;

$${}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(f_1f_2\right)(t)\geq\left({}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(1)\right)^{-1}{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(f_1\right)(t)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(f_2\right)(t)$$

elde edilir.

Şimdi tümevarım hipotezinden $t>0,\alpha>0$ için,

$${}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right)(t)\geq\left({}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(1)\right)^{2-n}\prod_{i=1}^{n-1}{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}f_i(t) \qquad (5.23)$$

olduğu varsayılsın.

$\left(f_i\right)_{i=1,\dots,n}$ fonksiyonları pozitif artan fonksiyonlar olduğundan $\left(\prod_{i=1}^{n-1}{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}f_i\right)(t)$ artan fonksiyondur. Dolayısıyla Teorem 5.1, $\prod_{i=1}^{n-1}f_i=g$, $f_n=f$ fonksiyonlarına uygulanırsa,

$${}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(t)={}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(fg\right)(t)\geq{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(1)^{-1}\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right)(t)\,{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(f_n\right)(t) \qquad (5.24)$$

elde edilir.

(5.23) hipotezi dikkate alınarak,

$$ {}_a^{\rho}I_x^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq \left({}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(1)\right)^{-1}\left(\left({}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(1)\right)^{2-n}\left(\prod_{i=1}^{n-1} {}_a^{\rho}I_x^{\alpha} f_i\right)(t)\right) {}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(f_n)(t) \quad (5.25) $$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.4: $\alpha \geq 0,\ p \geq 1$ ve $\rho \neq -1$ için, f ve g, $[0,\infty)$ aralığında pozitif fonksiyonlar ve $\forall t > 0$ için; ${}_a^{\rho}I_x^{\alpha} f^p(t) < \infty$, ${}_a^{\rho}I_x^{\alpha} g^p(t) < \infty$ olsun. Eğer $0 < m \leq \dfrac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M,\ \tau \in [0,t]$ ise

$$ [{}_a^{\rho}I_x^{\alpha} f^p(t)]^{\frac{1}{p}} + [{}_a^{\rho}I_x^{\alpha} g^p(t)]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1+M(m+2)}{(m+1)(M+1)}[{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(f+g)^p(t)]^{\frac{1}{p}} \quad (5.26) $$

dir.

İspat: $\tau \in [0,t],\ t > 0$ için, $\dfrac{f(\tau)}{g(\tau)} < M$ durumu kullanılırsa;

$$ (M+1)^p f^p(\tau) \leq M^p (f+g)^p(\tau) \quad (5.27) $$

yazabiliriz. (5.27) nin her iki tarafı $\left(\rho+1\right)^{1-\alpha} \dfrac{\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau^{\rho}$ ile çarpılırsa;

$$ \begin{aligned} &\left(\rho+1\right)^{1-\alpha} \frac{\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau^{\rho}(M+1)^p f^p(\tau) \\ &\leq \left(\rho+1\right)^{1-\alpha} \frac{\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau^{\rho}M^p(f+g)^p(\tau) \end{aligned} \quad (5.28) $$

(5.28) in her iki tarafın $\tau \in (a,x)$ aralığında integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}&\int_a^x \left(\rho+1\right)^{1-\alpha}\frac{\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau^{\rho}(M+1)^{p}f^{p}(\tau)d\tau\\ &\le\int_a^x \left(\rho+1\right)^{1-\alpha}\frac{\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau^{\rho}M^{p}(f+g)^{p}(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{5.29}$$

elde edilir.

(5.29) daki ifadeler yerine yazılacak olunursa;

$${}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{x} f^{p}(t)\le\frac{M^{p}}{(M+1)^{p}}\,{}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{x}(f+g)^{p}(t) \tag{5.30}$$

yazılır. Buradan,

$$[{}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{x} f^{p}(t)]^{\frac{1}{p}}\le\frac{M}{M+1}[{}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{x}(f+g)^{p}(t)]^{\frac{1}{p}} \tag{5.31}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $mg(\tau)\le f(\tau)$ eşitsizliğini kullanarak;

$$(1+\frac{1}{m})g(\tau)\le\frac{1}{m}(f(\tau)+g(\tau))$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{p}g^{p}(\tau)\le\left(\frac{1}{m}\right)^{p}(f(\tau)+g(\tau))^{p} \tag{5.32}$$

elde edilir.(5.32) nin her tarafı $\left(\rho+1\right)^{1-\alpha}\dfrac{\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau^{\rho}$ çarpılırsa;

$$\begin{aligned}&\left(\rho+1\right)^{1-\alpha}\frac{\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau^{\rho}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{p}g^{p}(\tau)\\&\le\left(\rho+1\right)^{1-\alpha}\frac{\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau^{\rho}\left(\frac{1}{m}\right)^{p}(f(\tau)+g(\tau))^{p}\end{aligned}\tag{5.33}$$

elde edilir.(5.33) ün her iki tarafı $\tau\in(a,x)$ aralığında integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}&\int_a^x\left(\rho+1\right)^{1-\alpha}\frac{\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau^{\rho}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{p}g^{p}(\tau)d\tau\le\\&\int_a^x\left(\rho+1\right)^{1-\alpha}\frac{\left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau^{\rho}\left(\frac{1}{m}\right)^{p}(f(\tau)+g(\tau))^{p}d\tau\end{aligned}\tag{5.34}$$

yazılır.

(5.34) deki ifadeler yerine yazılacak olursa;

$$\left[{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}g^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}}\le\frac{1}{m+1}\left[{}_a^{\rho}I_x^{\alpha}(f+g)^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}}\tag{5.35}$$

elde edilir. Böylece (5.31) ve (5.35) birlikte ispat tamamlanır.

Uyarı 5.4: Eğer (5.26) ifadesinde $\rho=0$ alınırsa, (3.29) ifadesi elde edilir. $\rho\to-1^{+}$ için (5.26) ifadesinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$[{}_aI_x^{\alpha}f^{p}(t)]^{\frac{1}{p}}+[{}_aI_x^{\alpha}g^{p}(t)]^{\frac{1}{p}}\le\frac{1+M(m+2)}{(m+1)(M+1)}[{}_aI_x^{\alpha}(f+g)^{p}(t)]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde Minkowski Hadamard fractional integral eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.5: $\alpha \geq 0, p \geq 1$ ve $\rho \neq -1$ için f ve g $[0,\infty)$ aralığında pozitif fonksiyonlar ve $\forall t > 0$ için ${}_a^\rho I_x^\alpha f^p(t) < \infty$, ${}_a^\rho I_x^\alpha g^p(t) < \infty$ olsun. Eğer $0 < m \leq \dfrac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M,\ \tau \in [0,t]$ ise,

$$\left[{}_a^\rho I_x^\alpha f^p(t)\right]^{\frac{2}{p}} + \left[{}_a^\rho I_x^\alpha g^p(t)\right]^{\frac{2}{p}} \geq \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} - 2\right)\left[{}_a^\rho I_x^\alpha f^p(t)\right]^{\frac{1}{p}}\left[{}_a^\rho I_x^\alpha g^p(t)\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (5.36)$$

dir.

İspat: (5.31) ve (5.35) eşitsizlikleri çarpılırsa;

$$\frac{(M+1)(m+1)}{M}\left[{}_a^\rho I_x^\alpha f^p(t)\right]^{\frac{1}{p}}\left[{}_a^\rho I_x^\alpha g^p(t)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\left[{}_a^\rho I_x^\alpha ((f+g)(t))^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)^2 \qquad (5.37)$$

elde edilir.

(5.37) nin sağ tarafına Minkowski eşitsizliğini uygulayacak olursak;

$$\left(\left[{}_a^\rho I_x^\alpha (f(t)+g(t))^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)^2 \leq \left(\left[{}_a^\rho I_x^\alpha f^p(t)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[{}_a^\rho I_x^\alpha g^p(t)\right]^{\frac{1}{p}}\right)^2$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}\left[{}_a^\rho I_x^\alpha (f(t)+g(t))^p\right]^{\frac{2}{p}} &\leq \left[{}_a^\rho I_x^\alpha f^p(t)\right]^{\frac{2}{p}} + \left[{}_a^\rho I_x^\alpha g^p(t)\right]^{\frac{2}{p}} \\ &\quad + 2\left[{}_a^\rho I_x^\alpha f^p(t)\right]^{\frac{1}{p}}\left[{}_a^\rho I_x^\alpha g^p(t)\right]^{\frac{1}{p}}\end{aligned} \qquad (5.38)$$

elde edilir.(5.37) ve (5.38) kullanılarak (5.36) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 5.5: Eğer (5.36) ifadesinde $\rho = 0$ alınırsa, (3.39) ifadesi elde edilir. $\rho \to -1^{+}$ için (5.36) ifadesinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\left[{}_{a}I_{x}^{\alpha} f^{p}(t)\right]^{\frac{2}{p}} + \left[{}_{a}I_{x}^{\alpha} g^{p}(t)\right]^{\frac{2}{p}} \geq \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} - 2\right) \left[{}_{a}I_{x}^{\alpha} f^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}} \left[{}_{a}I_{x}^{\alpha} g^{p}(t)\right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde Minkowski Hadamard fractional integral eşitsizliği elde edilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez de öncelikle Rieamann-Liouville kesirli inteagrali göz önüne alınmış bu operatörün integral eşitsizliklerine uygulamaları incelenmiştir. Daha sonra Rieamann-Liouville ve Hadamard kesirli integral operatörlerinin genelleştirilmesi incelenmiştir. Bu genelleştirmede ρ 'nun durumuna göre interagrallerin tipleri elde edilmiştir. $\rho = 0$ için bilinen Rieamann-Liouville kesirli integrali, $\rho \to -1^{+}$ için Hadamard kesirli inregralinin elde edildiği görülmüştür. Ayrıca Belarbi ve Dahamni'nin senkronize fonksiyonları göz önüne alarak elde etmiş oldukları integral eşitsizlikleri bu genelleştirilmiş fractional integral operatörü yardımıyla genelleştirilerek ifade ve ispat edilmiştir. Bu yeni sonuçlar tezin beşinci bölümünde yer almakta olup literatüre katkı sağlayacağı düşüncesindeyiz.

7. KAYNAKLAR

A.El Farissi, Z.Latreuch and B. Belaidi, (2009), Hadamard-type inequalities for twicw differentiable functions, *RGMIA* **12**, no. 1, 7 pp.

S. Belarbi and Z. Dahmani, (2009) On some new fractional integral inequalities, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **10:** 1-5.

L.Bougoffa, (2006), On Minkowski and Hardly integral inequality, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.* **7**, no. 2, Article 60, 3 pp.

P.L Butzer , A.A Kilbas, (2002), J.J. Trujillo, Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **269,** 387-400.

P.L Butzer , A.A Kilbas, (2002), J.J. Trujillo, Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type faractional integrals, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **269** 1-27.

P.L. Chebyshev, (1882), Sur les expressions approximatives des integrals definies par les autres prises entre les mémes limites, *Proc. Math. Soc. Charkov*, **2**, 93-98.

S.S Dragomir, C.E.M. Pearse, 2000, Selected Topic Hermite-Hadamard Inequalities, *Monographs:hhtp//rgmia.vu.edu.au/monographs/hermite hadamard.html, Victoria University*.

A. Florea and C.P. Niculescu, (2007), A Hermite-Hadamard inequality for convex-concave symmetric functions, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* (N.S.) **50(98),** no. 2, 149-156.

R. Gorenflo and F. Mainardi, 1997, Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, Fractals and fractional calculus in continuum mevhanics *(Udine, 1996), 223-276, CISM Courses and Lectures*, **378**, Springer, Vienna.

R.Gorenflo and F.Maınardı, (1997), Fractional Calculus:Integral and Differential Equations of Fractional Order, *Springer Verlag*, *Wien*, 223-276

J. Hadamard, (1893), Etudesur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonction considree par Riemann, *J.Math. Pures et Appl*. **58**, 171-215.

J. Hadamard, (1892), Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor, *Journal Pure and Applied Mathematics,* **4 (8)** 101-186.

Ch. Hermite, (1883), Sur deux limites d'une integrale define, *Mathesis* **3** 82.

N. Kalın, (2012), Genelleştirilmiş Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi.

A.A. Kilbas, (2001), Hadamard-type fractional calculus, *Journal of Korean Mathematical Society* **38 (6)** 1191-1204.

A.A Kilbas, J.J. Trujillo, (2003),Hadamard-type integrals as G-transforms, *Integral Transforms and Special Functions* **14 (5)** 413-427.

A.A Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, (2006), Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier B.V., Amsterdam, Netherlands.

S.M.Malamud, (2001), Some complemets to the Jenson and Chebyshev inequqlities and problem of W.Walter, *Proc.Amer.Math.Soc.*, **129**(9), 2671-2678.

A.W. Marshall and I.Olkin, (1979), Inequalities: Theory of Majoration and Applications, *Academic Press*.

S. Marinkovic, P. Rajkovic and M. Stankovic, (2008), The inequalities for some types q-integrals, *Comput. Math. Appl.* **56** 2490-2498.

Miller, K.S., Ross, B. (1974). An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential equations, *John Wiley&Sons*, New York.

Miller, K.S., Ross, B. (1993). An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, *John Wiley*, New York.

Miller, K.S., Ross, B. (1993). An Introduction to the Fractional Calculus and fractional differential equations, *John Wiley&Sons*, USA, **199,** p. 2

C.P. Niculescu and L.E. Persson,(2006), Convex functions and their applications, A comtemporary approach, *CMS Books in Mathematics*, vol. **23**, Springer Verlag, New York.

K.B. Oldham, J. Spanier,(1974), The Fractional Calculus, *Academic Press*, New York.

E. Set, M. E. Ozdemir and S.S. Dragomir,(2010), On the Hermite-Hadamard Inequality and Other Integral Inequalities Involving Two Functions, *J. Inequal. Appl.***,** Art. ID 148102.

S. Özen and İ. Öztürk,(2004), Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevi üzerine, *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, **20**(1-2), 66-76 Kayseri.

I.Podlubny,(1999) Fractional Differential Equations, *Academic Press*, SanDiego, California-USA.

S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev,(1993) Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon et alibi, .

Z. Dahmani,(2010), On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration, *Ann. Funct. Anal*. 1 , no. **1**, 51–58.

A. Akkurt and H. Yıldırım,(2013), Genelleştirilmiş Kesirli Türevler, Genelleştirilmiş kesirli integraller ve uygulamaları, to appear.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı-Soyadı : Emine Nur YILMAZOĞLU

Doğum Tarihi : 17.11.1987

Doğum Yeri : BAKIRKÖY

Eğitim Bilgileri

Lise : Mersin Tevfik Sırrı Gür Süper Lisesi

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Böl. (2007-2011)

Pedagojik Formasyon : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2011-2012)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2011-)

Yüksek Lisans Ana Bilim Dalı : Matematik

Yüksek Lisans Bilim Dalı : Uygulamalı Matematik

İletişim Bilgileri

Mail : nur_9465@hotmail.com