**KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru AKTOPRAK

DANIŞMAN

Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz, 2015

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

**Ebru AKTOPRAK**

**DANIŞMAN**
**Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Temmuz, 2015**

**TEZ ONAY SAYFASI**

Ebru AKTOPRAK tarafından hazırlanan "Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 10/07/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** **:** Doç.Dr, Mustafa Kemal YILDIZ

**Başkan** **:** Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

**Üye** **:** Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

**Üye** **:** Yrd. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

## BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

**Afyon Kocatepe Üniversitesi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**10/07/2015**

**Ebru Aktoprak**

**ÖZET**
Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
SALINIMLILIĞI

Ebru AKTOPRAK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
**Danışman:** Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Diferensiyel denklemler üzerinde uzun yıllar çalışılmaktadır ve diferansiyel denklemlerin bir çok bilim dalında uygulaması mevcuttur. Yıllardır gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlılığını inceleyen çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bir çok yazar diferensiyel denklemin çözümünün salınımlılığı konusunu incelemiştir. Bu tezin birinci bölümünde diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ile ilgili elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir. İkinci bölümünde diferensiyel denklemlerin salınımlılığı için gerekli tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde

$$D_a^q x + f_1(t,x) = v(t) + f_2(t,x),\ \lim_{t\to\infty} J_a^{1-q}\, x(t) = b_1$$

başlangıç değer probleminin salınımlılık durumları incellenmiştir. Dördüncü bölüm de ise $D_a^q x(t) + f_1\big(t, x(\tau(t))\big) = v(t) + f_2(t, x(\tau(t)))$ $\lim\limits_{t\to\infty} J_a^{1-q} x(\tau(t)) = b_1$

gecikmeli kesirli diferansiyel denklemlerin salınımlılığı için gerekli kriterler elde edilmiştir.

**2015, v + 35 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli diferensiyel denklemler, salınımlılık, Riemann-Liouville operatörü, Caputo türev

**ABSTRACT**

M.Sc Thesis

ON THE OSCILLATION OF FRACTIONAL

DIFFERENTIAL EQUATIONS



Ebru AKTOPRAK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

**Supervisor:** Assoc. Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ



Differential equations are studied over long years and applications of differential equations are avaible in many science areas. Numerous studies have been made about examining the oscillation of delayed fractional differential equations. Many authors have examined the subject of oscillation of the solutions of differential equations.

In the first part of this thesis, it has been mentioned the results obtained on the oscillation of the differential equations. The second part of the thesis describes the necessarry definitions and theorems in differential equations for the oscillation. In the third part of thesis oscillation criteria are obtained for a class of nonlinear fractional differential equations of the form

$$D_a^q x + f_1(t,x) = v(t) + f_2(t,x),\ \lim_{t\to\infty} J_a^{1-q}\, x(t) = b_1$$

In the forth part of this thesis

$$D_a^q x(t) + f_1\big(t, x(\tau(t))\big) = v(t) + f_2(t, x(\tau(t))) \qquad \lim_{t\to\infty} J_a^{1-q} x(\tau(t)) = b_1$$

oscillation criteria are obtained for delay fractional differential equations.

**2015, v + 35 pages**



**Key Words:** Fractional differential equation, oscillation,Riemann-Liouville operators, Caputo deriative.

**TEŞEKKÜR**

Tez çalışmam süresince görüş ve önerileriyle çalışmama yön veren, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı değerli tez danışmanım Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ'a teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman, her konuda bana destek veren, bugünlere ulaşmama vesile olan aileme teşekkür ederim.

Ebru AKTOPRAK

AFYONKARAHİSAR 2015

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

# SİMGELER DİZİNİ

| **Simgeler** | |
|---|---|
| $\leq$ | Küçüktür ya da eşittir |
| $\geq$ | Büyüktür ya da eşittir |
| $\infty$ | Sonsuz |
| $\alpha$ | Alfa |
| $\int_a^b$ | Belirli İntegral |
| $\Gamma$ | Gamma Fonksiyonu |
| $\beta$ | Beta |
| $\gamma$ | Gama |
| $\sum$ | Toplam Operatörü |
| $\in$ | Elemanıdır |
| $D$ | Türev Operatörü |
| $R$ | Reel Sayılar Kümesi |
| $\lim$ | Limit |
| $\lim\sup$ | Limit Supremum |
| $\lim\inf$ | Limit İnfimum |

# 1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler uzun yıllardır çalışılan bir konudur. Diferensiyel denklemler günlük hayatta mühendislik, fizik, kimya, biyoloji gibi birçok temel bilim alanında kullanılmakta ve günlük hayatta birçok kolaylık sağlamaktadır.

Ayrıca diferensiyel denklemlerin vazgeçilmez bilimsel öneminde "doğada kopukluk yoktur" yanlış varsayımlarına yer veriliyordu. Bu eski hipoteze göre fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Bu nedenle diferensiyel denklemler, fizik bilimine özgü matematiksel ifade olarak kabul ediliyordu. Fakat 20. yüzyıl başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Eski Yunanlılara göre, doğa olaylarında görülen süreklilik ile kesiklilik arasındaki zıtlaşma, doğadaki sürekliliğin bir aldatmacasıydı. Günümüzde görülen bu süreksizlik problemleri fark denklemlerden faydalanarak çözülür.

Bütün bu gelişmelerin yanında diferensiyel denklemlerin çözümünün salınımlılığı ile ilgili son yıllarda oldukça yoğun çalışmalar yapılmaktadır. Diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığıyla ilgili Myslus, Ladas, Sfikas, Hunt, Chanturia, York, Tramov, Kaplatadze, Györi, Zhang, Stavroulakis, Arino gibi yazarlar çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalarda yazarlar diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık şartlarını elde etmişlerdir.

Myslus (1972), $p, t \in \Re$ olmak üzere

$$x'(t) + px(t-\tau) = 0 \tag{1.1}$$

diferensiyel denkleminin çözümünün salınımlılığı için

$$p.\tau > \frac{1}{e}$$

yeterli şartını elde etmiştir. Ladas (1983),

$$F(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau}$$

karakteristik denkleminin reel köke sahip olmaması durumunda (1.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olacağını ispatlamıştır.

Tramov (1975), $p_i \in (0,\infty)$ ve $\tau_i \in \Re^+, i = 1,2,3,...,n$ olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i) = 0 \tag{1.2}$$

denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda\tau} = 0$$

karakteristik denkleminin reel köke sahip olmaması şartını elde etmiştir. Aynı sonuç Ladas (1983) ve daha sonra Hunt ve Yorke (1984) tarafından elde edilmiştir. Györi (1989) tarafından (1.2) denklemimin çözümünün salınımlılık şartları biraz daha geliştirilmiştir. Ladas ve Sficas (1984) ile Hunt ve Yorke (1984), $p_i \in \Re, \tau_i \in \Re^+$ negatif olmayan reel sayılar ve $i = 1,2,3,...,n$ olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t - \tau_i) = 0 \qquad (1.3)$$

denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i > \frac{1}{e}$$

koşulunu elde etmişlerdir. Ladas ve Kaplatadze (1979), Chanturia (1982) çalışmalarında

$$x'(t) + p(t)x(t - \tau) = 0 \;, \qquad t \geq t_0$$

denkleminin salınımlılığı için $p \in [[t_0, \infty), \Re^+]$ $\tau > 0$ olmak üzere

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}$$

koşulunu elde etmişlerdir.

Kesirli hesabın tarihi ise 17. yüzyıla dayanmaktadır. Keyfi mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve $n$ −katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır. Bu kavramlar 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer bir çok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır.

Kesirli diferansiyel teorisi, çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesirli türevler için önemli bir avantajdır. Kesirli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemeleri, akışkanlık teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya ve diğer bir çok alanda kullanılmaktadır.

1695'te $\alpha = 1/2$-inci mertebeden türev Leibniz tarafından tanımlanmıştır. Riemann-Liouville, Hadamard, Grunwald-Letnikov, Riesz ve Caputo integral eşitsizlikleri Kilbas vd. (2006) ve Samko vd. (1993) tarafından kesirli hesap teori ve gelişmeleriyle farklı türevler tanımlanmıştır.

Kesirli analizde; kesirli türevler, Kilbas vd. (2006) ve Samko vd. (1993) tarafından bir kesirli integral yardımıyla tanımlanmıştır. Kesirli integrallerin bilinen bir çok formu vardır, öyle ki, bunlardan özellikle J.Hadamard ve Riemann-Liouville kesirli integralleri, Butzer vd. (2002), Kilbas (2001), Kilbas vd. (2006), Podlubny (2009) ve Samko vd. (1993) tarafından yaygın olarak incelenmiştir.

## 2.GENEL BİLGİLER

**Tanım 2.1.**

$$x'(t)+f\left(t,x(t),x(t-\tau_1),x(t-\tau_2),...,x(t-\tau_n)\right)=0 \tag{2.1}$$

gecikmeli diferensiyel denklem sistemi göz önüne alınacak olursa burada bazı $\tilde{t}_0 \in \Re$ elemanı ve pozitif bir $m$ tamsayısı için

$$\tilde{f} \in C\left[[\tilde{t}_0,\infty]\right]\times \Re^m \times \Re^m ... \times \Re^m, \Re^m]$$

ve

$$\tau_i \in C[[\tilde{t}_0,\infty],\Re^+] \quad , \quad i=1,2,3...n \tag{2.2}$$

ile

$$\lim_{t\to\infty}[t-\tau_i(t)]=\infty \quad , \quad i=1,2,3...n \tag{2.3}$$

olmak üzere her $t_0 \geq \tilde{t}_0$ başlangıç noktası için $t_{-1}=t_{-1}(t_0)$ şeklinde tanımlanırsa

$$t_{-1}=\min_{1\leq i\leq n}\left\{\inf_{t\geq t_0}\{t-\tau_i(t)\}\right\} \tag{2.4}$$

dır. Görülür ki $t_{-1}$, $t_0$ noktasında olduğu gibi diferensiyel denklemin $\tau_i$ gecikmelerine bağlıdır. $\left[t_{-1,}t_0\right]$ aralığı (2.1) gecikmeli diferensiyel denklemi ve $t_0$ başlangıç noktası ile ilişkilendirilmiş başlangıç noktası olarak adlandırılmıştır. (2.1) gecikmeli diferensiyel denklemi ve verilen $t_0 \geq \tilde{t}_0$ başlangıç noktası ile ilgili başlangıç koşulu; $t_{-1} \leq t_0 \leq \tilde{t}_0$ için

$$x(t)=\varphi(t) \tag{2.5}$$

dir. Burada

$$\varphi(t):\left[t_{-1},t_0\right]\to \Re^m$$

başlangıç fonksiyonudur (Györi and Ladas 1991).

**Tanım 2.2**. **a)** $\tilde{t}_0 \leq t_0 \leq T$ olmak üzere $I$ aralığı $[t_0,T)$, $[t_0,T]$ veya $[t_0,\infty)$ formunda ise eğer $x:[t_{-1},t_0]\to R^m$ sürekli, $t\in I$ için sürekli diferensiyellenebilir ve her $t\in I$ için $x(t)$, (2.1) gecikmeli diferensiyel denklemini sağlıyor ise $x(t)$ fonksiyonuna (2.1) denkleminin bir çözümü denir.

**b)** $I$ aralığı $[t_0,T)$, $[t_0,T]$ veya $[t_0,\infty)$ formunda olmak üzere eğer $I$ aralığı üzerinde $x$, (2.1) denkleminin bir çözümü ve $x$, (2.5) eşitliğini sağlıyor ise $x(t)$ fonksiyonuna $I$ aralığı üzerinde (2.1) başlangıç-değer probleminin bir çözümü denir.

**c)** $x$, eğer bazı $t_0 \geq \tilde{t}_0$ için (2.1) denkleminin bir çözümünü sağlayan fonksiyonu ise $x$, $[t_0,\infty)$ aralığında (2.1) denkleminin bir çözümüdür.

**d)** $x$, $[t_0,\infty)$ aralığında (2.1) denkleminin bir çözümü ve (2.5) başlangıç fonksiyonunu sağlıyor ise $x$ fonksiyonu (2.5) ve (2.1) başlangıç değer probleminin çözümünü sağlayan fonksiyondur (Györi and Ladas 1991).

**Teorem 2.1.** (2.2) ve (2.3) koşullarına ek olarak tüm $t \geq \tilde{t}_0$ için $p \in C[[\tilde{t}_0,\infty],\Re^+]$ bir fonksiyon olmak üzere, $f$ global Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon $x_i, y_i \in R^m$, $i = 1,2,3...,n$ için

$$\| f(t,x_0,x_1,x_2,...,x_n) - f(t,y_0,y_1,y_2,...,y_n\| \leq p(t)\sum_{i=0}^{n}\|x_i - y_i\| \tag{2.6}$$

olsun. O halde $t_0 \geq \tilde{t}_0$ için $\varphi(t):[[t_{-1},t_0] \to R^m]$ olmak üzere, (2.1) başlangıç değer problemi ve (2.5) denkleminin $[t_0,\infty)$ aralığındaki çözümü kesin tektir(Györi and Ladas 1991).

**Tanım 2.3.** Lineer otonom olmayan gecikmeli sistemi

$$x'(t) + p_0(t)x(t) + \sum_{i=0}^{n} p_i(t)x(t-\tau_i(t)) = 0 \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanmak üzere burada bazı $\tilde{t}_0 \in \Re$ için ve pozitif $m$ tamsayısı için

$$p_i \in C\left[\left[\tilde{t}_{0,},\infty\right],\Re^{m\times m}\right], \qquad i = 1,2,3...,n$$

için,

$$\tau_i \in C\left[\left[\tilde{t}_{0,},\infty\right],\Re^{m\times m}\right], \qquad i = 1,2,3...,n$$

ve

$$\lim_{t\to\infty}\left[t - \tau_i(t)\right] = \infty, \qquad i = 1,2,3...,n$$

olmak üzere $t_0 \geq \tilde{t}_0$ için $\varphi(t):[t_{-1},t_0] \to R^m$ verilmiş olsun. O halde (2.5) başlangıç değer probleminin $[t_0,\infty)$ aralığında kesin tek çözümü vardır.

**Tanım 2.4.** Lineer otonom gecikmeli sistemi

$$x'(t) + p_0(t)x(t) + \sum_{i=0}^{n} p_i(t)x(t-\tau_i(t)) = 0 \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanmak üzere burada $i = 1,2,3...,n$ için $p_i$ ifadeleri $m \times m$ tipinde matrisler ve $\tau_i$ gecikmeleri negatif olmayan reel katsayılardır. O zaman her $t_0 \in R$ ve her $\varphi(t):\left[[t_{-1},t_0] \to R^m\right]$ için (2.8) ve (2.5) başlangıç değer probleminin $[t_0,\infty)$ aralığın da bir tek çözümü vardır (Györi and Ladas 1991).

**Tanım 2.5. (**Gronwalls eşitsizliği**)** $I = [t_0,T)$ şeklinde reel sayıların bir aralığı ve

$c \in [0,\infty)$ ve $u, v \in C[I, R^+]$ olmak üzere $t \in I$ için

$$u(t) \le c + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds$$

ise bu durumda

$$u(t) \le c \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)$$

dır (Györi and Ladas 1991).

**Tanım 2.6. (**Laplace dönüşümü**)**

Lineer diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden biriside integral dönüşümüdür. Bu integral dönüşümü

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t)dt \tag{2.9}$$

şeklindedir. Bu integral dönüşümü yardımıyla verilen bir $f(t)$ fonksiyonu bir diğer $F(s)$ fonksiyonuna dönüştürülmektedir. $F(s)$ fonksiyonuna $f(t)$ nin integral dönüşümü ve $K(s,t)$ ifadesine de integral dönüşümün çekirdeği denir. İntegral dönüşümün $K(s,t)$ çekirdeği değiştikçe integral dönüşümü değişik adlar alır. İntegral dönüşümünden $K(s,t) = \exp(-st)$ seçilirse ve integral sınırları $\alpha = 0$ $ve$ $\beta = \infty$ alınırsa bu integral dönüşümüne Laplace dönüşümü denir.

$$L\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} \exp(-st) f(t)dt = F(s)$$

denklemi ile tanınan $L\{f(t)\}$ veya $F(s)$ ye $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir. Laplace dönüşümü tanımından da görüldüğü gibi, bu dönüşüm genelleştirilmiş integral görünümündedir. Eğer, (2.9) denklemiyle verilen genelleştirilmiş integral yakınsak ise Laplace dönüşümü tanımlanır (Györi and Ladas 1991).

**Lemma 2.7. a)** $x \in \mathrm{C}\big[[-\tau,\infty)\mathrm{R}\big]$ ve $x(t)$ nin Laplace dönüşümü olan $X(s)$ nin yakınsadığı apsis $\sigma_0 < \infty$ olsun. $x(t-\tau)$ nin laplace dönüşümü aynı yakınsanan apsise sahiptir ve Re $s > \sigma_0$ olacak şekilde ki tüm $s$ ler için

$$L\left[x(t-\tau) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} x(t-\tau)dt = e^{-st} X(s) + e^{-st} \int_{-\tau}^{0} e^{-st} x(t)dt\right] \tag{2.10}$$

olur (Györi and Ladas 1991).

**b)** $x \in \mathrm{C}^1\big[[0,\infty)\mathrm{R}\big]$ ve $x(t)$ nin Laplace dönüşümü olan $X(s)$ nin yakınsadığı apsis

$\sigma_0 < \infty$ olsun. $x'(t)$ nin Laplace dönüşümüde aynı yakınsanan apsise sahiptir ve Re $s > \sigma_0$ olacak şekildeki tüm $s$ ler için

$$L[x'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} x'(t) dt = sX(s) - x(0)$$

olur (Györi and Ladas 1991).

**Tanım 2.8.** $p, \tau \in \Re$ olmak üzere $x'(t) + px(t-\tau) = 0$ gecikmeli diferensiyel denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak

$$F(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau}$$

karakteristik denklemi hiçbir reel köke sahip değildir (Ladas *et al.* 1983).

**Tanım 2.9. (**Lipschitz Şartı**)**

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

bir başlangıç değer problemi ve D bölgeside merkezi $(x_0, y_0)$ noktasında olan,

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq a,$$

ile tanımlı dikdörtgensel bir bölge olmak üzere bu bölgede tanımlı başlangıç değer problemindeki $f$ ile $df/dy$ fonksiyonları sürekli olsun. $df/dy$ ifadesinin sürekli olması kabulu $df/dy$ değerinin D de sınırlı olmasını gerektirir. Öyleyse D deki her bir nokta için

$$\left|\frac{d_f}{d_y}\right| < K$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. O halde $(x, y_1)$ve $(x, y_2)$ noktaları D bölgesinde iki nokta olmak üzere ortalama değer teoreminden

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{d_f}{d_y}(x,y^*)(y_1 - y_2)$$

olacak şekilde $y_1$ ve $y_2$ arasında bir $y^*$ sayısının olduğu kabul edilmek üzere, $x, y^* \in D$ olduğundan D deki $(x, y_1)$ ve $(x, y_2)$ noktalarının her bir çifti için,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{d_f}{d_y}(x,y^*)\right| |y_1 - y_2| \tag{2.11}$$

$$\leq K|y_1 - y_2|$$

bulunur. Bu eşitsizlik $f$ fonksiyonu için Lipschitz şartı olarak adlandırılır. Buna göre varlık teoreminden $\frac{d_f}{d_y}$ değerinin D de sürekli olması kabulü yerine (2.11) şartının sağlanması kabulünün eşdeğer olduğu söylenebilir. O halde varlık teoreminin ispatında $\frac{d_f}{d_y}$ değerinin sürekliliği hipotezi yerine Lipschitz şartı kullanılabilir (Özer ve Eser 2002).

**Sonuç 2.1.** Eğer $|x - x_0| \leq h$ ise $i = 1,2,3,...,n$ için

$$| f(x, y_n(x)) - f(x, y_{n-1}(x)) | \leq K | y_n(x) - y_{n-1}(x) |$$

eşitsizliği doğrudur (Özer ve Eser 2002).

**Tanım 2.10.** Bir diferensiyel denklemin herhangi bir çözümü $x$ olmak üzere eğer bu $x$ çözümleri keyfi sayıda sıfırlara sahipse bu çözüme salınımlıdır denir. Aksi takdirde bu çözümlere salınımlı olmayan çözümler denir. Yani $x$ salınımlı değil ise bir $t_1 > t_0$ değeri vardır öyle ki $t > t_1$için $x(t) \neq 0$ dır. Diğer bir deyişle belli bir değerden sonra çözüm ya hep pozitiftir ya da hep negatiftir (Györi and Ladas 1991).

**Tanım 2.11.** Eğer $x(t)$,

$$x'(t) + x(t - \tau(t)) = 0$$

denkleminin $[t_0, \infty)$ ve $[T_0, \infty)$ aralığında $t_0$ başlangıç noktasına göre $t \geq t_0$ için $x(t) \rangle 0$ ise bu $x(t)$ çözümüne denklemin bir pozitif çözümü denir (Erbe *et al*. 1994).

**Tanım 2.12. (**Sup-norm**)** $X$, $E$ (Öklid Uzayı) uzayında tanımlanmış sınırlı fonksiyonların bir uzayı olmak üzere

$$\| f \| = \sup_{x \in E} | f(x) |$$

şeklinde tanımlanan norma sup-norm denir.

## 2.1 Kesirli Türev

Keyfi bir $y = f(x)$ fonksiyonunun ardışık türevleri,

$$f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, ..., \frac{d^n f(x)}{dx^n}, ...$$

olsun. Bu ardışık türevler keyfi bir fonksiyonun türevlenebilmesi şartı ile adı altındadır. Bir fonksiyonun 1. mertebeden türevi yoktur, ama 2. mertebeden türevi olabilir. Buradaki temel amaç $n$ bir pozitif tamsayı olmak üzere $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ türevinin mertebesi olan tamsayı yerine kesirli bir sayı getirilerek yeni bir türevin nasıl tanımlanacağı şeklindedir.

Genel kesirli türevleri vermeden önce yarı türev denen bir türev formülü elde edilerek bir uygulama yapılsın ve daha sonra daha genel kesirli türev formülü verilsin.

Bunun için $f(x)=x^k$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $k$ pozitif bir tamsayı olmak üzere $\alpha$. mertebeden türevine bakılırsa;

$$\begin{aligned} f(x)=x^2 \quad &\Rightarrow \quad f'(x)=kx^{k-1} \\ &\Rightarrow \quad f''(x)=k(k-1)x^{k-2} \\ &\Rightarrow \quad f'''(x)=k(k-1)(k-2)x^{k-3} \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\Rightarrow \quad f^{(a)}(x)=k(k-1)\ldots(k-(\alpha-1))x^{k-a} \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu son eşitlik, faktöriyel yardımıyla,

$$f^{(a)}(x)=\frac{k!}{(k-a)!}.x^{k-a}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$$

ifadesi kullanılırsa;

$$f^{(a)}(x)=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)}..x^{k-a}$$

eşitliği yazılır (Özen 2003, Özen ve Öztürk 2004). Artık elde edilen bu formal yapıda $a$ sayısının pozitif bir tamsayı olması gerekmez.

**Örnek 2.1.1:** $k=2$ ve $\alpha=\frac{1}{2}$ olması durumunda fonksiyonun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevine, diğer bir deyişle yarım türevine bakılırsa;

$$f(x)=x^k \Rightarrow f(x)=x^2 \ , \qquad \alpha=\frac{1}{2}$$

$$f^{(a)}(x)=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}.x^{k-\alpha}$$

$$f^{(\frac{1}{2})}(x)=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)}.x^{2-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}.x^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2!}{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma(\frac{1}{2})}.\ x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$$

olarak bulunur.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{df}{dx}$$

olması gerekeceğinden bu durum, aşağıda verilen örnekle gerçeklensin.

**Örnek 2.1.2:**

$$f^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}, \qquad k = \frac{3}{2}, \qquad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\left( f^{\frac{1}{2}}(x) \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{d^{\frac{1}{2}} f}{dx^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{df}{dx}$$

$$= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} (x^{\frac{3}{2}})$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)} . x$$

=2x

Örnek 2.1.1 ve Örnek 2.1.2 den;

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{d^{\frac{1}{2}} f}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 \right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \right) = 2x$$

yazılabilir.

**Tanım 2.1.3:** $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \varphi(s)(t-s)^{\alpha-1} dt \qquad x > a \qquad (2.12)$$

şeklindeki Abel integral denklemi ele alınsın. Buradaki (2.12) integralinde $x$ yerine $t, t$

yerine $s$ yazılırsa,

$$f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \varphi(s)(t-s)^{\alpha-1}ds \tag{2.13}$$

bulunur. Elde edilen bu (2.13) integralinin her iki yanı $(x-t)^{-\alpha}$ ile çarpılarak $a$ dan $x$ e kadar integrali alındığında,

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left[\int_a^t \varphi(s)(t-s)^{\alpha-1}ds\right](x-t)^{-\alpha}dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\int_a^t \varphi(s)(t-s)^{\alpha-1}(x-t)^{-\alpha}ds\right)dt$$

bulunur. Elde edilen bu eşitliğe Dirichlet formülü olarak bilinen

$$\int_a^b\left(\int_a^x f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_y^b f(x,y)dx\right)dy \tag{2.14}$$

eşitliği kullanılırsa;

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \varphi(s)\left[\int_s^x (t-s)^{\alpha-1}(x-t)^{-\alpha}dt\right]ds \tag{2.15}$$

elde edilir. (2.15) ifadesinin sağ tarafındaki iç integralde $t=s+\tau(x-s)$, $dt=(x-s)d\tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\begin{aligned}\int_s^x (t-s)^{\alpha-1}(x-t)^{-\alpha} &= \int_0^1 (s+\tau(x-s)-s)^{\alpha-1}(x-s-\tau(x-s))^{-\alpha}(x-s)d\\ &= \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau\\ &= \beta(\alpha,1-\alpha)\\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifade (2.15) de yerine yazıldığında;

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt=\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \varphi(s)ds$$

$$\int_a^x \varphi(s)ds=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt$$

olur. Bu ifadenin her iki yanının $x$ e göre türevi alınırsa;

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt \tag{2.16}$$

bulunur. Elde edilen (2.16) ifadesine $\alpha$ −inci mertebeden fractional ya da kesirli türev denir (Özen 2003, Özen ve Öztürk 2004). Bu türev Riemann-Liouville türevi olarak da bilinir.

**Örnek 2.1.3:**

$\alpha=\frac{1}{2}$, $f(x)=x^2$ seçilirse;

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^2 dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^1 (x-ux)^{-\frac{1}{2}} u^2 x^2 x du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^2 x^{\frac{5}{2}} du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx} x^{\frac{5}{2}} \beta(\frac{1}{2},3)$$

$$=\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$$

bulunur.

**Tanım 2.1.4:** $f$ fonksiyonu her sonlu $(a, x)$ aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in \mathrm{N}, m-1 \le \alpha < m$ olmak üzere $x > a$ için reel bir $f$ fonksiyonunun $\alpha$ −inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki şekildedir (Samko *et al.* 1993).

$$D_{RL}^{c} f(x)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1} dt \tag{2.17}$$

**Tanım 2.1.5:** $m, m-1 \le \alpha < m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, $\alpha$ herhangi bir pozitif tamsayı ve $f$ fonksiyonu da $m$ defa sürekli diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde $f$ fonksiyonunun $\alpha$ −inci mertebeden Caputo kesirli türevi

$$D_a^c f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-\alpha-1} dt \qquad (2.18)$$

ile tanımlanır (Samko *et al.* 1993, Özen ve Öztürk 2004).

## 3. KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

Kesirli diferensiyel denklemler, elektroanalitik kimyada, kontrol teorisinde ve birçok fizik probleminde çeşitli uygulamaları sebebiyle oldukça önemlidir.

Lineer olmayan kesirli diferensiyel denklemler için salınımlılık kriteri aşağıdaki formdadır:

$$D_a^q x + f_1(t,x) = v(t) + f_2(t,x) \qquad \lim_{t \to a^+} J_a^{1-q} x(t) = b_1 \tag{3.1}$$

Burada $D_a^q$, $0 < q \leq 1$ olmak üzere q.mertebeden Riemann-Liouville diferensiyel operatörünü belirtmektedir.

$$J_a^p x(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-s)^{p-1} x(s) ds \qquad J_a^0 x := x$$

şeklinde tanımlanan $J_a^p$ operatörü, Riemann-Liouville integral operatörü olarak adlandırılır. İntegral operatörü kullanılarak, $0 < q \leq 1$ için q.mertebeden Riemann-Liouville diferensiyel operatörü

$$D_a^q f(t) := \frac{d}{dt} J_a^{1-q} f(t)$$

şeklinde tanımlanır. Daha genel olarak eğer $m \geq 1$ tamsayısı için $m-1 < q \leq m$ olmak üzere

$$D_a^q f(t) := \frac{d^m}{dt^m} J_a^{m-q} f(t)$$

$f_1$, $f_2$ ve $v$ nin sürekli olduğunu varsayarsak (3.1) başlangıç değer probleminin çözümünün aynı olduğu Volterra denklemi

$$x(t) = \frac{b_1 (t-a)^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} \left[ v(s) + f_2(s, x(s)) - f_1(s, x(s)) \right] ds \tag{3.2}$$

şeklindedir. Buradan (3.2) nin her çözümü (3.1) inde çözümüdür ve tersi de geçerlidir.

Bu çözümler, $b \geq a$ için, $(b, \infty)$ aralığında tamamen sıfır olmayan, $(a, \infty)$ aralığında da sürekli kabul edilecektir. (3.1) ya da (3.2) denklemlerinin çözümleri eğer $(0, \infty)$ da keyfi sayıda sıfıra sahipse salınımlıdır; aksi halde salınımsız olarak adlandırılır.

### 3.1 Kesirli Türev Yaklaşımı

Bu kesimde aşağıdaki şartlar kullanılacaktır:

$$x f_i(t,x) > 0, \quad (i = 1, 2), \quad x \neq 0, \quad t \geq a \tag{3.3}$$

$$|\,|f_1(t,x)| \geq |p_1(t)||x|^{\beta} \quad ve \quad |f_2(t,x)| \leq |p_2(t)||x|^{\gamma}, \quad x \neq 0, \quad t \geq a \tag{3.4}$$

burada, $p_1,\ p_2 \in C([a,\infty),\Re^+)$ ve $\beta,\alpha > 0$ reel sayılardır (Sagarayaj ve Selvam 2012).

**Lemma 3.1.** $X \geq 0$ ve $Y > 0$ için

$$X^{\lambda} + (\lambda - 1)Y^{\lambda} - \lambda XY^{\lambda-1} \geq 0\,, \qquad \lambda > 1 \tag{3.5}$$

ve

$$X^{\lambda} - (1-\lambda)Y^{\lambda} - \lambda XY^{\lambda-1} \leq 0\,, \qquad \lambda < 1 \tag{3.6}$$

dir. Burada eşitlik ancak $X = Y$ iken sağlanır (Hardy *et al.* 1959).

**Teorem 3.1.** $f_2 = 0$ ve ( 3.3) şartı sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1} v(s)ds = -\infty \tag{3.7}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1} v(s)ds = \infty \tag{3.8}$$

ise (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Grace *et al.* 2012).

**İspat:** $x(t)$, $f_2 = 0$ olduğunda (3.1) denkleminin salınımlı olmayan çözümü olsun. $t \geq T$ için $x(t) > 0$ olmak üzere $T > a$ yeterince büyük olsun.

$$F(t) = v(t) + f_2(t, x(t)) - f_1(t, x(t))$$

olmak üzere (3.2) den görülür ki $t \geq T$ için

$$x(t) \leq \frac{(t-a)^{q-1}}{\Gamma(q)}\,|b_1| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^T (t-s)^{q-1}\,|F(s)ds + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_T^t (t-s)^{q-1} v(s)ds$$

olur. Her iki taraf $\Gamma(q)t^{1-q}$ ile çarpılırsa

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(t) \leq c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}v(s)ds \tag{3.9}$$

elde edilir. Burada

$$c(T) = \left(\frac{T}{T-a}\right)^{1-q} |b_1| + \int_a^T \left(\frac{T}{T-s}\right)^{1-q} |F(s)|\,ds$$

dir.

(3.9) eşitsizliğinde $t \to \infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le \liminf_{t\to\infty}\left[c(T)+t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\beta(s)\right]ds\right]$$

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le \liminf_{t\to\infty} c(T)+\liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\beta(s)\right]ds \qquad (3.10)$$

elde edilir. Burada, başta $t \ge T > a$ için $x(t) > 0$ kabulümüzden ve $\Gamma(q)$ fonksiyonunun pozitif olması sebebiyle (3.10) eşitsizliğinin sol tarafı $t \to \infty$ iken alt limiti alındığında $+\infty$'a giderken, eşitsizliğin sağ tarafı (3.7) koşulundan $-\infty$'a gider. Yani $\infty \le -\infty$ olamaz. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü salınımlıdır. Benzer şekilde $x(t)$ negatif çözüm olduğunda da (3.8) ile çelişki elde edilir.

**Teorem 3.2.** $\beta > 1$ ve $\gamma = 1$ için (3.3) ve (3.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)ds + H_\beta(s)\right]ds = -\infty \qquad (3.11)$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)ds + H_\beta(s)\right]ds = \infty \qquad (3.12)$$

ise, (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada

$$H_\beta(s) = (\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)} p_1^{1/(1-\beta)}(s)\, p_2^{\beta/(\beta-1)}(s)$$

dir (Grace *et al.* 2012).

**İspat:** $x(t)$, (3.2)' nin salınımlı olmayan bir çözümü olsun, yani $t \ge T > a$ için $x(t) > 0$ olsun. (3.2) denkleminde $\gamma = 1$, $\beta > 1$ ve $t \ge T$ için (3.4) ü kullanarak,

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le \left(\frac{t}{t-a}\right)^{1-q}|b_1| + \int_T^t \left(\frac{t}{t-s}\right)^{1-q}|F(s)|\,ds + \left[\int_T^t (t-s)^{q-1}v(s)ds + \int_T^t (t-s)^{q-1}\left[p_2(s)x(s) - p_1(s)x^\beta(s)\right]ds\right]$$

bulunur. $t \ge T$ için

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le \left(\frac{T}{T-a}\right)^{1-q}|b_1| + \int_T^t \left(\frac{T}{T-s}\right)^{1-q}|F(s)|\,ds + \left[\int_T^t (t-s)^{q-1}v(s)ds + \int_T^t (t-s)^{q-1}\left[p_2(s)x(s) - p_1(s)x^\beta(s)\right]ds\right]$$

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le (c(T) + t^{1-q}\left[\int_T^t (t-s)^{q-1}v(s)ds + \int_T^t (t-s)^{q-1}\left[p_2(s)x(s) - p_1(s)x^{\beta}(s)\right]ds\right]$$

(3.13)

elde edilir.

Lemma 3.1 deki (3.5) eşitsizliğininden yararlanarak,

$\lambda = \beta, X = p_1^{1/\beta}x$ ve $Y = (p_2 p_1^{-1/\beta} / \beta)^{1/(\beta-1)}$ olmak üzere

$$p_2(t)x(t) - p_1(t)x^{\beta}(t) \le (\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)} p_1^{1/(1-\beta)}(s) p_2^{\beta/(\beta-1)}(s) \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.13) eşitsizliği (3.14) eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s) + H_{\beta}(s)ds\right], \qquad t \ge T \tag{3.15}$$

şeklinde düzenlenir. Burada

$$c(T) = (\frac{T}{T-a})^{1-q} \, | b_1 | + \int_T^t (\frac{T}{T-s})^{1-q} \, | F(s) | \, ds$$

dir.

(3.15) eşitsizliğinde $t \to \infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le \liminf_{t\to\infty}\left[c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s) + H_{\beta}(s)\right]ds\right]$$

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le \liminf_{t\to\infty} c(T) + \liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s) + H_{\beta}(s)\right]ds \tag{3.16}$$

elde edilir. Burada, başta $t \ge T > a$ için $x(t) > 0$ kabulümüzden ve $\Gamma(q)$ fonksiyonunun pozitif olması sebebiyle (3.16) eşitsizliğinin sol tarafı $t \to \infty$ iken alt limiti alındığında $+\infty$'a giderken, eşitsizliğin sağ tarafı (3.11) koşulundan $-\infty$'a gider.

Yani $\infty \le -\infty$ olamaz. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü salınımlıdır. Benzer şekilde $x(t)$ negatif çözüm olduğunda da (3.12) ile çelişki elde edilir.

**Teorem 3.3.** $\beta = 1$ ve $\gamma < 1$ için (3.3) ve (3.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s) + H_{\gamma}(s)\right]ds = -\infty \tag{3.17}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s) - H_{\gamma}(s)\right]ds = \infty \tag{3.18}$$

ise, (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada

$$H_\gamma(s)=(1-\gamma)\gamma^{\gamma/(\gamma-1)}p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(s)p_2^{1/(1-\gamma)}(s)$$

dir (Grace *et al.* 2012).

**İspat:** $x(t)$, (3.2)' nin salınımlı olmayan bir çözümü olsun, yani $t \geq a > 1$ için $x(t)>0$ olsun. (3.2) denkleminde $\beta=1$, $\gamma<1$ için (3.4) eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}\Gamma(q)t^{1-q}x(t) &\leq (\frac{t}{t-a})^{1-q}|b_1|+\int_a^t(\frac{t}{t-s})^{1-q}|F(s)|ds+\\&\left[\int_a^t(t-s)^{q-1}v(s)ds+\int_T^t(t-s)^{q-1}\left[p_2(s)x^\gamma(s)-p_1(s)x(s)\right]ds\right]\\&\leq c(T)+t^{1-q}\left[\int_a^t(t-s)^{q-1}v(s)ds+\int_a^t(t-s)^{q-1}\left[p_2(s)x^\gamma(s)-p_1(s)x(s)\right]ds\right]\end{aligned}$$

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(t)\leq(c(T)+t^{1-q}\left[\int_a^t(t-s)^{q-1}v(s)ds+\int_a^t(t-s)^{q-1}\left[p_2(s)x^\gamma(s)-p_1(s)x(s)\right]ds\right] \tag{3.19}$$

bulunur. Lemma 3.1 de (3.6) eşitsizliğinden,

$$\lambda=\gamma,\ X=p_2^{1/\gamma}x \text{ ve } Y=(p_1p_2^{-1/\gamma}/\gamma)^{1/(\gamma-1)}$$

olur. Buradan

$$p_2(t)x^\gamma(t)-p_1(t)x(t)\leq(1-\gamma)\gamma^{\gamma/(\gamma-1)}p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(t)p_2^{1/(1-\gamma)}(t) \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.19) da (3.20) kullanılarak $t\geq T$ için,

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(t)\leq c(T)+t^{1-q}\int_T^t(t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\gamma(s)\right]ds, \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.21) eşitsizliğinde $t\to\infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty}\Gamma(q)t^{1-q}x(t)\leq\liminf_{t\to\infty}\left[c(T)+t^{1-q}\int_T^t(t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\gamma(s)\right]ds\right]$$

$$\liminf_{t\to\infty}\Gamma(q)t^{1-q}x(t)\leq\liminf_{t\to\infty}c(T)+\liminf_{t\to\infty}t^{1-q}\int_T^t(t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\gamma(s)\right]ds \tag{3.22}$$

elde edilir.Burada, başta $t\geq a>1$ için $x(t)>0$ kabulümüzden ve $\Gamma(q)$ fonksiyonunun pozitif olması sebebiyle (3.22) eşitsizliğinin sol tarafı $t\to\infty$ iken alt limiti alındığında $+\infty$'a giderken, eşitsizliğin sağ tarafı (3.17) koşulundan $-\infty$'a gider.

Yani $\infty\leq-\infty$ olamaz. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü salınımlıdır. Benzer şekilde $x(t)$

negatif çözüm olduğunda da (3.18) ile çelişki elde edilir.

**Teorem 3.4.** $\beta > 1$ ve $\gamma < 1$ için (3.3) ve (3.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds = -\infty \tag{3.23}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds = \infty \tag{3.24}$$

ise, (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada $\xi \in C([a,\infty),\Re^+)$ olmak üzere

$$H_{\beta,\gamma}(s) = (\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)} p_1^{1/(1-\beta)}(s) p_2^{\beta/(\beta-1)}(s) + (1-\gamma)\gamma^{\gamma/(\gamma-1)} p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(s) p_2^{1/(1-\gamma)}(s)$$

dir (Grace *et al.* 2012).

**İspat:** $x(t)$, (3.1) in salınımlı olmayan bir çözümü olsun, yani $t \ge T > a$ için $x(t) > 0$ olsun. (3.2) denkleminde (3.4) kullanılarak $t \ge T$ için

$$\begin{aligned}\Gamma(q)t^{1-q}x(t) \quad \le \quad & c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}v(s)ds \\ & + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left(\xi(s)x(s) - p_1(s)x^{\beta}(s)\right)ds \\ & + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left(p_2(s)x^{\gamma}(s) - \xi(s)x(s)\right)ds\end{aligned} \tag{3.25}$$

$\left(\xi x - p_1 x^{\beta}\right)$ ve $\left(p_2 x^{\gamma} - \xi x\right)$ terimleri (3.14) te $p_2 = \xi$ ve (3.20) de $p_1 = \xi$ kullanılarak

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds, \qquad t \ge T \tag{3.26}$$

elde edilir. (3.26) eşitsizliğinde $t \to \infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le \liminf_{t\to\infty}\left[c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds\right]$$

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q}x(t) \le \liminf_{t\to\infty} c(T) + \liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds \tag{3.27}$$

elde edilir. Burada, başta $t \ge T > a$ için $x(t) > 0$ kabulümüzden ve $\Gamma(q)$ fonksiyonunun pozitif olması sebebiyle (3.27) eşitsizliğinin sol tarafı $t \to \infty$ iken alt limiti alındığında $+\infty$'a giderken, eşitsizliğin sağ tarafı (3.23) koşulundan $-\infty$'a gider.

Yani $\infty \le -\infty$ olamaz. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü salınımlıdır. Benzer şekilde $x(t)$ negatif çözüm olduğunda da (3.24) ile çelişki elde edilir.

**Uyarı:** q.mertebeden $D_a^q$ Riemann-Liouville diferansiyel operatörünü içeren kesirli diferansiyel denklemler için geriye kalan sonuçlar $m \geq 1$ bir tamsayısı için $m-1 < q \leq m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &D_a^q x + f_1(t,x) = v(t) + f_2(t,x) \\ &D_a^{q-k} x(a) = b_k\,,\ (k = 1,2,\ldots,m-1),\ \lim_{t\to a^+} J_a^{m-q} x(t) = b_m \end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklinde gösterilir.

(3.28) başlangıç değer problemi aşağıdaki Volterra kesirli integral denklemi ile aynı karakteristik özelliğe sahiptir.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k (t-a)^{q-k}}{\Gamma(q-k+1)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} [v(s) + f_2(s,x(s)) - f_1(s,x(s))] ds \tag{3.29}$$

**Örnek 3.1.**

$$D_0^q x + e^t x^3 = \frac{t^{1-q}}{\Gamma(2-q)} + te^t (t^2 - 1) + e^t x\,, \quad \lim_{t\to 0^+} J_0^{1-q} x(t) = 0\,, \quad 0 < q \leq 1 \tag{3.30}$$

Yukardaki Riemann-Liouville kesirli diferensiyel denklemi göz önüne alındığında, (3.1) den açıkça görülür ki

$$a = b_1 = 0\,, \quad f_1(t,x) = e^t x^3, \quad f_2(t,x) = e^t x \ \text{ ve } \ v(t) = \frac{t^{1-q}}{\Gamma(2-q)} + te^t (t^2 - 1)$$

dir. (3.3) ve (3.4) şartları $\beta = 3$ $\gamma = 1$ ve $p_1(t) = p_2(t) = e^t$ için sağlanır. Fakat (3.11) şartı sağlanamaz, $v(t) \geq 0$ olduğundan

$$t^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} p_2^{\beta/(\beta-1)}(s) p_1^{1/(1-\beta)}(s) ds \geq t^{1-q} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-q}} ds = \frac{t}{q}$$

dir. Kolayca görülebilir ki $x(t) = t$ çözümü (3.30) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümdür. $t \to 0^+$ iken $J_0^{1-q} x(t) = t^{1-q} / \Gamma(3-q) \to 0$ olur.

### 3.2. Caputo Türev Yaklaşımı

$D_a^q$ Riemann-Liouville diferensiyel operatörünün yerine $m-1 < q \leq m$ için

$${}_c D_a^q f(t) := J_a^{m-q} f^{(m)}(t)$$

şeklinde tanımlanan ${}_c D_a^q$ Caputo diferensiyel operatörünü göz önüne alalım. Burada Caputo diferensiyel operatörü ${}_c D_a^q$, $m$ kez diferensiyellenebilirdir. Bu durumda (3.28) başlangıç değer probleminin yerine

$$ {}_cD_a^q x + f_1(t,x) = v(t) + f_2(t,x), \quad x^{(k)}(a) = b_k \qquad (k = 0,1,...,m-1) \tag{3.31} $$

denklemi göz önüne alınırsa bu denkleme karşılık gelen Volterra diferensiyel denklemi,

$$ x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_k (t-a)^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} [v(s) + f_2(s, x(s) - f_1(s, x(s)] ds \tag{3.32} $$

şeklindedir (Diethelm 2010).

Caputo için de salınımlılık kriteri Riemann-Liouville de elde edilen şartlarla hemen hemen aynıdır. Tek fark şartlarda $t^{1-q}$ yerine $t^{1-m}$ alınmasıdır. Bu fark $m = 1$ olduğunda daha ayırıcıdır.

**Teorem 3.5.** $f_2 = 0$ ve ( 3.3) şartı sağlansın. Eğer

$$ \liminf_{t\to\infty} t^{1-m} \int_a^t (t-s)^{q-1} v(s) ds = -\infty \tag{3.33} $$

ve

$$ \limsup_{t\to\infty} t^{1-m} \int_a^t (t-s)^{q-1} v(s) ds = \infty \tag{3.34} $$

ise (3.1) in her çözümü salınımlıdır (Grace *et al.* 2012).

**İspat:** $x(t)$, $f_2 = 0$ ile birlikte (3.31) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. $t \geq T$ için $x(t) > 0$ olmak üzere $T > a$ yeterince büyük olsun.

$$ F(t) = v(t) + f_2(t, x(t)) - f_1(t, x(t)) $$

olmak üzere (3.32) den görülür ki $t \geq T$ için

$$ x(t) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} | b_k | + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} [v(s) + f_2(s, x(s) - f_1(s, x(s)] ds $$

olur. Her iki taraf $\Gamma(q) t^{1-m}$ ile çarpılırsa

$$ \Gamma(q) t^{1-m} x(t) \leq c(T) + t^{1-m} \int_T^t (t-s)^{q-1} v(s) ds \tag{3.35} $$

elde edilir. Burada

$$ c(T) = \left(\frac{T}{T-a}\right)^{1-m} | b_1 | + \int_a^T \left(\frac{T}{T-s}\right)^{1-m} | F(s) | ds $$

dir.

(3.35) eşitsizliğinde $t \to \infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınırsa,

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-m}x(t) \le \liminf_{t\to\infty}\left[c(T)+t^{1-m}\int_T^t (t-s)^{q-1}(v(s))ds\right]$$

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-m}x(t) \le \liminf_{t\to\infty} c(T)+\liminf_{t\to\infty} t^{1-m}\int_T^t (t-s)^{q-1}(v(s))ds \qquad (3.36)$$

elde edilir. Burada, başta $t \ge T > a$ için $x(t) > 0$ kabulümüzden ve $\Gamma(q)$ fonksiyonunun pozitif olması sebebiyle (3.36) eşitsizliğinin sol tarafı $t \to \infty$ iken alt limiti alındığında $+\infty$'a giderken, eşitsizliğin sağ tarafı (3.33) koşulundan $-\infty$'a gider.

Yani $\infty \le -\infty$ olamaz. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü salınımlıdır. Benzer şekilde $x(t)$ negatif çözüm olduğunda da (3.34) ile çelişki elde edilir.

**Teorem 3.6.** $\beta > 1$ ve $\gamma = 1$ için (3.3) ve (3.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}[v(s)+H_\beta(s)]ds = -\infty \qquad (3.37)$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}[v(s)+H_\beta(s)]ds = \infty \qquad (3.38)$$

ise, (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada

$$H_\beta(s) = (\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)} p_1^{1/(1-\beta)}(s)\, p_2^{\beta/(\beta-1)}(s)$$

dir (Grace *et al.* 2012).

**Teorem 3.7.** $\beta = 1$ ve $\gamma < 1$ için (3.3) ve (3.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}[v(s)+H_\gamma(s)]ds = -\infty \qquad (3.39)$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}[v(s)-H_\gamma(s)]ds = \infty \qquad (3.40)$$

ise, (3.1) in her çözümü salınımlıdır. Burada

$$H_\gamma(s) = (1-\gamma)\gamma^{\gamma-1} p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(s)\, p_2^{1/(1-\gamma)}(s)$$

dir (Grace *et al.* 2012).

**Teorem 3.8.** $\beta > 1$ ve $\gamma < 1$ için (3.3) ve (3.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds = -\infty \tag{3.41}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds = \infty \tag{3.42}$$

ise (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada $\xi \in C([a,\infty),\Re^{+})$ olmak üzere

$$H_{\beta,\gamma}(s) = (\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)} p_1^{1/(1-\beta)}(s) p_2^{\beta/(\beta-1)}(s) + (1-\gamma)\gamma^{\gamma/(\gamma-1)} p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(s) p_2^{1/(1-\gamma)}(s)$$

dir (Grace *et al.* 2012).

## 4. GECİKMELİ KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde lineer olmayan

$$D_a^q x + f_1\big(t, x(\tau(t))\big) = v(t) + f_2(t, x(\tau(t))) \qquad \lim_{t\to a^+} J_a^{1-q} x(t) = b_1 \tag{4.1}$$

kesirli mertebeden gecikmeli diferensiyel denkleminin çözümlerinin davranışını inceleyeceğiz. Burada $\tau(t) = t - l \;\; l \in \Re$ olmak üzere gecikme terimidir. Bu çözümlerin davranışını incelerken bu denklemle aynı karakteristik özellikleri gösteren aşağıdaki Volterra denklemini göz önünde bulundurulacaktır. Yani

$$x(t) = \frac{b_1(t-a)^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-s)^{q-1}\big[v(s) + f_2\big(s, x(\tau(s))\big) - f_1\big(s, x(\tau(s))\big)\big]ds \tag{4.2}$$

Volterra denkleminin çözümlerinin davranışı ile (4.1) denkleminin çözümlerinin davranışları aynıdır.

(4.1) denkleminin çözümlerinin davranışlarını incelerken aşağıdaki şartları göz önünde bulunduracağız.

### 4.1. Kesirli Türev Yaklaşımı

Bu kesimde aşağıdaki şartlar göz önüne alınsın:

$$xf_i(t,x) > 0, \quad (\, i = 1, 2), \quad x \neq 0, t \geq a \tag{4.3}$$

$$||\, f_1(t,x)| \geq |p_1(t)||x|^{\beta} \quad ve \;\; |f_2(t,x)| \leq |p_2(t)||x|^{\gamma}, \quad x \neq 0, \quad t \geq a \tag{4.4}$$

şartlarının sağlandığını kabul edeceğiz. Burada, $p_1,\, p_2 \in C\big([a,\infty), R^+\big)$ ve $\beta, \gamma > 0$ reel sayılardır.

**Teorem 4.1.** : $f_2 = 0$ ve ( 4.3) şartı sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-q} \int_a^t (t-s)^{q-1} v(s) ds = -\infty \tag{4.5}$$

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-q} \int_a^t (t-s)^{q-1} v(s) ds = \infty \tag{4.6}$$

ise o zaman (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

**İspat**: $x(t)$, $f_2 = 0$ için (4.1) in salınımlı olmayan bir çözümü olsun. $T > a$ olmak üzere $t \geq T$ için $x(\tau(t)) > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $S > T$ vardır ve $t \geq S$

için $x(\tau(t)) > 0$ dır.

$$F(t) = v(t) + f_2(t, x(\tau(t)) - f_1(t, x(\tau(t))$$

olmak üzere (4.2) den görülür ki $t \geq S$ için

$$x(t) \leq \frac{(t-a)^{q-1}}{\Gamma(q)} | b_1 | + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^S (t-s)^{q-1} | F(s) | ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_S^t (t-s)^{q-1} v(s) ds$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\Gamma(q)t^{1-q}$ ile çarpılırsa $t \geq S$ için

$$\Gamma(q)t^{1-q} x(t) \leq c(S) + t^{1-q} \int_T^t (t-s)^{q-1} v(s) ds \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada

$$c(S) = (\frac{S}{S-a})^{1-q} | b_1 | + \int_a^S (\frac{S}{S-a})^{1-q} | F(s) | ds$$

dir.

(4.7) eşitsizliğinde $t \to \infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q} x(t) \leq \liminf_{t\to\infty} \left[ c(S) + t^{1-q} \int_T^t (t-s)^{q-1} v(s) ds \right]$$

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q} x(t) \leq \liminf_{t\to\infty} c(S) + \liminf_{t\to\infty} t^{1-q} \int_T^t (t-s)^{q-1} v(s) ds \tag{4.8}$$

elde edilir. Burada, başta $t \geq T > a$ için $x(t) > 0$ kabulümüzden ve $\Gamma(q)$ fonksiyonunun pozitif olması sebebiyle (4.8) eşitsizliğinin sol tarafı $t \to \infty$ iken alt limiti alındığında $+\infty$'a giderken, eşitsizliğin sağ tarafı (4.5) koşulundan $-\infty$'a gider.

Yani $\infty \leq -\infty$ olamaz. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü salınımlıdır. Benzer şekilde $x(t)$ negatif çözüm olduğunda da (4.6) ile çelişki elde edilir.

**Teorem 4.2.** $\beta > 1$ ve $\gamma = 1$ için (4.3) ve (4.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-q} \int_a^t (t-s)^{q-1} [v(s) + H_\beta(s)] ds = -\infty \tag{4.9}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-q} \int_a^t (t-s)^{q-1} [v(s) - H_\beta(s)] ds = \infty \tag{4.10}$$

ise, (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada

$$H_\beta(s) = (\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)} p_1^{1/(1-\beta)}(s) p_2^{\beta/(\beta-1)}(s)$$

dir.

**İspat:** $x(t)$, (4.2)' nin salınımlı olmayan bir çözümü olsun, yani $t \geq T > a$ için $x(\tau(t)) > 0$ olsun. (4.2) denkleminde $\gamma = 1$, $\beta > 1$ ve $t \geq T$ için (4.3) ü kullanarak,

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(\tau(t)) \leq (c(T) + t^{1-q}\left[\int_T^t (t-s)^{q-1}v(s)ds + \int_T^t (t-s)^{q-1}\left[p_2(s)x(\tau(s)) - p_1(s)x^\beta(\tau(s))ds\right]\right] \tag{4.11}$$

elde edilir.

Lemma 3.1 deki (3.5) eşitsizliğinden yararlanarak,

$\lambda = \beta, X = p_1^{1/\beta}x(\tau(t)$ ve $Y = (p_2 p_1^{-1/\beta}/\beta)^{1/(\beta-1)}$ olmak üzere

$$p_2(t)x(\tau(t)) - p_1(t)x^\beta(\tau(t)) \leq (\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)} p_1^{1/(1-\beta)}(s) p_2^{\beta/(\beta-1)}(s) \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) den yararlanarak (4.11) eşitsizliği,

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(\tau(t)) \leq c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s) + H_\beta(s)\right]ds, \qquad t \geq T \tag{4.13}$$

şeklinde düzenlenir. Burada

$$c(S) = (\frac{T}{T-a})^{1-q} |b_1| + \int_T^t (\frac{T}{T-s})^{1-q} |F(s)| ds$$

dir.

(4.13) eşitsizliğinde $t \to \infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q}x(t) \leq \liminf_{t\to\infty}\left[c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s) + H_\beta(s)\right]ds\right]$$

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q}x(t) \leq \liminf_{t\to\infty} c(T) + \liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s) + H_\beta(s)\right]ds \tag{4.14}$$

elde edilir.Burada, başta $t \geq T > a$ için $x(t) > 0$ kabulümüzden ve $\Gamma(q)$ fonksiyonunun pozitif olması sebebiyle (4.14) eşitsizliğinin sol tarafı $t \to \infty$ iken alt limiti alındığında $+\infty$'a giderken, eşitsizliğin sağ tarafı (4.9) koşulundan $-\infty$'a gider.

Yani $\infty \leq -\infty$ olamaz. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü salınımlıdır. Benzer şekilde $x(t)$ negatif çözüm olduğunda da (4.10) ile çelişki elde edilir.

**Teorem 4.3.** $\beta = 1$ ve $\gamma < 1$ için (4.3) ve (4.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\gamma(s)\right]ds=-\infty \tag{4.15}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)-H_\gamma(s)\right]ds=\infty \tag{4.16}$$

ise, (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada

$$H_\gamma(s)=(1-\gamma)\gamma^{\gamma/(\gamma-1)}p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(s)p_2^{1/(1-\gamma)}(s)$$

dir.

**İspat:** $x(t)$, (4.2)' nin salınımlı olmayan bir çözümü olsun, yani $t\ge a>1$ için $x(\tau(t))>0$ olsun. (4.2) denkleminde $\gamma<1$, $\beta=1$ için (4.4) kullanılarak,

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(t)\le (c(T)+t^{1-q}\left[\int_T^t (t-s)^{q-1}v(s)ds+\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[p_2(s)x^\gamma(\tau(s))-p_1(s)x(\tau(s))\right]ds\right] \tag{4.17}$$

bulunur. Lemma 3.1 de (3.6) eşitsizliğinden,

$$\lambda=\gamma, X=p_2^{1/\gamma}x(\tau(t)) \text{ ve } Y=(p_1p_2^{-1/\gamma}/\gamma)^{1/(\gamma-1)}$$

olur. Buradan

$$p_2(t)x^\gamma(\tau(t))-p_1(t)x(\tau(t))\le(1-\gamma)\gamma^{\gamma/(\gamma-1)}p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(s)p_2^{1/(1-\gamma)}(s) \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.17) de (4.18) den yararlanarak,

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(\tau(s))\le c(T)+t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\gamma(s)\right]ds \qquad t\ge T \tag{4.19}$$

yazılabilir. (4.19) eşitsizliğinde $t\to\infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty}\Gamma(q)t^{1-q}x(t)\le\liminf_{t\to\infty}\left[c(T)+t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\gamma(s)\right]ds\right]$$

$$\liminf_{t\to\infty}\Gamma(q)t^{1-q}x(t)\le\liminf_{t\to\infty}c(T)+\liminf_{t\to\infty}t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\gamma(s)\right]ds \tag{4.20}$$

elde edilir.Burada, başta $t\ge a>1$ için $x(t)>0$ kabulümüzden ve $\Gamma(q)$ fonksiyonunun pozitif olması sebebiyle (4.20) eşitsizliğinin sol tarafı $t\to\infty$ iken alt limiti alındığında $+\infty$'a giderken, eşitsizliğin sağ tarafı (4.15) koşulundan $-\infty$'a gider.

Yani $\infty\le-\infty$ olamaz. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü salınımlıdır. Benzer şekilde $x(t)$ negatif çözüm olduğunda da (4.16) ile çelişki elde edilir.

**Teorem 4.4** $\beta > 1$ ve $\gamma < 1$ için (4.3) ve (4.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds = -\infty \tag{4.21}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-q}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)-H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds = \infty \tag{4.22}$$

ise, (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada $\xi \in C([a,\infty),\Re^{+})$ olmak üzere

$$H_{\beta,\gamma}(s) = (\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)} p_1^{1/(1-\beta)}(s) p_2^{\beta/(\beta-1)}(s) + (1-\gamma)\gamma^{\gamma/(\gamma-1)} p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(s) p_2^{1/(1-\gamma)}(s)$$

dir.

**İspat** $x(t)$, (4.1) in salınımlı olmayan bir çözümü olsun, yani $t \geq T > a$ için $x(\tau(t)) > 0$ olsun. (4.2) denkleminde (4.4) kullanılarak $t \geq T$ için

$$\begin{aligned}\Gamma(q)t^{1-q}x(t) \quad \leq \quad & c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}v(s)ds \\ & + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left(\xi(s)x(\tau(s)) - p_1(s)x^{\beta}(\tau(s))\right)ds \\ & + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left(p_2(s)x^{\gamma}(\tau(s) - \xi(s)x(\tau(s))\right)ds\end{aligned} \tag{4.23}$$

$(\xi(s)x(\tau(s)) - p_1 x^{\beta}(\tau(s)))$ ve $(p_2 x^{\gamma}(\tau(s)) - \xi(s)x(\tau(s)))$ terimleri (4.12) de $p_2 = \xi$ ve (4.18) de $p_1 = \xi$ kullanılarak

$$\Gamma(q)t^{1-q}x(t) \leq c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right], \qquad t \geq T \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.24) eşitsizliğinde $t \to \infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q}x(t) \leq \liminf_{t\to\infty}\left[c(T) + t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds\right]$$

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q}x(t) \leq \liminf_{t\to\infty} c(T) + \liminf_{t\to\infty} t^{1-q}\int_T^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds \tag{4.25}$$

elde edilir.Burada, başta $t \geq T > a$ için $x(t) > 0$ kabulümüzden ve $\Gamma(q)$ fonksiyonunun pozitif olması sebebiyle (4.25) eşitsizliğinin sol tarafı $t \to \infty$ iken alt limiti alındığında $+\infty$'a giderken, eşitsizliğin sağ tarafı (4.21) koşulundan $-\infty$'a gider.

Yani $\infty \leq -\infty$ olamaz. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü salınımlıdır. Benzer şekilde $x(t)$

negatif çözüm olduğunda da (4.22) ile çelişki elde edilir.

**Uyarı:** q. mertebeden $D_a^q$ Riemann-Liouville diferansiyel operatörünü içeren kesirli diferansiyel denklemler için geriye kalan sonuçlar $m \geq 1$ bir tamsayısı için $m-1 < q \leq m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &D_a^q x + f_1(t,x) = v(t) + f_2(t,x) \\ &D_a^{q-k} x(a) = b_k\,,\ (k = 1,2,\ldots,m-1),\ \lim_{t\to a^+} J_a^{m-q} x(t) = b_m \end{aligned} \tag{4.26}$$

şeklinde gösterilir.

(4.26) başlangıç değer problemi aşağıdaki Volterra kesirli integral denklemi ile aynı karakteristik özelliğe sahiptir.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k (t-a)^{q-k}}{\Gamma(q-k+1)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} [v(s) + f_2(s,x(s)) - f_1(s,x(s))] ds \tag{4.27}$$

## 4.2. Caputo Türev Yaklaşımı

$D_a^q$ Riemann-Liouville diferensiyel operatörünün yerine $m-1 < q \leq m$ için

$${}_cD_a^q f(t) := J_a^{m-q} f^{(m)}(t)$$

şeklinde tanımlanan ${}_cD_a^q$ Caputo diferensiyel operatörünü alalım. Burada Caputo diferensiyel operatörü ${}_cD_a^q$, $m$ kez diferensiyellenebilirdir. Bu durumda (4.26) başlangıç değer probleminin yerine

$${}_cD_a^q x + f_1(t, x(\tau(t))) = v(t) + f_2(t, x(\tau(t))),\quad x^{(k)}(a) = b_k \qquad (k = 0,1,\ldots,m-1) \tag{4.28}$$

denklemi dikkate alınsın. O halde Volterra diferensiyel denklemi,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_k (t-a)^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} [v(s) + f_2(s, x(\tau(s))) - f_1(s, x(\tau(s)))] ds \tag{4.29}$$

şeklindedir(Diethelm 2010).

Caputo için de salınımlılık kriteri Riemann-Liouvillede elde edilen şartlarla hemen hemen aynıdır. Tek fark şartlarda $t^{1-q}$ yerine $t^{1-m}$ alınmasıdır. Bu fark $m = 1$ olduğunda daha ayırıcıdır.

**Teorem 4.5.** $f_2 = 0$ ve ( 4.3) şartı sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-m} \int_a^t (t-s)^{q-1} v(s) ds = -\infty \tag{4.30}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1} v(s)ds = \infty \qquad (4.31)$$

ise (4.1) in her çözümü salınımlıdır.

**İspat:** $x(t)$, $f_2 = 0$ ile birlikte (4.28) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. $t \geq T$ için $x(t) > 0$ olmak üzere $T > a$ yeterince büyük olsun.

$$F(t) = v(t) + f_2(t, x(t)) - f_1(t, x(t))$$

olmak üzere (4.29) dan görülür ki $t \geq T$ için

$$x(t) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} | b_k | + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} [v(s) + f_2(s, x(s)) - f_1(s, x(s)] ds$$

olur. Her iki taraf $\Gamma(q)t^{1-m}$ ile çarpılırsa

$$\Gamma(q)t^{1-m} x(t) \leq c(T) + t^{1-m} \int_T^t (t-s)^{q-1} v(s)ds \qquad (4.32)$$

elde edilir. Burada

$$c(T) = (\frac{T}{T-a})^{1-m} | b_1 | + \int_a^T (\frac{T}{T-s})^{1-m} | F(s) | ds$$

dir. (4.32) eşitsizliğinde $t \to \infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınırsa

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q} x(t) \leq \liminf_{t\to\infty} \left[ c(T) + t^{1-q} \int_T^t (t-s)^{q-1} v(s)ds \right]$$

$$\liminf_{t\to\infty} \Gamma(q)t^{1-q} x(t) \leq \liminf_{t\to\infty} c(T) + \liminf_{t\to\infty} t^{1-q} \int_T^t (t-s)^{q-1} v(s)ds \qquad (4.33)$$

elde edilir.Burada, başta $t \geq T > a$ için $x(t) > 0$ kabulümüzden ve $\Gamma(q)$ fonksiyonunun pozitif olması sebebiyle (4.33) eşitsizliğinin sol tarafı $t \to \infty$ iken alt limiti alındığında $+\infty$'a giderken, eşitsizliğin sağ tarafı (4.30) koşulundan $-\infty$'a gider.

Yani $\infty \leq -\infty$ olamaz. Dolayısıyla $x(t)$ çözümü salınımlıdır. Benzer şekilde $x(t)$ negatif çözüm olduğunda da (4.31) ile çelişki elde edilir.

**Teorem 4.6** $\beta > 1$ ve $\gamma = 1$ için (4.3) ve (4.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-m} \int_a^t (t-s)^{q-1} [v(s) + H_\beta(s)] ds = -\infty \qquad (4.34)$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\beta(s)\right]ds=\infty \qquad (4.35)$$

ise, (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada

$$H_\beta(s)=(\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)}p_1^{1/(1-\beta)}(s)p_2^{\beta/(\beta-1)}(s)$$

dir.

**Teorem 4.7.** $\beta=1$ ve $\gamma<1$ için (4.3) ve (4.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_\gamma(s)\right]ds=-\infty \qquad (4.36)$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)-H_\gamma(s)\right]ds=\infty \qquad (4.37)$$

ise, (4.1) in her çözümü salınımlıdır. Burada

$$H_\gamma(s)=(1-\gamma)\gamma^{\gamma-1}p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(s)p_2^{1/(1-\gamma)}(s)$$

dir.

**Teorem 4.8.** $\beta>1$ ve $\gamma<1$ için (4.3) ve (4.4) şartları sağlansın. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)+H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds=-\infty \qquad (4.38)$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} t^{1-m}\int_a^t (t-s)^{q-1}\left[v(s)-H_{\beta,\gamma}(s)\right]ds=\infty \qquad (4.39)$$

ise, (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Burada $\xi\in C([a,\infty),\Re^+)$ olmak üzere

$$H_{\beta,\gamma}(s)=(\beta-1)\beta^{\beta/(1-\beta)}p_1^{1/(1-\beta)}(s)p_2^{\beta/(\beta-1)}(s)+(1-\gamma)\gamma^{\gamma/(\gamma-1)}p_1^{\gamma/(\gamma-1)}(s)p_2^{1/(1-\gamma)}(s)$$

dir.

**KAYNAKLAR**

Agarwal R.P. , Grace S.R. and O'Regan D. (2002). Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equation. Kluwer, Dordrecht.

Arino, O.I., and Jawhari, A. (1984). Oscillation criteria in delay equations. *Journal of Differential Equations.* **53:** 115-12.

Butzer, P. L. , Kilbas, A. A. and Trujıllo, J. J. (2002). Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **269:** 387-400.

Caputo M. (2008). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II. Geophys. J.R. Astr. Soc., 13 (1967), 529-539; Reprinted in: Fract. Calc. Appl. Anal. **11(1):** 229-248.

Diethelm, K. and Ford N.J. (2002). Analysis of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **265:** 229-248.

Diethelm, K. (2010). The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer, Berlin.

Diethelm, K. and Freed A.D. (1999). On the solution of nonlinear fractional differential equations used in the modelling of viscoplasticity. In: F. Keil, W. Mackens, H. Vob and J.Werther (Eds.), Scientific Computing in Chemical Engineering II: Computational Fluid Dynamics,Reaction Engineering and Molecular Properties, Springer, Heidelberg, 217-224.

Erbe, L.H., Kong, Q. and Zhang, B.G. (1995). Oscillation Theory of Differential Equations, Marcel Dekker, New York.

Ford N. J., Morgado Luisa M. (2011). Fractional boundary value problems: Analysis and numerical methods. Fract. Calc. Appl. **14(4):** 554-567.

Glöckle W.G. and Nonnenmacher T.F. (1995). A fractional calculus approach to self similarprotein dynamics. *Biophysical Journey,* **68:** 46-53.

Grace, S.R., Agarwal, R.P., Wong, P.J.Y., Zafer A. (2012). On the Oscillation of

Fractional Differential Equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **15 (2):** 222-231.

Graef, J.R. (2012). L.Kong, B. Yang, Positive solutions for a semipositone fractional boundary value problem with a forcing term. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **15(1):** 8-24.

Györi, I. and Ladas, G. (1991). Oscillation Theory of Delay Differential Equations. Clarendon Press, Oxford.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G. (1959). Inequalities, Cambirdge University Press, Cambridge.

Hunt, B. R., and Yorke, J. A. (1984). When all solutions of $x' = \sum_{j=1}^{n} q_j(t)x(t - T_j(t))$ oscillate. *Journal of Differential Equations*, **53:** 139-145.

Kilbas, A. (2001). Hadamard-type Fractional Calculus. *Journal of Korean Mathematical Society*, **38(6):** 1191-1204.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Elsevier B. V.*, Amsterdam, Netherlands.

Koplatadze, R. G., and Chanturia, T. A. (1982). On the oscillatory and monotone solutions of the first order diferential equations with deviating argument. *Diferencial'nye Uravnenija*, **18:** 1463-1465.

Ladas, G. (1979). Sharp condition for the oscillations caused by delays. *Applicable Analysis*, **9:** 93-98.

Ladas, G., Sficas, Y.G., and Stavroulakis, I. P. (1983). Necessary and sufficient for oscillations. *American Mathematical Monthly*, **90:** 247-253.

Ladas, G., and Sficas, T. G. (1984). Oscillation of neutral differential equations with positive and negative coefficients. *Procceding of the International Conference on Qualitative Theory of Differential Equations*, University of Alberta, pp. 232-240.

Metzler, R., Schick, S., Kilian H.G. and Nonnenmacher T.F. (1995). Relaxation in filled polymers: A fractional calculus approach. J.Chem. Phys., **103(16):** 7180-7186.

Miller, K.S. and Ross, B. (1993). An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, USA.

Özer, M. N. ve Eser, D. (2002). Diferensiyel denklemler teori ve uygulamaları, Birlik Ofset, Eskişehir.

Özen, S. (2003). Kesirsel Türevler İçin Opial Eşitsizlikleri. *Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi,* Kayseri.

Özen, S. and Öztürk, İ. (2004). Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri üzerine. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,* **20(1-2):** 66-76, Kayseri.

Podlunby, I. (1999). Fractional Differential Equations, *Academic Press, San Diego, California-USA.*

Sagarayaj, M.R., Selvam, A.G.M. (2012). Oscillation of Fractional Nonlinear Difference Equations, *Mathematica Aeterna*, **2(9):** 805-813.

Samko, S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. (1993). Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. *Gordon and Breach, Yverdon et alibi.*

Samko, S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. (1993). Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. *Gordon and Breach, Longhorne, PA.*

Tramov, M. I. (1975). Condition for the oscillatory solutions of first order differential equations with a delayed argument. *Izvestiye Vysshikh Uchebnyk Zavedenii Seriya Mathematika*, **19:** 92-96.

Zhang, B. G., and Gopalsmy, K. (1988). Oscillation and nonoscillation in a nonautomous delay logistic equations. *Quarterly Applied Mathematics*, **46:** 267-273.

**ÖZGEÇMİŞ**

Adı Soyadı : Ebru AKTOPRAK

Doğum Yeri : Afyonkarahisar

Doğum Tarihi : 27.04.1989

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

**Eğitim Durumu ( Kurum ve Yıl )**

İlköğretim : Afyon Hoca Ahmet Yesevi İlköğretim Okulu 1995-2003

Lise : Afyon Milli Piyango Anadolu Lisesi 2003-2007

Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi 2008-2012

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi 2012-

**Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl**

**1-** Afyon 75.Yıl Ortaokulu 2014-2015

**İletişim Bilgileri**

Telefon: 05553465454

Mail:ebru_aktoprak@hotmail.com