KÜME DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali Rıza BAKİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASIM, 2015

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜME DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Ali Rıza BAKİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASIM, 2015

TEZ ONAY SAYFASI

Ali Rıza BAKİ tarafından hazırlanan "Küme Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 23/11/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik **Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

Başkan : Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniv. Fen Edeb. Fak. İmza

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak. İmza

Üye : Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak. İmza

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

24/11/2015

Ali Rıza BAKİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜME DİZİLERİNİN
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Ali Rıza BAKİ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU

Bu tez çalışması altı ana bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, çalıştığımız konu ile ilgili kavramların tarihsel gelişimi ve genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamız için temel teşkil eden tanım, notasyon ve teoremlerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise, küme dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramları, bunların kendilerine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Dördüncü bölümde, küme dizileri için Cesaro toplanabilirlik kavramları tanıtılmış ve bu kavramların küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile ilişkisi gösterilmiştir. Beşinci bölümde, küme dizileri için hemen hemen yakınsaklık kavramları ve hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramı verilerek bunlar arasındaki ilişki gösterilmiştir. Son bölüm olan altıncı bölümde ise, küme dizileri için lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılıp, bu kavramın küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile ilişkisi verilmiştir.

2015, v + 35 sayfa

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Cesaro toplanabilme, hemen hemen yakınsaklık, lacunary dizi, Wijsman yakınsaklık, küme dizisi.

ABSTRACT

M.Sc Thesis

ON STATISTICAL CONVERGENCE
OF SEQUENCES OF SETS

Ali Rıza BAKİ
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Matematics

Supervisor: Assitant Prof. Dr. Uğur ULUSU

This thesis consists of six main parts.
In the first part, the historical development of the subject and a general literature about it are given. In the second part, basic definitions, notations and theorems necessary for our work are illustrated. In the third part, statistical convergence concepts for sequences of sets, their unique properties and relations between these concepts are discussed. In the fourth part, Cesaro summability concepts for sequences of sets are introduced and the relations of these concepts between statistical convergence of sequences of sets are indicated. In the fifth part, almost convergence concepts and almost statistical convergence concept for sequences of sets are given and the relations between them are discussed. In the sixth part, lacunary statistical convergence for sequences of sets are introduced and its relation with statistical convergence of sequences of sets is denoted.

2015, v + 35 pages

Key Words: Statistical convergence, Cesaro summability, almost convergence, lacunary sequence, Wijsman convergence, sequences of sets.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusunun verilmesi, çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU'ya ve yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Ali Rıza BAKİ

AFYONKARAHİSAR, 2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
l_∞	Sınırlı dizilerin kümesi
c	Yakınsak diziler kümesi
ac	Hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi
$\lvert ac \rvert$	Kuvvetli hemen hemen yakınsak diziler kümesi
$d(x, A)$	x noktasının A kümesine uzaklığı
$\{A_k\}$	Küme dizisi
$\theta = \{k_r\}$	Lacunary dizi
S	İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_θ	Lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$\{WS\}$	Wijsman istatistiksel yakınsak diziler kümesi
$\{WS_\theta\}$	Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak diziler kümesi
L_∞	Sınırlı küme dizilerinin kümesi
C	Wijsman yakınsak diziler kümesi
F	Wijsman hemen hemen yakınsak diziler kümesi
$[F]$	Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsak diziler kümesi

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, analiz ve fonksiyonel analiz alanının temelini oluşturmaktadır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk kez Steinhaus tarafından 1949 da katıldığı bir konferansta verilmiştir. Bu konudaki ilk makale ise Fast (1951) tarafından yayınlanmıştır. Ayrıca Schoenberg (1959) ve Buck (1953) tarafından da birbirinden bağımsız olarak çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklığın reel ve kompleks diziler ile ilişkisi Buck (1953) tarafından ve toplanabilme teorisi ile ilişkisi Schoenberg (1959) tarafından verilmiştir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ile Cesaro toplanabilirlik, kuvvetli Cesaro toplanabilirlik ve kuvvetli *p*-Cesaro toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişkiler Connor (1998) tarafından verilmiştir.

İlerleyen zamanlarda Fridy ve Orhan (1993), lacunary dizi kavramını kullanarak, istatistiksel yakınsaklıkla arasında önemli ilişkiler bulunan ve yine yakınsaklık alanında önemli bir yer tutan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmıştırlar. Fridy ve Orhan (1993) çalışmalarında; başta istatistiksel yakınsaklık kavramı olmak üzere diğer toplanabilme metodları ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Dizilerin istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit kavramları da yine Fridy ve Orhan (1997) tarafından verilmiştir.

Dizilerin hemem hemen yakınsaklığı fikri Lorenz (1948) tarafından ortaya atılmıştır. Ayrıca Maddox (1978) ve Freedman (1978) tarafından da birbirinden bağımsız olarak dizilerin kuvvetli hemen hemen yakınsaklığı kavramı tanıtılmıştır.

Küme dizilerinin limiti 1902 de Painleve tarafından, onun öğrencisi Zoretti' nin rapor etmesiyle tanıtılmıştır. Fakat bu kavramlar Kuratowski tarafından, onun ünlü kitabı "Topoloji" de popüler olmuştur. Bu yüzden literatürde sık sık dizilerin Kuratowski limiti olarak adlandırılır.

Painleve tarafından tanıtılan küme yakınsaklıkları uzun bir matematik tarihine sahip olmasına rağmen, sadece son otuz yıl süresince; optimizasyon, denklem sistemleri ve diğer benzer konularda yaklaşımlar ile uğraşmak için temel bir araç olarak görülmeye başlanmıştır.

Reel dizilerin yakınsaklığı kavramı birçok araştırmacı tarafından küme dizilerinin yakınsaklığına genişletilmiştir. Küme dizileri için yakınsaklık kavramları, sıklıkla 1980'li yıllarda araştırmalara konu olmaya başlamış ve bu konudaki çalışmalar başta Beer (1985,1987,1994,2002) olmak üzere; Wijsman (1964,1966), Baronti ve Papini (1986) ve diğer birçok matematikçi tarafından yakın zamana kadar yapılmıştır. Araştırmacılar tarafından yapılan bu çalışmalarda küme dizileri için verilen yakınsaklık kavramlarından en yaygın olarak kullanılanlar ve bizim araştırmamız için de temel oluşturacak olan birkaç tanesi; "Kuratowski yakınsaklık (K)", "Wijsman yakınsaklık (W)" ve "Hausdorff yakınsaklık (H)" tır. Bu yakınsaklık tiplerinden (K) ve (H) uzun zaman önce araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. (W) yakınsaklık için, Wijsman (1964, 1966), ve Beer (1994) bazı çalışmalar yapmışlardır. Baronti ve Papini (1986) küme dizileri için (K), (H) ve (W) yakınsaklık arasındaki ilişkileri göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasındaki amacımız, yukarıda da bahsedildiği gibi, bu genişlemelerden Kuratowski, Wijsman ve Hausdorff genişlemelerini dikkate almak ve küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı kavramını tanımlamaktır. Ayrıca bazı temel teoremler vermek ve böylece reel sayı dizileri için geçerli sonuçların genelleştirmelerini elde etmektir. Son olarak, küme dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı kavramını da tanıtıp, bu kavramın küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile ilişkisini vermek amaçlanmaktadır.

Bu bağlamda, tez çalışmasında öncelikle; çalışmamızın daha anlaşılır olması için gerek duyulan bazı temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra, üçüncü bölümde; küme dizileri için Kuratowski istatistiksel yakınsaklık, Wijsman istatistiksel yakınsaklık ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık kavramları, bunların kendine özgü özellikleri ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Dördüncü bölümde; Kuratowski Cesaro toplanabilir, Wijsman Cesaro toplanabilir ve Wijsman kuvvetli Cesaro toplanabilir küme dizileri tanıtılmıştır.

Ayrıca Wijsman istatistiksel yakınsak ve Wijsman kuvvetli Cesaro toplanabilir küme dizileri arasındaki ilişki verilmiştir. Beşinci bölümde; küme dizileri için Wijsman hemen hemen yakınsaklık, Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsaklık ve Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılmış ve Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak ve Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsak küme dizileri arasındaki ilişki verilmiştir. Son bölüm olan altıncı bölümde ise; küme dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanıtılıp, bu kavramın küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile ilişkisi verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızın daha anlaşılır olması için gerek duyulan bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1 Tanım kümesi $\mathbb{N}^+ = \{1,2, \dots , n, \dots\}$ (doğal sayılar) kümesi olan her fonksiyona *dizi* denir.

Diziler değer kümelerine göre adlandırılır. Eğer bir dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ise, diziye *reel terimli dizi* veya *reel sayı dizisi* ya da *reel dizi* denir. Yani reel terimli bir dizi

$$f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyondur.

Genel terimi x_n olan bir dizi $(x_n) = \{x_1, x_2, \dots , x_n, \dots\}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2 (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir ve

$$lim\, x_n = x \text{ veya } (x_n) \to x$$

şeklinde gösterilir (Balcı 1999).

Herhangi bir sayıya yakınsayan diziye *yakınsak dizi* denir.

Tanım 2.3 Eğer her $n > 0$ sayısı için $|x_n| \le K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabit sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir (Balcı 1999).

Teorem 2.1 Bir (x_n) dizisi yakınsak ise sınırlıdır (Balcı 1999).

Tanım 2.4 (x_n) bir reel sayı dizisi olmak üzere; her $\varepsilon > 0$ için $m, n \ge n_0$ olduğunda

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir (Balcı 1999).

Teorem 2.2 (x_n) bir Cauchy dizisi ise sınrlıdır (Balcı 1999).

Teorem 2.3 (x_n) bir reel sayı dizisi olsun.

$$(x_n)\ dizisi\ yakınsaktır \iff (x_n)\ dizisi\ Cauchy\ dizisidir$$

(Balcı 1999).

Tanım 2.5 $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = L$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *Cesaro toplanabilirdir* denir (Başar 2011).

Tanım 2.6 $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli Cesaro toplanabilirdir* denir (Freedman *et al.* 1978).

Tanım 2.7 p pozitif bir reel sayı olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir* denir. (Connor 1998).

Tanım 2.8 Eğer i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k+i} = L$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *hemen hemen yakınsaktır* denir (Lorentz 1948).

Tanım 2.9 Eğer i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+i} - L| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli hemen hemen yakınsaktır* denir (Maddox 1979).

$l_\infty,\ c,\ ac$ ve $|ac|$ sırasıyla, bütün sınırlı, yakınsak, hemen hemen yakınsak ve kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini göstersin. Bunlar arasında

$$c \subset ac \subset |ac| \subset l_\infty$$

ilişkisi vardır.

Tanım 2.10 Pozitif tamsayılardan oluşan bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

olarak tanımlanır (Niven *et al.* 1991).

Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n sayısından büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Tanım 2.11 Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - lim x_k = L$ şeklinde gösterilir (Fridy 1985).

İstatistiksel yakınsaklık ve adi manada yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\lim x_k = L \Rightarrow st - \lim x_k = L$$

Bunun tersi genelde geçerli değildir.

Örnek 2.1 Eğer,

$$(x_k) = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2 \\ 0 & , \quad k \neq n^2 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa,

$$(x_k) = (1,0,0,1,0,0,0,0,1, \dots)$$

şeklindedir. Bu durumda, (x_k) dizisi istatistiksel yakınsaktır fakat adi anlamda yakınsak değildir.

Eğer $x = (x_k)$ doğal yoğunluğu sıfır olan bir küme dışındaki bütün k lar için P özelliğini sağlayan bir dizi ise, o zaman (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlar deriz ve bu ifadeyi h.h.k olarak kısaltırız.

Fridy (1985); Eğer x istatistiksel yakınsak bir dizi ise, o zaman h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisinin varlığını gösterdi.

Tanım 2.12 $x = (x_k)$ reel sayı dizisinin istatistiksel üst limiti;

$$B_x := \left\{ b \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : x_k > b\}| \neq 0 \right\}$$

olmak üzere

$$st - \lim\sup x := \begin{cases} supB_x & , \quad B_x \neq \emptyset \\ -\infty & , \quad B_x = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde, $x = (x_k)$ reel sayı dizisinin istatistiksel alt limiti ise;

$$A_x := \left\{ a \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : x_k < a\}| \neq 0 \right\}$$

olmak üzere

$$st - \lim\inf x := \begin{cases} infA_x & , \quad A_x \neq \emptyset \\ \infty & , \quad A_x = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Nuray ve Rhoades 2012).

Tanım 2.13 X boş olmayan bir küme olsun. $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$M1.$ $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$M2.$ $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

$M3.$ $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$

şartları sağlanıyorsa, ρ ya X de bir *metrik* ve ρ ile birlikte X e *metrik uzay* denir. Bu durum genellikle (X,ρ) ile gösterilir (Bayraktar 2000).

Tanım 2.14 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve X in boş olmayan herhangi bir A altkümesi için; x in A ya olan uzaklığı

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} \rho(x,a)$$

olarak tanımlanır (Nuray ve Rhoades 2012).

Tanım 2.15 $X \neq \emptyset$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere,

$$f: \mathbb{N} \to P(X)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon her $k \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$$f(k) = A_k \in P(X)$$

kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun görüntü kümesini oluşturan $A_1, A_2, \ldots$ kümelerinin oluşturduğu $\{A_k\} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ dizisine *küme dizisi* denir.

Tanım 2.16 $\{A_k\}$, (X, ρ) metrik uzayında bir küme dizisi olsun. $\{A_k\}$ dizisinin alt limiti,

$$\liminf A_k := \{x \in X : \exists (a_k) \subset (A_k), \qquad a_k \to x\}$$

ve üst limiti,

$$\limsup A_k := \left\{x \in X : \exists (k_i)\, \exists \left(a_{k_i}\right) \subset \left(A_{k_i}\right), \qquad a_{k_i} \to x\right\}$$

olarak tanımlanır (Nuray ve Rhoades 2012).

Burada (k_i) doğal sayıların artan bir dizisini gösterir ve bir alt dizi için indeks kümesini temsil eder.

Altkümelerin bir $\{A_k\}$ dizisinin alt limiti, $a_k \in A_k$ elemanlarından oluşan dizilerin limitlerinin kümesidir ve üst limiti de böyle dizilerin yığılma noktalarının kümesidir. Alt limit ve üst limit kapalıdır. Bu limitler arasında

$$\liminf A_k \subset \limsup A_k$$

ilişkisinin bulunduğu ve ayrıca

$$d(x, A_k) = d\left(x, \overline{A_k}\right)$$

olduğundan, A_k altkümelerinin alt limiti "$\liminf A_k$", üst limiti "$\limsup A_k$" ve onların $\overline{A_k}$ kapanışlarının kendileriyle çakışık olduğu açıktır (Nuray ve Rhoades 2012).

Tanım 2.17 Eğer,

$$A = \liminf A_k = \limsup A_k = \lim A_k$$

ise X in bir A altkümesine, $\{A_k\}$ dizisinin limit kümesi veya kısaca limiti denir (Nuray ve Rhoades 2012).

Literatürde bu anlamdaki yakınsaklık; Kuratowski yakınsaklık, topolojik yakınsaklık veya kapalı yakınsaklık olarak da adlandırılır. A_k altkümelerinin azalan herhangi bir dizisi, kapanışlarının kesişimi olan bir limite sahiptir.

Eğer $n \geq m$ olduğunda $A_n \subset A_m$ ise, o zaman

$$\lim A_k = \bigcap_{k \geq 0} \overline{A_k}$$

dır.

Bir dizinin üst limiti boş olabilir (yani bu durumda, $a_k \in A_k$ elemanlarının oluşturduğu hiçbir dizi yığılma noktasına sahip değildir). $\{a_k\}$ tek nokta küme dizileri için, "eğer varsa" küme limiti ya boştur (yani bu durumda, a_k elemanlarının dizisi yakınsak değildir) ya da dizinin limiti olan tek noktadan ibarettir.

X in boş olmayan A_k altkümelerinin $\{A_k\}$ dizisi için,

$$\liminf A_k := \left\{x \in X : \lim_{k \to \infty} d(x, A_k) = 0\right\}$$

ve

$$\limsup A_k := \left\{x \in X : \liminf_{k \to \infty} d(x, A_k) = 0\right\}$$

dır.

Tanım 2.18 (X, ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\lim_{k \to \infty} d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman yakınsaktır* denir. Bu durumda, $W - \lim A_k = A$ olarak yazılır (Baronti and Papini 1986).

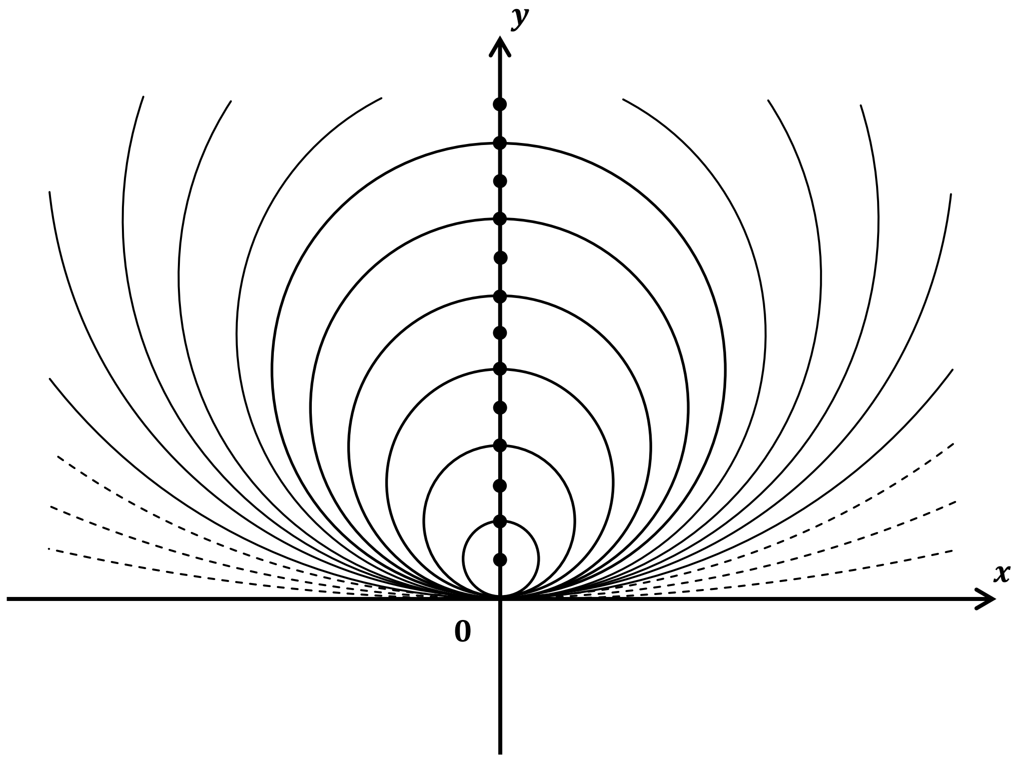
Küme dizilerinin Wijsman yakınsaklığının daha iyi anlaşılması için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 2.2 (x, y)-düzleminde aşağıdaki çemberler dizisini göz önüne alalım:

$$A_k = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 - 2ky = 0\}$$

Bu dizi, $k \to \infty$ iken x-eksenine (yani $A = \{(x, y) : y = 0\}$ kümesine) Wijsman yakınsaktır.

Örneğimizi bir de şekil üzerinde gösterelim;



Tanım 2.19 (X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş olmayan kapalı herhangi altkümeleri olsun. Eğer her $x \in X$ için $\sup_k d(x, A_k) < \infty$ oluyorsa $\{\mathrm{A_k}\}$ dizisi *sınırlıdır* denir ve $\{A_k\} \in L_\infty$ şeklinde yazılır (Nuray ve Rhoades 2012).

Şimdi Wijsman Cauchy dizisinin tanımını verelim.

Tanım 2.20 (X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş olmayan kapalı herhangi altkümeleri olsun. Eğer $\big(d(x, A_k)\big)$ bir Cauchy dizisi ise; yani $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$m, n > k_0 \text{ olduğunda } |d(x, A_m) - d(x, A_n)| < \infty$$

olacak şekilde bir k_0 pozitif tamsayısı varsa, $\{A_k\}$ dizisine *Wijsman Cauchy* denir (Nuray ve Rhoades 2012).

Eğer $d(x, A_k) \rightarrow d(x, A)$ noktasal yakınsaklığının yerine düzgün yakınsaklık alınırsa, o zaman uzun zamandır bilinen Hausdorff yakınsaklık elde edilir.

Tanım 2.21 (X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in kapalı altkümelerinin bir dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi $A \subseteq X$ kapalı kümesine *Hausdorff yakınsaktır* denir. Bu durumda, $A = H - limA_k$ yazılır (Baronti and Papini 1986).

Küme dizileri için Hausdorff ve Wijsman yakınsaklık tanımları, diziyi oluşturan kümelerin kapalı olmasını gerektirir. Aksi halde limit kümesi iyi tanımlanmış olmaz.

Herhangi bir X metrik uzayında,

Hausdorff yakınsaklık $\Rightarrow$ Wijsman yakınsaklık $\Rightarrow$ Kuratowski yakınsaklık

olduğu kolayca görülür. Kuratowski yakınsaklık uzaklık fonksiyonlarının noktasal yakınsaklığı anlamına gelmez ve hatta noktasal yakınsaklık sonlu bir limite ulaştığında, limitin uzaklık fonksiyonu olmasına gerek yoktur.

Tanım 2.22 $\theta = \{k_r\}$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak biçimde negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi ise, $\theta = \{k_r\}$ dizisine *lacunary dizi* denir (Fridy ve Orhan 1993).

Bu çalışma boyunca, $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecek ve $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r olarak kısaltılacaktır.

Tanım 2.23 $x = (x_k)$ dizisi verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve $S_\theta - lim\, x_k = L$ veya $x_k \to L(S_\theta)$ şeklinde gösterilir (Fridy ve Orhan 1993).

3. KÜME DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, Nuray ve Rhoades (2012) tarafından incelenen küme dizilerinin Kuratowski, Wijsman ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklığı kavramları ile ilgili temel tanım, örnek ve teoremleri vereceğiz.

(X,ρ) bir metrik uzay olsun. X in boş olmayan kapalı A_k altkümelerinin $\{A_k\}$ dizisi için, istatistiksel alt limit ve istatistiksel üst limit aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$st-lim\,inf A_k := \{x \in X : \exists (a_k) \subset (A_k),\ \ st-\lim\ a_k = x\}$$

ve

$$st-lim\,sup A_k := \left\{x \in X : \exists (k_l)\ \exists \left(a_{k_l}\right) \subset \left(A_{k_l}\right),\ \ st-\lim\ a_{k_l} = x\right\}$$

Tanım 3.1 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Boş olmayan kapalı herhangi $A_k \subseteq X$ altkümeleri için, eğer

$$st-lim\,sup A_k = st-Lim\,inf A_k = A$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Kuratowski istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durumda $st-limA_k = A$ yazılır.

Altkümelerin bir $\{A_k\}$ dizisinin alt istatistiksel limiti $a_k \in A_k$ elemanlarının dizilerinin istatistiksel limitlerinin kümesi ve üst istatistiksel limiti ise böyle dizilerin istatistiksel yığılma noktalarının kümesidir.

Tanım 3.2 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Boş olmayan kapalı herhangi $A, A_k \subseteq X$ altkümeleri için, eğer $\left(d(x,A_k)\right)$ dizisi $d(x,A)$ ya istatistiksel yakınsaksa; yani her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k \le n :\ |d(x,A_k) - d(x,A)| \ge \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, veya

$$|d(x,A_k) - d(x,A)| < \varepsilon \qquad (\text{h.h.}k) \tag{3.1}$$

sağlanıyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durumda $st-lim_w A_k = A$ yazılır.

Wijsman istatistiksel yakınsak dizilerin oluşturduğu kümeyi $\{WS\}$ ile göstereceğiz.

Eğer (3.1) eşitsizliği sonlu sayıda k haricindeki bütün diğer A_k kümeleri için geçerliyse o zaman $W - \lim A_k = A$ olduğu açıktır. Bu ise $W - \lim A_k = A$ olması durumunda $st - lim_w A_k = A$ olması gerektiğini verir.

Örnek için, $X = \mathbb{R}$ ve $\{A_k\}$ aşağıdaki dizi olsun:

$$A_k := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq k\} & , \quad k \geq 2 \; ve \; k \; bir \; kare \; tamsayı \; ise, \\ \{1\} & , \quad diğer \; durumlarda. \end{cases}$$

Bu dizi Wijsman yakınsak değildir. Fakat

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \; |d(x, A_k) - d(x, \{1\})| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$$

olduğundan bu dizi $A = \{1\}$ kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

Başka bir örnek için, $X \in \mathbb{R}^2$ ve $\{A_k\}$ aşağıdaki dizi olsun:

$$A_k := \begin{cases} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{k}\right\} & , \quad k \; bir \; kare \; tamsayı \; ise, \\ \{(0,0)\} & , \quad diğer \; durumlarda. \end{cases}$$

Bu dizi de $A = \{(0,0)\}$ kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır fakat Wijsman yakınsak değildir.

Tanım 3.3 (X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş olmayan kapalı herhangi altkümeleri olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \; \sup_{x \in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa, veya

$$\sup_{x \in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon \qquad (\text{h.h.}k)$$

sağlanıyorsa, $\{A_k\}$ dizisi X in kapalı bir A altkümesine *Hausdorff istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durumda $st - lim_H A_k = A$ yazılır.

En iyi yakınsaklık teorilerinde, limit değerini kullanmaksızın, yakınsaklığı doğrulamak için kullanılabilen bir kritere sahip olmak arzu edilir. Burada, bu amaç için Cauchy yakınsaklık kriterinin istatistiksel benzerini tanıtacağız.

Tanım 3.4 (X,ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş olmayan kapalı herhangi altkümeleri olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x,A_k) - d(x,A_N)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{A_k\}$ dizisine *Wijsman istatistiksel Cauchy* denir.

Teorem 3.1 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\{A_k\}$ dizisi Wijsman istatistiksel yakınsak dizidir.

(ii) $\{A_k\}$ dizisi Wijsman istatistiksel Cauchy dizidir.

(iii) h.h.k için $A_k = B_k$ olacak şekilde bir Wijsman yakınsak $\{B_k\}$ dizisi vardır.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ Kabul edelim ki $st - lim_W A_k = A$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O halde h.h.k için,

$$|d(x,A_k) - d(x,A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Eğer N sayısı

$$|d(x,A_N) - d(x,A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde seçilirse h.h.k için,

$$|d(x,A_k) - d(x,A_N)| \leq |d(x,A_k) - d(x,A)| + |d(x,A_N) - d(x,A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Böylece $\{A_k\}$ bir Wijsman istatistiksel Cauchy dizidir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Kabul edelim ki (ii) doğru olsun ve

$$J = [d(x,A_N) - 1, d(x,A_N) + 1]$$

aralığı h.h.k için $d(x,A_k)$ yı içerecek şekilde bir N sayısı seçelim.

Şimdi

$$J' = \left[d\left(x, A_{N_2}\right) - \frac{1}{2}, d\left(x, A_{N_2}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

aralığı h.h.k için $d(x, A_k)$ yı içerecek şekilde bir N_2 sayısı seçmek için (ii) yi uygulayalım. Şimdi de h.h.k için $J_1 = J \cap J'$ aralığının $d(x, A_k)$ yı içerdiğini gösterelim.

$$\{k \le n : d(x, A_k) \notin J \cap J'\} = \{k \le n : d(x, A_k) \notin J\} \cup \{k \le n : d(x, A_k) \notin J'\}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : d(x, A_k) \notin J \cap J'\}|$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : d(x, A_k) \notin J\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : d(x, A_k) \notin J'\}| = 0$$

olur. Bu nedenle J_1, h.h.k için $d(x, A_k)$ yı içeren ve uzunluğu 1 e eşit ya da daha küçük olan kapalı bir aralıktır. Şimdi h.h.k için,

$$J'' = \left[d\left(x, A_{N_3}\right) - \frac{1}{4}, d\left(x, A_{N_3}\right) + \frac{1}{4}\right]$$

aralığı $d(x, A_k)$ yı içerecek şekilde bir N_3 sayısı seçerek devam edelim. Bir sonraki aşamada da $J_2 = J_1 \cap J''$ aralığı h.h.k için $d(x, A_k)$ yı içerecek şekilde işlemlere devam edelim. Böylece, J_2 aralığının uzunluğu $\frac{1}{2}$ ye eşit veya daha küçüktür.

Bu sürece devam ederek tümevarımla, her m için $J_{m+1} \subset J_m$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir (J_m) dizisini oluştururuz. J_m nin uzunluğu 2^{1-m} den daha büyük değildir ve h.h.k için $d(x, A_k) \in J_m$ dir. İç içe Aralıklar Teoremine göre

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} J_m$$

ifadesine eşit olan bir η sayısı vardır. Burada, h.h.k için $d(x, A_k) \in J_m$ olduğu gerçeğini kullanarak $n > T_m$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \le n : d(x, A_k) \notin J_m\}| < \frac{1}{m} \tag{3.2}$$

olacak şekilde artan bir (T_m) pozitif tamsayı dizisi seçelim.

Şimdi,

$$k > T_1 \quad \text{ve} \quad T_m < k \leq T_{m+1}$$

olacak şekilde $\{A_k\}$ dizisinin bütün terimlerinden oluşan bir $C = \{C_k\}$ altdizisini tanımlayalım. O zaman $d(x, A_k) \notin J_m$ olur.

Bir sonraki işlem olarak,

$$B_k := \begin{cases} \{\eta\} & , \quad A_k \ C \ nin \ bir \ terimi \ ise, \\ A_k & , \quad \quad diğer \ durumlarda, \end{cases}$$

ile belirtilen $\{B_k\}$ dizisini tanımlayalım.

Bu durumda, $\lim B_k = \{\eta\}$ dır; $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ olması durumunda, hem $\lim B_k = \{\eta\}$ anlamındaki A_k, hem de $B_k = A_k \in J_m$ olur ve $|J_m|$, J_m aralığının uzunluğunu belirtmek üzere,

$$|d(x, B_k) - d(x, \{\eta\})| \leq |J_m| \leq 2^{1-m}$$

dir. Ayrıca h.h.k için $A_k = B_k$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $T_m < k < T_{m+1}$ iken

$$\{k \leq n : \ d(x, A_k) \neq d(x, B_k)\} \subseteq \{k \leq n : \ d(x, A_k) \notin J_m\}$$

olduğunu göstermeliyiz. Böylece (3.2) eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \ d(x, A_k) \neq d(x, B_k)\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ d(x, A_k) \notin J_m\}| < \frac{1}{m}$$

olur. Bundan dolayı $n \to \infty$ iken limit 0 ve h.h.k için $A_k = B_k$ elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Son olarak (iii) nin sağlandığını kabul edelim. Yani h.h.k için $A_k = B_k$ ve $\lim B_k = \{\eta\}$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman her n için,

$$\{k \leq n: |d(x, A_k) - d(x, \{\eta\})| \geq \varepsilon\}$$
$$\subseteq \{k \leq n: d(x, A_k) \neq d(x, B_k)\} \cup \{k \leq n: |d(x, B_k) - d(x, \{\eta\})| > \varepsilon\}$$

olur. $\lim B_k = \{\eta\}$ olduğundan, ikinci küme sabit $l = l(\varepsilon)$ sayıda eleman içerir.

Bu nedenle h.h.k için $A_k = B_k$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, \{\eta\})| \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(x, A_k) \neq d(x, B_k)\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{l}{n} = 0$$

dır. Böylece (i) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremlerde Wijsman ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık için Tauberian koşulunu vereceğiz.

Teorem 3.2 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Eğer $\{A_k\}$ dizisi

$$st - lim_W A_k = A \text{ ve her } x \in X \text{ için } \Delta d_k(x) = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

şatlarını sağlayacak şekilde bir diziyse, o zaman $\Delta d_k(x) := d_{k+1}(x) - d_k(x)$ olmak üzere $W - limA_k = A$ dır.

İspat. $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. O zaman $st - lim_W A_k = A$ ve h.h.k için $A_k = B_k$, $W - limB_k = A$ olacak şekilde bir $\{B_k\}$ dizisi seçebiliriz.

Her k için $m(k) = max\{i \leq k : A_i = B_i\}$ olmak üzere $k = m(k) + p(k)$ ile belirtelim. Eğer $\{i \leq k : A_i = B_i\}$ kümesi boş küme ise $m(k) = -1$ alınır. Bu, en fazla sonlu sayıda k için elde edilebilir. Şimdi

$$\lim_k \frac{p(k)}{m(k)} = 0 \tag{3.3}$$

olduğunu göstereceğiz. Eğer

$$\frac{p(k)}{m(k)} > \varepsilon > 0$$

ise o zaman

$$\frac{1}{k} |\{i \leq k : A_i \neq B_i\}| \leq \frac{1}{m(k) + p(k)} p(k) \leq \frac{p(k)}{\frac{p(k)}{\varepsilon} + p(k)} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

olur.

Böylece, sonsuz sayıda k için $\frac{p(k)}{m(k)} \geq \varepsilon$ ise, h.h.k için $A_k = B_k$ olmasıyla bir çelişki elde ederiz. Bu durumda (3.1) geçerli olur. $\Delta d_k(x) = O\left(\frac{1}{k}\right)$ olduğundan bütün k lar ve her $x \in X$ için

$$|\Delta d_k(x)| \leq \frac{K}{k}$$

olacak şekilde sabit bir K sayısı vardır. Bu nedenle,

$$\left|d\left(x, B_{m(k)}\right) - d(x, A_k)\right| = \left|d\left(x, A_{m(k)}\right) - d\left(x, A_{m(k)+p(k)}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{i=m(k)}^{m(k)+p(k)-1} |\Delta d_i(x)| \leq \frac{p(k)K}{m(k)}$$

dır. (3.3) eşitliği yardımıyla, son ifade $k \to \infty$ iken 0 a yakınsar. Böylece, $W - limB_k = A$ olduğundan $W - limA_k = A$ olduğu sonucuna varırız.

Teorem 3.3 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Eğer $\{A_k\}$, $st - lim_H A_k = A$ olacak şekilde bir dizi ve

$$\sup_{x \in X} \Delta d_k(x) = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

ise, o zaman $H - limA_k = A$ dır.

İspat. $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Hausdorff istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. O zaman $st - lim_H A_k = A$ ve h.h.k için $A_k = B_k$, $H - limB_k = A$ olacak şekilde bir $\{B_k\}$ dizisi seçebiliriz.

Her k için $m(k) = max\{i \leq k : A_i = B_i\}$ olmak üzere $k = m(k) + p(k)$ ile belirtelim. Eğer $\{i \leq k : A_i = B_i\}$ kümesi boş küme ise $m(k) = -1$ alınır. Bu, en fazla sonlu sayıda k için elde edilebilir.

Şimdi

$$\lim_{k} \frac{p(k)}{m(k)} = 0 \tag{3.4}$$

olduğunu göstereceğiz.

Eğer

$$\frac{p(k)}{m(k)} > \varepsilon > 0$$

ise, o zaman

$$\frac{1}{k}|\{i \leq k : A_i \neq B_i\}| \leq \frac{1}{m(k)+p(k)}p(k) \leq \frac{p(k)}{\frac{p(k)}{\varepsilon}+p(k)} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

olur. Böylece, sonsuz sayıda k için $\frac{p(k)}{m(k)} \geq \varepsilon$ ise, h.h.k için $A_k = B_k$ olmasıyla bir çelişki elde ederiz. Bu durumda (3.1) e benzer olarak

$$\sup_{x\in X}|d(x,A_k) - d(x,A)| < \varepsilon \qquad \text{(h.h.}k) \tag{3.5}$$

geçerli olur.

$$\sup_{x\in X} \Delta d_k(x) = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

olduğundan bütün k lar için

$$\sup_{x\in X}|\Delta d_k(x)| \leq \frac{K}{k}$$

olacak şekilde sabit bir K sayısı vardır. Bu nedenle

$$\sup_{x\in X}\left|d\left(x,B_{m(k)}\right) - d(x,A_k)\right| = \sup_{x\in X}\left|d\left(x,A_{m(k)}\right) - d\left(x,A_{m(k)+p(k)}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{i=m(k)}^{m(k)+p(k)-1} \sup_{x\in X}|\Delta d_i(x)| \leq \frac{p(k)K}{m(k)}$$

dır. (3.4) eşitliği yardımıyla, son ifade $k \to \infty$ iken 0 a yakınsar. Böylece, $H - limB_k = A$ olduğundan $H - limA_k = A$ olduğu sonucuna varırız.

Teorem 3.4 (X,ρ) bir metrik uzay ve $\{A_k\}$, X in boş olmayan kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer $\{A_k\}$, Wijsman istatistiksel yakınsak ise o zaman $\{A_k\}$, Kuratowski istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Sadece

$$st - lim\ supA_k \subset st - lim\ infA_k$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Sabit $x \in st - lim\, supA_k$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Wijsman istatistiksel yakınsak bir dizi aynı zamanda Wijsman istatistiksel Cauchy olduğundan h.h.k için

$$|d(x, A_k) - d(x, A_N)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde N sayısı seçilebilir ve

$$d(x, A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Burada h.h.k için

$$d(x, A_k) \leq d(x, A_N) + |d(x, A_k) - d(x, A_N)| < \varepsilon$$

elde edilir. Tanıma göre $x \in st - lim\, inf A_k$ elde ederiz ve bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teorem, tanım 3.2 ve 3.3 den elde edilir.

Teorem 3.5 (X, ρ) bir metrik uzay ve $\{A_k\}$, X in boş olmayan kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer $\{A_k\}$ Hausdorff istatistiksel yakınsak ise, o zaman $\{A_k\}$ Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Kabul edelim ki, $\{A_k\}$ dizisi Hausdorff istatistiksel yakınsak olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \sup_{x \in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

dir.

Burada her $x \in X$ için,

$$|\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \leq \left| \left\{ k \leq n : \sup_{x \in X} |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olduğu da dikkate alınırsa istenen sonuç elde edilir.

4. KUVVETLİ TOPLANABİLİR KÜME DİZİLERİ

Bu bölümde, Nuray ve Rhoades (2012) tarafından incelenen Kuratowski Cesaro toplanabilir, Wijsman Cesaro toplanabilir ve Wijsman kuvvetli Cesaro toplanabilir küme dizilerini tanıtacağız. Ayrıca Wijsman istatistiksel yakınsak ve Wijsman kuvvetli Cesaro toplanabilir küme dizileri arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

(X,ρ) bir metrik uzay olsun. X in boş olmayan A_k altkümelerinin $\{A_k\}$ dizisi için, alt Cesaro limit

$$(C,1)-lim\,inf A_k := \left\{x \in X :\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x,A_k) = 0\right\}$$

ve üst Cesaro limit

$$(C,1)-lim\,sup A_k := \left\{x \in X :\ \lim_{n\to\infty} inf\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x,A_k) = 0\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Boş olmayan herhangi $A_k \subseteq X$ altkümeleri için eğer

$$(C,1)-lim\,inf A_k = (C,1)-lim\,sup A_k = A$$

ise $\{A_k\}$ dizisi *A* kümesine *Kuratowski Cesaro toplanabilirdir* denir.

Tanım 4.2 (X,ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş kümeden farklı kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer $\big(d(x,A_k)\big)$ dizisi $d(x,A)$ ya Cesaro toplanabilir ise; yani her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x,A_k) = d(x,A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi *A* kümesine *Wijsman Cesaro toplanabilirdir* denir.

Tanım 4.3 (X, ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer $\left(d(x, A_k)\right)$ dizisi $d(x, A)$ ya kuvvetli toplanabilir ise; yani her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli Cesaro toplanabilirdir* denir.

Tanım 4.4 (X, ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer $\left(d(x, A_k)\right)$ dizisi $d(x, A)$ ya kuvvetli p-Cesaro toplanabilir ise; yani her p pozitif reel sayısı ve her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir* denir.

Teorem 4.1 (X, ρ) bir metrik uzay ve p pozitif bir reel sayı olsun. O zaman, boş olmayan kapalı herhangi $A, A_k \subseteq X$ altkümeleri için;

(a) Eğer $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-Cesaro toplanabilir ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

(b) Eğer $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsak ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir.

İspat. (a) Herhangi $\{A_k\}$ dizisi için $\varepsilon > 0$ bir sabit olsun. $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman kuvvetli p-Cesaro toplanabilir olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her p pozitif reel sayısı ve her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p = 0$$

dır.

Böylece, her $x \in X$ için sağlanan

$$\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon |\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği de dikkate alınırsa, $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsak olduğu elde edilir.

(b) $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsak olsun. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı olduğundan

$$\sup_k |d(x, A_k)| + d(x, A) = M$$

diyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin ve bütün $n > N_\varepsilon$ lar için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde bir N_ε seçelim.

$$L_n = \left\{ k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p} \right\}$$

ile gösterelim. O zaman,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \\ &\qquad = \frac{1}{n} \left(\sum_{k \in L_n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p + \sum_{\substack{k \leq n; \\ k \notin L_n}} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \right) \\ &\qquad < \frac{1}{n} \frac{n\varepsilon}{2M^p} M^p + \frac{1}{n} \frac{n\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir.

5. KUVVETLİ HEMEN HEMEN YAKINSAK KÜME DİZİLERİ

Bu bölümde, Nuray ve Rhoades (2012) tarafından incelenen küme dizileri için Wijsman hemen hemen yakınsaklık, Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsaklık ve Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanıtacağız. Ayrıca, Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsak ve Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak küme dizileri arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Kuratowski hemen hemen yakınsaklık ve Hausdorff hemen hemen yakınsaklık kavramları da benzer şekilde tanımlanabilir.

Tanım 5.1 (X,ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_{k+i}) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman hemen hemen yakınsaktır* denir.

Tanım 5.2 (X,ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ için i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsaktır* denir.

L_∞, C, F ve $[F]$ sırasıyla, bütün sınırlı, Wijsman yakınsak, Wijsman hemen hemen yakınsak ve Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsak küme dizilerinin kümesini göstersin.

$$C \subset F \subset [F] \subset L_\infty$$

olduğu kolayca görülür.

Tanım 5.3 (X,ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $x \in X$ ve p pozitif reel sayısı için i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümeine *Wijsman kuvvetli p-hemen hemen yakınsaktır* denir.

Tanım 5.4 (X,ρ) bir metrik uzay ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsaktır* denir.

Teorem 5.1 (X,ρ) bir metrik uzay ve p pozitif bir reel sayı olsun. O zaman $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı altkümeleri için,

(a) Eğer $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-hemen hemen yakınsak ise, o zaman $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

(b) Eğer $\{A_k\}$ sınırlı bir dizi ve A kümesine Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak ise, o zaman $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-hemen hemen yakınsaktır.

İspat. (a) Herhangi $\{A_k\}$ dizisi için $\varepsilon > 0$ bir sabit olsun. $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman kuvvetli p-hemen hemen yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $x \in X$ ve p pozitif reel sayısı için i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p = 0$$

dır. Böylece, her $x \in X$ için i ye göre düzgün olarak sağlanan

$$\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon |\{k \leq n : |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği de dikkate alınırsa, $\{A_k\}$ dizisinin A kümesine Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğu elde edilir.

(b) $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve A kümesine Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsak olsun. $\{A_k\}$ dizisi sınırlı olduğundan i ye göre düzgün olarak

$$\sup_k |d(x, A_{k+i})| + d(x, A) = M$$

diyebiliriz.

$\varepsilon > 0$ verilsin ve bütün $n > N_\varepsilon$ lar için i ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n:\ |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde bir N_ε seçelim.

$$L_n = \left\{k \leq n:\ |d(x, A_{k+i}) - d(x, A)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p}\right\}$$

ile gösterelim. O zaman i ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k\in L_n}|d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p + \sum_{\substack{k\leq n;\\ k\notin L_n}}|d(x, A_{k+i}) - d(x, A)|^p\right)$$

$$< \frac{1}{n}\frac{n\varepsilon}{2M^p}M^p + \frac{1}{n}\frac{n\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Böylece, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-hemen hemen yakınsaktır.

6. KÜME DİZİLERİNİN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, Ulusu ve Nuray (2013) tarafından incelenen küme dizilerinin Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklığı kavramını tanıtıp, bu kavram ile küme dizilerinin Wijsman istatistiksel yakınsaklığı kavramı arasındaki ilişkileri vereceğiz.

Tanım 6.1 (X,ρ) bir metrik uzay, $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $A, A_k \subseteq X$ boş olmayan kapalı herhangi altkümeler olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve her $x\in X$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r :\ |d(x,A_k)-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durumda $S_\theta-\lim_W A_k=A$ veya $A_k\to A(WS_\theta)$ yazılır.

Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin oluşturduğu kümeyi $\{WS_\theta\}$ ile göstereceğiz.

Örnek 6.1 $X=\mathbb{R}$ alalım ve $\{A_k\}$ dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$A_k:=\begin{cases}\{x\in\mathbb{R}: 2\leq x\leq k_r-k_{r-1}\} & , \quad k\geq 2 \ \ ve\ \ k\ \ bir\ kare\ tamsayı\ ise,\\ \{1\} & , \quad diğer\ durumlarda.\end{cases}$$

Burada,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r :\ |d(x,A_k)-d(x,\{1\})|\geq\varepsilon\}\right|=\lim_{r\to\infty}\frac{\sqrt{k_r-k_{r-1}}}{h_r}=0$$

olduğundan bu dizi $A=\{1\}$ kümesine Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 6.1 Herhangi $\theta=\{k_r\}$ lacunary dizi için, eğer $\liminf_r q_r>1$ ise o zaman,

$$st-lim_W A_k=A \ \ \Rightarrow\ \ S_\theta-lim_W A_k=A$$

dır.

İspat. $\liminf_r q_r>1$ olsun. Bu durumda, yeterince büyük r için $q_r\geq 1+\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda>0$ sayısı vardır ve

$$\frac{h_r}{k_r}=\frac{k_r-k_{r-1}}{k_r}=1-\frac{1}{q_r}\geq\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylece, her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r için,

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_r}|\{k \leq k_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r}|\{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{h_r}{k_r}\left(\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}|\right) \\ &\geq \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}|\right)\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu son eşitsizlikte $r \to \infty$ iken limite geçilirse,

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}|\right) \\ &\qquad \leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{k_r}|\{k \leq k_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}|\end{aligned}$$

olur. Burada, $st - \lim_W A_k = A$ olduğu da dikkate alınırsa, bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki limit sıfıra eşit olur. O halde,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacağından $S_\theta - lim_W A_k = A$ olduğunu elde ederiz.

Teorem 6.2 Herhangi $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizi için, eğer $\limsup_r q_r < \infty$ ise o zaman,

$$S_\theta - lim_W A_k = A \Rightarrow st - lim_W A_k = A$$

dır.

İspat. Eğer $\lim \sup_r q_r < \infty$ ise o zaman bütün r ler için $q_r < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. $S_\theta - \lim_W A_k = A$ olduğunu kabul edelim. O zaman, eğer

$$U_r := |\{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}|$$

ile gösterilirse, $S_\theta - lim_W A_k = A$ olduğundan, verilen her $\varepsilon > 0$ için $r > r_0$ olduğunda

$$\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| = \frac{U_r}{h_r} < \varepsilon$$

şartını sağlayan bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Şimdi $M := max\{U_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ ile gösterelim ve t, $k_{r-1} < t \leq k_r$olacak şekilde herhangi tamsayı olsun. O halde,

$$\frac{1}{t}|\{k \leq t : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{k_{r-1}}|\{k \leq k_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|$$

$$= \frac{1}{k_{r-1}}\left\{U_1 + U_2 + \cdots + U_{r_0} + U_{r_0+1} + \cdots + U_r\right\}$$

$$\leq \frac{M}{k_{r-1}}.r_0 + \frac{1}{k_{r-1}}\left\{h_{r_0+1}\frac{U_{r_o+1}}{h_{r_0+1}} + \cdots + h_r\frac{U_r}{h_r}\right\}$$

$$\leq \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sup_{r>r_0}\frac{U_r}{h_r}\right)\left\{h_{r_0+1} + \cdots + h_r\right\}$$

$$\leq \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \varepsilon.\frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}}$$

$$\leq \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \varepsilon.q_r \leq \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \varepsilon.K$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Yani,

$$\frac{1}{t}|\{k \leq t : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \varepsilon.K$$

elde ederiz. Bu son eşitsizlikte limite geçilirse, $r - 1 \to \infty$ iken $t \to \infty$ olacağından,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}|\{k \leq t : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r\to\infty}\frac{r_0.M}{k_{r-1}} + \varepsilon.K \to 0$$

elde ederiz. O halde,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}|\{k \leq t : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olur. Bu ise $S - lim_W A_k = A$ olduğunu gösterir.

Teorem 6.1 ve Teorem 6.2 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.3 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer

$$1 < \lim_r \inf q_r \leq \lim_r \sup q_r < \infty$$

ise o zaman $\{WS\} = \{WS_\theta\}$ dır.

Teorem 6.4 Eğer $\{A_k\} \in \{WS\} \cap \{WS_\theta\}$ ise, o zaman

$$S_\theta - lim_W\, A_k = st - lim_W\, A_k$$

dır.

İspat. $st - \lim_W A_k = A$, $S_\theta - \lim_W A_k = B$ ve $A \neq B$ olduğunu kabul edelim. $\frac{1}{2}|d(x,A) - d(x,B)| > \varepsilon$ ve her $x \in X$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ |d(x,A_k) - d(x,B)| \geq \varepsilon\}| = 1$$

olduğunu elde ederiz.

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \ |d(x,A_k) - d(x,B)| \geq \varepsilon\}|$$

istatistiksel limit ifadesinin k_m inci terimini göz önüne alalım.

O halde, $A_k \to B(WS_\theta)$ olmasından dolayı

$$u_r = \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \ |d(x,A_k) - d(x,B)| \geq \varepsilon\}| \to 0$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k_i} |\{k \leq k_i : \ |d(x,A_k) - d(x,B)| \geq \varepsilon\}| \\
&\qquad = \frac{1}{k_i} \left| \left\{ k \in \bigcup_{r=1}^{i} I_r : \ |d(x,A_k) - d(x,B)| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
&\qquad = \frac{1}{k_i} \sum_{r=1}^{i} |\{k \in I_r : \ |d(x,A_k) - d(x,B)| \geq \varepsilon\}| \\
&\qquad = \frac{1}{\sum_{r=1}^{i} h_r} \sum_{r=1}^{i} |\{k \in I_r : \ |d(x,A_k) - d(x,B)| \geq \varepsilon\}| \\
&\qquad = \frac{1}{\sum_{r=1}^{i} h_r} \sum_{r=1}^{i} h_r\, u_r \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olduğundan (6.1) ifadesi u nun regüler ağırlıklı ortalama dönüşümüdür ve bundan dolayı (6.1) ifadesi de $i \to \infty$ iken sıfıra yakınsar. Ayrıca bu,

$$\left\{\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : \ |d(x, A_k) - d(x, B)| \geq \varepsilon\}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$$

dizisinin bir alt dizisi olduğundan

$$\lim_{n} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : \ |d(x, A_k) - d(x, B)| \geq \varepsilon\}\right| \neq 1$$

sonucuna ulaşırız. Bu çelişki ise, $A \neq B$ olamayacağını yani $A = B$ olduğunu gösterir.

KAYNAKLAR

Aubin, J.-P. and Frankowska, H. (1990). Set-Valued Analysis. Birkhauser, Boston, USA.

Balcı, M. (1999). Analiz-I, Balcı Yayınları, Ankara.

Baronti, M. and Papini, P. (1986). Convergence of sequences of sets. In: Methods of Functional Analysis in Approximation Theory, ISNM 76, Birkhauser, Basel, 133-155.

Başar, F. (2011). Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, e-books, Monographs, İstanbul.

Bayraktar, M. (2000). Fonksiyonel Analiz. Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Beer, G. (1985). On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **31**: 421-432.

Beer, G. (1987). Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets. *Bulletin of the Australian Mathematical Society,* **35**: 81-96.

Beer, G. (1994). Wijsman Convergence: A survey. *Set-Valued and Variational Analysis*, **2**: 77-94.

Beer, G. (1994). Wijsman convergence of convex sets under renorming. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **22**: 207-216.

Beer, G. (2002). On the compactness theorem for sequences of closed sets. *Mathematica Balkanica*, **16**: 327-338.

Buck, R.C. (1953). Generalized asymptotic density. *American Journal of Mathematics,* **75**: 335-46.

Burachik, R. S. and Iusem, A. N. (2007). Set-Valued Mapping and Enlargements of Monoton Operators, Springer.

Borwein, J. M. and Vanderwerk, J. (1994). Dual Kadec-Klee norms and the relationships between Wijsman, slice and Mosco convergence. *Michigan Mathematical Journal*, **41**: 371-387.

Connor, J. S. (1998). The statistical and strong *p*-Cesaro convergence of sequences. *Analysis*, **8**: 46-63.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, **2**: 241–244.

Ferrera, J. (1988). Convergence of polinomial level sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, **350**(12): 4757-4773.

Freedman, A.R., Sember J.J. and Raphael, M. (1978). Some Cesaro type summability spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **37**: 508-520.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5**(4): 301-313.

Fridy, J. A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics*, **160**: 43-51.

Fridy, J. A. and Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**(12): 3625-3631.

Hausdorff, F. (1914). Grundzugeder Mengenlehre, Verlag von Veit, Leipzig, Preprinted by Chelsea, New York.

Kuratowski, C. (1966). Topology, Vol. I, Academic Press, New York.

Lorentz, G. G. (1948). A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Mathematica*, **80**: 167-190.

Maddox, I. J. (1978). A new type of convergence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **83**: 61-64.

Maddox, I. J. (1979). On strongly almost convergence. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **85**: 345-350.

Miller, H. I. (1995). A measure theoretical subsequence charecterization of statistical convergence. *Transactions of the American Mathematical Society*, **347**(5): 1811-1819.

Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H. L. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons, Inc., Fifth edition, New York.

Nuray, F. and Rhoades, B. E. (2012). Statistical convergence of sequences of sets. *Fasciculi Mathematici*, **49**: 87–99.

Powel, R. E. and Shah, S. M. (1972). Summability Theory and Its Applications. Van Nostrand-Rheinhold, London.

Schoenberg I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *American Mathematical Monthly*, **66**(5): 362-375.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C. (1993). Set Convergences. An Attempt of Classification. *Transactions of the American Mathematical Society*, **340**(1): 199-226.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C. (1994). Convergences for sequences of sets and linear mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **188**: 616-640.

Ulusu, U. and Nuray, F. (2012). Lacunary statistical convergence of sequence of sets. *Progress in Applied Mathematics*, **4**(2): 99-109.

Wijsman, R.A. (1964). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **70**: 186–188.

Wijsman, R.A. (1966). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **123**: 32–45.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ali Rıza BAKİ
Doğum Yeri ve Tarihi	: İzmir / 06.02.1983
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	: alibaki83@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Eşme Ahmet Avcı Anadolu Öğretmen Lisesi (2001)
Lisans	: Cumhuriyet Üniversitesi (2007)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Çorum-Bayat Lisesi (2008-2009)

Siirt-Milli Egemenlik Lisesi (2009-2011)

Kırşehir-Fatma Muzaffer Mermer Kız Meslek Lisesi (2011-2012)

Muğla-Milas Cumhuriyet Anadolu Lisesi (2012-2015)

Muğla-Milas Anadolu İmam Hatip Lisesi (2015- …)