

DOĞANIN FRAKTAL GEOMETRİSİ

Dilek YILMAZ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs, 2013

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DOĞANIN FRAKTAL GEOMETRİSİ

Dilek YILMAZ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS, 2013

TEZ ONAY SAYFASI

Dilek YILMAZ tarafından hazırlanan "Doğanın Fraktal Geometrisi" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca/...../2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

Başkan : Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.

Üye : Doç. Dr. Erdoğan HALAT
Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fak.

Üye : Doç. Dr. Derya SAĞLAM
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,

- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,

- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,

- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,

- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,

- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

16.02.2013

Dilek YILMAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DOĞANIN FRAKTAL GEOMETRİSİ

Dilek YILMAZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

Bu tez çalışmasında, giderek artan bir öneme sahip olan doğanın fraktal geometrisi ve genel özellikleri verilmiştir. Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrılarak fraktallarla ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde Fraktal geometri ve yapısı incelenmiştir. Dördüncü bölümde fraktal geometrinin özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde fraktal tipleri incelenmiştir. Altıncı bölümde ise doğanın fraktal geometrisi incelenmiş ve son bölümde kaynaklara yer verilmiştir.

2013, ix+57 sayfa

Anahtar Kelimeler: Doğanın Fraktal Geometrisi, Fraktal Boyut, L-Sistemler, Kendine Benzerlik

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

GEOMETRY OF THE NATURE

Dilek YILMAZ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

In this thesis, increasingly important fractal geometry of nature and its general properties are given. The thesis consists of seven chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and a general knowledge of fractals is given. In the second chapter, we have given the basic concepts. In the third chapter, fractal geometry and structure of fractal geometry are examined. In the fourth chapter, properties of fractal geometry are determined. In the sixth chapter, geometry of nature is examined and in the last chapter, sources are given.

2013, ix+57 pages

Key Words: Geometry of Nature, Fractal Dimension, L-Systems, Self-Similarity

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Çalışmam boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle çalışmalarına katkıda bulunan ve beni yönlendiren danışmanım Sayın Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE (Afyon Kocatepe Üniversitesi)'ye teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum her türlü destek ve güvenden dolayı aileme teşekkürlerimi sunarım.

Dilek YILMAZ
AFYONKARAHİSAR, 2013

İÇİNDEKİLER

ONAY SAYFASI	
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	<i>i</i>
ÖZET	<i>ii</i>
ABSTRACT	<i>iii</i>
TEŞEKKÜR	<i>iv</i>
İÇİNDEKİLER	<i>v</i>
ŞEKİLLER DİZİNİ	<i>vii</i>
TABLolar DİZİNİ	<i>ix</i>
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
3. FRAKTAL GEOMETRİ	12
3.1 Fraktal Algoritmaları	12
3.1.1 Deterministik Fraktallar	13
3.1.2 Rastgele Fraktallar	13
4. FRAKTALLARIN ÖZELLİKLERİ	14
4.1 Kendine Benzerlik Özelliği	14
4.1.1 Tam Kendine Benzerlik	14
4.1.2 Yarı Kendine Benzerlik	15
4.1.3 İstatistiksel Kendine Benzerlik	15
4.2. Tekrarlama Yöntemleri	15
4.2.1 Üretçle Tekrarlama	16
4.2.2 Tekrarlayan Fonksiyon Sistemi	17
4.3 Boyut	21
4.3.1 Topolojik Boyut	21
4.3.2 Cover Boyut	22
4.3.3 Hausdorff-Besicovitch Boyut	22
4.3.4 Fraktal Boyut	23
4.3.5 Moran Denklemi	27
4.3.6 Fraktal Boyutun Teorik Olarak Hesaplanması	29

4.3.7 Dolambaçlılık Derecesi	32
4.4 Fraktallarda Bulunan Simetriler	32
4.4.1 Yansıyan Simetri	32
4.4.2 Dönme	33
4.4.3 Öteleme	33
4.4.4 Büyüme	33
5. FRAKTAL TIPLERİ	34
5.1 Kompleks ve Rastgele Fraktallar	34
5.2 Geometrik Fraktallar	36
5.2.1 Von Koch Eğrisi	36
5.2.2 Ters Kar Tanesi	37
5.2.3 Sierpinski Üçgeni	37
5.2.4 Üçlü Cantor Bulutu	39
6. DOĞANIN FRAKTAL GEOMETRİSİ	42
6.1 Lindenmayer Sistemler (L-Sistemler)	44
6.2 Dallanmış Fraktallar	47
6.3 Spiraller	49
6.4 Bir Bulutun Fraktal Boyutunu Hesaplama	51
6.5 Nüfus Artması	52
7. KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	57

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
Şekil 4.1	Fraktal olmayan bir tekrarlayan sistem	16
Şekil 4.2	Cantor bulutu	17
Şekil 4.3	Kar tanesi	17
Şekil 4.4	Kuadratik çekerler	19
Şekil 4.5	C sayıları için oluşan Julia kümeleri	20
Şekil 4.6	Mandelbrot kümesi	20
Şekil 4.7	Fraktal boyut	25
Şekil 4.8	Sierpinski üçgeni	25
Şekil 4.9	Moran denklemi grafiği	29
Şekil 4.10	Moran denklemi modeli	29
Şekil 4.11	Yansıyan simetrik kelebek modeli	32
Şekil 4.12	Dönme simetrisine sahip kar tanesi modeli	33
Şekil 4.13	Öteleme simetrisine sahip ağaç dalı modeli	33
Şekil 5.1	Lorenz fraktalı	35
Şekil 5.2	Von Koch eğrisi	36
Şekil 5.3	Ter kar tanesi	37
Şekil 5.4	Sierpinski üçgeni	38
Şekil 5.5	Pascal üçgeni	39
Şekil 5.6	Cantor bulutu	40
Şekil 6.1	Koch kar tanesi	43
Şekil 6.2	L-sistem yardımıyla $n=0$ için oluşturulan Koch eğrisi	45
Şekil 6.3	L-sistem yardımıyla $n=1$ için oluşturulan Koch eğrisi	46
Şekil 6.4	L-sistem yardımıyla $n=2$ için oluşturulan Koch eğrisi	46
Şekil 6.5	L-sistem yardımıyla $n=3$ için oluşturulan Koch eğrisi	46
Şekil 6.6	L-sistem yardımıyla $n=6$ için oluşturulan fraktal bitki	47
Şekil 6.7	Akciğerler	47
Şekil 6.8	İnsan vücudu	48
Şekil 6.9	Pisagor ağacının kare ve üçgenle oluşumu	48

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
Şekil 6.10	Pisagor ağacı	48
Şekil 6.11	Doğada bulunan logaritmik spiraller	49
Şekil 6.12	Logaritmik spiral	49
Şekil 6.13	Kasırğa ve tayfunlar	51
Şekil 6.14	Dallanma	53

TABLolar DİZİNİ

Tablo		Sayfa
Tablo 4.1	Fraktal boyutun doğuşu ile ilgili elde edilen verilerin tablosu	25
Tablo 4.2	Pergel boyutu hesap edilen kıyı şeridi ile ilgili veriler	31
Tablo 6.1	Boyutu tahmin edileb bir bulutu örten ε yarıçaplı çemberlerin sayısı	51
Tablo 6.2	Tablo 6.1 de elde edilen verilere karşılık gelen değerler	52

1 GİRİŞ

Matematiksel gerçeklerin niteliğinde var olan kesinliğin özünde aksiyomatik yapılar vardır. Öklid geometrisi, matematik tarihinde bunun önde gelen örneğidir. Matematiksel doğruların, çıkartılmış oldukları postulatlara bağlı olması koşullu bir doğruluğu gerektirmektedir. Hiperbolik, eliptik ve Riemann'ın kurduğu Öklid olmayan geometriler ise matematikte postulatların doğruluğu ileri sürülerek işe başlanmadığını göstermiştir. Evrenin yapısını tanımlamada kullanılan geometri, eliptik geometrinin bir genellemesi olabilir. Riemann bunu soyut matematik aracılığı ile oluşturmuştur.

1924'te Varşova'da dünyaya gelen matematikçi Benoit Mandelbrot, Amerika'ya yerleşip IBM firmasında çalışmaya başladıktan sonra bilgisayar kullanarak göze hitap eden yeni bir matematik keşfetmeye başlamıştır. Mandelbrot'dan önce de bu konuda çalışmaların yapıldığı bilinmektedir: Cantor kümesi, Peano eğrisi(1890), Hilbert eğrisi(1891), Koch eğrisi(1904), Sierpinski üçgeni(1915) gibi (Ufuktepe ve Aslan 2002).

Bir bağıntıyı formüle edip tanım kümesini belirledikten sonra o bağıntının grafiğini çizmek pek zor değildir. Fakat formülünü oluşturamadığımız dağların, bulutların, ağaçların ve bunlar gibi daha pek çok nesnenin resmini bilgisayarda gerçeğe çok yakın bir şekilde çizmek olanaklı mıdır? Mandelbrot bu konuda yaklaşık üç bin yıldır süregelen Öklid geometrisinin yetersiz kaldığını görür: " Bulutlar küre değildir, dağlar da koni değildir." itirazında bulunur. Doğadaki bu nesnelere matematiksel eğrilerle; daire, dörtgen, küre, sinüs dalgaları gibi düzgün geometrik şekillerle göstermek gerçekçi değildir. Mandelbrot'un "fraktal geometri" diye tanımladığı geometrinin yansıttığı bu doğanın evreni pütürlü, pürüzlü bir evrendir. Aklın gözüne göre fraktal sonsuzu görebilmenin bir yoludur (Ufuktepe ve Aslan 2002).

Fraktal kelimesi "kırılmış" veya "parçalanmış " anlamına gelen Latince "fractus" kelimesinden türetilmiştir. Kendi kendini tekrar ederek sonsuza kadar küçülen veya büyüyen şekilleri, kendine benzer bir cisimde cismi oluşturan parçaları inceler. Düzensiz ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen ölçeklerde yinelenir ve tümüyle soyut nesnelere bu olay sonsuza kadar sürebilir; tam tersi olarak da her

parçanın her bir parçası büyütüldüğünde yine cismin bütününe benzer. Mandelbrot "İngiltere'nin kıyı uzunluğu kaç kilometredir?" sorusuyla yola çıkarak yazdığı "The Fractal Geometry of Nature" kitabında fraktal tanımı için "Fraktal Hausdorff-Besicovitch boyutu kesin olarak topolojik boyutunu aşan bir kümedir." cümlesini yazmıştır. "İngiltere'nin kıyı uzunluğu kaç kilometredir?" sorusunun cevabı ise ölçüm yapılacak cihazın hassasiyetine bağlıdır. Çok büyük bir harita kullanıldığında hata çok büyük, uzunluğu bir metre olan bir cetvel kullanıldığında hata bir metreden küçük uzunluklarda, daha hassas bir cihaz kullanıldığında, hata cihazın ölçemediği uzunlukların altında olacaktır. Yani ölçüm aracınız küçüldükçe, hassaslaştıkça kıyının uzunluğu sınırsız şekilde artmaktadır. Bu nedenle kıyının gerçek uzunluğunu ölçmek güçtür, ancak atomik boyutlarda bir ölçek ile doğru ölçülebilir. Mandelbrot'un diğer bir sorusu da "Bir iplik yumağının boyutu nedir?" olmuştur. İplik yumağına uzaktan bakıldığında yumak bir noktadır dolayısıyla boyutu sıfırdır, daha yakından bakılırsa yumak kümeye benzemektedir, yani boyutu üçe çıkmıştır. Yumağın tek boyutlu ipliğine büyüteçle bakıldığında ise iplik sütunlar halindedir ve bu sütunlar tek boyutlu liflere, lifler noktalara dönüşmektedir. Bu durumda yumağın gerçek boyutu nedir? Mandelbrot herhangi bir birim cinsinden ölçemediğimiz cisimlerin pürüzlülük derecesine sahip olduğunu söylemiştir. Ona göre ölçek değiştiğinde düzensizlik derecesi sabit kalmaktadır. Mandelbrot bu pürüzlülük derecesine "fraktal boyut" demiştir. Fraktal boyuta sahip cisimler kesirli boyutludur tamsayılarla ifade edilemez.

Tüm fraktallar kendine benzerdir, tamamen benzerlik olmasa bile çoğu öteleme bakışına sahiptir (öteleme bakışına sahip cisim kendi etrafında döndürüldüğünde görüntümü aynı kalır.). Tüm fraktallar için sonsuz bir öteleme bakışına sahiptir diyemeyiz. Örneğin İtalya'da bulunan "Del Montee" kalesinin yapısı fraktal yapıdadır ancak şüphesiz ki mimari bir yapının sonsuz ötelemeden oluştuğundan söz edilemez.

Mandelbrot'un yarattığı kendine benzer, fraktal boyuta sahip cisimlerden oluşan fraktal geometrisi Öklid geometrisinden farklı olarak aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Geleneksel değil, modern bir geometridir.

2. Öklid geometrisindeki şekillerin belirli karakteristik büyüklükleri (dairenin yarıçapı, küpün ayrıtı gibi) vardır. Fraktalların ise karakteristik bir çok büyüklüğü vardır.
3. Fraktal şekiller kendine benzer şekillerdir; ölçek ya da büyüklükten bağımsızdır. Bir fraktal şekle ne kadar yakından bakarsanız bakın yine bütüne benzer bir şekil görürsünüz. Öklid geometrisindeki şekillerde ise durum böyle değildir.
4. Öklid geometrisi insanların yarattıkları nesnelerin tanımlanmasında kullanılır. Doğadaki nesnelerin ifade edilmesinde ise fraktallar kullanılır.
5. Öklid geometrisinin cebirsel formüllerle ifade edilmesine karşın fraktallar algoritmik bir yapı ile ifade edilir (Ufuktepe ve Aslan 2002).
6. Öklid geometrisinde sonlu şekiller ve sürekli fonksiyonlar bulunur. Fraktal geometride ise şekiller sonlu olmayıp fonksiyonlar süreksiz adımlarla gelişir.

Yukarıdaki farklılıklar Öklid geometrisi ile doğanın sadece resminin çizilebileceğini fakat matematiksel bir modelleme yapılamayacağını aynı zamanda da ilk bakışta çok karmaşık görünen pek çok doğa olayının ortak bir tabanın bulunduğunu anlatır. Belirli katsayıların birbirine eklenmesiyle oluşan fraktalların boyutundaki ufak bir değişiklik, yeni bir fraktal oluşturmak için yeterlidir, bu özellikleriyle de yalnızca matematik değil fizik, kimya, fizyoloji gibi birçok bilim dalında fraktal, kar tanelerinden galaksilerin kesintili tozlarına kadar düşünebileceğimiz tüm şekilleri tanımlayıp hesaplamak için kullanılır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme üzerinde reel değerli, negatif olmayan bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu için

(1) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(2) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

(3) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ üçgen eşitsizliği, önermeleri doğru ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde metrik denir. (X, d) ikilisine metrik uzay adı verilir.

Önermelerin sonucu olarak her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ olduğu gösterilebilir. (3) önermesine göre $x = z$ alınırsa

$$d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x)$$

$$0 \leq d(x, y) + d(x, y)$$

$$0 \leq 2.d(x, y)$$

sonucu elde edilir. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ bulunur.

Tanım 2.2: Bir (X, d) metrik uzayı ile $x \in X$ ve $r > 0$ sayısı alınsın.

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

kümesine r yarıçaplı kapalı yuvar denir (Kılıç ve Erdem 1999).

Örnek 2.1: \mathbb{R} üzerindeki $d_1(x, y) = |x - y|$ metriği ile $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$, $B(x, r) = (x - r, x + r)$ ve $S(x, r) = \{x - r, x + r\}$ olur.

Tanım 2.3: X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $D(x, r) \subseteq A$ olacak biçimde bir r pozitif sayısı varsa A ya X in açık alt kümesi veya A , X de açıktır denir. X in B alt kümesinin X deki tümleyeni yani $B^t = X - B$, X de açıksa B ye kapalı küme denir (Bayraktar 2006).

Örnek 2.2: (X, d) herhangi bir metrik uzay ve $x \in X$ ise $\{x\}$ kapalıdır. Bunun için x in $X - \{x\}$ tümleyenin açık olduğunu göstermek yeter. $y \in X - \{x\}$ olsun. $r = d(x, y)$ olarak alınırsa $D(y, r) \subseteq X - \{x\}$ olur. Şu halde $X - x$ açık ve dolayısıyla $\{x\}$ kapalıdır (Bayraktar 2006).

Örnek 2.3: (X, d) ayrık metrik uzayının her alt kümesi hem açık hem de kapalıdır. Gerçekten $A \subseteq X$ ve $x \in A$ ise $r < 1$ için $D(x, r) = \{x\} \subseteq A$ olduğundan A açıktır. Diğer taraftan A açık olduğundan $A^t = X - A$ kapalıdır. Fakat A^t , X in bir alt kümesi olduğundan açıktır. $(A^t)^t = A$ olduğundan A kapalıdır (Bayraktar 2006).

Teorem 2.1: Bir (X, d) metrik uzayında her bir açık yuvar açık bir kümedir (Kılıç ve Erdem 1999).

İspat: (X, d) metrik uzayının bir açık yuvarı $B(x_0, r_0)$ ve $x \in B(x_0, r_0)$ olsun. $d(x_0, x) < r_0$ olduğundan, $r_x = r_0 - d(x_0, x)$ denirse $r_x > 0$ olur. Buradan $B(x, r_x) \subset B(x_0, r_0)$ olduğu görülür (Kılıç ve Erdem 1999). ■

Tanım 2.4: A bir küme olmak üzere her $x \in A$ için $x \geq a$ olacak biçimde bir a reel sayısı varsa A kümesi alttan sınırlıdır denir, a sayısına da A nın bir alt sınırı adı verilir. Benzer olarak, A nın her x elemanı için $x \leq b$ olacak biçimde bir b reel sayısı varsa A kümesi üstten sınırlıdır denir, b sayısına da A nın üst sınırı adı verilir. Alttan ve üstten sınırlı olan kümeye kısaca, sınırlı küme adı verilir (Balcı 2009).

Bir A kümesi için k bir üst sınır ise, k dan büyük her sayı da bir üst sınırdır. Benzer olarak, m A nın bir alt sınırı ise m den küçük her sayı da A nın bir alt sınırıdır. Buna göre üstten sınırlı bir kümenin sonsuz çoklukta üst sınırı, alttan sınırlı bir kümenin sonsuz çoklukta alt sınırı vardır.

Tanım 2.5: Üstten sınırlı bir A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne A nın en küçük üst sınırı veya supremumu denir, $\sup A$ ile gösterilir. Alttan sınırlı bir A

kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne de A nın en büyük alt sınırı veya infimumu denir, $\inf A$ ile gösterilir (Balcı 2009).

Tanım 2.6: (X, d) bir metrik uzay, S kümesi (X, d) metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Bir $x \in X$ noktasının S kümesine uzaklığı x noktasının S nin tüm noktalarına uzaklıklarının infimumudur.

$$d(x, S) = \inf \{d(x, y) : y \in S\}$$

$x, y \in X$ noktaları ve S alt kümesi göz önüne alınsın. Bir $\varepsilon > 0$ için;

$$d(x, z) \leq d(x, S) + \varepsilon$$

olacak biçimde $z \in S$ noktası vardır.

$$d(x, S) = \inf \{d(x, y) : y \in S\}$$

tanımından yararlanarak

$$d(y, S) \leq d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq d(y, x) + d(x, S) + \varepsilon$$

$$d(y, S) - d(x, S) \leq d(y, x) + \varepsilon$$

x ve y noktalarının yerleri değiştirilirse;

$$d(x, S) - d(y, S) \leq d(x, y) + \varepsilon$$

$$|d(x, S) - d(y, S)| \leq d(x, y) + \varepsilon$$

bulunur. Buradan da her $x, y \in X$ için

$$|d(x, S) - d(y, S)| \leq d(x, y)$$

bulunur. S ve B kümesinin birbirine uzaklığı

$$d(S, B) = \inf \{d(x, y) : x \in S, y \in B\}$$

biçiminde tanımlanır (Şuhubi 2001).

Tanım 2.7: Bir X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi τ olsun.

(**T₁**) $X \in \tau$ ve $\emptyset \in \tau$

(**T₂**) τ ailesinin herhangi bir sonlu alt kümesinin kesişimi τ içinde ve

(**T₃**) τ ailesinin herhangi bir alt kümesinin birleşimi τ içinde kalıyorsa τ ailesine X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir (Kılıç ve Erdem 1999).

Tanım 2.8: (X, d) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

i. I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ve

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

ise $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ koleksiyonuna A nın bir açık örtüsü denir.

ii. $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ koleksiyonu A nın açık bir örtüsü ve $J \in I$ olmak üzere $\mathcal{V} = \{U_i \mid i \in J\}$ koleksiyonu A nın bir örtüsü ise $\mathcal{V} = \{U_i \mid i \in J\}$ örtüsüne $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ örtüsünün bir alt örtüsü denir. Bu durumda J sonluysa $\mathcal{V} = \{U_i \mid i \in J\}$ örtüsüne $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ örtüsünün sonlu alt örtüsü denir (Koçak 2004).

Not: Açık örtü tanımında $A = X$ alınırsa $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ifadesi $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ biçimini alır (Koçak 2004).

Tanım 2.9: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına veya kısaca X in kendisine kompakt topolojik uzay denir (Koçak 2004).

Not: Kompaktlığın tanımı gereği bir uzayın kompakt olmadığını göstermek için uzayın sonlu hiçbir alt örtüsü olmayan açık bir örtüsünün olduğunu göstermek yeterlidir (Koçak 2004).

Örnek 2.4: \mathbb{R} standart uzayının kompakt olmadığı gösterilsin. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(-n, n)$ aralığı \mathbb{R} de açık olduğundan $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ koleksiyonu \mathbb{R} standart uzayının açık bir örtüsüdür. Şimdi bu örtünün sonlu hiçbir örtüsü olmadığını gösterilsin. Bu örtünün sonlu bir $\{U_{n_i} \mid i = 1, \dots, m\}$ alt örtüsü olduğu varsayalım. $n_0 = \max\{n_i \mid i = 1, \dots, m\}$ olmak üzere $\bigcup_{i=1}^m U_{n_i} = (-n_0, n_0)$ olur. Diğer yandan sonlu alt örtü tanımı gereği $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^m U_{n_i}$ olur. Buradan

$$\mathbb{R} = (-n_0, n_0)$$

elde edilir. Bu ise $n_{0+1} \notin (-n_0, n_0)$ olduğundan mümkün değildir. O halde \mathbb{R} nin $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ açık örtüsünün hiçbir sonlu örtüsü yoktur. Bu durumda \mathbb{R} standart uzayı kompakt değildir (Koçak 2004).

Tanım 2.10: Tanım kümesi \mathbb{N} doğal sayılar kümesi olan her fonksiyona bir dizi denir (Balcı 2009).

Tanım 2.11: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) X de bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak biçimde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X de yakınsak ve x e de bu dizinin limiti denir (Bayraktar 2006).

Teorem 2.2: Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat : (x_n) dizisinin limiti bir x noktası ise $n \geq N$ için $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Dolayısıyla $m, n \geq N$ için;

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$$

bulunur. Yani yakınsak bir (x_n) dizisi Cauchy dizisidir. Ancak bu özelliğin tersi her zaman doğru değildir ve bir dizinin Cauchy dizisi olması her zaman yakınsadığı anlamına gelmez (Şuhubi 2001). ■

Teorem 2.3: (X, d) bir metrik uzay olmak üzere X deki her (x_n) Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \rightarrow x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay veya kısaca tam denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.12: $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$K = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

aralığına a nın ε -komşuluğu adı verilir (Balcı 2009).

Tanım 2.13: V boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise V kümesi K cismi üstünde bir vektör uzayıdır denir.

(**V₁**) V kümesinde $+$ ile gösterilen ve adına toplama denilen bir işlem tanımlanmıştır. Bu işlemin aşağıdaki özellikleri vardır.

(1) Her $u, v \in V$ için $u + v \in V$ tanımlıdır ve $u + v \in V$ dir. Sözlerle anlatırsak V kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

(2) Her $u, v, w \in V$ için $(u + v) + w = u + (v + w)$ dir. Sözlerle anlatırsak V kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

(3) $[\exists 0 \in V, (\forall u \in V \text{ için } u + 0 = u \text{ ve } 0 + u = u)]$

dir. Sözle anlatırsak V kümesinde toplama işleminin etkisiz (birim) elemanı vardır. Bu etkisiz elemanı 0 simgesi ile gösterdik.

(4) Her $u \in V$ için V kümesinde $-u$ ile gösterilen ve

$$u + (-u) = 0 \text{ ve } (-u) + u = 0$$

eşitliklerini sağlayan bir $-u$ elemanı vardır. Sözlerle anlatırsak V kümesindeki her bir u elemanının toplamaya göre tersi vardır. u nun tersi $-u$ ile gösterilmiştir.

(5) Her $u, v \in V$ için $u + v = v + u$ tir. Sözlerle anlatırsak V kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

(**V₂**) $K \times V \rightarrow V, (a, u) \rightarrow au$ biçiminde, adına skalerle çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular:

(a) Her $a \in K$, her $u, v \in V$ için $a(u + v) = au + av$

(b) Her $a, b \in K$, her $u \in V$ için $(a + b)u = au + bu$

(c) Her $a, b \in K$, her $u \in V$ için $(ab)u = a(bu)$

(d) K nın çarpmaya göre birim elemanı 1 olduğuna göre V nin her u elemanı için $1u = u$ tir.

V , reel sayı cismi üstünde vektör uzayı ise bu vektör uzayına reel vektör uzayı denir. V , karmaşık sayı cismi üstünde vektör uzayı ise bu durumda V ye karmaşık (kompleks) vektör uzayı denir (Sabuncuoğlu 2008).

Tanım 2.14: Bir vektör uzayın her bir elemanına vektör adı verilir.

Tanım 2.15: V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve H, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki iki önerme doğru ise H kümesi V nin bir alt vektör uzayıdır, denir (Sabuncuoğlu 2008).

(a) $\forall u, v, (u \in H \text{ ve } v \in H) \Rightarrow u + v \in H$

(b) $\forall c, \forall u, (c \in K \text{ ve } u \in H) \Rightarrow cu \in H$

Tanım 2.16: V vektör uzayının bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ alt kümesi verilsin.

$$\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i = 0$$

eşitliği doğru olacak biçimde en az biri sıfırdan farklı olan c_1, c_2, \dots, c_n sayıları varsa

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

kümesi lineer bağımlıdır, denir. Lineer bağımlı olmayan kümeye, lineer bağımsız küme denir (Sabuncuoğlu 2008).

Örnek 2.5: \mathbb{R}^3 uzayında $\{(1, -3, 2)\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını belirtiniz.

Çözüm 2.5: $\{(1, -3, 2)\}$ kümesi, \mathbb{R}^3 uzayının lineer bağımsız bir alt kümesidir. Çünkü

$$c(1, -3, 2) = (0, 0, 0)$$

eşitliğini doğrulayan c sayısı yalnızca sıfır sayısıdır (Sabuncuoğlu 2008).

Tanım 2.17: V, K cismi üstünde bir vektör uzayı ve $\varphi \subset V$ olsun. φ lineer bağımsız ve $Sp\varphi = V$ ise φ ye V vektör uzayının bir tabanı denir. $Sp\varphi = V$ eşitliğini kısaca, φ kümesi V uzayını gerer, diyerek anlatırız. Bu eşitlik V nin her bir elemanın, φ deki sonlu sayıda vektörün bir lineer bileşimi olarak yazılabileceğini gösterir (Sabuncuoğlu 2008).

Tanım 2.18: V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. V nin bir tabanındaki vektör sayısına V nin boyutu denir. V nin boyutu $\dim V$ veya *boyut* V ile gösterilir (Sabuncuoğlu 2008).

Örnek 2.6: \mathbb{R}^2 uzayının $\{(-1, 4), (2, 1)\}$ alt kümesi φ ile gösterilsin. φ kümesi \mathbb{R}^2 uzayının bir tabanı olur mu?

Çözüm 2.6: $(-1, 4) = \alpha_1$, $(2, 1) = \alpha_2$ diyelim. $\varphi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ olur. φ kümesinin lineer bağımsız olduğu kolayca görülebilir. Gerçekten $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ eşitliğini doğrulayan c_1, c_2 sayıları arandığında $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olduğu görülür.

$Sp\{\alpha_1, \alpha_2\} = \mathbb{R}^2$ olduğunu göstermek için \mathbb{R}^2 uzayındaki her u vektörünün, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesinin lineer bileşimi olarak yazılabildiği gösterilmelidir. $u \in \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)$ olsun. $u = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2$ eşitliği

$$-x_1 + 2x_2 = u_1$$

$$4x_1 + x_2 = u_2$$

denklem sistemine denktir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğundan bir ve yalnız bir x_1, x_2 çözümü vardır. Öyleyse \mathbb{R}^2 uzayındaki her u vektörü, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesinin lineer bileşimi olarak yazılabilir. Böylece φ kümesinin lineer bağımsız olduğunu ve \mathbb{R}^2 uzayını gerdiğini gösterdik. Demek ki φ kümesi \mathbb{R}^2 uzayının bir tabanıdır.

3 FRAKTAL GEOMETRİ

Fraktal geometri Öklid geometrisinin bir uzantısıdır. Yapraklardan galaksilere kadar uzanan fiziksel yapıları tanımlamada kullanılan yeni bir dildir. Öklid geometrisinden farklı olarak doğadaki pek çok yapı düzensiz ve parçalıdır. Yeterince küçük ölçeklerdeki doğa modellerinin tümü pratik açıdan sonsuz kabul edilebilecek uzunluktadır. Bu formlar Öklid geometrisi açısından biçimsiz, morfoloji açısından amorfudur. Bu tür eğriler ailesi fraktal olarak adlandırılmıştır. Bazı fraktal kümeleri, eğriler ve yüzeyler biçimindeyken bir kısmı bağlantısız tozlar biçiminde veya bilimin ve sanatın adlandıramayacağı kadar karmaşık biçimli olabilirler.

Hızlı sayısal bilgisayarların ortaya çıkmasına kadar geçen süre içinde bu tür eğrilerin çizilmesi oldukça fazla zaman almıştır ve fraktal geometri oldukça yavaş gelişmiştir. Mandelbrot bilgisayar kullanarak fraktal nesnelere derinlemesine inceleyen diğer matematikçilerin takdirini kazanan ilk kişi olmuştur (Gleick 2003).

Fraktal geometri fraktal analiz olarak adlandırılan yeni bir ölçüm yöntemleri dizisinin de bilim gündemine gelmesini sağlamıştır. Sadece biçimlerin değil, süreçlerin de karmaşıklıklarını ölçmek için kullanılan fraktal analiz, doğadaki karmaşık biçimlerin ve olayların karmaşıklık düzeylerini sayısal halde izleyip inceleyebilmek için bize yeni yöntemler sunmaktadır.

3.1 Fraktal Algoritmaları

Yüzyıllardan bu yana matematikçiler iki, üç ve daha yüksek boyutlardaki eğri ve yüzeylerle ilgili teoriler ortaya koymuşlardır. Bu eğri ve yüzeyler bir bütün olarak incelendiklerinde oldukça karmaşık bir yapıya sahiptirler. Fakat bu eğri ve yüzeyler küçük parçalar halinde incelenirse her bir parçanın çevredeki komşulukları ile doğrusal ya da yüzeysel ilişkide olduğu görülür. Eğri ve yüzeylerin bu tür özellikleri ile ilgilenen bilim dalına "diferansiyel geometri" denir. Fraktallar ise bunun tam tersine düzgün olmayan yüzey ve eğrilerle ilgilidir. Düzgün objeler büyütüldüklerinde yeni detaylar ortaya çıkmaz. Fraktallarda ise durum tam tersidir. Fraktallar doğayı taklit etmede kullanılır. Fraktal geometri yardımıyla son derece ilginç manzaralar

yaratılmıştır. Fraktal bir manzarayı inceleyen kişi bunun resim mi yoksa fotoğraf mı olduğunu anlayamaz. Fraktal geometriyi çekici kılan başka bir unsur da fraktalların bilgisayar ekranında oluşturulabilme kolaylığıdır. Bir fraktal yaratabilmek için diferansiyel geometri ya da matematik bilmek gerekli değildir. Fraktallar ne kadar karmaşık olsalar da onları oluşturan algoritmalar kısa ve basit kalırlar (Kantarıcı 1994).

Fraktallar oluşturdukları algoritmalara göre deterministik ve rastgele olmak üzere iki başlıkta incelenebilir.

3.1.1 Deterministik Fraktallar

Kendilerinin küçültülmüş ve döndürülmüş kopyalarını kapsayan fraktallar bu gruba girer. Bu tür fraktallar özel bir kurala bağlı olarak yinelenen algoritmalarca üretilir (Kantarıcı 1994).

3.1.2 Rastgele Fraktallar

Genelde doğayı simüle etmede kullanılan ve yapılarında gelişigüzelik barındıran metodlarla elde edilir. Bu metodlar bilgisayar programı haline dönüştürülür (Kantarıcı 1994).

Fraktallar sonsuz detaya sahip oldukları için tam ve doğru olarak hesaplanamazlar. O yüzden bilgisayar uygulamalarında belli bir duyarlılık hesaba katılarak fraktallara yaklaşım sağlanabilir. İstenilen çözünürlük seviyesi, ekran üzerindeki piksellerin sayısı ve işlemde geçen zaman vb. kısaltmalar çerçevesinde belirlenir (Peitken ve Saupe 1988).

4 Fraktalların Özellikleri

Fraktallar temel bazı özelliklere sahiptir. Bu bölümde, fraktalların boyutu tamsayı olarak ifade edilemediğinden "fraktal boyut" kavramı tanımlanarak, fraktallar genellikle sonsuza kadar devam eden algoritmalar sayesinde oluştuğundan "tekrarlayan fonksiyon sistemi" denilen sistem incelenecektir. Ayrıca "kendine benzerlik (self-similarity)" özelliği ve doğada bulunan fraktallarda görülen simetritler incelenecektir.

4.1 Kendine Benzerlik (Self-Similarity)

Fraktalların çarpıcı bir özelliği doğada sık olarak rastladığımız "kendine benzerlik" özelliğidir. Tüm fraktallar kendine benzer ya da en azından tümüyle kendine benzer olmamakla birlikte çoğu bu özelliği taşır. Kendine benzer bir cisimde cisimi oluşturan parçalar ya da bileşenler cismin bütününe benzer. Düzensiz ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen ölçeklerde yenilenir ve tümüyle soyut nesnelere sonsuza kadar sürdürülebilir, öyle ki her parçanın her bir parçası büyütüldüğünde cismin kendisine benzer parçalar elde edilir. Bu tip fraktal olgusu kar tanesi ve ağaç kabuğunda kolayca gözlenebilir. Ayrıca fraktallar aynı matematiksel formülün defalarca tekrarlanması ile oluştuğundan şekle hangi ölçekte bakarsak bakalım yine aynı şekli görürüz. Tüm kendine benzer şekiller fraktal değildir. Örneğin matruşka bebekleri kendine benzerdir fakat fraktal değildir. Kendine benzerlik üç farklı şekilde olabilir.

4.1.1 Tam Kendine Benzerlik

Kendine benzerliğin en güçlü tipidir. Fraktala hangi ölçekte bakarsak bakalım aynı görünür. Tekrarlanan fonksiyon sistemleriyle tanımlanan fraktallar çoğu kez tam kendine benzerlik gösterir.

Kendine benzer bir nesne dönüşümlerle elde edilmiş, kendisinin belli bir oranda küçültülmüş N kopyasından oluşmaktadır. E boyutlu bir uzayda $x = (x_1, x_2, \dots, x_E)$ konumunda bulunan noktalar kümesi S ile gösterilsin. Bu kümeye $0 < r < 1$ olacak biçimde belirlenen bir r küçültme oranı ile benzerlik dönüşümü uygulandığında

S kümesi $rx = (rx_1, rx_2, \dots, rx_E)$ şeklindeki rS kümesine dönüşür. S kümesi N tane birbirinden farklı $rx = (rx_1, rx_2, \dots, rx_E)$ noktalarından oluşan rS kümelerinin bileşiminden oluşuyorsa tam olarak kendine benzer bir kümedir (Peitgen and Saupe 1988).

4.1.2 Yarı Kendine Benzerlik

Kendine benzerliğin zayıf bir formudur. Farklı ölçeklerde fraktal hemen hemen aynı görünür. Yarı kendine benzer fraktallar bozulmuş formlarda tüm fraktalın küçük kopyalarını içerir. Tekrarlanan fraktallar genellikle tam kendine benzer değil yarı kendine benzerdir.

4.1.3 İstatistiksel Kendine Benzerlik

Deniz kıyası parçalarını büyütüp incelediğimizde elde edilen parçaların orijinali ile aynı olmadığı görülür. Kıyının küçük bir parçası, daha büyük bir parçasına benzer fakat onun bir kopyası değildir.

İstatistiksel kendine benzerlik, kendine benzerliğin en zayıf formudur. İstatistiksel kendine benzerlik farklı ölçeklerde değil ölçek boyunca korunur. Bir parça büyütülüp incelendiğinde elde edilen parçaların orijinali ile aynı olmadığı görülür. Bütünün küçük bir parçası bütüne benzer fakat onun bir eşi değildir. Bu durum istatistiksel kendine benzerlik olarak adlandırılır. Değişik ölçeklerdeki pek çok detay içeren objenin istatistiksel kendine benzer olma özelliği doğadaki fraktalların ortak özelliğidir. Detaylar büyüyüp küçüldükçe değişir (Barnsley 1988). Rastgele (Random) fraktallar istatistiksel kendine benzerliğin en güzel örnekleridir.

4.2 Tekrarlama Yöntemleri

İki tip tekrarlama yönteminden bahsedilebilir :

4.2.1 Üreteçle Tekrarlama

Fraktallar genellikle tekrarlayan yöntemlerle oluşturulur. Bir fraktal oluşturmak için belli bir geometrik şekil alınır ve bu şekil üzerine özel işlemler uygulanarak daha karmaşık bir şekil elde edilir. Benzer biçimde oluşan yeni şekil üzerinde de aynı yöntem ile daha karmaşık bir şekil oluşturulur ve bu işlem sonsuza kadar devam ettirilebilir.

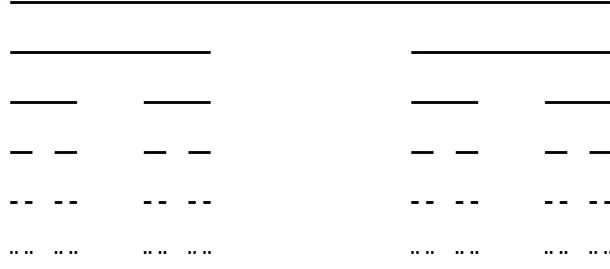
Her tekrarlayan yöntem fraktal vermez. Örneğin bir AB doğru parçası ele alınsın. Bu doğru parçasının A ve B uçları kesip atılsın. Böylece AB doğru parçasından kısa yeni bir doğru parçası elde edilmiş olur. Daha sonra bu şeklin de uçları kesilip atılırsa aşağıdaki gibi doğru parçaları elde edilir. Oluşan şekil karmaşık değildir aynı zamanda bir fraktal da değildir.



Şekil 4.1 Fraktal olmayan bir tekrarlayan sistem.

Fakat yukarıdaki yöntemle benzer bir yöntemle bir fraktal elde edilebilir. Yukarıda olduğu gibi bir doğru parçası alınır. Bu doğru parçası üç eşit parçaya ayrıldıktan sonra ortadaki parça atılır. Yeni elde edilen şekil üzerinde her iki parçaya aynı yöntem uygulanırsa daha karmaşık bir şekil elde edilmiş olur. Bu iş sonsuza kadar devam ettirilirse Cantor kümesi (Üçlü Cantor bulutu) denilen ve geometrik fraktal-

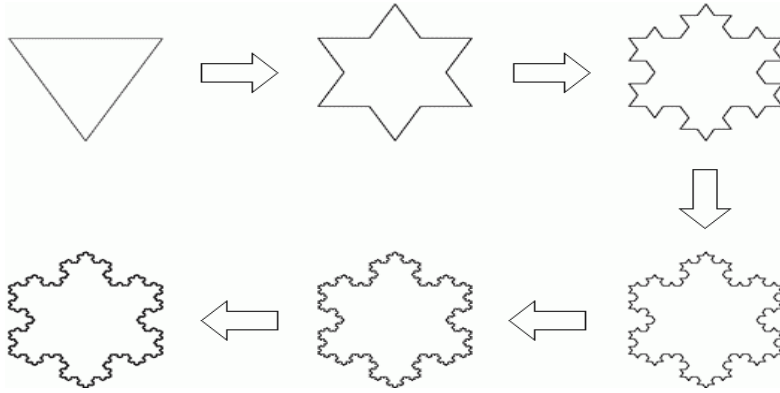
lar bölümünde incelenecek olan bir fraktal elde edilir (Hacısalıhoğlu ve Yaz 2002).



Şekil 4.2 Cantor bulutu.

Görüldüğü gibi Cantor kümesi kendi kopyalarından oluşmaktadır. Dolayısıyla da kendine benzerdir.

Üreteçle tekrarlamaya "taban " denilen bir şekille başlanır ve her bir parçası yerine "motif" ya da "üreteç" denilen diğer bir şekil koyulur. Örneğin Koch kar tanesi denilen fraktala üçgen ile başlanır. Sonra her kenarı üzerine bir motif koyularak oluşturulur.



Şekil 4.3 Kar tanesi.

4.2.2 Tekrarlayan Fonksiyon Sistemleri

Tekrarlayan fonksiyon sistemleri, fraktal elde etmek için diğer bir yöntemdir. Tekrarlayan fonksiyon sistemleri belli bir nokta için defalarca uygulanan bir fonksiyonun sonucudur. Bu tekrarlı oluşum fraktalların kendine benzerliğidir. Seçilen bir noktanın matematiksel bir formülle defalarca elde edilen şeklin yerine konulması ile oluşur. Formülle tekrarlama yöntemiyle üç tip fraktal oluşturulabilir.

Bunlardan birisi "yabancı çekerler (Strange Attractor)" dir. Yabancı çekerleri oluşturmak kolaydır. Bir noktanın koordinatlarıyla başlanır. Her bir sonraki nokta formül ve ilk noktanın koordinatları kullanılarak elde edilir. Eğer seçilen nokta kompleks düzlemde bir z noktası ise f bir fonksiyon olmak üzere kullanılacak formül

$$Z = F(z)$$

dir. Nokta kartezyen düzlemde seçilen bir (x, y) noktası ise f ve g iki fonksiyon olmak üzere

$$X = f(x, y)$$

$$Y = g(x, y)$$

dir. Üç boyutlu çekiciler için seçilen nokta (x, y, z) noktası ise f, g, h fonksiyonlar olmak üzere

$$X = f(x, y, z)$$

$$Y = g(x, y, z)$$

$$Z = h(x, y, z)$$

dir (Hacısalihoglu ve Yaz 2002).

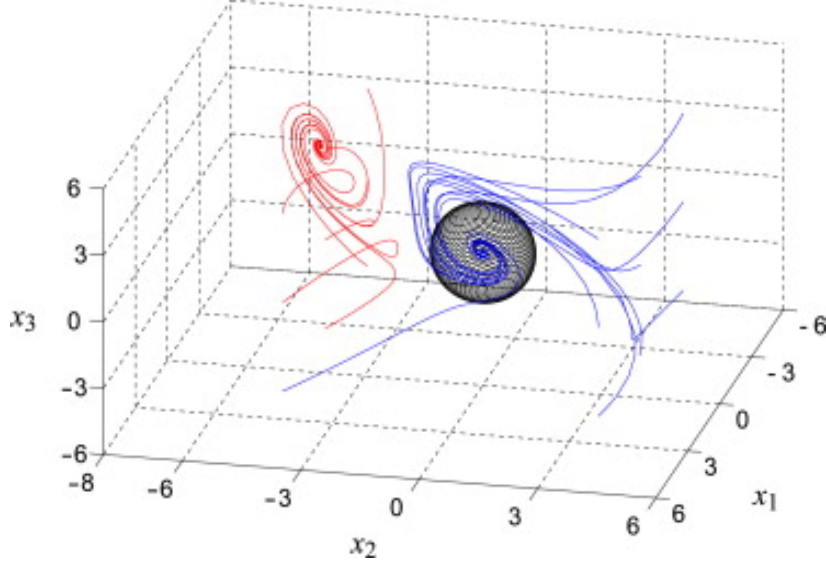
En sık rastlanan yabancı çekerler kuadratik çekerlerdir. Genel formülleri:

$$X = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

$$Y = gx^2 + hxy + iy^2 + jx + ky + l$$

Buradaki katsayılar fraktalı belirleyen sabitlerdir. Bazı katsayılar sıfır olabilir ve

fraktal ürünler sonsuz sayıda fraktal üretebilir.



Şekil 4.4 Kuadratik çekerler.

Formülle tekrarlama yöntemiyle elde edilen diğer bir fraktal "Julia Kümeleri"dir. Kompleks sayılar kullanılarak Julia kümeleri genelleştirilebilir. Z ve C kompleks sayılar olmak üzere

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$Z \rightarrow Z^2 + C$$

dönüşümü almır. Kompleks düzlemde alınacak başka bir Z_0 sayısı ile birlikte Z_1, Z_2, Z_3, \dots kompleks sayılarının dizisi

$$Z_1 = Z_0^2 + C$$

$$Z_2 = Z_1^2 + C$$

$$Z_3 = Z_2^2 + C$$

.

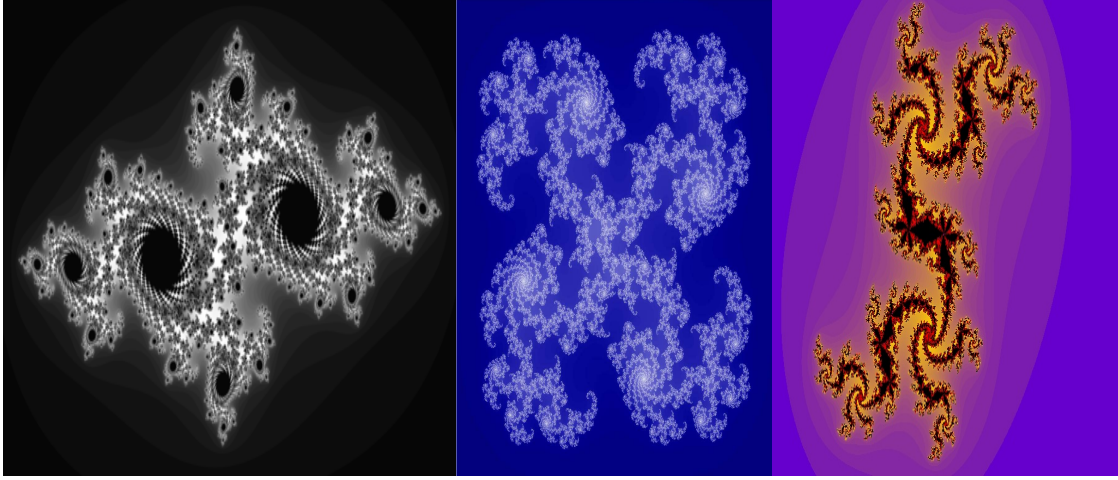
.

.

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

şeklinde yazılır. Böylece sonlu sayıdaki kompleks sayılar için Julia kümelerinin genelleştirilmiş formülü elde edilmiş olur. Bu dizideki C sayısının aldığı çok küçük

farklı değerde bile elde edilen Julia kümesi çok farklı olur.

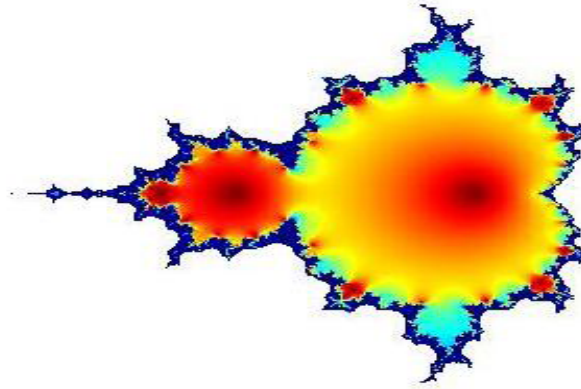


Şekil 4.5 Farklı c sayıları için oluşan Julia kümeleri.

Diğer bir formülle tekrarlama yöntemiyle elde edilen fraktal Mandelbrot kümesidir. Mandelbrot kümesi Julia kümesine benzer bir algoritma ile elde edilir. Julia kümesini elde ettiğimiz $Z \rightarrow z^2 + c$ dönüşümünde $z = 0 + 0i$ almırsa elde edilen

$$\begin{aligned} Z &= (0 + 0i)^2 + c \\ &= c \end{aligned}$$

şeklindeki sonlu c noktalarının kümesine $Z \rightarrow z^2 + c$ dönüşümüne karşılık gelen Mandelbrot kümesi denir. Kenar uzunluğu sonsuz ancak alanı bilinmemektedir (Karaçay 2005).



Şekil 4.6 Mandelbrot kümesi.

4.3 Boyut

4.3.1 Topolojik Boyut (D_T)

Bir vektör uzayın alt uzayının boyutunu o alt uzayda bulunan ve alt uzayı geren, lineer bağımsız vektör sayısı olarak tanımlayabiliriz. Bu tanım aynı zamanda geometrik boyut kavramına da uymaktadır. Boyutun bu tanımı topolojik boyut olarak adlandırılan kavramın özel bir durumudur.

Poincare topolojik boyutu şöyle tanımlar: Bir geometrik nesnenin topolojik boyutu o geometrik nesneyi parçalara ayırmak için kullanılan diğer geometrik nesnelerin topolojik boyutundan bir fazladır. Uzayı bölmek için yüzeyler, yüzeyleri bölmek için eğriler, eğrileri bölmek için noktalar kullanılır. Noktalar ise parçalanamaz. Bu nedenle noktaların topolojik boyutu sıfırdır. Eğrileri bölmek için noktalar kullanıldığı için eğrilerin topolojik boyutu 1 dir. Düzlemleri bölmek için doğrular kullanıldığı için düzlemlerin topolojik boyutu 2 dir. Uzayı bölmek için düzlemler kullanıldığı için uzayın topolojik boyutu 3 tür. Tüm adaların kıyıları topolojik olarak bir çembere özdeştir. Tüm çemberlerin topolojik boyutları 1 dir. Bu durumda kıyıları birbirinden ayırmak için topolojik boyut kavramı kullanılmaz (Mandelbrot 1983).

Tanım 4.3.1.1: Bir S kümesinin her noktası, keyfi komşuluklara, yani sınırları kümeyi kesmeyen $\sup(d(x, y) \mid x, y \in U)$ olacak biçimde komşuluklara sahipse, S kümesi topolojik boyuta sahiptir denir.

Teorem 4.3.1.1: Topolojik boyutu sıfır olan boş olmayan bir kümenin her bağlantılı bileşeni bir noktadır.

İspat 4.3.1.1: Kabul edelim ki topolojik boyutu sıfır olan bir bağlantılı C kümesi $d \equiv d(p, q)$ olacak biçimde iki farklı p ve q noktalarını içersin. $\sup(d(x, y) \mid x, y \in U) < d$ olacak biçimde p noktasını içeren bir U açık kümesi verilsin. O halde U q noktasını içermeyebilir ve dolayısıyla U nun sınırları C yi kesmelidir yoksa U ve U^c nin içi C den ayrık olur. C bağlantılı bileşen olduğundan bu mümkün değildir. Buna göre kümenin topolojik boyutu sıfır olmaz. Dolayısıyla C ya sıfırdır ya da 1 noktasıdır.

■

Diğer bir topolojik boyut tanımı şöyledir: S bir küme olmak üzere S nin her bir noktası sınırları S ile en az bir k tamsayısı için $k - 1$ kümede kesişiyorsa, S topolojik boyuta sahiptir. Topolojik boyut D_T ile ifade edilir.

4.3.2 Cover Boyut (D_c)

Düzlemdeki bir eğri 3 farklı disk düzenlemesi ile kaplanabilir. Fakat cover boyut birbirini kesen en az disk sayısı ile ifade edildiğinden bir eğrinin cover (kaplanma) boyutu $D_c = 1$ olarak tanımlanır. Çünkü iki diskin tek kesişimi ile eğri kaplanabilir. Noktalar kümesi birbirini kesmeyen yeterince küçük yarıçaplı disklerle kaplanabilir. Bu yüzden bunların cover boyutu sıfırdır. Bir yüzey şekli düşünülürse yüzeyin cover boyutu $D_C = 2$ dir. Çünkü yüzeyi kaplamak için disklerin birbiriyle en az iki kesişimi gereklidir. Aynı düşünceyle küpün cover boyutu $D_C = 3$ tür.

Yukarıdaki açıklamalardan anlaşılacağı gibi bir S kümesi küçük disklerle kaplandığında disklerin minimum sayıdaki kesişimine cover kuralı denir (Kraft 1995).

4.3.3 Hausdorff-Besicovitch Boyut

Bir (X, d) metrik uzayının Hausdorff boyutu aşağıdaki özelliği sağlayan k sayılarının infimumu olarak tanımlanır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için her $B \in \mathcal{B}$ kümesi X in bir örtüsü olmak üzere, $D(B) < \delta$ ve $\sum_{B \in \mathcal{B}} [D(B)]^k < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı vardır. $D(B) > 0$ sayısı B kümesinin çapını gösterir. Hausdorff boyutu $b_H = \inf k$ dir. Bu durumda X kümesinin tamamı δ çaplı açık yuvarlar ile örtülürse uzayın Hausdorff boyutu b_H olmak üzere açık yuvarların sayısı yaklaşık olarak

$$N(\delta) \approx \delta^{-b_H}$$

mertebesinde olur. Hausdorff boyutu X in bir alt uzayı için de tanımlanabilir, dolayısıyla bu uzayın uygun bir örtüsünün dikkate alınması gerekir (Şuhubi 2001).

Örnek 4.3.3.1: X Cantor kümesi olmak üzere, n . adımdan sonra kümede her birinin uzunluğu $(\frac{1}{3})^n$ olan, 2^n sayıda kapalı aralığın birleşimi olur. Bu durumda

her n pozitif tam sayısı için k sayıları;

$$2^n \left(\frac{1}{3}\right)^{nk} < \varepsilon$$

koşulunu sağlamalıdır. Bu durum

$$e^{n(\log 2 - k \log 3)} < \varepsilon$$

olarak alındığında eşitsizliğin sol tarafının küçük olabilmesi için k sayılarının

$$k \geq \frac{\log 2}{\log 3}$$

eşitsizliğini sağlaması gerekir ve bu sayıların infimumu aşağıda verilmiştir.

$$b_H = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63093$$

Hausdorff boyutun diğer bir tanımı da şöyle yapılabilir: (X, d) metrik uzay ve B , $\mathcal{H}(X)$ uzayının kompakt alt kümesi olmak üzere $N(B, \delta)$ ile B kümesini örten δ yarıçaplı en az sayıda kapalı yuvar sayısı gösterilsin. B alt kümesinin hausdorff boyutu

$$D = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\log N(B, \delta)}{\log \left(\frac{1}{\delta}\right)}$$

olarak tanımlanır. Burada $\delta \rightarrow 0$ için $N(B, \delta) \approx \delta^{-D}$ yazılabilir (Şuhubi 2001).

4.3.4 Fraktal Boyut (D)

Mandelbrot herhangi bir birim cinsinden ölçülemeyen cisimlerin pütürlülük derecesine sahip olduğunu söylemiş ve bu pütürlülük derecesini ölçmenin bir yolunu bulmuştur. Mandelbrot'a göre ölçek değişse bile pütürlülük derecesi sabit kalmaktadır. Mandelbrot 1975'te bu pütürlülük derecesinin adını fraktal boyut olarak koymuştur.

Fraktal biçimler, genel olarak sonsuz kenar uzunlukları olmasına rağmen sonlu alanları olan şekillerdir. Bu yapıların sınırlarını oluşturan çizgiler pütürlülükten dolayı tek boyutlu çizgiler olarak nitelendirilemez. Çünkü fraktal şekiller iterasyon ile elde edilir ve bu iterasyon sayesinde kenarlar sonsuza giderken alan sınırlı halde kalır. Fraktal geometrinin bu karmaşıklığını anlamada yardım edecek en önemli kavramlardan biri "fraktal boyut" kavramıdır. Öklid geometrisinde boyutlar tamsayılarla

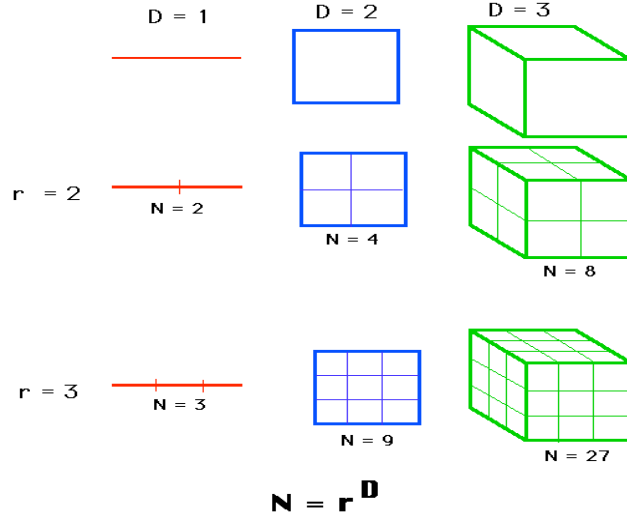
ifade edilmektedir, fakat fraktal geometride nesnelerin boyutlarını ifade etmek için tamsayılar yeterli değildir. Bu bakımdan fraktal boyut bir yapının karmaşıklığını göstermede oldukça faydalıdır. Fraktal boyut topolojik bir kavram değildir, metrik bir kavramdır. Fraktal boyut D ile gösterilirken kesirli boyut veya kendine benzerlik boyutu olarak da adlandırılır. Fraktal boyut Hausdorff boyut ile özdeştir.

Topolojik ve fraktal boyut arasında şöyle bir ilişki vardır: Bir \mathbb{R}^E uzayında D_T ve D en az 0, en çok E olabilir. D_T daima bir tamsayıdır fakat D tamsayı olmak zorunda değildir. Öklid geometrisine bağlı kalınarak oluşturulan nesnelere için $D = D_T$ dir. Diğer durumlar içinse $D > D_T$ dir. Buradan yola çıkarsak fraktallar; Hausdorff boyutu topolojik boyutundan büyük olan kümelerdir (Mandelbrot 1983).

Fraktal yapıların, buldukları metrik uzay içinde ne kadar yoğun oldukları kişiden kişiye değişebilir. Fraktal boyut, bu öznel yaklaşımları nesnel hale dönüştürerek fraktalların karşılaştırılabilme çabasının bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır (Kantarci 1994). Fraktal boyut için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

- (1) Fraktal boyutun kullanımı benzer veya farklı özelliğe sahip örüntülerin belirlenmesi açısından önemli kolaylıklar sağlamaktadır (Aygören 2006).
- (2) Fraktal boyut kendine benzerliğin bir sonucudur..
- (3) D_T topolojik boyut ve D fraktal boyut arasındaki fark ne kadar büyükse fraktal nesne o kadar belirgindir (Olemskoi and Flat 1993).

Fraktal boyut ve kendine benzerlik arasında önemli ilişkiyi kullanarak fraktal boyutun doğuşunu açıklayalım. 1 birimlik bir doğrunun boyutu 1 dir. Bu doğrunun boyu 2 katına çıkartılırsa elde edilen iki katı uzunluk orjinal parçanın kopyasıdır. Kendine benzer diğer bir şekil 1×1 tipinde bir karenin kenar uzunlukları 2 katına çıkarılırsa 4 tane 1×1 lik ilk şeklin kopyası elde edilir. $1 \times 1 \times 1$ tipinde bir küpün uzunluk genişlik ve yüksekliği 2 katına çıkarılırsa elde edilecek şekil ilk küpün 8 tane kopyasıdır.



Şekil 4.7 Fraktal boyut.

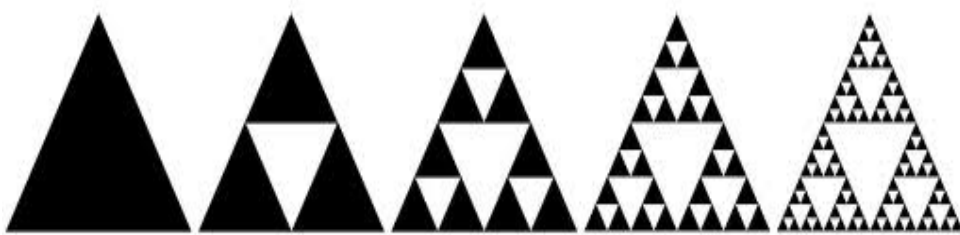
Elde ettiklerimizi tabloya yazarsak:

Tablo 4.1 Fraktal boyutun doğuşu.

ŞEKİL	BOYUT	KOPYA SAYISI
Doğru Parçası	1	$2 = 2^1$
Kare	2	$4 = 2^2$
Küp	3	$8 = 2^3$
Kendine Benzer Şekil	D	$N = 2^D$

şeklinde bir tablo elde edebiliriz.

Fraktal boyutu görmek için "Geometrik Fraktallar" bölümünde ayrıntılı olarak incelenecek olan Sierpinski üçgeni kullanılabilir. Sierpinski üçgenini oluşturmaya bir eşkanar üçgen çizmekle başlanır.



Şekil 4.8 Sierpinski Üçgeni.

I. Adım: Kenar uzunluğu 1 birim olan bir eşkenar üçgen çizilir.

II. Adım: Bütün kenarların orta noktaları birleştirilir ve dört tane eşkenar üçgen oluşturulur. Ortada kalan üçgen çıkartılıp atılır.

III. Adım: Elde edilen üçgenler kenar uzunlukları $\frac{1}{2}$ olan 3 tane kopya üçgendir.

IV. Adım: III. adımda elde edilen üçgenlere de II. adımdaki işlemler uygulanır ve sonsuza kadar devam ettirilir.

O halde yukarıdaki tablodan III.adımda elde edilen Sierpinski üçgeni için tablo 4.3.4.1 den

$$3 = 2^D$$

eşitliği yazılabilir. D burada boyuttur. Buna göre,

$$\begin{aligned}\log 3 &= \log 2^D \\ D &= \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1,58\end{aligned}$$

yazılır. O halde fraktal boyutu elde edebilmek için

$$D = \frac{\log(\text{benzer parça sayısı})}{\log(1/\text{küçültme katsayısı})}$$

formülü kullanılabilir. Bu formül farklı parçaların farklı küçültme katsayılı halleri için de genelleştirilebilir. Bu genelleştirilen formüllere "Moran denklemi" denir.

$\frac{1}{2}$ kenar uzunluğu için 3 parçadan oluşan Sierpinski üçgenin boyutu

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58$$

$\frac{1}{4}$ kenar uzunluğu için 9 parçadan oluşan Sierpinski üçgeninin boyutu

$$\begin{aligned}D &= \frac{\log 9}{\log \frac{1}{4}} = \frac{\log 9}{\log 4} \\ &= \frac{\log 3^2}{\log 2^2} = \frac{\log 3}{\log 2} \\ &\cong 1,58\end{aligned}$$

olur. Sierpinski üçgeninde kenarları büyüttüğümüzü varsayarsak bu kez üçgenin kenar uzunlukları 2 katına çıkarılıp ortadaki parça atıldığında 3 kopya elde edilir. O halde

$$3 = 2^D$$

$$\log 3 = \log 2^D$$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

D fraktal boyutu elde edilir. Buradan fraktal boyut

$$D = \frac{\log (\text{Benzer parça sayısı})}{\log (\text{Büyütme katsayısı})}$$

formülünden elde edilir.

Büyütme katsayısı 2 iken 3 parçadan oluşan Sierpinski üçgenin boyutu

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1,58$$

dir. Buna göre büyütme katsayısı 2^k olan 3^k parçadan oluşan Sierpinski üçgeninin boyutu

$$D = \frac{\log 3^k}{\log 2^k} \cong 1,58$$

dir (Hacısalihoglu ve Yaz 2002).

Değişmeyen ölçekte yalnızca küçük bir fraktal grubu tek kesin fraktal boyuta sahiptir, böyle fraktallara monofraktallar denir. Pek çok doğal fraktal ölçüğe bağlı olarak farklı fraktal boyutlara sahiptir. Bunlar farklı boyuttaki pek çok fraktalın biraraya gelmesiyle oluşur. Böyle fraktallara multifraktallar denir. Multifraktal elde etmek için tüm boyutları tespit etmek gerekmez, aynı ölçekteki fraktal boyutları değerlendirmek yeterlidir (Oldrich Zmeskal et al. 2001).

4.3.5 Moran Denklemleri

Fraktal boyutu veren $D = \frac{\log(N)}{\log \frac{1}{r}}$ (Burada $r =$ küçültme katsayısı) formülü tüm parçaları aynı küçültme katsayısına ait fraktallarda uygulanabilir. Fakat farklı

parçaları farklı küçültme katsayısına sahip bir fraktal düşünülün. Küçültme katsayıları r_1, r_2, \dots, r_N olan N parçaya bölünün. Bu durumda fraktal boyut formülünü genelleştirmek için her bir küçültme katsayısı diğerinden ayırt edilecek şekilde yazılmalıdır.

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

ifadesi

$$\begin{aligned} D \log\left(\frac{1}{r}\right) &= \log(N) \\ \left(\frac{1}{r}\right)^D &= N \\ 1 &= N \cdot r^D \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece fraktal her bölündüğünde yeni her kopya için r yi veren

$$1 = r^D + r^D + \dots + r^D$$

ifadesi elde edilir. Her bir r küçültme katsayısı için r_i yi alırsak fraktal boyut

$$1 = r_1^D + \dots + r_N^D$$

ifadesini sağlamalıdır. Bu ifade Moran denklemdir. Her r_i , $0 < r_i < 1$ olduğu sürece, Moran denkleminin çözümü tektir ve bu çözüm fraktal boyuttur.

Çözümün tekliği gösterilsin:

$0 < r_1 < 1, \dots$, ve $0 < r_N < 1$ için

$$1 = r_1^D + \dots + r_N^D$$

ifadesinin çözümününün tek olduğunu göstermek için

$$f(D) = r_1^D + \dots + r_N^D$$

fonksiyonu ele alınsın.

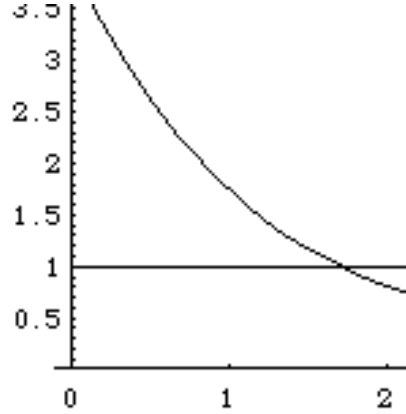
$$f(0) = r_1^0 + \dots + r_N^0 = 1 + \dots + 1 = N$$

olduğu görülmüştür. $D \rightarrow \infty$ için $f(D) \rightarrow 0$ dır. Çünkü her $r_i < 1$ için $D \rightarrow \infty$ iken her $r_i^D \rightarrow 0$ olur. Ayrıca $f(D)$ nin grafiği sürekli azalandır. Çünkü

$$f'(D) = r_1^D \cdot \ln(r_1) + \dots + r_N^D \cdot \ln(r_N)$$

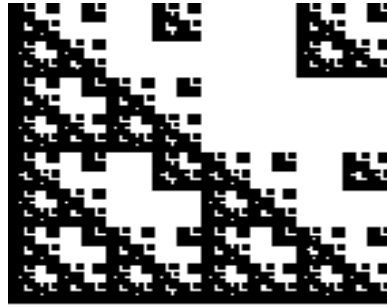
dir. $0 < r_i < 1$ olduğundan her $\ln(r_i) < 0$ ve $f'(D) < 0$ dır.

Örnek 4.3.5.1: $N = 4$, $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2}$ ve $r_4 = \frac{1}{4}$ için $f(D)$ nin grafiği



Şekil 4.9 Moran denklemi grafiği.

şeklindedir. Bu $y = f(D)$ grafiğinin $y = 1$ doğrusunu $D = 1,72368$ de kestiğine dikkat ediniz. Bu değer verilen küçültme katsayı değerlerine göre fraktalın boyutudur. Moran denklemi ile elde edilen şekil ise aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.10 Moran denklemi modeli.

4.3.6 Fraktal Boyutun Teorik Olarak Hesaplanması

X uzayı soyut bir uzay olsun $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ metrik fonksiyonu olmak üzere (X, d) metrik uzayı tam olsun. X in boş olmayan kompakt alt kümelerinin uzayı

da $H(X)$ ile gösterilsin. Fraktallar $H(X)$ uzayında tanımlansın. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı için ε yarıçaplı, x_n merkezli bir yuvar $B(x_n, \varepsilon)$ ve $A \in H(X)$ için $N(A, \varepsilon) = M$ (M en küçük pozitif tamsayı) öyle ki

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^m B(x_n, \varepsilon)$$

olsun.

Tanım 4.3.6.1: $A \in H(X)$ ve (X, d) metrik uzay olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $N(A, \varepsilon)$, yarıçapı ε olan ve birleşimleri A yı örten yuvarların sayısının en küçüğü olmak üzere

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(A, \varepsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = D$$

limiti varsa bu değere A kümesinin fraktal boyutu denir (Aslan ve Ufuktepe 2002).

Teorem 4.3.6.1: (X, d) bir tam metrik uzay ve $A \in H(X)$, $c > 0$ ve $0 < r < 1$ için $\varepsilon_n = cr^n$, $n = 1, 2, \dots$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(A, \varepsilon_n))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)} = D$$

limiti varsa A kümesinin fraktal boyutu D dir (Aslan ve Ufuktepe 2002).

Teorem 4.3.6.2 (Kutucuk Sayma Teoremi): A , $H(\mathbb{R}^m)$ nın bir ögesi ve A bir kenarı $\frac{1}{2^n}$ olan kapalı kare biçimli kutularla örtülmüş olsun. $N_n(A)$, A yı örten ve bir ayrıtı $\frac{1}{2^n}$ olan kutuların sayısının en küçüğünü gösterebilir. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_n(A))}{\ln(2^n)} = D$$

limiti varsa A nın fraktal boyutu D dir (Aslan ve Ufuktepe 2002).

Örnek 4.3.6.1: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ olmak üzere A herhangi bir kare olsun. $N_1(A) = 4$, $N_2(A) = 16, \dots, N_n(A) = 4^n$ ise, Teorem 4.3.6.2 gereğince

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_n(A))}{\ln(2^n)} = 2$$

dir (Ufuktepe ve Aslan 2002).

Fraktal boyut hesaplamada kullanılan diğerk bir yöntem "pergel boyut" adı verilen bir eğrinin (kıyı şeridi, yeryüzü uzunluğu gibi...) boyutunu ölçmek için kullanılan yöntemdir.

Bir kıyı şeridinin uzunluğu bir pergelin r adım açılması ve $N(r)$ ile gösterilen adımların sayılmasıyla ölçülebilir. Bir kıyı şeridinin uzunluğu bir tur için gereken r adım pergel açılışı ve $N(r)$ ile ifade edilen adımların sayısı ile ölçülebilir. Kıyı şeridi uzunluğu

$$L(r) = N(r) \cdot r$$

olarak verilir.

Tablo 4.2 Pergel boyutu hesaplanan kıyı şeridi değerleri.

r	N	$L = N \cdot r$	$\ln r$	$\ln L$
200	6	1200	5.30	7.09
100	14	1400	4.61	7.24
80	20	1600	4.38	7.38
40	46	1840	3.69	7.52
20	112	2240	3.00	7.71

Tablo 4.2 de farklı r açılışları için L kıyı şeridi uzunluğunu ve N adım sayılarını göstermektedir. Pergelin açılışı küçüldükçe ölçülen uzunluğun büyüdüğü açıktır. Eğer kıyı şeridi sınırlı uzunluğa sahipse $r \rightarrow 0$ iken L , L_0 sabit değerine yaklaşır. Ancak r azaldıkça L sabit bir değere ulaşmaz.

Tablo 4.2 deki değerler

$$L(r) = r^{1-D_R}$$

kuralını sağlayan bir doğru üzerinde uzanır. D_R burada pergel boyuttur. İzlanda kıyı şeridi boyutu

$$\begin{aligned} 1 - D_R &= \frac{7.9 - 7.3}{2.3 - 4.5} \\ &\approx -0.27 \implies D_R = 1.27 \end{aligned}$$

Bu şekildeki boyut hesaplaması ile doğal nesnelerin fraktal boyutu hesaplanabilir. Çünkü bu pergel boyut ile Hausdorff boyut tahmin edilebilir. Örneğin Koch eğrisi, eşit pergel boyut ve Hausdorff boyuta sahiptir (Kraft 1995).

4.3.7 Dolambaçlılık Derecesi

Küçük bir ölçü birimi a olarak seçilsin. Daha sonra dolambaçlı bir çizginin uzunluğu a cinsinden ölçülsün Kabul edelim ki a ölçüsü N defa kullanılmış olsun. Yani toplam ölçü Na olur. Buna göre dolmabaçlı çizginin dolambaçlılık derecesi

$$D = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log \frac{1}{a}}$$

ile verilir. Buradan

$$N = \left(\frac{1}{a}\right)^D$$

elde edilir. Ölçülen toplam uzunluk Na ise

$$Na = \left(\frac{1}{a}\right)^{D-1}$$

olur. Bu da ölçü birimi olan a nın azalması halinde ölçülen Na uzunluğunun nasıl arttığını gösterir.

4.4 Fraktallarda Bulunan Simetriler

4.4.1 Yansıyan (Ayna) Simetri

Simetrinin en yaygın şeklidir. Bir şeklin kendisi ile yansıması eşittir. Bu yansımada şeklin biçimi ve boyutu değişmez, şeklin yönü ters çevrilir ve yeri değişir. Bu simetri verilen şeklin bir doğruya göre katlandığında aynısının diğer tarafta eşit mesafede çıkmasıdır. Buradaki doğruya da simetri eksenini denir. Örneğin yaprak, kelebek ve insan yüzü yansıyan simetriktir.



Şekil 4.11 Kelebek yansıyan simetriktir.

4.4.2 Dönme

Bir şekil, bir nokta etrafında döndürüldüğünde o nokta dönme merkezidir ve dönme ile şeklin boyutu, biçimi değişmez sadece yönü değişebilir.

Bir şekil kendi merkezi etrafında döndürüldüğünde 360° den küçük açılı dönmelerde en az bir defa kendisiyle çakışiyorsa bu şekil dönme simetrisine sahiptir. Dönme örneği olarak buz kristali ve kar tanesi verilebilir.



Şekil 4.12 Kartanesi dönme simetrisine sahiptir.

4.4.3 Öteleme

Bir nesnenin bir yerden başka yere belli bir doğrultu ve yönde yaptığı kayma hareketine öteleme denir. Öteleme hareketi sonunda nesnenin geldiği yer görüntüsüdür. Şeklin duruşu, biçim ve boyutları aynı kalır. Bir şeklin kendisi ile öteleme altındaki görüntüsü eşittir. Bu tür simetrilere öteleme simetrisi denir. Aynı zamanda öteleme bakışına sahip bir cisim kendi etrafında döndürüldüğünde görüntüsü aynı kalır.



Şekil 4.13 Öteleme simetrisi gösteren bir ağaç dalı.

4.4.4 Büyütme Simetrisi

Diğerlerine göre daha az rastlanan büyütme altındaki bir simetridir. Fraktal şekle ne kadar yaklaşırsak yaklaşalım hemen hemen hiç değişmez.

5 FRAKTAL TIPLERİ

5.1 Kompleks ve Rastgele (Random) Fraktallar

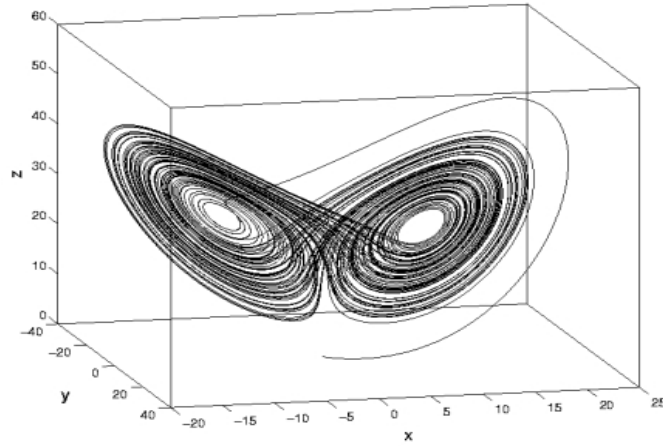
Fraktallar sonsuz detaya sahip oldukları için tam ve doğru olarak hesaplanamazlar. Bu yüzden bilgisayar uygulamalarında belli bir duyarlılık hesaba katılarak fraktal yaklaşım sağlanabilir. İstenilen çözünürlük seviyesi, ekran üzerindeki piksellerin sayısı ve işlemde geçen kısaltmalar çerçevesinde belirlenir (Peigen and Saupe 1988). Rastgele fraktallar genelde doğayı simüle etmede kullanılan ve yapılarında gelişigüzellik barındıran yöntemlerle elde edilir. Bir rastgele fraktalın tüm ölçeklerinde rastgelelik olmalıdır, rastgele olmayan parçalar kendine benzer değildir. Bu tip fraktallar daha çok doğada görülür (Falconer 2003).

Rastgele fraktallar karmaşık bir topolojik yapıya ve "fraktal perkolasyon" olarak bilinen istatistiksel kendine benzerliğe sahiptir. Değişen parametreler kritik bir değere doğru yaklaştıkça topolojik yapı değişir (Falconer 2003). Rastgele fraktalların en önemli örnekleri ağaçlardır. Bir ağaç bir gövdeye onun üzerinde çoğalan ince dallara sahiptir ve ağacın bir dalını incelediğimizde o dal parçası şekil olarak ağacın kendine benzemektedir. Ağacın geometrisi bir düzensizlik, rastgelelik ve kaos içermektedir.

Matematiksel fraktalları inceleyen Mitchell Feigenbaum fraktallar ile kaos arasında yakın bir ilişki olduğunu göstermiştir. Doğadaki kaos karmaşık yapının ortaya çıkmasını sağlayan "çatallaşma" denilen mekanizma ile sistemin yeni dallara ayrılması ve farklı yönlere gelişimin olmasıdır. Kaos da kalıplar yoktur, birbirinin benzeri olsa da hiçbir şey aynı değildir, her parça ayrı bir yol izlese de ortak olarak bir bütünü geliştirirler. Hiçbir parça diğerinin oluşumunu önlemediği gibi birbirine destek olur.

Fraktal geometri ile karmaşık ve dinamik olayları da kurgulamak mümkündür. Bir iklim bilimci olan Edward Lorenz atmosferde oluşan rüzgar, fırtına, tayfun, gibi dinamik hava akımlarını kurgulayan bir model geliştirmiştir. Bu modeli bilgisayarda çalıştırınca mevsimler boyunca oluşan farklı atmosferik olaylar yazıcıya sayısal olarak aktarılmaktadır. Günün birinde Lorenz başlangıç zamanları sadece birkaç dakika farklı olan iki çıktıyı karşılaştırmayı düşünmüştür. Bu iki çıktının uzun süreli

sonuçlarında pek az fark bulunacağını tahmin etmiştir. Oysa ki sonuçlarda büyük farklar ortaya çıktığını görmüştür. Aynı durum birbirine yakın seçilen herhangi iki başlangıç zamanında tekrarlanmaktadır. Başlangıç zamanlarındaki küçük farklar süre uzadıkça artar ve tümüyle önceden belirlenmesi olanaksız hale döndürür. İşte bu bir fraktaldır ve tarihi söz söylenmiştir: "Pekin'de bir kelebeğin kanat çırpışı New York'ta çok büyük bir fırtınaya neden olabilir."



Şekil 5.1 Lorenz fraktalı.

Lorenz'in denklemleri kendi üzerlerine dönerek oluştuklarından süreksiz adımlar içermektedir. Ortaya çıkan sonuçlar sürekli fonksiyon olarak çizildiğinde bir kelebeğin kanatlarına benzeyen görüntü ortaya çıkar. Bu şekil "Lorenz fraktalı" veya "Lorenz tuhaf çekicisi" olarak adlandırılmıştır. Bu fraktal karmaşa kuramının başlangıcını oluşturmaktadır. Fırtınalı rüzgarlar, tayfunlar, borsa hareketleri, zarların yuvarlanması, kalbin fibrilasyona girmesi gibi çok farklı olaylar karmaşa kuramı ile açıklanabilmektedir. Lorenz fraktalına baktığımızda söz konusu dinamik merkezin iki merkez etrafında dolandığını fakat her yörüngenin bir öncekinden farklı olduğunu görmekteyiz. Bu tür çekici merkezlere anlam verilemediğinden bunlara "tuhaf çekici" denilmiştir. Bu çekiciler zaman içinde kendini asla tekrar etmeyen fraktal karmaşıklığa sahiptir.

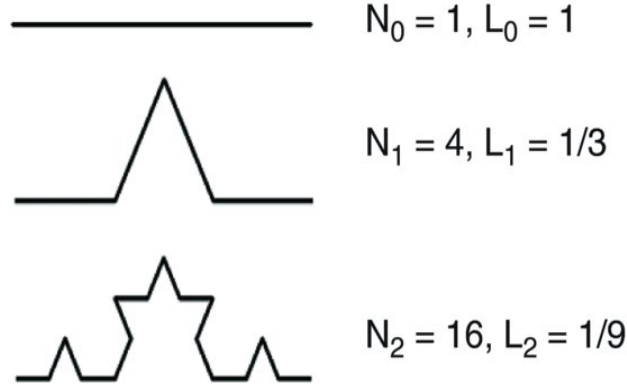
5.2 Geometrik Fraktallar

5.2.1 Von Koch Eğrisi

Koch eğrisi Helge Von Koch tarafından 1904 yılında ortaya atılmıştır. Van Koch eğrisi her yerde sürekli fakat hiçbir yerde sürekli olmayan bir eğridir.

Bir doğru parçası ile başlanır. Doğru parçası üç eşit parçaya ayrılır, ortadaki parça atılıp atılan parça üstünde dışa doğru bir eşkenar üçgen kurulur. Böylece dört eş doğru parçasından oluşan bir kırık çizgi oluşturulur. Oluşan bu parçaya motif denir. Eğer ilk parça 1 birim uzunluğunda seçilirse motif her biri $\frac{1}{3}$ uzunlukta 4 parçadan oluşur. Sonuçta elde edilen motifin uzunluğu $\frac{4}{3}$ olur. Benzer şekilde 4 parçadan her birine aynı işlem uygulanarak her parçada birer motif elde edilir. Bu son halde $4 \times 4 = 16$ eş doğru parçası yer alır.

Bu eğrinin toplam uzunluğu $\frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$ olur. Benzer şekilde bir adım daha devam edilirse üçüncü adımda $4^3 = 64$ doğru parçası elde edilir. Her birinin uzunluğu $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ olan eş doğru parçasından oluşan bir eğridir. Bu eğrinin toplam uzunluğu $64 \cdot \frac{1}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$ olur.



Şekil 5.2 Elde edilen Von Koch eğrisi.

Von Koch eğrisi fraktalının boyutu $D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{L}\right)}$ ile hesaplanır. Burada L küçültme katsayısı N benzer parça sayısıdır. İlk motife göre $N_1 = 4, L_1 = \frac{1}{3}$ olduğundan

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26\dots$$

İkinci motife göre $N_2 = 16 = 4^2$, $L_2 = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$ olduğundan

$$D = \frac{\log 4^2}{\log 3^2} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26\dots$$

olur. Dolayısıyla $D = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{\log 4^2}{\log 3^2} = \dots = 1,26\dots$ bulunur (Hacısalihoglu ve Yaz 2002).

5.2.2 Ters Kar Tanesi

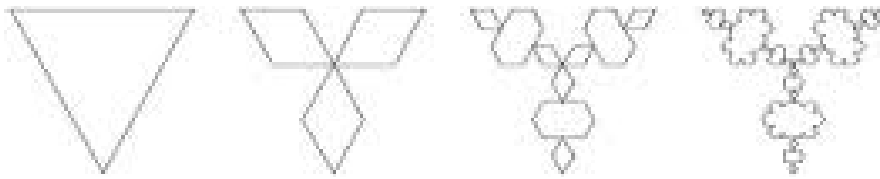
Ters kar tanesi fraktalı Koch kar tanesi fraktalının ilginç bir değişimi olacaktır.

I. Adım: Büyük bir eşkenar üçgen çizilir.

II. Adım: Üçgenin bir kenarı üç eşit parçaya bölünür ve ortadaki parça atılır. Bu parçalardan bir tane daha bulunarak V şeklinde ekleyip çıkarılan yeni üçgenin içine doğru doldurulur, üçgenin geri kalan iki kenarına da aynı işlem uygulanır. Böylece bir fırıldak şekli elde edilir.

III. Adım: Bu yöntem fırıldakta yer alan yeni üçgenlerle tekrarlanır (Hacısalihoglu ve Yaz 2002). Böylece yukarıdaki şekiller dizisi elde edilir.

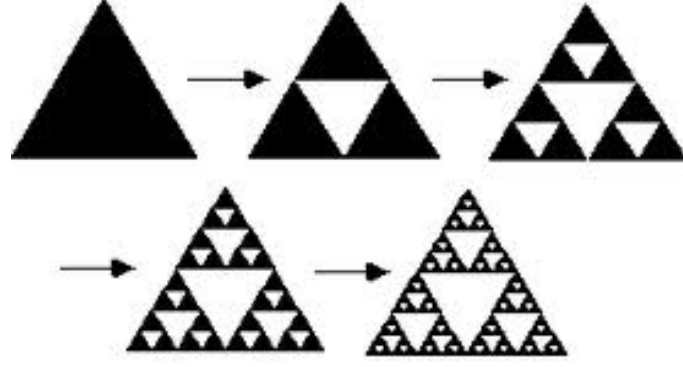
Ters kar tanesinin boyutu $D = 1,26\dots$ dir. Bu durum beklendik bir durumdur. Çünkü bu fraktalların formülleri aynıdır. Fakat ters kar tanesinde üçgenler içe doğru oluşmaktadır.



Şekil 5.3 Ters kar tanesi.

5.2.3 Sierpinski Üçgeni

13. y.y. da yaşamış bir ressam tarafından ortaya çıkarılan fraktal, 1915 yılında Wacław Sierpinski tarafından tanımlanmıştır. Sierpinski üçgeni fraktalların ilk örneğidir ve tremalarla oluşturulur. Trema(yer değiştiren parçalar) fraktal oluşturulurken atılan parçalara denir.



Şekil 5.4 Sierpinski üçgeni.

Sierpinski üçgeninin tremalarla oluşumu şöyledir: Kenar uzunlukları 1 birim olan bir eşkenar üçgen alınır. Bu üçgen S_0 olsun. Üçgenin kenarlarının orta noktaları birleşmek suretiyle üçgen birbirine eş üçgenlere ayrılır. Ortada oluşan üçgen çıkartılıp atılır. Oluşan 3 eş üçgenin kenar uzunlukları $\frac{1}{2}$ dir. Ortadaki üçgeni attıktan sonra geriye kalan kümeye S_1 denilirse $S_1 \subseteq S_0$ dir. Geri kalan 3 üçgenin her biri kenar uzunlukları $\frac{1}{4}$ olan eşkenar üçgenlere ayrılır ve ortada kalan parçalar atılır. Kalan kümeye S_2 denirse $S_2 \subseteq S_0$ dir. Bu şekilde devam edilirse bir S_k dizisi elde edilir. Bu S_k dizisinin limitine S dersek bu limit Sierpinski Üçgenidir. Dizi azalandır yani,

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$$

dır. Dolayısıyla limit

$$S = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k$$

arakesitidir. S_k kümesi 3^k tane birbirine eş eşkenar üçgenden oluşur. Bu üçgenlerin herbirinin kenar uzunluğu $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ dir. Bu nedenle S_k nin toplam alanı

$$3^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

tür. $k \rightarrow \infty$ için $S^k \rightarrow 0$ dir. Bu demektir ki Sierpinski üçgeninin toplam alanı 0 dir. S_k da 3^k tane üçgen vardır, bunlardan herbirinin 3 kenarı vardır ve bu kenarların herbirinin uzunluğu da $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ dir. Bu nedenle S nin toplam uzunluğu en azından $3^k \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$ dir. $k \rightarrow \infty$ toplam uzunluk ∞ a gider. Yani S nin toplam uzunluğu ∞ dur (Yolaçan 2008).

3^k parçadan oluşan küçültme katsayısı $(\frac{1}{2})^k$ Sierpinski Üçgeninin boyutu

$$\begin{aligned} D &= \frac{\log 3}{\log \left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\log 3}{\log 2} \\ &= \cong 1,58 \end{aligned}$$

dir.

Blaise Pascal'ın ortaya koyduğu Pascal üçgeni ile Sierpinski üçgeni arasında da ilişki vardır. Pascal üçgeninin içinde Sierpinski üçgeni bulunur. Pascal üçgeni içindeki tek ve çift sayılar farklı renge boyanırsa Pascal üçgeninden Sierpinski üçgeni elde edilmiş olur.

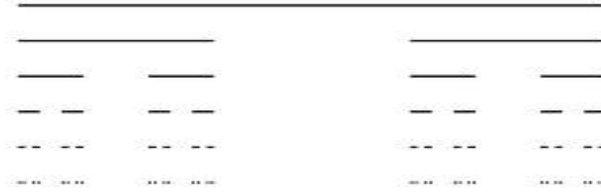


Şekil 5.5 Pascal Üçgeni.

5.2.4 Üçlü Cantor Bulutu

Kümeler teorisinin kurucusu kabul edilen Alman matematikçi George Cantor tarafından 1883 yılında açıklanan Cantor bulutu ilginç özelliklere sahiptir. Daha sonra bu küme Hausdorff tarafından kesirli boyut için bir örnek olarak seçilmiştir. Mandelbrot Cantor'un bu kümesine "Cantor tozu" adını vermiştir. Buradaki toz kelimesi boyutun sıfır olmasını ifade eder. Cantor bulutunun ilginç özelliklerinden bazıları şunlardır:

1. n _inci adımda kalan aralıkları veren bir iterasyon ile kurulabilir.
2. Boş küme değildir.
3. Sayılamaz sonsuz bir kümedir.
4. Her adımda atılan üçte birlik aralıkların toplam uzunluğu 1 dir.
5. Kapalı bir kümedir.
6. Tam metrik bir uzaydır ve tamamen sınırlı bir kümedir.
7. Hiçbir yerde yoğun değildir.
8. Hiç iç noktası yoktur.



Şekil 5.6 Cantor bulutu.

Cantor bulutunun tremalarla oluşturulan yapısı şu şekildedir: Üçlü Cantor bulutu \mathbb{R} reel sayılar doğrusunun bir alt kümesidir. İlk olarak bir yaklaşım dizisi tanımlansın. Bir $C_0 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ kapalı aralığı ile başlanılsın. Bu kapalı aralık üç eşit parçaya ayrılıp ortadaki parça atılsın. Elde kalana C_1 denilirse

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

olur. C_1 deki $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ve $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ parçalarının her birini ayrı ayrı üç eşit parçaya ayrılıp ve her birinde benzer şekilde ortadaki parça atılsın. Elde kalana C_2 denilirse

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

olduğu görülmüştür. Böyle devam edilirse $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ dizisi elde edilir. Bu dizinin $n \rightarrow \infty$ için limitine C dersek C ye üçlü Cantor bulutu denir. Şekilde görüldüğü gibi azalan bir

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$$

dizisi söz konusudur. O halde dizinin limiti C ise C_k larm arakesiti olarak

$$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$$

alnabilir.

C_k kümesi, her birinin boyu $(\frac{1}{3})^k$ olan 2^k tane ayrık ve kapalı doğru parçalarından oluşmaktadır. O halde C_k nin toplam uzunluğu, bu doğru parçalarının uzunluklarının toplamı olup $(\frac{2}{3})^k$ dir. $k \rightarrow \infty$ için limit,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

dir. O halde Cantor bulutunun toplam uzunluğu sıfırdır.

Bu kümenin boyutuna bakılırsa küçültme katsayısı $(\frac{1}{3})^k$ olan 2^k parçadan oluşan Cantor bulutunun boyutu

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{\log 2^k}{\log \frac{1}{(\frac{1}{3})^k}} \right) \\ &= \frac{k \log 2}{k \log 3} \\ &= 0,62989 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

6 DOĞANIN FRAKTAL GEOMETRİSİ

Evren Öklid'in tanımladığı geometri gibi düzgün değildir. Doğada gördüğümüz çoğu şey lineer olmamakla birlikte kendiliğinden meydana gelen olayların her birinde benzerlik vardır. Bu benzerlik nasıl oluşmaktadır? Doğadaki kendiliğinden meydana gelen olaylar belli bir katsayının birbiri üzerine eklenmesiyle gerçekleşir yani fraktal yapının özelliklerini gösterir.

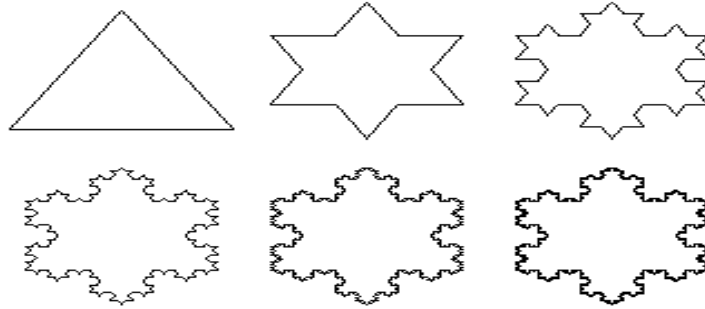
Doğadaki nesnelere tamamen Öklid geometrisine ait ya da tamamen fraktal geometriye ait olmasa da biçimlerin karmaşık yapısını fraktal geometri aracılığı ile incelemek mümkündür. Yerküreyi 6-7 defa dolaşabilecek kan damarlarını ve bir futbol sahası kadar alan kaplayan akciğer hava keseciklerini, 2 metreyi aşkın uzunluğa sahip DNA molekülünün 100 trilyon hücremizin her birindeki birkaç mikrometrelik çekirdeğin içine paketlemesinin ardında fraktal geometri kuralları vardır. Kendi üzerine dönüşüm içeren fraktal yapılar sadece durağan resimler olarak karşımıza çıkmazlar, doğada hareket halinde olan yapıların davranışını da açıklarlar. Örneğin mercanlar ve süngerlerin oluşumu, yükselen dumanın karmaşık görüntüsü dinamik fraktallardır.

İlk bakıldığında karmaşık (kaotik) gibi görünen doğadaki oluşumların yapısında sadelik ve basitlik olduğunu söyleyebiliriz. Doğadaki her karmaşanın içinde bir düzen bulunması durumuna "kaos" denilmektedir. Her ne kadar kaosda düzensizlik artsa da sistemin tümü ya da en küçük parçası kendi içinde bir düzene sahiptir. Yine de doğadaki fraktal geometrinin en önemli özelliği başlangıç şartlarına hassas bağlılık, sonsuz karmaşıklık ve kendine benzerliktir. Doğanın fraktal sisteminde çok yakın başlangıç şartları bile çok farklı sonuçlar verebilir. Bu olaya karmaşa kuramında "kelebek etkisi" denir.

Doğadaki fraktal şekiller doğal bir süreç sonunda ortaya çıkmıştır. Başka bir deyişle doğa bir çeşit kendiliğinden ölçek değişmezliği gösteren yapılar oluşturmaktadır. Doğadaki mevcut bu sürecin bilim adamları tarafından modellenmesi fraktal şekillerin nasıl oluştuğunu anlamamıza yardım etmektedir. Fraktal geometri yaşamı kavramamızı ve etrafımızda var olan çeşitliliği fark etmemizi sağlar.

Doğadaki fraktallar hemen hemen fraktal özelliği gösterir. Çünkü kendine benzerlik özelliği gösterebilirler de tam kendine benzerlik özelliği göstermezler. Ayrıca doğal fraktallar sonlu ölçek aralıklarında meydana gelir halbuki matematiksel fraktallar teorik olarak sonsuzdur. Doğadaki fraktallar yeryüzünden gökyüzüne ve hatta yaşayan varlıklara kadar her yerde bulunabilir. Dağlar farkedilir kendine benzer fraktallar olduğu kadar erozyonların oluşturduğu kanyonlar da kendine benzerdir. Şimşek, bulutlar, kartanesi de kendine benzer modellerdir. Ağaç kabuğu, damarlar, ağaçlar, eğrelti otu, brokoli gibi canlılar da fraktal özelliği gösterir. Örneğin ağaçların birçok tipinde dal ve köklerdeki saçaklanma biçimleriyle, dalların yan dallara ayrılma biçimlerinin, yaprakların çıkış noktalarının ve yapraklar üzerindeki damarların dallanmış biçimlerinin her birine benzer bir kalıp izlediğini görebiliriz. Daha çarpıcı bir örnek atom-altı düzeyidir. Bu düzeyde ulaştığımız mikroalemler çok büyük mesafelerle birbirinden ayrılmış bileşenlerden oluşan bir boşluktur. Yapısında biktırıcı ve binlerce tekrara dayalı matematiksel altyapıya rağmen fraktallar özellikle günümüz yazılım teknolojisinin nimetleriyle birleşince daha yaygınlaşmış durumdadır.

Doğada en net görebileceğimiz doğal fraktal kar tanesidir. Bu model doğal fraktalların en basit modelidir. 1904'te Helge Von Koch kar tanesini ortaya atmıştır. Kar tanesinin çevre uzunluğu sonsuzdur fakat sınırladığı alan sonludur.



Şekil 6.1 Koch kar tanesi.

Yeryüzünde özdeş iki kar tanesi yoktur. Kar tanesi fraktal aşağıdaki aşamalarla oluşturulabilir:

Adım 1: Kenar uzunlukları 1 birim olan bir eşkenar üçgen alınır.

Adım 2: Her kenar eşit üç parçaya bölünür ve ortadaki parçanın üstüne eşkenar üçgen oluşturulur, ortadaki parça çıkarılıp atılır.

Adım 3: Adım 2 deki işlem yeni oluşan üçgenlere de uygulanır. İşlem sonsuza kadar devam ettirilir.

Altıncı adımda Şekil 6.1 elde edilir. Normalde geometrik bir şeklin çevresi ne kadar büyürse alanı da o kadar büyür fakat kar tanesinin çevre uzunluğu sonsuzdur, karakteristik özelliği de budur. Koch kar tanesinin boyutu daha önce hesapladığımız ters kar tanesinin boyutu ile aynıdır.

Doğadaki karmaşık yapıları az sayıda kurallardan üretebilecek bir araç olarak Lindenmayer sistemleri (L-Sistemler) kullanılmaktadır.

6.1 Lindenmayer Sistemleri (L-Sistemler)

L-sistemler biyolojist Aristid Lindenmayer tarafından bilgisayar ortamında bitki modellenmesi yapmak amacıyla ve basit organizmalarla ilgili çalışmalarına taslak olarak 1968'de ortaya konmuştur. L-sistemler karmaşık yapıları az sayıda kurallardan üretebilecek bir araç olarak nitelendirilebilir.

Bir L-sistem bitki gibi dallanıp budaklanan yapıları modellemeye yarayan yeniden yazma sistemleridir. Simülasyon, aksiyom adı verilen bir başlangıç anahtar kelimesinden, her bir harf ya da sembol L-sistemde tanımlanan kurallar kullanılarak başka bir sembolle ya da cümlecikle yer değiştirilerek böylece yeni bir cümle elde edilmektedir. Bu amaçla kurallar istenildiği kadar uygulanmakta elde edilen cümle Kaplumbağa Grafiği (Turtle Graphics) adı verilen grafiksel yorumlama yöntemi kullanılarak grafiksel bir görüntüye dönüştürülmekte ve ekranda gösterilmektedir.

L-sistemler $G = (V, W, P)$ gibi bir üçlü ile tanımlanabilir. Burada:

V = Değişken değerlerden oluşan bir noktalar kümesidir.

P = Bir ürün kümesidir. P ürünü $a \rightarrow v$ olarak yazılır ve her a şartında v yi yaz anlamına gelir. Böylece bir sembolün yerine karşılık gelen semboller geçer. Eğer a sembolü için hiçbir ürün tanımlanmamışsa sembol sabit kalır. Yani $a \rightarrow a$ olur.

Tanım 6.1.1: (dL-Sistem) Eğer her bir sembol için kesin olarak bir ürün varsa L-sistemlere dL-sistem adı verilir.

Örnek 6.1.1: $\{a, b, c\}$; a , $\{p_1 = a \rightarrow ab$, $p_2 = b \rightarrow ac\}$ olmak üzere oluşacak L-sistem

$$w_0 = a$$

$$w_1 = ab$$

$$w_2 = abac$$

$$w_3 = abacabc$$

olarak elde edilir. Bu dizi kaplumbağa grafikleri kullanılarak çizilebilir. Uzayda L-sistemler kullanarak şekil üretme, L-sistemlerinin ürettiği cümlelere karşılık gelen geometrik şekiller (doğru parçası, silindir,...) tanımlamakla gerçekleştirilebilir. Turtle bir dizinin geometrik açıklamasını çizme aracıdır. (x,y,α) şeklindeki sıralı ile ifade edilir. x, y düzlemdeki konumu α açısı da yönü gösterir.

Turtle grafiği ise aşağıdaki sembollerle oluşturulur.

$F = d$ uzunluğunda bir doğru çizdirir.

$f = d$ adım doğru çizmeden ilerle anlamındadır.

$+$ = δ açısı kadar sola döndürür. Konumu $(x, y, \alpha + \delta)$ olarak değiştirir.

$-$ = δ açısı kadar sağa döndürür. Konumu $(x, y, \alpha - \delta)$ olarak değiştirir. Grafik çizilmeye d ve δ ile başlanır.

Örnek 6.1.2: Aşağıdaki verilere göre kaplumbağa grafiği yardımıyla Koch eğrisini oluşturunuz.

$$(F, \delta, +, -), F, \{p : F \rightarrow F + F - F - F + F\}, \delta = 90^\circ$$

$$n = 0 \implies F$$



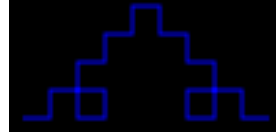
Şekil 6.2 n=0 için oluşturulan Koch eğrisi.

$$n = 1 \implies F + F - F - F + F$$



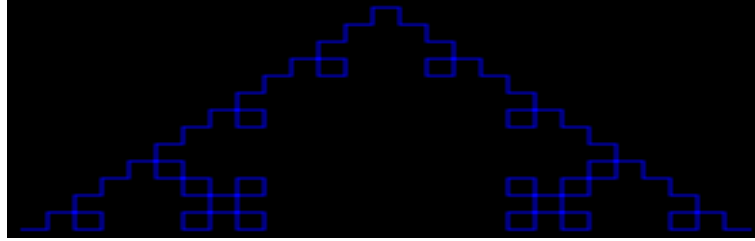
Şekil 6.3 n=1 için oluşturulan Koch eğrisi.

$$n = 2 \implies F + F - F - F + F + F - F + F - F - F + F - F + F - F - F + F + F$$



Şekil 6.4 n=2 için oluşturulan Koch eğrisi

$$\begin{aligned} n = 3 \implies & F + F - F - F + F + F + F - F - F + F - F + F - F + F - F - F + F + F + \\ & F - F - F + F + F + F - F - F + F + F + F - F - F + F - F - F + F - F - F + F + \\ & F + F - F - F + F - F + F - F - F + F + F + F - F - F + F - F + F - F - F + F - \\ & F + F - F + F - F - F - F + F + F + F - F - F + F - F + F - F - F + F + F + F - \\ & F - F + F - F + F - F - F + F - F - F + F + F + F - F - F + F + F + F - F - F + F + \\ & F + F - F - F + F - F - F + F - F - F + F - F + F - F - F + F + F + F - F - F + F \end{aligned}$$



Şekil 6.5 n=3 için oluşturulan Koch eğrisi.

Bir bitki fraktal da aşağıdaki gibi L-sistemler yardımıyla elde edilir. Bitki elde edilirken kullanılan "]" ve "[" komutları herhangi bir andaki pozisyon ve yönü bir yere saklayıp daha sonra o pozisyon ve yöne tekrar dönmeyi sağlar. Bu komutlardan birincisi herhangi bir andaki pozisyon ve yönü depolamaya ikincisi de buna erişmeye imkan sağlar.

Örnek 6.1.3: $(X, F, +, -,], [), \{X \rightarrow F - [[X] + X] + F [+FX] - X, F \rightarrow FF\}, \delta = 25^\circ$ verilerine göre fraktal bitkiyi oluşturunuz.

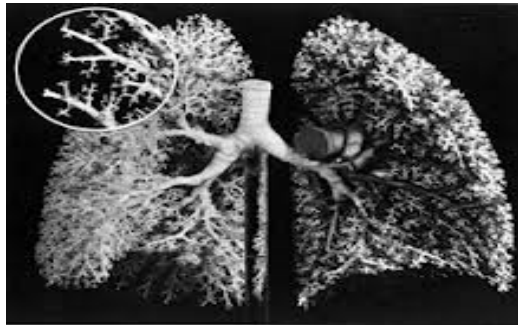
$n = 6$ için aşağıdaki fraktal bitki oluşur:



Şekil 6.6 $n = 6$ için fraktal bitki.

6.2 Dallanmış Fraktallar

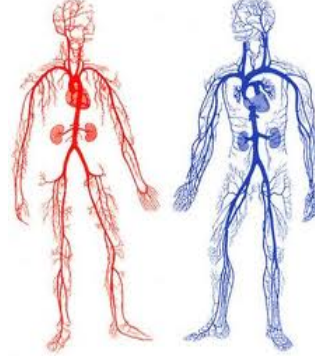
Dallanmış fraktallara kan damarları, dere yatakları, şimşekler, ağaç dalları örnek verilebilir. Ölçekten bağımsız olarak tekrarlayan basit bir dallanma süreci ile oluşurlar. Kan damarları aorttan başlayarak kılcal damarlara kılcal damarlar da daha küçük damarlara ayrılır ve dallanarak devam eder. Akciğerlerimiz yaklaşık $100 m^2$ yüzey alanlı dallanmış fraktaldır. Bu fraktal sistemi nefes borusunun akciğerlerde iki dala ayrılmasıyla başlar ve akciğerin içinde daha küçük dallara ayrılarak bronşçuk denilen en küçük torbalara kadar devam eder. Akciğerin bu yapısı bir ağaçla büyük benzerlik gösterir. Aynı şekilde beyin hücrelerimiz hatırlama, hayal etme ve algılamamız için oldukça karmaşık dallardan oluşmuştur.



Şekil 6.7 Akciğerler.

İnsan vücudu da dallanmış bir yapıdadır. Vücudumuzda boyun, kollar ve bacaklarımız olmak üzere 5 dallanmış yapı vardır. Aynı zamanda eller ve ayaklarda da 5 dallanmış yapı bulunur. Dolayısıyla insan vücudu da fraktal özelliği gösterir.

Bilgisayarda modellenen doğa fraktalları tam olarak doğadakilerle özdeş olmasa bile benzerdirler. L-sistemler dallanmış fraktalları oluşturmada kullanışlı bir yöntemdir.

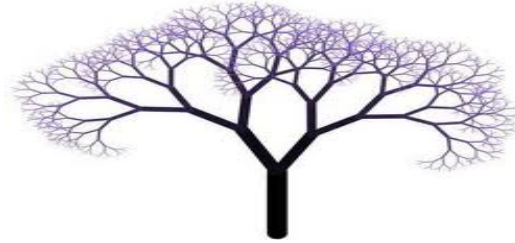


Şekil 6.8 İnsan vücudu ve kan damarları fraktal özellik gösterir.

Bitki fraktallarının oluşumuna ait diğer bir yolda Pisagor ağacı yoludur. Bu yola fraktal gölgelik de denir. Bu yöntem, doğruların ayrılmasından ibaret ve dallanmaya çok benzerdir. Doğrular yerine kareler ve üçgenler kullanılarak aşağıdaki şekle benzer bir oluşum ortaya çıkar.



Şekil 6.9 Pisagor Ağacının kare ve üçgenlerle oluşumu.



Şekil 6.10 Pisagor ağacı.

Bu tip bitki fraktallarının en önemli özelliği uç noktalarının irtibatlı oluşudur. Dallaların uç noktaları bir yüzey üzerinde birleşir.

6.3 Spiraller

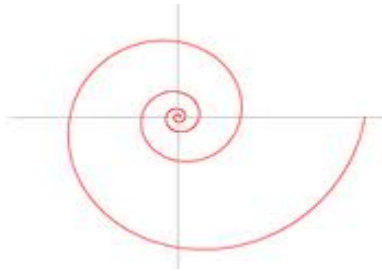
Spiraller doğada çok çeşitli ölçeklerde bulunan diğer genel fraktaldır. Biyolojik spiraller bitkilerde ve hayvan ailelerinde canlı olmayan spiraller ise galaksilerde yıldız oluşum modellerinde ve hortumda görülür.



Şekil 6.11 Doğada bulunan bir logaritmik spiral.

Tüm fraktallar basit tekrarlarla, bileşen genişleme ve her yerde spiral oluşması için yeterli dönme ile oluşturulabilir. Kasırga, suyun buharlaşması ve yoğunlaşması ile atmosferde kendi kendine oluşan bir spiraldir. Diğer bir spiral olan galaksi yüz milyon yıldızdan oluşan en büyük doğal spiraldir.

Doğada görülen spirallerin özel bir tipi logaritmik (eşaçılı) spirallerdir. İlk olarak 17. y.y. da Descartes tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra en kapsamlı araştırmayı yapan kişi Jakob Bernoulli bu spirallere "mucizevi spiral" adını vermiştir.



Şekil 6.12 Logaritmik Spiral.

Kutupsal koordinat sisteminde logaritmik spiral şu şekilde ifade edilir:

$$r = ae^{b\theta}$$

burada a, b gerçel parametreler, e Euler sayısıdır. Aynı eşitlik

$$\theta = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{r}{a} \right)$$

şeklinde de yazılabilir. Parametrik formda aynı eğri

$$x(t) = ae^{bt} \cos(t)$$

$$y(t) = ae^{bt} \sin(t)$$

denklem çiftiyle ifade edilir.

Logaritmik spiralin bir özelliği orjinden çıkan her doğrunun spirali aynı açıyla kesmesidir. Yani orjinden geçen her doğru spirali kestiği her noktada spirale teğet geçen doğruyu aynı açıyla keser. Logaritmik spirale eş açılı denilmesinin sebebi budur. Bu özellik

$$\phi = \arccos \frac{\langle r(\theta), r'(\theta) \rangle}{\|r(\theta)\| \|r'(\theta)\|} = \arctan \frac{1}{b}$$

formülüyle ifade edilebilir. Formülde b yi sıfır aldığımızda orjinden çıkan doğrular spirali hep dik kesecektir, yani spiral a yarıçaplı bir çemberdir. Aynı sonuç kutupsal gösterimde b sıfır alınarak da görülebilir.

Orjinden çıkan herhangi bir doğrunun logaritmik spirali kestiği noktalar bir geometrik dizi halinde birbirinden uzaklaşırlar. Her bir noktanın orjine uzaklığı bir önceki noktanın orjine uzaklığının $e^{2\pi b}$ katıdır.

Logaritmik spiral üzerinde sabit bir noktadan hareket edip spiral boyunca orjine doğru ilerlersek orjine varmadan önce çevresini sonsuz kere turlamak gerekir fakat alınacak mesafe sonludur.

$$r / \cos(\phi)$$

denklemleri logaritmik spiralin bulunduğu düzlemin ölçeğini değiştirmek spirali orjin çevresinde döndürmek demektir. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere ölçeği $e^{2n\pi b}$ kadar büyütme veya küçültme spiralin orjin çevresinde n tam tur dönmekle aynı şeydir ve orjinal spirali verir. Dolayısıyla logaritmik spiral basit bir fraktal örneğidir.

Doğada birbirinden farklı logaritmik spiral örneği vardır. Spiral galaksilerin kolları logaritmik spiral şeklindedir, Notilus'un kabuğu logaritmik spiral şeklindedir. Tropik kasırgalar logaritmik spiral şeklindedir.



Şekil 6.13 Kasırğa ve tayfunlar logaritmik spirallerdir.

6.4 Bir Bulutun Fraktal Boyutunu Hesaplama

Adım 1: Belli bir ε yarıçapına sahip bulutu tamamıyla örtecek minimum çember sayısı hesaplanır. Bu işlem değişik ε değerleri için gerçekleştirilir ve her bir ε değerine karşılık gelen çember sayısını gösteren bir tablo hazırlanır.

Tablo 6.1 Boyutu tahmin edilecek bulutu örten ε yarıçapındaki çemberlerin minimum sayısı.

ε	$N(A, \varepsilon)$
-3	2
-2	3
-1,5	4
-1,2	6
-1	7
-0,75	10
-0,5	16
-0,4	23
-0,3	31
-0,015	267

Adım 2: İlk adımda oluşturulan tablodan yararlanılarak $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ve buna karşılık gelen

$\ln(N(A, \varepsilon))$ değerlerinden oluşan yeni bir tablo hazırlanır.

$\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ln(N(A, \varepsilon))$
-1,1	0,69
-0,69	1,09
-0,405	1,39
-0,182	1,79
0	1,95
0,29	2,30
0,693	2,77
0,916	3,13
1,204	3,43
4,2	5,59

Tablo 6.2 Tablo 6.1 deki verilere karşılık gelen değerler.

Adım 3: Adım 2 de belirlenen $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ değerleri x eksenine $\ln(N(A, \varepsilon))$ değerleri y eksenine yerleştirilerek belli bir x değerine karşılık gelen y değerleri işaretlenir.

Adım 4: Bu noktalardan geçen doğru çizilir, bu doğrunun eğimi fraktal boyutu verir (Kantarcı 1994).

6.5 Nüfus Artması

Gelişmekte olan ülkelerde hızlı nüfus artışının neden olduğu problemler düşünülürse nüfus artışının analiz edilmesinin önemi ortaya çıkmaktadır. Geçtiğimiz yüzyılda Thomas Maltus teorisinde her bir neslin, nüfusun büyüme oranına bağlı olarak belli zamanlarda arttığını ifade eder. Bu durum matematiksel olarak , büyüme yüzdesi r ve nüfus sayısı P olmak üzere

$$P = (1 + r) \cdot p$$

biçiminde ifade edilir. Örneğin $r = \frac{1}{2}$ ise nüfus %50 artacaktır. Bu teoriye göre nüfus sonsuz miktarda artacaktır. Çevrenin kabul edebileceği mümkün olan maksimum nüfusun 1 olduğu düşünülürse P sayısı 0 ile 1 arasındadır. Nüfus 1 e yaklaştığında, büyüme oranı 0 a yaklaşır. Bu $(1 - p)$ ile çarpılarak elde edilebilir.. Bu biçimde P e 1 e yaklaştığında, büyüme oranı 0 a yaklaşan bir sayı ile çarpılacaktır. Böylece büyüme

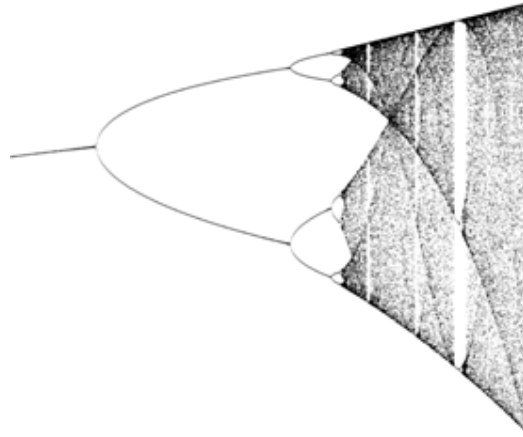
oranının $r(1-p)$ olması gerektiği elde edilir. Bu yukarıdaki formülde kullanılırsa

$$P = [1 + r \cdot (1 - p)] \cdot p$$

$$P = p + pr - rp^2$$

$$P = (1 + r)p - rp^2$$

elde edilir. Bu formül ile uzun bir zaman periyodundan sonraki nüfus belirlenebilir. Örneğin $0 < r < 2$ iken nüfus 1 olur ve orada kalır. Baştaki değer kaç alınırsa alınsın $r > 2$ olduğunda nüfus 1.17 ve 0.72 arasında sürekli değişecektir. r sayısı 2.5 iken nüfus 1.22, 0.54, 1.16 ve 0.70 arasında değişir. $r > 2.5$ olduğunda 8 farklı değer arasında değişecektir. r yükseltildiğinde 16 farklı değer arasında değişecektir. Yani r büyütüldüğünde nüfus 2 katına çıkar. Buna "dallandırma" adı verilir (Hacısalihoglu ve Yaz 2002).



Şekil 6.14 Dallanma

Yukarıdaki şekilde r nin 1.9 ile 3 arasındaki tüm değerler için nüfus değerlerinin işaretlenmesiyle elde edilen fraktal görülmektedir.

7 KAYNAKLAR

- Aygören, H. (2006). İstanbul Menkul Kıymetler Borsasının Fraktal Analizi, 10. Finans Sempozyumu, İzmir, 30-01-04 Kasım.
- Balcı, M. (2009). Reel analiz, Balcı Yayınları, ISBN 975-6683-04-0, Ankara.
- Barnsley, M. (1988). Fractals everywhere, Academic Press. Inc.
- Bayraktar, M. (2006), Fonksiyonel analiz, Gazi Kitapevi, ISBN 975-6009-74-8, Ankara.
- Benli, F. B., Akbulut B. (2009). Matematğin Doğadaki Sanatı: Fraktallar, Matematikçiler Derneği 8. Matematik Sempozyumu, Ankara, 12-14 Kasım 2009.
- Falconer, K. (2003). Fractal geometry mathematical foundations and applications, Wiley 3. Edition, Newyork.
- Genç, M., Doğan, R. (2006). Yaşamımızı çevreleyen ilginç geometrik şekiller, *Journal of İstanbul Kültür Universty*, **3**:95-98.
- Gleick, J. (2003). Kaos, Tubitak Yayınları, ISBN 975-403-029-4, Ankara.
- Güdükbay U., et al. (2001). L-sistemler kullanarak bilgisayarda bitki sentezleme, *Popüler Bilim Dergisi*, **94**:42-46.
- Hacısalihoglu, H. ve Yaz, N. (2002). Fraktal Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Ankara.
- Kantarıcı, A. (1994). Fraktallar ve biyoloji Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Karaçay, T. (2005). Yirminci yüzyılda matematiği sarsan düşünceler, *Matematik Dünyası Dergisi Bahar*, **1**:62-71.
- Kavlak, İ. (2006). Doğadaki fraktallar, *Journal of İstanbul Kültür Üniversitesi*, **3**:105-112.
- Kılıç, S. ve Erdem, M. (1999). Metrik uzaylar ve topoloji, Uludağ Üniversitesi

Güçlendirme Vakfı Yayın No:146, Bursa.

Koçak, M. (2004). Genel topolojiye giriş ve çözümlü alıştırmalar, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

Koçak, Ş. (2004). Fraktallar, *Matematik Dünyası Dergisi Bahar*, **2**: 66-67.

Kraft, R. (1995). Fractals and dimensions, Munich University of Technology-Weihenstephan Department of Agricultural and Horticultural Sciences Mathematics, Statistics and Data Processing Institute D-85350 Freising/Germany.

Mandelbrot, B.B. (1983). Fractal geometry of nature, W.H. Freeman and Company, ISBN 0-7167-1186-9.

Oldrich, Z., et al. (2001). Harmonic and fractal image analysis, HarFA, 3-5.

Olemski, A.I and Flat, A. Ya. (1993). Application of fractals in condensed-matter physics, *Physics-uspekhi*, 36(12) 1087-1128.

Peitken, H. and Saupe, D. (1988). The science of fractal images, Springer Verlag Press, New York.

Prusinkiewicz, P. Hanan J. (1989). Lindenmayer systems, fractals and plants, Lecture Notes in Bio-Mathematics Vol. 79, Springer Verlag, New York.

Prusinkiewicz, P., Lindenmayer A. (1990). The algorithmic beauty of plants, Springer Verlag, New York.

Sabuncuoğlu, A. (2008). Lineer cebir, Nobel Yayınevi, ISBN 978-975-591-171-7, Ankara.

Şuhubi, E. (2001). Fonksiyonel analiz, İTÜ Vakfı Yayınları No:38, Ankara.

Taylor, R.P. (2006). Chaos, fractals, nature, Fractal Research Eugene, ISBN 0-9791874-1-9, USA.

Ufuktepe, Ü. ve Aslan, İ. (2002). Fraktal geometriden bir kesit, *Matematik Dünyası*,

1:14-20.

Ürey, H. (2006). Fraktal Geometri ve Uygulamaları Yüksek Lisans Tezi, AKÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Yolaçan, S. (2008). Fraktal Geometri, Kocaeli, Kocaeli Üniversitesi Semineri.

İnternet Kaynakları :

1. <http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>, 10.09.2012.
2. <http://www.genbilim.com/content/view/417/37/>, 10.09.2012.
3. www.matder.org.tr, 12.09.2012.
4. www.FractalFoundation.org,19.09.2012, 25.09.2012.
5. <http://www.matematikce.net/mfraktallar.html>, 10.10.2012.
6. http://www.derki.com/dergi/index_php/fraktal-geometri.html, 25.10.2012.
7. <http://www.kuantumbeyin.com/index.php/140-dr-sinan-canan/474-fraktal-geometri-ve-kaos.html>, 16.11.2012.
8. <http://www.ozgurozsemercimath.com/2010/12/kar-tanesi-ve-fraktal-geometri.html>, 16.11.2012.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Dilek YILMAZ
Doğum Yeri : Şuhut/Afyonkarahisar
Doğum Tarihi : 19.03.1989
İletişim : dilek_y89@hotmail.com
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Afyon YDA Lisesi, 2007
Lisans : Uşak Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, 2011
Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2013