KESİRLİ LİNEER FARK DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Münevvere Mine KARAKAYA

Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2015

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/01/2015

Münevvere Mine KARAKAYA

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ LİNEER FARK DENKLEMLERİ

Münevvere Mine KARAKAYA

DANIŞMAN
Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak, 2015

TEZ ONAY SAYFASI

Münevvere Mine KARAKAYA tarafından hazırlanan "Kesirli Lineer Fark Denklemleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 26/01/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	**:** Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN	
Başkan	**:** Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü,	……..
Üye	**:** Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü,	……..
Üye	**:** Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü,	……..

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….

Prof. Dr. İbrahim EROL

Enstitü Müdürü

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ LİNEER FARK DENKLEMLERİ

Münevvere Mine KARAKAYA
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

Bu tez, dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, kesirli fark denklemlerinin bir ailesi verilerek çözümleri dönüşüm yöntemi yardımıyla elde edildi. Son bölümde kesirli başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlığı incelenerek örnekler verildi.

2015, v + 38 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ayrık Kesirli Analiz, Sonlu Kesirli Fark Denklemi, Zaman skalasında Laplace Dönüşümü

ABSTRACT

M.ScThesis

FRACTIONAL LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

Münevvere Mine KARAKAYA

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Umut Mutlu ÖZKAN

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter fundamental definitions and results required in the sequal are given. In the third chapter a family of fractional difference equations, whose solutions are obtained by the transform method is introduced. The last chapter includes existence result for fractional initial value problems and present some examples.

2015, v + 38 pages

Key Words: Discrete fractional calculus, finite fractional difference equation, Laplace transform on time scales.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca bilgilerinden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından dolayı danışmanlığımı yapan sayın kıymetli hocam Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN'a teşekkürü ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca çalışmam boyunca samimi desteklerini esirgemeyen aileme ve eşim Semih KARAKAYA'ya sonsuz teşekkür ederim.

Münevvere Mine KARAKAYA
AFYONKARAHİSAR,
2015

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\Delta(.)$	Fark operatörü
$\Delta^{-\nu}f$	f fonksiyonunun ν-inci mertebeden kesirli toplamı
$\Delta^{\nu}f$	f fonksiyonunun ν-inci mertebeden kesirli farkı
$\Gamma(.)$	Gamma özel fonksiyonu
$\sigma(.)$	İleri sıçrama operatörü
$\rho(.)$	Geri sıçrama operatörü
$\sum$	Toplam sembolü
$\prod$	Çarpım sembolü
$t^{(\nu)}$	Faktöriyel fonksiyonu
$R_0(.)$	$R -$ dönüşümü
$\mathbb{N}_a$	$\{a, a+1, a+2, \dots\}$ kümesi

1. GİRİŞ

Reel sayılar kümesinde türev ve integral operatörleri analizin iki temel içeriğidir. Benzer olarak tam sayılar kümesinde de toplam ve fark operatörleri de ayrık analizin iki temel içeriğidir. Genellikle türev ve ya integral operatörleri n-inci mertebeden bir fonksiyona uygulanabilir burada n tamsayıdır ve $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\Delta^n f(x)$ şeklinde gösterilir.

Aslında kesirli analiz, türev veya integral operatörlerinin mertebelerinin keyfi sayılar olabildiğini ifade eder. Örneğin bir fonksiyonun $1/2$-inci mertebeden türevi veya $\sqrt{3}$-üncü mertebeden integrali gibi.

Kesirli analiz uygulamalı matematiğin bir dalıdır, keyfi mertebeden türev ve integrallerle ilgilidir. Bunların uygulamaları fen, mühendislik, uygulamalı matematik ve diğer dallarda görülür. $D = \frac{d}{dx}$ operatörünü içeren diferansiyel analizin özellikleri ile fark operatörü olarak bilinen $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ operatörünü içeren ayrık kesirli analizin özellikleri arasında bir benzerlik olduğu bilinir. Aynı benzerlik kesirli ve ayrık kesirli analizin operatörleri arasında da vardır.

Kesirli analizin kökleri yaklaşık 3 yüzyıl önce L-Hospital'den Leibniz'e gönderilen bir mektupla ekildi. Burada L-Hospital $n = 1/2$ ise $d^n y / dx^n$' in anlamı hakkında bir soru ortaya çıkardı. Leibniz' in 30 Kasım 1695 tarihli mektuba cevabı ile kesirli analiz hakkındaki araştırmalar başlamış oldu.

Sonra John Bernoulli'nin cevabı ile birlikte, Leibniz genel mertebelerin türevlerini ispatladı. Leibniz $1/2$ mertebeden türevin ifadesine $d^{1/2}y$ gösterimini kullandı. Kesirli türevler birçok farklı içerikle ispatlandı. 1730'dan 1868'e kadar bir integralin anlamı, kesirli türevin tanımı gibi kesirli analizle ilgili çalışmalar yapılmıştır.

$D^{\alpha}f$ mertebeden kesirli türev, kapsamlı bir şekilde düşünülmesine rağmen, kesirli mertebeden fark yıllardır daha az dikkat çekti. Kesirli mertebeden farklar 1956' da ilk defa ispatlandı. 1974'de farkın içeriğine doğal bir yaklaşımla kesirli fark tanımlandı. 1969'da kesirli mertebeden fark ve toplam operatörlerini tanımlandı ve kesirli fark denklemleri teorisinin gelişimine birçok makale ve kitapla katkıda bulunuldu.

Bu tezde Atıcı vd. (2007a,b) incelendi. Bu çalışmalar kesirli fark denklemlerinin bir ailesinin çözümlerini dönüşüm yöntemi yardımıyla elde etmek ve kesirli başlangıç değer problemlerinin varlığının incelenmesini içermektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: f fonksiyonunun ν- inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$D_0^{-\nu}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-s)^{\nu-1}f(s)ds$$

şeklindedir. Burada $\nu > 0$ ve f, $(0,\infty)$ üzerinde sürekli ve $[0,\infty)$ sınırlı alt aralığında integrallenebilirdir.

Ayrıca

$$(t-s)^{\nu-1}/\Gamma(\nu)$$

çekirdeği $n-$ inci mertebeden adi diferansiyel denklemler için $(t-s)^{n-1}/(n-1)!$ Chauchy fonksiyonunun bir genelleştirilmişidir (Miller and Ross 1993).

Tanım 2.2: Faktöriyel polinomu

$$t^{(n)}=\prod_{j=0}^{n-1}(t-j)=\Gamma(t+1)/\Gamma(t+1-n)$$

şeklinde tanımlanır. Burada Γ, gamma fonksiyonudur. Bazı j ler için $t+1-j=0$ ise çarpım sıfır olduğu kabul edilir.

Keyfi ν için faktöriyel polinomu

$$t^{(\nu)}=\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\nu)}$$

şeklindedir.

Faktöriyel fonksiyonunun bazı özellikleri ispatlarıyla birlikte aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.1: İyi tanımlı faktöriyel fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) Δ ileri fark operatörü olmak üzere $\Delta t^{(\nu)} = \nu t^{\nu-1}$ dir.

(ii) $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(t-\mu)t^{(\mu)} = t^{(\mu+1)}$ dir.

(iii) $\mu^{\mu} = \Gamma(\mu+1)$ dir.

(iv) Herhangi v> r için $t \leq r$ ise $t^{(\nu)} \leq r^{(\nu)}$ dir.

(v) $0 < \nu < 1$ ise $t^{(\alpha\nu)} \geq (t^{(\alpha)})^{\nu}$ dir.

(vi) $t^{\alpha+\beta} = (t-\beta)^{(\alpha)} t^{(\beta)}$ dir (Atıcı and Eloe 2007a).

İspat:

(i)

$$\Delta t^{(\nu)} = \Delta \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)} = \frac{\Gamma((t+1)-1)}{\Gamma((t+1)-\nu+1)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-\nu+2)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)} = \frac{(t+1)\Gamma(t+1)}{(t-\nu+1)\Gamma(t-\nu+1)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)}\left[\frac{t+1}{t-\nu+1} - 1\right] = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)}\left[\frac{\nu}{t-\nu+1}\right]$$

$$= \nu \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)} = \nu t^{\nu-1}$$

elde edilir.

(ii)

$$(t-\mu)t^{(\mu)} = (t-\mu)\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\mu+1)} = (t-\mu)\frac{\Gamma(t+1)}{(t-\mu)\Gamma(t-\mu)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\mu)} = t^{(\mu+1)}$$

(iii)

$$\mu^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\mu)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1)} = \Gamma(\mu+1)$$

(iv) Euler sonsuz çarpımından

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{u}}{1+(\frac{u}{n})}$$

elde edilir.

(v) Gamma fonksiyonunun log-convexity özelliklerinden

$$t^{(av)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-av)}$$

$$= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma\big(v(t+1-a)+(1-v)(t+1)\big)}$$

$$\geq \frac{\Gamma(t+1)}{\big(\Gamma(t+1-a)\big)^{v}\big(\Gamma(t+1)\big)^{1-v}}$$

$$= (t^{(a)})^{v}$$

bulunur.

(vi)

$$t^{(\propto+\beta)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\propto-\beta)} = \frac{\Gamma(t-\beta+1)}{\Gamma(t+1-\propto-\beta)}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\beta+1)} = (t-\beta)^{(\propto)}t^{(\beta)}$$

ispat tamamlanır.

Tanım 2.3: $\nu > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun ν-inci kesirli toplamı

$$\Delta^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma\big(t-s-(\nu-1)\big)} f(s)$$

şeklinde tanımlanır (Miller and Ross 1989).

Burada $s = a,\ mod(1)$ için f fonksiyonu, $t = a + \nu,\ mod(1)$ için $\Delta^{-\nu} f$ kesirli toplamı tanımlıdır.

Tanım 2.4: $\mu > 0$ olsun ve $m - 1 < \mu < m$ olduğunu varsayalım burada m pozitif bir tamsayıdır. $-\nu = \mu - m$ olmak üzere

$$\Delta^{\mu} u(t) = \Delta^{m-\nu} u(t) = \Delta^{m} (\Delta^{-\nu} u(t))$$

olarak tanımlanır (Miller and Ross 1989).

Lemma 2.1: $\mu \neq -1$ olsun ve $\mu + \nu + 1$ in pozitif olmayan tamsayı olduğunu varsayalım.

$$\Delta^{-\nu} t^{(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} t^{(\mu+\nu)}$$

olur (Atıcı and Eloe 2007a).

Tanım 2.5: Reel sayıların keyfi, boştan farklı kapalı alt kümesine zaman skalası denir

(Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.6: T zaman skalasında σ ileri sıçrama operatörü;

$$\sigma(t) := inf\{s \in T : s > t\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımda $inf\emptyset = supT$ dir (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.7: T zaman skalasında ρ geri sıçrama operatörü;

$$\rho(t) := sup\{s \in T : s < t\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımda $sup\emptyset = infT$ dir (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.8: $h(t) = t^{(\nu-1)}$ ve $g(t) = \alpha^t$ olsun. Konvolüsyon

$$(h * g)(t) = \sum_{s=0}^{t-\nu} (t - \sigma(s))^{(\nu-1)} g(s)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\nu \in \mathbb{R}/\{\dots, -2, -1,0\}$ ' dır (Atıcı and Eloe 2007a).

Tanım 2.9: α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

hipergeometrik serisi yardımıyla

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{r}=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\mathrm{r}(\beta)_\mathrm{r}}{(\gamma)_\mathrm{r}} \frac{\mathrm{x}^\mathrm{r}}{\mathrm{e}!}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hipergeometrik fonksiyon denir. Burada F nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri F nin yapısında iki tip parametre bulunduğunu ifade eder (Altın 2011).

3. KESİRLİ LİNEER FARK DENKLEMLERİ

$\Delta^j = \Delta(\Delta^{j-1})$ operatörü iterasyonla tanımlanır. Burada j bir negatif olmayan tamsayılardır. Δ^0 birim operatör olarak tanımlanır ve $\Delta^1 f(t) = \Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$ dir.

$$\Delta^n u(t) = f(t), \qquad t = a, a+1, \ldots$$

$$u(a+j-1) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

şeklindeki başlangıç değer probleminin çözümü

$$\Delta^{-n} f(t) = u(t) = \sum_{s=a}^{t-1} \frac{(t-\sigma(s))^{(n-1)}}{(n-1)!} f(s)$$

fonksiyonudur. $\sigma(s) = s+1$ dir.

$s = t-(n-1), \ldots, t-1$ için

$$\sum_{s=a}^{t-1} \frac{\left(t-\sigma(s)\right)^{(n-1)}}{(n-1)!} f(s) = \sum_{s=a}^{t-n} \frac{\left(t-\sigma(s)\right)^{(n-1)}}{(n-1)!} f\mu(s)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{s=a}^{t-n} \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma\left(t-s-(n-1)\right)} f(s)$$

olur.

$s = a, mod(1) \quad s-a \geq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Bu gösterim alt limiti belirlemek için çok önemlidir.

Teorem 3.1: f reel değerli bir fonksiyon ve $\mu, \nu > 0$ olsun. $t = \mu + \nu\, , mod(1)$ olacak şekilde tüm t ler için

$$\Delta^{-\nu}[\Delta^{-\mu} f(t)] = \Delta^{-\mu+\nu} f(t) = \Delta^{-\mu}[\Delta^{-\nu} f(t)]$$

dir (Atıcı and Eloe 2007a).

İspat: Kesirli toplamın tanımından

$$\Delta^{-\mu}(\Delta^{-\nu}f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Delta^{-\mu}\sum_{r=0}^{t-\nu}(t-\sigma(r))^{(\nu-1)}f(r)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\sum_{s=\nu}^{t-\mu}\left(t-\sigma(s)\right)^{(\mu-1)}\sum_{r=0}^{s-\nu}(s-\sigma(r))^{(\nu-1)}f(r)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\sum_{s=\nu}^{t-\mu}\sum_{r=0}^{s-\nu}(t-\sigma(s))^{(\mu-1)}(s-\sigma(r))^{(\nu-1)}f(r)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}[(t-\sigma(s))^{(\mu-1)}(s-\sigma(0))^{(\nu-1)}f(0)$$

$$+\left(t-\sigma(s)\right)^{(\mu-1)}\left(s-\sigma(1)\right)^{(\nu-1)}f(1)+$$

$$\ldots+\left(t-\sigma(s)\right)^{(\mu-1)}\left(s-\sigma(s-\nu)\right)^{(\nu-1)}f(s-\nu)]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}[(t-\sigma(s)^{(\mu-1)}\left(\nu-\sigma(0)\right)^{(\nu-1)}f(0)$$

$$+\left(t-\sigma(\nu)\right)^{(\mu-1)}\left(\nu-\sigma(1)\right)^{(\nu-1)}f(1)+$$

$$\ldots+(\left(t-\sigma(\nu)\right)^{(\mu-1)}\left(\nu-\sigma(0)\right)^{(\nu-1)}f(0)]$$

$$+\Big[\left(t-\sigma(\nu+1)\right)^{(\mu-1)}\left(\nu+1-\sigma(0)\right)^{(\nu-1)}f(0)$$

$$+\left(t-\sigma(\nu+1)\right)^{(\mu-1)}\left(\nu+1-\sigma(1)\right)^{(\nu-1)}f(1)+\cdots+$$

$$\left(t-\sigma(\nu+1)\right)^{(\mu-1)}\left(\nu+1-\sigma(1)\right)^{(\nu-1)}f(1)\Big]+\cdots$$

$$+\left(t-\sigma(t-\mu)\right)^{(\mu-1)}\left(t-\mu-\sigma(0)\right)^{(\nu-1)}f(0)$$

$$+\left(t-\sigma(t-\mu)\right)^{(\mu-1)}\left(t-\mu-\sigma(1)\right)^{(\nu-1)}f(1)+\cdots$$

$$+(t-\sigma(t-\mu))^{(\mu-1)}(t-\mu-\sigma(t-\mu-\nu))^{(\nu-1)}f(t-\mu-\nu)$$

$$= f(0)\big[(t-\sigma(\nu))^{(\mu-1)}(\nu-\sigma(0))^{(\nu-1)}$$

$$+(t-\sigma(\nu+1))^{(\mu-1)}(\nu+1-\sigma(0))^{(\nu-1)}$$

$$+(t-\sigma(t-\mu))^{(\mu-1)}(t-\mu-\sigma(0))^{(\nu-1)}\big]$$

$$+f(1)\big[(t-\sigma(\nu))^{(\mu-1)}(\nu-\sigma(1))^{(\nu-1)}$$

$$+(t-\sigma(\nu+1))^{(\mu-1)}(\nu+1-\sigma(1))^{(\nu-1)}$$

$$+(t-\sigma(t-\mu))^{(\mu-1)}(t-\mu-\sigma(1))^{(\nu-1)}\big]+\cdots$$

$$+\Big[\big(t-\sigma(\nu)\big)^{(\mu-1)}\big(\nu-\sigma(0)\big)^{(\nu-1)}f(0)$$

$$+(t-\sigma(\nu+1))^{(\mu-1)}(\nu+1-\sigma(1))^{(\nu-1)}f(1)+\cdots$$

$$+(t-\sigma(t-\mu))^{(\mu-1)}(t-\mu-\sigma(t-\mu-\nu))^{(\nu-1)}f(t-\mu-\nu)\Big]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\nu)}\Big[\big(t-\sigma(\nu)\big)^{(\mu-1)}\big(\nu-\sigma(r)\big)^{(\nu-1)}$$

$$+\big(t-\sigma(\nu+1)\big)^{(\mu-1)}\big(\nu+1-\sigma(r)\big)^{(\nu-1)}+\cdots$$

$$+\big(t-\sigma(t-\mu)\big)^{(\mu-1)}\big(t-\mu-\sigma(r)\big)^{(\nu-1)}\Big]f(r)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\nu)}\sum_{s=r+\nu}^{t-\mu}(t-\sigma(s))^{(\mu-1)}(s-\sigma(r))^{(\nu-1)}f(r)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\nu)}\sum_{s=r+\nu}^{t-\mu}(t-\sigma(s))^{(\mu-1)}(s-\sigma(r))^{(\nu-1)}f(r)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\nu)}\left(\sum_{x=\nu-1}^{t-\sigma(r)-\mu}\big(t-\sigma(x)-\sigma(r)\big)^{(\mu-1)}x^{(\nu-1)}\right)f(r)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{r=0}^{t-(\mu+\nu)}(\Delta^{-\mu}\big(t-\sigma(r)\big)^{(\nu-1)}f(r)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{r=0}^{t-(\mu+\nu)} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+\mu)} \left(t-\sigma(r)\right)^{(\nu+\mu-1)} f(r)$$

$$= \Delta^{-(\nu+\mu)} f(t)$$

elde edilir.

Lemma 3.1: $\mu \epsilon \mathbb{R}/\{\cdots,-2,-1\}$ olsun. Bu durumda

$$\Delta^{-\nu} t^{(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} t^{(\mu+\nu)}$$

dir (Atıcı and Eloe 2007a).

İspat:

$$g_1(t) = \frac{\Gamma(\mu+1) t^{(\mu+\nu)}}{\Gamma(\mu+\nu+1)}$$

ve

$$g_2(t) = \Delta^{-\nu} t^{(\mu)} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=\mu}^{t-\nu} \left(t-\sigma(s)\right)^{(\nu-1)} s^{(\mu)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=\mu}^{t-\nu} \frac{\Gamma(t-\sigma(s)+1) s^{(\mu)}}{\Gamma(t-\sigma(s)+1-\nu+1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=\mu}^{t-\nu} \frac{\Gamma(t-s)\Gamma(s+1)}{\Gamma(t-s-\nu+1)\Gamma(s+1-\mu)}$$

olsun.

g_1 ve g_2

$$(t-(\mu+\nu)+1)\Delta g(t) = (\mu+\nu) g(t)$$

$$g(\mu+\nu) = \Gamma(\mu+1)$$

eşitliklerini sağlarlar.

İspatın sonraki adımında Teorem 3.1' in $(ii)\ (t-\mu)t^{(\mu)} = t^{(\mu+1)}$ ve $(iii)\ \mu^{(\mu)} = \Gamma(\mu+1)$ formüllerini kullanalım. İlk olarak g_1'i düşünelim. (iii)'yi uygularsak

$$g_1(\mu+\nu) = \frac{\Gamma(\mu+1)(\mu+\nu)^{(\mu+\nu)}}{\Gamma(\mu+\nu+1)} = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} = \Gamma(\mu+1)$$

olduğunu görürüz. (ii) ‘yi uygularsak

$$(t-(\mu+\nu)+1)\Delta g_1(t) = \frac{(t-(\mu+\nu)+1)\Gamma(\mu+1)(\mu+\nu)t^{(\mu+\nu-1)}}{\Gamma(\mu+\nu+1)}$$

$$= \frac{(\mu+\nu)\Gamma(\mu+1)t^{(\mu+\nu)}}{\Gamma(\mu+\nu+1)} = (\mu+\nu)g_1(t)$$

olduğunu görürüz.

İkinci olarak g_2' yi düşünelim (iii) ‘ yi uygularsak

$$g_2(\mu+\nu) = \Delta^{-\nu}(\mu+\nu)^{(\mu)} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{\mu+\nu-\nu}\big(\mu+\nu-\sigma(s)\big)^{(\nu-1)}s^{(\mu)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{\mu}\big(\mu+\nu-\sigma(s)\big)^{(\nu-1)}s^{(\mu)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}(\mu+\nu-\mu-1)^{(\nu-1)}(\mu)^{(\mu)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}(\nu-1)^{(\nu-1)}(\mu)^{(\mu)} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Gamma(\nu)(\mu)^{(\mu)} = \Gamma(\mu+1)$$

olduğunu görürüz.

Şimdi g_2' nin fark denklemini sağladığını gösterelim. (ii)' yi kullanarak ve μ ekleyip çıkararak

$$g_2(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{(\nu-1)}s^{(\mu)}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\big(t-\sigma(s)-(\nu-2)\big)\big(t-\sigma(s)\big)^{(\nu-2)}s^{(\mu)}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}(t-s-\nu-\mu+1-\mu)(t-\sigma(s))^{(\nu-2)}s^{(\mu)}$$

$$=\frac{(t-(\nu+\mu)+1)}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{(\nu-2)}s^{(\mu)}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{(\nu-2)}(s-\mu)s^{(\mu)}$$

yazılır. Sağ tarafın ilk terimini göz önüne alırsak

$$\frac{(t-(\nu+\mu)+1)}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\big(t-\sigma(s)\big)^{(\nu-2)}\,s^{(\mu)}$$

$$\Delta g_2(t)=\Delta^{(1-\nu)}t^{(\mu)}=\frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\sum_{s=\mu}^{t-(\nu-1)}\big(t-\sigma(s)\big)^{(\nu-2)}s^{(\mu)}$$

$$=\frac{(\nu-1)}{(\nu-1)\Gamma(\nu-1)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\big(t-\sigma(s)\big)^{(\nu-2)}s^{(\mu)}$$

$$+\frac{(\nu-1)(t-(t-\nu+1+1)^{(\nu-2)}(t-\nu+1)^{(\mu)}}{(\nu-1)\Gamma(\nu-1)}$$

$$=\frac{(\nu-1)}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{(\nu-2)}s^{(\mu)}$$

$$+\frac{(\nu-1)(\nu-2)^{(\nu-2)}(t-\nu+1)^{(\mu)}}{\Gamma(\nu)}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{(\nu-2)}s^{(\mu)}$$

$$+\frac{(\nu-1)\Gamma(\nu-1)(t-\nu+1)^{(\mu)}}{\Gamma(\nu)}$$

$$\Delta g_2(t)=\frac{(\nu-1)}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{(\nu-2)}s^{(\mu)}+(t-\nu+1)^{(\mu)}$$

olur.

Böylece;

$$\frac{(t-(\nu+\mu)+1)}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\left(t-\sigma(s)\right)^{(\nu-2)}s^{(\mu)}$$

$$=(t-(\nu+\mu)+1)\left(\frac{\Delta g_2(t)-(t-\nu+1)^{(\mu)}}{(\nu-1)}\right)+1)$$

$$=\frac{(t-(\nu+\mu)+1)\Delta g_2}{\nu-1}-\frac{(t+1-\nu)^{(\mu+1)}}{\nu-1}$$

elde edilir.

Şimdi ikinci terimi düşünelim. Kısmi toplamdan

$$\Delta\left((t-s)^{(\nu-1)}s^{(\mu+1)}\right)=s^{(\mu+1)}\Delta(t-s)^{(\nu-1)}+(t-\sigma(s))^{(\nu-1)}(\mu+1)s^{(\mu)}$$

$$=s^{(\mu+1)}\Delta\frac{\Gamma(t-s+1)}{\Gamma(t-s+1-\nu+1)}+(t-\sigma(s))^{(\nu-1)}(\mu+1)s^{(\mu)}$$

$$=s^{(\mu+1)}\frac{\Gamma(t+s)(1-\nu)}{\Gamma(t-s-\nu+2)}+(t-\sigma(s))^{(\nu-1)}(\mu+1)s^{(\mu)}$$

$$=s^{(\mu+1)}(t-s-1)^{(\nu-2)}(1-\nu)+(t-\sigma(s))^{(\nu-1)}(\mu+1)s^{(\mu)}$$

$$=(t-\sigma(s))^{(\nu-1)}(\mu+1)s^{(\mu)}-(\nu-1)(t-\sigma(s))^{(\nu-2)}s^{(\mu+1)}$$

yazılır.

$s^{(\mu+1)}=(s-\mu)s^{(\mu)}$ olduğunu hatırlayalım. Böylece her iki tarafın toplamını alıp $(\nu-1)$'e bölersek

$$\frac{1}{\nu-1}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\Delta((t-s)^{(\nu-1)}s^{(\mu+1)}$$

$$=\frac{1}{\nu-1}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{(\nu-1)}(\mu+1)s^{(\mu)}-\sum_{s=\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{(\nu-2)}s^{(\mu+1)}$$

$$\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\left(t-\sigma(s)\right)^{(\nu-2)}s^{(\mu+1)}$$

$$=\frac{1}{\nu-1}(\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\left(t-\sigma(s)\right)^{(\nu-1)}(\mu+1)s^{(\mu)} \quad -\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\Delta((t-s)^{(\nu-1)}s^{(\mu+1)})$$

$$=\frac{1}{\nu-1}(\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\left(t-\sigma(s)\right)^{(\nu-1)}(\mu+1)s^{(\mu)}-\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\Delta((t-s)^{(\nu-1)}(s-\mu)s^{(\mu)})$$

$$=\frac{1}{\nu-1}(\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\left(t-\sigma(s)\right)^{(\nu-1)}(\mu+1)s^{(\mu)}$$
$$-\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\Delta\left((s-\mu)\frac{\Gamma(t-s+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(t-s-\nu+2)\Gamma(s-\mu+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{\nu-1}(\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\left(t-\sigma(s)\right)^{(\nu-1)}(\mu+1)s^{(\mu)}$$
$$-\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\left[(s-\mu+1)\frac{\Gamma(t-s)\Gamma(s+2)}{\Gamma(t-s-\nu+1)}\right.$$
$$\left.-(s-\mu)\frac{\Gamma(t-s+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(t-s-\nu+2)\Gamma(s-\mu+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{\nu-1}\left[(\mu+1)\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\left(t-\sigma(s)\right)^{(\nu-1)}s^{(\mu)}\right.$$
$$\left.-(\nu-1)^{(\nu-1)}(t-\nu+1)^{(\mu+1)}\right]$$

elde edilir.

$$-\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=\mu}^{t-\nu}\big(t-\sigma(s)\big)^{(\nu-2)}(s-\mu)s^{(\mu)}=-\frac{\mu+1}{\nu-1}g_2\,(t)+\frac{(t-\nu+1)^{(\mu+1)}}{\nu-1}$$

olduğundan

$$g_2(t)=\frac{(t-(\nu+\mu)+1)\Delta g_2}{\nu-1}-\frac{(t-\nu+1)^{(\mu+1)}}{\nu-1}-\frac{(\mu+1)}{\nu-1}g_2(t)+\frac{(t-\nu+1)^{(\mu+1)}}{\nu-1}$$

yazılır. Buradan

$$g_2(t)=\frac{(t-(\mu+\nu)+1)\Delta g_2}{\nu-1}-\frac{(\mu+1)}{\nu-1}g_2(t)$$

$$g_2(t)+\frac{\mu+1}{\nu-1}g_2(t)=\frac{(t-(\mu+\nu)+1)}{\nu-1}\Delta g_2(t)$$

$$(\mu+\nu)g_2(t)=(t-(\mu+\nu)+1)\Delta g_2(t)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Kesirli farkın tanımı kesirli türevin tanımına benzerdir.

$$\Delta^{\frac{4}{3}}u=0$$

fark denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin $\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3},\cdots\right\}$ kümesinde iki lineer bağımsız çözümü $u_1(t)=t^{\frac{1}{3}}$ ve $u_2(t)=t^{\left(-\frac{2}{3}\right)}$ dir. Bu durumda

$$\Delta^{\frac{4}{3}}u_1(t)=\Delta^2\left(\Delta^{-\frac{2}{3}}t^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)=K\Delta^2t^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}=0$$

olur. Böylece $t=\frac{2}{3}+\frac{1}{3},mod(1)$ için $\Delta^{-\frac{2}{3}}t^{\left(\frac{1}{3}\right)}$ sağlanır. Benzer şekilde $t=\frac{2}{3}-\frac{1}{3},mod(1)$ için $\Delta^{\frac{4}{3}}u_2(t)=0$ sağlanır.

Şimdi kesirli lineer fark denklemlerinin çözümlerini araştıralım.

$$R_{t_0}\big(f(t)\big)(s) = \sum_{t=t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{t+1} f(t)$$

ile R −dönüşümü tanımlanır.

$R_0\big(f(t)\big)(s)$, tam sayıların zaman skalaları üzerinde Laplace dönüşümüdür. Yani Laplace dönüşümünün bilinen özellikleri R −dönüşümü için kullanılabilir (Bohner and Peterson 2002).

Lemma 3.2: Herhangi bir $\nu \in \mathbb{R}/\{\dots,-2,-1,0\}$ için

$$(i) R_{\nu-1}\big(t^{(\nu-1)}\big)(s) = \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}$$

$$(ii) R_{\nu-1}\big(t^{(\nu-1)}\alpha^{t}\big)(s) = \frac{\alpha^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{(s+1-\nu)^{\nu}}$$

dir (Atıcı and Eloe 2007a).

İspat: (i) $\nu = 1$ için, geometrik serilerle birlikte kolay bir hesaplama kullanılır. $\nu = 2,3,\dots$ durumları Teorem 2.1 ‘in (i) şıkkı ve kısmi toplam uygulanarak tümevarımla elde edilir. $0 < \nu < 1$ için

$$R_{\nu-1}\big(t^{(\nu-1)}\big)(s) = \sum_{t=\nu-1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{t+1} t^{\nu-1}$$

$$= \sum_{t=\nu-1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{u+\nu} (u+\nu-1)^{(\nu-1)}$$

$$= \left(\frac{1}{s+1}\right)^{\nu} \sum_{u=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{u} \frac{\Gamma(u+\nu)}{\Gamma(u+1)}$$

olur. F_1 hipergeometrik bir fonksiyon olmak üzere

$$\sum_{t=\nu-1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{t+1} t^{(\nu-1)} = \frac{1}{(s+1)^{\nu}}\Gamma(\nu)_2F_1\left(1,\nu;1;\frac{1}{s+1}\right)$$

$$= \frac{1}{(s+1)^{\nu}}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\int_0^1 t^{\nu-1}(1-t)^{-\nu}\left(1-\frac{t}{s+1}\right)^{-1} dt$$

$$= \frac{1}{(s+1)^{\nu-1}}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\int_0^1 \frac{(1-u)^{\nu-1}u^{-\nu}}{s+u} du$$

$$= \frac{1}{(s+1)^{\nu-1}}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} B(\nu, 1-\nu)(1+s)^{\nu-1}s^{-\nu}$$

$$= \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}$$

dir. Burada β, beta fonksiyonudur. Böylece $0 < \nu < 1$ için ispatı tamamlanır.

$\nu \in \mathbb{R}/\{\dots, -2, -1, 0\}$ için

$$R_{\nu-1}\big(t^{(\nu-1)}\big)(s) = \frac{\nu}{s} R_{\nu}\big(t^{(\nu)}\big)$$

Teorem 2.1'in (i) şıkkından ve kısmi toplamdan açıktır. (ii), (i)' ye benzer şekilde yapılır.

Lemma 3.3: Herhangi bir $\nu \in \mathbb{R}/\{\dots, -2, -1, 0\}$ için

$$R_{\nu}\big((h * g)(t)\big)(s) = R_{\nu-1}\big(h(t)\big)(s)R_0(g(t))(s)$$

dir (Bohner and Guseinov 2007).

İspat:

$$R_{\nu}\big((h * g)(t)\big)(s) = \sum_{t=\nu}^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{t+1}\sum_{r=0}^{t-\nu}\big(t-\sigma(r)\big)^{(\nu-1)} g(r)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=r+\nu}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{t+1} \left(t-\sigma(r)\right)^{(\nu-1)} g(r)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=r+\nu}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{\tau+r+2} \tau^{(\nu-1)} g(r)$$

$$= \left(\sum_{\tau=\nu-1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{\tau+1} \tau^{\nu-1} \right) \left(\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{r+1} g(r) \right)$$

$$= R_{\nu-1}\big(h(t)\big)(s) R_0(g(t))(s)$$

olur.

Bazı kesirli fark denklemlerini çözmeden önce R dönüşümünün birkaç özelliğini daha tanıtalım. Lemma 3.3' ten

$$R_{a+\nu}\big(\Delta^{-\nu} f(t)\big)(s) = s^{-\nu} R_a(f(t))(s)$$

yazılır.

Lemma 3.4: f fonksiyonu $\nu-1, \nu, \nu+1, \ldots$ için tanımlı ve $0<\nu<1$ olsun. Bu durumda

$$R_0\big(\Delta^{\nu} f(t)\big)(s) = s^{\nu} R_{\nu-1}\big(f(t)\big) - f(\nu-1)$$

dır (Atıcı and Eloe 2007b).

İspat: m pozitif bir tamsayı ise

$$R_0(\Delta^m f)(s) = s^m R_0(f)(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} \Delta^k f|_{t=0}$$

olur.

$m = 1$ için

$$R_0(\Delta^{\nu} f(t)) = R_0\left(\Delta\Delta^{-(1-\nu)} f(t)\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{t+1} \Delta\Delta^{-(1-\nu)} f(t)$$

$$= s \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{t+1} \Delta^{-(1-\nu)} f(t) - \Delta^{-(1-\nu)} f(t)|_{t=0}$$

$$= s \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{t+1} \Delta^{-(1-\nu)} f(t) - f(\nu-1)$$

$$= \frac{s}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{\tau=-\nu}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{\tau+1} t^{-\nu} \sum_{r=\nu-1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{r+1} f(r) - f(\nu-1)$$

$$= \frac{s}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\Gamma(1-\nu)}{s^{1-\nu}} R_{\nu-1}\left(f(t)\right) - f(\nu-1)$$

$$= s^{\nu} R_{\nu-1}\left(f(t)\right)(s) - f(\nu-1)$$

elde ederiz ve ispat tamamlanır.

Bu sonuçlar yüksek mertebeye kolayca genelleştirilebilir. $\mu > 0$ ve $m-1 < \mu < m$ olmak üzere f, $\mu - m, \mu - m + 1, \dots$ için tanımlı ve m pozitif tamsayı olsun. Bu durumda

$$R_0(\Delta^{\mu} f)(s) = s^{\mu} R_{\mu-m}(f)(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} \Delta^{k-m+\mu} f|_{t=0}$$

olur.

ÖRNEK 3.1: $t = 0,1,2,\dots$ için $\Delta^{\frac{4}{3}} y(t) = 0$ problemini düşünelim. $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \dots\right\}$ kümesinde tanımlı bir $y(t)$ çözümünü araştırdık. Kabul edelim ki $\Delta^{\frac{1}{3}} y(t)$ tanımlı ve sonlu olsun.

$\mu > 0$, $m - 1 < \mu < m$ için

$$R_0(\Delta^{\mu} f)(s) = s^{\mu} R_{\mu-m}(f)(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} \Delta^{k-m-\mu} f|_{t=0}$$

olduğu biliniyor. Burada $\mu=\frac{4}{3}$, $1 < \frac{4}{3} < 2$, $m = 2$ 'dir. Denklemin her iki tarafına $R-$ dönüşümü uygulanırsa

$$R_0\left(\Delta^{\frac{4}{3}} y(t)\right) = s^{\frac{4}{3}} R_{\frac{4}{3}-2}(y(t)) - \sum_{k=0}^{1} s^{1-k} \Delta^{k-\frac{2}{3}} f|_{t=0} = 0$$

$$= s^{\frac{4}{3}} R_{-\frac{2}{3}}\big(y(t)\big) - s\Delta^{-2/3} y(t) - \Delta^{1/3} y(t) \quad = 0$$

$$s^{4/3} R_{-2/3}\big(y(t)\big) = s\Delta^{-2/3} + \Delta^{1/3} y(t)$$

$$R_{-2/3}(y(t)) = \frac{\Delta^{-2/3} y(t)}{s^{1/3}} + \frac{\Delta^{1/3} y(t)}{s^{4/3}}$$

elde edilir.

$R_{\nu-1}\big(t^{(\nu-1)}\big)(s) = \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}$ olduğundan

$$R_{-2/3}\left(t^{-2/3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{s^{(1/3)}} \qquad ve \qquad R_{1/3}\left(t^{(1/3)}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{s^{4/3}}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri denklemde yerine yazarsak

$$R_{-2/3}(y(t)) = \frac{\Delta^{-2/3} y(t)}{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{R_{-2/3}\left(t^{(-2/3)}\right)}} + \frac{\Delta^{1/3} y(t)}{\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{R_{1/3}\left(t^{1/3}\right)}}$$

$$= \frac{\Delta^{-2/3} y(t)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} R_{-2/3}\left(t^{(-2/3)}\right) + \frac{\Delta^{1/3} y(t)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} R_{1/3}\left(t^{(1/3)}\right)$$

bulunur. $R_{-2/3}\left(t^{(-2/3)}\right) = R_{1/3}\left(t^{(1/3)}\right)$, $t\epsilon\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \ldots\right\}$ olduğundan

$$y(t) = \frac{\Delta^{-2/3}y(t)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} t^{(-2/3)} + \frac{\Delta^{1/3}y(t)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} t^{(1/3)}$$

elde edilir.

ÖRNEK 3.2: $t = 0,1,2,\ldots$ için $\Delta^{1/2}y(t) = 5$ problemini düşünelim. $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots\right\}$ ‘de tanımlanan bir $y(t)$ çözümü arayalım.

Denklemin her iki tarafına $R -$ dönüşümü uygulanırsa

$$R_0\left(\Delta^{1/2}y(t)\right) = R_0(5)$$

$0 < \nu < 1$ için

$$R_0\left(\Delta^{1/2}f(t)\right)(s) = s^{\nu}R_{\nu-1}(f(t)) - f(\nu-1)$$

$$R_0\left(\Delta^{1/2}y(t)\right) = s^{1/2}R_{-1/2}(y(t)) - y(-1/2)$$

$$s^{1/2}R_{-1/2}(y(t)) - y\left(-1/2\right) = R_0(5)$$

$$s^{1/2}R_{-1/2}(y(t)) = y\left(-1/2\right) + \frac{5}{s}$$

$$R_{-1/2}(y(t)) = \frac{y\left(-1/2\right)}{s^{1/2}} + \frac{5}{s^{3/2}}$$

$$R_{\nu-1}\left(t^{(\nu-1)}\right)(s) = \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}} \Rightarrow R_{-1/2}\left(t^{(-1/2)}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{1/2}}$$

olur.

$R_{1/2}\left(t^{1/2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{3/2}}$ olduğundan

$$R_{-1/2}(y(t)) = \frac{y(-1/2)}{\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{R_{-1/2}\left(t^{(-1/2)}\right)}} + \frac{5}{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{R_{1/2}\left(t^{(1/2)}\right)}}$$

$$= \frac{y(-{}^{1}/_{2})}{\Gamma({}^{1}/_{2})} R_{-{}^{1}/_{2}}\left(t^{(-{}^{1}/_{2})}\right) + \frac{5}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} R_{{}^{1}/_{2}}\left(t^{({}^{1}/_{2})}\right)$$

dir.

$R_{-{}^{1}/_{2}}\left(t^{(-{}^{1}/_{2})}\right) = R_{{}^{1}/_{2}}\left(t^{({}^{1}/_{2})}\right)$ olduğundan

$$y(t) = \frac{y(-{}^{1}/_{2})}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{(-{}^{1}/_{2})} + \frac{5}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} t^{({}^{1}/_{2})}$$

olur.

Örnek 3.3: $t = 0,1,2, \dots$ için $\Delta^{{}^{5}/_{3}} y(t) + (1-\alpha)\Delta^{{}^{2}/_{3}} y(t) = 0$ problemini düşünelim. $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \dots\right\}$' de tanımlanan $y(t)$ çözümünü arayalım.

Denklemin her iki tarafına R dönüşümü uygulayarak

$$R_{-{}^{1}/_{3}}(y(t)) = \frac{y\left(-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} R_{-{}^{1}/_{3}}\left(t^{(-{}^{4}/_{3})} * \alpha^{t}\right)$$
$$+ \frac{(1-\alpha)y(-{}^{1}/_{3}) + \Delta^{{}^{2}/_{3}} y(t)|_{t=0}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} R_{{}^{2}/_{3}}\left(t^{(-{}^{1}/_{3})} * \alpha^{t}\right)$$

buluruz.

$u_{\alpha}(t)$ basamak fonksiyonunu kullanarak,

$$R_{\alpha}(f(t)u_{\alpha}(t)) = R_{\alpha+1}(f(t))$$

ilişkisini görebiliriz. Kesirli fark denkleminin çözümü $t\epsilon\left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \dots\right\}$ için

$$y(t) = \frac{y(-{}^{1}/_{3})}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(t^{(-{}^{4}/_{3})} * \alpha^{t}\right) + \frac{(1-\alpha)y\left(-\frac{1}{3}\right) + \Delta^{{}^{2}/_{3}}(y(t))\Big|_{t=0}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\Delta^{-{}^{2}/_{3}}\alpha^{t}\right) u_{-{}^{1}/_{3}}(t)$$

dir.

4. KESİRLİ BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde lineer olmayan kesirli başlangıç değer problemlerinin varlığı incelenerek örnekler verilecektir. ν inci mertebeden kesirli fark denklemleri tanımlanarak, yarı-mertebeden lineer başlangıç değer problemlerinin belirsiz katsayılar metodu ve dönüşüm metodu ile çözümleri incelenecektir.

$\nu > 0$ ve $\sigma(s) = s + 1$ olsun. f fonksiyonunun ν inci mertebeden kesirli toplamı

$$\Delta^{-\nu} f(t;a) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} (\mathrm{t} - \sigma(\mathrm{s}))^{(\nu-1)} f(s)$$

şeklinde de tanımlanır (Atıcı and Eloe 2009).

Burada $s = a,\ mod(1)$ için f fonksiyonu, $t = a + \nu,\ mod(1)$ için $\Delta^{-\nu} f$ kesirli toplamı tanımlıdır.

Teorem 4.1: Herhangi bir $\nu > 0$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\Delta^{-\nu} \Delta f(t) = \Delta\Delta^{-\nu} f(t) - \frac{(t-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} f(a) \qquad (4.1)$$

Burada f, N_a da tanımlıdır (Atıcı and Eloe 2009).

İspat: İlk olarak

$$\Delta_s((t-s)^{\nu-1} f(s)) = (t-\sigma(s))^{(\nu-1)} \Delta_s f(s) - (\nu-1)\big(t-\sigma(s)\big)^{(\nu-2)} f(s)$$

kısmi toplam formülünü hatırlayalım (Kelley and Peterson 2001).

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} \big(t-\sigma(s)\big)^{(\nu-1)} \Delta_s f(s)$$

$$= \frac{\nu-1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} (t-\sigma(s))^{(\nu-2)} f(s) + \left. \frac{(t-s)^{(\nu-1)} f(s)}{\Gamma(\nu)} \right|_a^{t+1-\nu}$$

$$= \frac{\nu - 1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} (t - \sigma(s))^{(\nu-2)} f(s) + \frac{(\nu - 1)^{(\nu-1)} f(t + 1 - \nu)}{\Gamma(\nu)}$$

$$- \frac{(t - a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} f(a)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu - 1)} \sum_{s=a}^{t-(\nu-1)} \big(t - \sigma(s)\big)^{(\nu-2)} f(s) - \frac{(t - a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} f(a)$$

elde edilir.

$$\Delta\Delta^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu - 1)} \sum_{s=a}^{t-(\nu-1)} \big(t - \sigma(s)\big)^{(\nu-2)} f(s)$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Uyarı 4.1: (4.1) de ν yerine ν+1 yazarsak Teorem 3.1'den

$$\Delta^{-\nu-1} \Delta f(t) = \Delta^{-\nu} f(t) - \frac{(t - a)^{(\nu)}}{\Gamma(\nu + 1)} f(a)$$

elde edilir.

Buradan

$$\Delta^{-\nu} f(t) = \Delta^{-\nu-1} \Delta f(t) + \frac{(t - a)^{(\nu)}}{\Gamma(\nu + 1)} f(a) \qquad (4.2)$$

yazılır.

Uyarı 4.2: $p - 1 < \nu < p$ olsun. Burada p pozitif bir tamsayıdır. Bu durumda Teorem 4.1'den

$$\Delta\Delta^{\nu} f(t) = \Delta\Delta^{p} \left(\Delta^{-(p-\nu)} f(t)\right)$$

$$= \Delta^{p+1} \big(\Delta^{-(p-\nu)} f(t)\big)$$

$$= \Delta^{p} \big(\Delta\Delta^{-(p-\nu} f(t)\big)$$

$$= \Delta^p \left[\Delta^{-(p-\nu)} \Delta f(t) + \frac{(t-a)^{(p-\nu-1)}}{\Gamma(p-\nu)} f(a) \right]$$

$$= \Delta^p \Delta^{-(p-\nu)} \Delta f(t) + \Delta^p \frac{(t-a)^{(p-\nu-1)}}{\Gamma(p-\nu)} f(a)$$

$$= \Delta^\nu \Delta f(t) + \frac{(t-a)^{(-\nu-1)}}{\Gamma(-\nu)} f(a)$$

yazılır. Böylece herhangi bir ν reel sayısı için (4.2) yazılır.

Teorem 4.2: ν herhangi bir reel sayı ve p pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta^{-\nu} \Delta^p \big(f(t)\big) = \Delta^p \Delta^{-\nu} f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(t-a)^{(\nu-p+k)}}{\Gamma(\nu+k-p+1)} \Delta^k f(a) \tag{4.3}$$

dir. Burada f, $N_a{}'$ da tanımlıdır (Atıcı and Eloe 2009).

İspat: $(4.2)'$ de f yerine Δf yazarsak

$$\Delta^{-\nu} \Delta^2 f(t) = \Delta \Delta^{-\nu} \Delta f(t) - \frac{(t-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} \Delta f(a)$$

$$= \Delta \left[\Delta \Delta^{-\nu} f(t) - \frac{(t-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} \right] - \frac{(t-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} \Delta f(a)$$

$$\Delta^2 \Delta^{-\nu} f(t) - \frac{(t-a)^{(\nu-2)}}{\Gamma(\nu-1)} f(a) - \frac{(t-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} \Delta f(a)$$

$$= \Delta^2 \Delta^{-\nu} f(t) - \sum_{k=0}^{1} \frac{(t-a)^{(\nu-2+k)}}{\Gamma(\nu+k-1)} \Delta^k f(a)$$

bulunur. Benzer şekilde iterasyon tekrarlanarak ispat tamamlanır.

Uyarı 4.3: (4.3)' te ν yerine $\nu + p$ yazılır ve Teorem 3.1'den

$$\Delta^{-\nu} f(t) = \Delta^{-\nu-p}\Delta^{p} f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(t-a)^{(\nu+k)}}{\Gamma(\nu+k+1)} \Delta^{k} f(a) \qquad (4.4)$$

elde edilir.

Teorem 4.3: p pozitif bir tamsayı ve $\nu > p$ olsun. Bu durumda

$$\Delta^{p}[\Delta^{-\nu} f(t)] = \Delta^{-(\nu-p)} f(t) \qquad (4.5)$$

dir (Atıcı and Eloe 2009).

İspat: Kesirli toplamın tanımından

$$\Delta^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} (t-\sigma(s))^{(\nu-1)} f(s)$$

dir. Buradan $\nu > p$ olduğundan

$$\Delta^{p-1}\Delta^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu-p+1)} \sum_{s=a}^{t-(\nu-p+1)} (t-\sigma(s))^{(\nu-p)} f(s) = \Delta^{-(\nu-p)-1} f(t)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına fark operatörü uygulanırsa

$$\Delta^{p}[\Delta^{-\nu} f(t)] = \Delta[\Delta^{p-1-\nu} f(t)]$$

elde edilir. ν yerine $\nu - p + 1$yazılır ve (4.1) uygulanırsa

$$\Delta^{p}[\Delta^{-\nu} f(t)] = \Delta^{p-1-\nu}[\Delta f(t)] + \frac{(t-a)^{(\nu-p)}}{\Gamma(\nu+1-p)} f(a)$$

bulunur. ν yerine $\nu - p$ yazılır ve (4.2) uygulanırsa (4.5) ispatlanır.

Sabit katsayılı lineer fark denklemleri için $(1-\alpha)^t$ fonksiyon ailesinin oynadığı rol sabit katsayılı adi lineer diferensiyel denklemler için $e^{\alpha t}$ fonksiyon ailesinin oynadığı role benzerdir (Kelley and Peterson 2001).

Miller ve Ross, sabit katsayılı lineer kesirli diferensiyel denklemlerle ilgili çalışmalarında $D^{-\nu}e^{\alpha t}$ fonksiyon ailesininde benzer rolü oynadığını ifade etmiştir

(Miller and Ross 1993).

Şimdi

$$F(t,\nu,\alpha)=\Delta^{-\nu}(1+\alpha)^t$$

fonksiyon ailesi için temel özellikleri inceleyelim. Burada ν herhangi bir reel sayı ve $\Gamma(\nu)$ tanımlıdır. Dolayısıyla

$$F(t,\nu,\alpha;a)=\Delta^{-\nu}((1+\alpha)^t;a))$$

yazılır. Sonraki kısımda bu notasyona bağlı gösterimler kullanılacaktır.

Teorem 4.3: Kabul edelim ki faktöriyel fonksiyonu aşağıdaki özelliklerle taanımlıdır.

(i) $F(t,\nu,\alpha)=\alpha F(t,\nu+1,\alpha)+\frac{(t-a)^{(\nu)}}{\Gamma(\nu+1)}$

(ii) $\Delta_t F(t,\nu+1,\alpha)=F(t,\nu,\alpha)$, burada Δ_t , ileri fark operatörünü gösterir.

(iii) $p=0,1,2,\dots$ için $\Delta_t^p F(t,\nu+p,\alpha)=F(t,\nu,\alpha)$

(iv) $\Delta^{\mu}F(t,\nu,\alpha)=F(t,\nu-\mu,\alpha)$ burada, $p-1<\mu\leq p$

(v) $\Delta^{-\mu}F(t,\nu,\alpha)=F(t,\nu+\mu,\alpha)$

(vi) $F(t-a,\nu,\alpha)=(1+\alpha)^{-a}F(t,\nu,\alpha)$

İspat:(i) $f(t) = (1+\alpha)^t$ olsun. Bu durumda (4.2)'den

$$\Delta^{-\nu}(1+\alpha)^t = \Delta^{-\nu-1}\Delta(1+\alpha)^t + \frac{(t-a)^{(\nu)}}{\Gamma(\nu+1)} = \Delta^{-\nu-1}\alpha(1+\alpha)^t + \frac{(t-a)^{(\nu)}}{\Gamma(\nu+1)}$$

olur. Dolayısıyla

$$F(t,\nu,\alpha) = \alpha F(t,\nu+1,\alpha) + \frac{(t-a)^{(\nu)}}{\Gamma(\nu+1)}$$

elde edilir.

(ii) $f(t) = (1+\alpha)^t$ olmak üzere (4.1) den ve

$$\alpha F(t,\nu,\alpha) = \Delta F(t,\nu,\alpha) - \frac{(t-\alpha)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)}$$

dir. Böylece (i) ifadesinden (ii) açıktır.

(iii) $f(t) = (1+\alpha)^t$ olmak üzere (4.3) ve (4.4) den

$$\Delta_t^p F(t,\nu+p,\alpha) = F(t,\nu,\alpha), \qquad p = 0,1,2,\dots$$

dir.

(iv) Sırasıyla kesirli fark operatörünün tanımı Teorem 4.1 ve (iii) uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mu}F(t,\nu,\alpha) &= \Delta^p\Delta^{-(p-\mu)}F(t,\nu,\alpha)\\
&= \Delta^p\Delta^{-(p-\mu)}\Delta^{-\nu}(1+\alpha)^t\\
&= \Delta^p\Delta^{-(p-\mu+\nu)}(1+\alpha)^t\\
&= \Delta^p F(t,p-\mu+\nu,t)\\
&= F(t,\nu-\mu,t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) Teorem (4.1)' in sonucudur.

(vi) Kesirli toplam ve fark operatörlerinin lineerlik özelliğinin sonucudur.

Şimdi lineer olmayan kesirli fark denklemleri ve çözümlerinin varlık ve tekliğini inceleyelim.

$$\Delta^{\nu} y(t) = f\big(t+\nu-1, y(t+\nu-1)\big) \quad t = 0,1,2,\ldots \tag{4.6}$$

$$\Delta^{\nu-1} y(t)|_{t=0} = a_0 \tag{4.7}$$

lineer olmayan kesirli fark denklemini göz önüne alalım

Burada $\nu \in (0,1]$, f reel değerli bir fonksiyon ve a_0 bir reel sayıdır. $y(t)$ çözümü varsa $N_{\nu-1}$ üzerinde tanımlıdır.

(4.6) nın her iki tarafına $\Delta^{-\nu}$ operatörü uygulanırsa

$$\Delta^{-\nu}\Delta^{\nu} y(t) = \Delta^{-\nu} f\big(t+\nu-1, y(t+\nu-1)\big), \qquad t = \nu, \nu+1, \ldots \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) in sağ tarafına Teorem 4.1 uygulanırsa

$$\Delta^{-\nu}\Delta^{\nu} y(t) = \Delta^{-\nu}\Delta\Delta^{-(1-\nu)} y(t) = \Delta\Delta^{-\nu}\Delta^{-(1-\nu)} y(t) - \frac{t^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} y(\nu-1)$$
$$= \Delta^{-\nu} f(t+\nu-1, y(t+\nu-1))$$

olur.

Böylece $t \in N_{\nu-1}$ için

$$y(t) = \frac{t^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} a_0 + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{t-\nu} \big(t-\sigma(s)\big)^{(\nu-1)} f\big(s+\nu-1, y(s+\nu-1)\big) \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) ifadesi $(4.6) - (4.7)$ başlangıç değer probleminin çözümünün tekliğini gösterir. Sabit katsayılı ayrık kesirli denklem çözümlerine aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 4.1:

$$\Delta^{\nu} y(t) = \lambda y(t+\nu-1), \qquad t = 0,1,2,\ldots \tag{4.10}$$

$$\Delta^{\nu-1} y(t)|_{t=0} = a_0 \tag{4.11}$$

başlangıç değer problemini gözönüne alalım.

$(-\nu)^{(-\nu)} = \Gamma(1-\nu)$ olduğundan $\Delta^{\nu-1}y(t)|_{t=0} = y(\nu-1)$ dir. Ayrıca çözüm $N_{\nu-1}$de tanımlıdır. Böylece $(4.10)-(4.11)$ başlangıç değer problemi

$$\Delta^{\nu}y(t) = \lambda y(t+\nu-1), \quad t = 0,1,2,\dots$$

$$y(\nu-1) = a_0$$

başlangıç değer problemine denktir.

(4.9) dan $(4.10)-(4.11)$ başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = \frac{t^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)}a_0 + \frac{\lambda}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{t-\nu}\big(t-\sigma(s)\big)^{(\nu-1)}y(s+\nu-1)$$

şeklinde ifade edilir.

$$y_0(t) = \frac{t^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)}a_0$$

$$y_m(t) = y_0(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{(\nu-1)}y_{m-1}(s+\nu-1)$$

$$= y_0(t) + \lambda\Delta^{-\nu}y_{m-1}(t+\nu-1)\ , \qquad m = 1,2,\dots$$

olsun. Kuvvet kuralından

$$y_1(t) = y_0(t) + \lambda\Delta^{-\nu}y_0(t+\nu-1) = a_0\left(\frac{t^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} + \lambda\frac{(t+\nu-1)^{(2\nu-1)}}{\Gamma(2\nu)}\right)$$

olduğu görülür. Ardışık yaklaşımlar metodu yardımıyla

$$y_m(t) = a_0\sum_{i=0}^{m}\frac{\lambda^i}{\Gamma((i+1)\nu)}(t+(i-1)(\nu-1))^{(i\nu+\nu-1)} \qquad ,m = 0,1,2,\dots$$

bulunur.

$m \to \infty$ için limit alınırsa

$$y(t) = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\Gamma((i+1)\nu)} (t + (i-1)(\nu-1))^{(i\nu+\nu-1)} \tag{4.12}$$

elde edilir.

Örnek 4.2:

$$\Delta^{1/2} y(t) + a\Delta^0 y\left(t - 1/2\right) = 0, \qquad t = 0,1,2,\ldots$$

sabit katsayılı yarı mertebeden fark denklemini göz önüne alalım. Çözüm için belirsiz katsayılar metodunu kullanalım. Kabul edelim ki denklem

$$y(t) = AF(t, 0, \lambda) + F(t, -1/2, \lambda)$$

şeklinde bir çözüme sahip olsun.

Burada y $N_{-1/2}$'de tanımlıdır. Böylece

$$\Delta^{1/2} y(t) + a\Delta^0 y\left(t - 1/2\right) = A\Delta^{1/2}(1+\lambda)^t + \Delta^{1/2}\Delta^{1/2}(1+\lambda)^t$$

$$+ aA(1+\lambda)^{-1/2}(1+\lambda)^t + a(1+\lambda)^{-1/2}\Delta^{1/2}(1+\lambda)^t \tag{4.13}$$

elde edilir.

$$\Delta^{1/2}\Delta^{1/2}(1+\lambda)^t = \lambda(1+\lambda)^t$$

eşitliği Teorem 4.1, kuvvet kuralı ve kesirli fark tanımı yardımıyla aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\Delta^{1/2}\Delta^{1/2}(1+\lambda)^t = \Delta^{1/2}\Delta\Delta^{-1/2}(1+\lambda)^t$$

$$= \Delta^{1/2}\left(\Delta^{-1/2}\Delta(1+\lambda)^t + \frac{(t+1/2)^{(-1/2)}}{\Gamma(1/2)}(1+\lambda)^{-1/2}\right)$$

$$= \Delta\Delta^{-1/2}\Delta^{-1/2}\Delta(1+\lambda)^t + \Delta^{1/2}\left(\frac{(t+1/2)^{(-1/2)}}{\Gamma(1/2)}(1+\lambda)^{-1/2}\right)$$

$$= \lambda(1+\lambda)^t + \Delta\Delta^{-1/2}\left(\frac{(t+1/2)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}(1+\lambda)^{-1/2}\right)$$

$$= \lambda(1+\lambda)^t.$$

Şimdi (4.13) e tekrar dönelim

$$\Delta^{1/2}y(t) + a\Delta^0 y(t-1/2) = \Delta^{1/2}(1+\lambda)^t\left(A + a(1+\lambda)^{-1/2}\right)$$

$$+(1+\lambda)^t\left(\lambda + Aa(1+\lambda)^{-1/2}\right)$$

$$= (1+\lambda)^{-1/2}F(t,-1/2,\lambda)\left(A(1+\lambda)^{1/2} + a\right)$$

$$+(1+\lambda)^{-1/2}F(t,0,\lambda)\left(\lambda(1+\lambda)^{1/2} + Aa\right)$$

$$= (1+\lambda)^{(-1/2)}F(t,-1/2,\lambda)\left(A(1+\lambda)^{1/2} + a\right)$$

$$+A(1+\lambda)^{-1/2}F(t,0,\lambda)\left(A^{-1}\lambda(1+\lambda)^{1/2} + a\right)$$

olur.

$P(x) = \sqrt{x(1+x)} + a$ ve $\lambda = A^2$ olsun. Bu durumda (4.13) denklemi

$$\Delta^{1/2}y(t) + a\Delta^0 y(t-1/2) = (1+\lambda)^{-1/2}P(\lambda)\left(F(t,-1/2,\lambda) + \sqrt{\lambda}F(t,0,\lambda)\right)$$

şeklinde yazılır.

Eğer λ, $P(x) = 0$ denkleminin kökü ise $t = -1/2, 1/2, 3/2, \ldots$ için

$$y(t) = \sqrt{\lambda}F(t,0,\lambda) + F(t,-1/2,\lambda)$$

ayrık kesirli denklemin çözümüdür.

$(4.6)-(4.7)$ başlangıç değer problemi R dönüşüm metodu ile çözülebilir. Böylece yarı lineer fark denklemleri için üçüncü bir çözüm metodu verilmiş olur. R dönüşümünün tanımı ve bazı özellikleri 3. bölümde verilmiştir. Şimdi aşağıdaki Lemmayı ifade edelim ve Örnek 4.2 deki denklemi R dönüşüm metodu ile çözelim.

Lemma 4.1: λ herhangi bir reel sayı olsun. Bu durumda

$$(i) R_{-1/2}F\left(t,-1/2,\lambda\right)=R_{-1/2}\Delta^{1/2}(1+\lambda)^{t}=\frac{\sqrt{s}}{s-\lambda}$$

$$(ii) R_{-1/2}F(t,0,\lambda)=R_{-1/2}(1+\lambda)^{t}=\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}(s-\lambda)}$$

dir (Atıcı and Eloe 2009).

Örnek 4.3: $\Delta^{1/2}y(t)+a\Delta^{0}y\left(t-1/2\right)=0, \quad t=0,1,2,\ldots$ denkleminin her iki tarafına R_0 dönüşümü uygulayalım. Burada a herhangi bir pozitif olmayan reel sayıdır. Bu durumda Lemma 3.4 den

$$\sqrt{s}R_{-1/2}y(t)-y\left(-1/2\right)+\frac{1}{\sqrt{s+1}}R_{-1/2}y(t)=0$$

yazılır. Buradan

$$R_{-1/2}y(t)=\frac{a_0\sqrt{s+1}}{\sqrt{s(s+1)}+a} \tag{4.14}$$

elde edilir.

$\alpha=\sqrt{a^2+1/2^2}-1/2$ ve $\beta=1/2+\sqrt{a^2+1/2^2}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{a_0\sqrt{s+1}}{\sqrt{s(s+1)}+a}=\frac{a}{\alpha+\beta}\left(\frac{(1+\alpha)\sqrt{s}}{s-\alpha}-\frac{(1-\beta)\sqrt{s}}{s+\beta}-\frac{a\sqrt{s+1}}{s-\alpha}+\frac{a\sqrt{s+1}}{s+\beta}\right)$$

olur.

(4.14)’ ün her iki tarafına Lemma 4.1 uygulanırsa

$$y(t) = \frac{a_0}{\alpha+\beta}\Bigg((\alpha+1)F\left(t,-{}^{1}\!/_{2},\alpha\right) - a\sqrt{\alpha+1}F(t,0,\alpha))$$

$$+\frac{a_0}{\alpha+\beta}\left((\beta-1)\right)F\left(t,-{}^{1}\!/_{2},-\beta\right) + a\sqrt{1-\beta}F(t,0,-\beta)\Bigg)$$

elde edilir.

$x=\beta,\ \sqrt{x(x-1)}+a=0$ denklemini sağlar. Böylece $\lambda_1=\beta-1$ ve $\lambda_2=-\beta$ $\sqrt{x(1+x)}+a=0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Örnek (4.2)’ yi elde ederiz.

$\alpha+1=\beta$ alınırsa çözüm

$$y(t) = \frac{a_0\beta}{2\beta-1}\left(F(t,-{}^{1}\!/_{2},\beta-1\right) + \sqrt{\beta-1}F(t,0,\beta-1))$$

$$+\frac{a_0(\beta-1)}{2\beta-1}\left(F(t,-{}^{1}\!/_{2},-\beta\right) + \sqrt{-\beta}F(t,0,-\beta)$$

şeklinde yazılır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde kesirli fark denklemlerinin bir ailesi çözümleri dönüşüm yöntemi yardımıyla elde edilmiştir. Bu ayrık dönüşüm tamsayıların zaman skalasında Laplace dönüşümü olarak düşünülebilir. Ayrıca kesirli başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlığı incelenerek örnekler verilmiştir. Bu örnekler lineer olmayan kesirli başlangıç değer problemleridir.

6. KAYNAKLAR

Altın, A. (2011). Uygulamalı Matematik, Gazi Kitap, Ankara.

Atici, F. M. and Eloe, P. W. (2007a) . A transform method in discrete fractional calculus. *International Journal of Difference Equations*, **2**: 165-176.

Atici, F. M. and Eloe, P. W. (2007b). Fractional q-calculus on a time scale, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **3**: 333-344.

Atici, F. M. and Eloe, P. W. (2009). Initial value problems in discrete fractional calculus. *Proceedings of the American Mathmatical Society*, **3**: 981-989.

Bohner, M. and Peterson, A. (2001). Dynamic equations on time scales, An introduction with applications. Birkhäuser Boston,Inc., Boston, MA.

Bohner, M. and Peterson, A. (2002). Laplace transform and Z-transform: Unification and extension, *Methods and Applications of Analysis*, **9**: 151-157.

Bohner, M. and Guseinov, G. (2007). The convolution on time scales, Abstract and Applied Analysis, Art. ID 58373, **24**.

Kelley, W. G. and Peterson, A. C. (2001). Difference Equations*:* An Introduction with Applications, Harcourt/Academic Press, San Diego.

Miller, K. S. and Ross, B. (1989). Fractional Difference Calculus, In Univalent functions, Fractional Calculus and Their Applications, Ellis Horwood Series in Mathematics and its applications. Horwood, Chichester, 139–152.

Miller, K. S. and Ross, B. (1988). Fractional Difference Calculus, Proceedings of the International Symposium on Univalent Functions, Fractional Calculus and Their Applications. Nihon University, Koriyama, Japan, Ellis Horwood Series in Mathematics and its applications. Horwood, Chichester, 139–152.

Miller, K. S. and Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc. NewYork.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı-Soyadı : Münevvere Mine KARAKAYA

Doğum Tarihi : 25.04.1990

Doğum Yeri : AFYONKARAHİSAR

Eğitim Bilgileri

Lise : Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü (2008-2012)

Pedagojik Formasyon : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi (2012-2013)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2013-)

Yüksek Lisans Ana Bilim Dalı : Matematik

Yüksek Lisans Bilim Dalı : Uygulamalı Matematik

İletişim Bilgileri

Mail: mine.zumruttas@gmail.com